Método Simplex

Casos especiais

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos
Universidade do Estado de Santa Catarina

UDESC

Casos especiais

1. Degeneração;
2. Múltiplas (ou infinitas) soluções ótimas;
3. Sistema ilimitado (ou soluções ilimitadas);
4. Sistema inviável (ou soluções inviáveis/inexistentes).

Casos especiais

... e sua interpretação prática

1. Degeneração;
   - Ao menos uma das restrições é redundante.
2. Múltiplas (ou infinitas) soluções ótimas;
3. Sistema ilimitado (ou soluções ilimitadas);
4. Sistema inviável (ou soluções inviáveis/inexistentes).

Casos especiais

... e sua interpretação prática

1. Degeneração;
   - Ao menos uma das restrições é redundante.
2. Múltiplas (ou infinitas) soluções ótimas;
   - A função objetivo é paralela a uma das restrições;
   - É possível escolher entre as múltiplas soluções ótimas sem impacto na função objetivo.
     - Ex: no mix de produtos, é melhor produzir um número maior de produtos diferentes.
3. Sistema ilimitado (ou soluções ilimitadas);
4. Sistema inviável (ou soluções inviáveis/inexistentes).

Casos especiais

... e sua interpretação prática

1. Degeneração;
   - Ao menos uma das restrições é redundante.
2. Múltiplas (ou infinitas) soluções ótimas;
   - A função objetivo é paralela a uma das restrições;
   - É possível escolher entre as múltiplas soluções ótimas sem impacto na função objetivo.
     - Ex: no mix de produtos, é melhor produzir um número maior de produtos diferentes.
3. Sistema ilimitado (ou soluções ilimitadas);
   - Erro na construção do modelo: falta restrição.
4. Sistema inviável (ou soluções inviáveis/inexistentes).

Casos especiais

... e sua interpretação prática

1. Degeneração;
   - Ao menos uma das restrições é redundante.
2. Múltiplas (ou infinitas) soluções ótimas;
   - A função objetivo é paralela a uma das restrições;
   - É possível escolher entre as múltiplas soluções ótimas sem impacto na função objetivo.
     - Ex: no mix de produtos, é melhor produzir um número maior de produtos diferentes.
3. Sistema ilimitado (ou soluções ilimitadas);
   - Erro na construção do modelo: falta restrição.
4. Sistema inviável (ou soluções inviáveis/inexistentes).
   - Erro na construção do modelo: há restrições inconsistentes.

Degeneração

Situação:

- Há ao menos uma restrição redundante.

Detecção:

- Ocorre empate na razão mínima ao determinar a variável sainte;
  - Neste caso, escolhe uma delas arbitrariamente.
- Na iteração seguinte, ao menos uma variável básica será 0;
- Essa nova solução é chamada de **solução degenerada**.

Degeneração

Exemplo

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-3	-9	0	0	0
s_1	1	4	1	0	8
s_2	1	2	0	1	4

maximiza $z = 3x_1 + 9x_2$

sujeito a $x_1 + 4x_2 \leq 8$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

Degeneração

Exemplo

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-3	-9	0	0	0
s_1	1	4	1	0	8
s_2	1	2	0	1	4

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & z = 3x_1 + 9x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Variável entrante é x_2. Analisando as razões mínimas em relação a essa variável:

- Linha s_1: $8/4 = 2$;
- Linha s_2: $4/2 = 2$;
- Ou seja, uma delas é redundante.

Degeneração

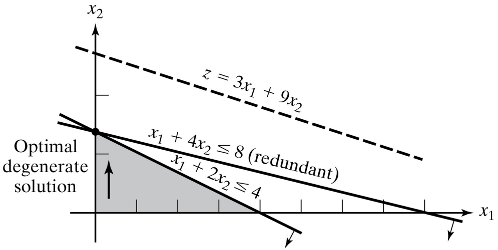
Exemplo

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-3	-9	0	0	0
s_1	1	4	1	0	8
s_2	1	2	0	1	4

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 3x_1 + 9x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_1 + 4x_2 \leq 8 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Variável entrante é x_2. Analisando as razões mínimas em relação a essa variável:

- Linha s_1: $8/4 = 2$;
- Linha s_2: $4/2 = 2$;
- Ou seja, uma delas é redundante.



Degeneração

Exemplo

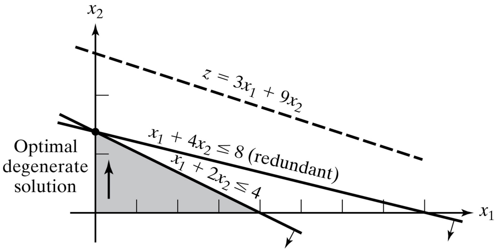
Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-3	-9	0	0	0
s_1	1	4	1	0	8
s_2	1	2	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	$-3/4$	0	$9/4$	0	18
x_2	$1/4$	1	$1/4$	0	2
s_2	$1/2$	0	$-1/2$	1	0

Solução degenerada

Na nova solução:

- Variável básica $s_2 = 0$;
- Logo, a solução é degenerada.



Degeneração

Exemplo

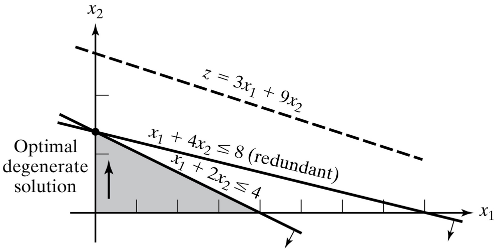
Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-3	-9	0	0	0
s_1	1	4	1	0	8
s_2	1	2	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	$-3/4$	0	$9/4$	0	18
x_2	$1/4$	1	$1/4$	0	2
s_2	$1/2$	0	$-1/2$	1	0

Solução degenerada

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	0	0	$3/2$	$3/2$	18
x_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	2
x_1	1	0	-1	2	0

Solução ótima degenerada



Degeneração

Exemplo

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-3	-9	0	0	0
s_1	1	4	1	0	8
s_2	1	2	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	$-3/4$	0	$9/4$	0	18
x_2	$1/4$	1	$1/4$	0	2
s_2	$1/2$	0	$-1/2$	1	0

Solução degenerada

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	0	0	$3/2$	$3/2$	18
x_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	2
x_1	1	0	-1	2	0

Solução ótima degenerada

A nova solução:

- É ótima;
- Segue sendo degenerada ($x_1 = 0$);
- Possui o mesmo valor de $z = 18$.

Múltiplas soluções ótimas

Situação:

- A função objetivo assume seu melhor valor em mais de um ponto de solução (geralmente em infinitas soluções).

Detecção:

- Variável não básica tem coeficiente 0 na linha z (função objetivo) da tabela simplex.

Múltiplas soluções ótimas

Exemplo

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-2	-4	0	0	0
s_1	1	2	1	0	5
s_2	1	1	0	1	4

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 2x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Múltiplas soluções ótimas

Exemplo

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-2	-4	0	0	0
s_1	1	2	1	0	5
s_2	1	1	0	1	4

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 2x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Para calcular a solução básica adjacente:

- Variável entrante: x_2;
- Variável sainte: s_1, com razão mínima $5/2$.

Múltiplas soluções ótimas

Exemplo

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-2	-4	0	0	0
s_1	1	2	1	0	5
s_2	1	1	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	0	0	2	0	10
x_2	$1/2$	1	$1/2$	0	$5/2$
s_2	$1/2$	0	$-1/2$	1	$3/2$

Solução ótima

A solução é ótima, no entanto:

- A variável não básica x_1 tem coeficiente 0 na linha z;
- Isso significa que aumentar seu valor não produz alteração da função objetivo z;
- Logo, há (pelo menos) outra solução ótima!

Múltiplas soluções ótimas

Exemplo

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-2	-4	0	0	0
s_1	1	2	1	0	5
s_2	1	1	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	0	0	2	0	10
x_2	$1/2$	1	$1/2$	0	$5/2$
s_2	$1/2$	0	$-1/2$	1	$3/2$

Solução ótima

Calculamos uma nova iteração:

- Variável entrante: x_1;
- Variável sainte: s_2, com razão mínima $3/2 \cdot 2/1 = 3$.

Múltiplas soluções ótimas

Exemplo

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-2	-4	0	0	0
s_1	1	2	1	0	5
s_2	1	1	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	0	0	2	0	10
x_2	$1/2$	1	$1/2$	0	$5/2$
s_2	$1/2$	0	$-1/2$	1	$3/2$

Solução ótima

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	0	0	2	0	10
x_2	0	1	1	-1	1
x_1	1	0	-1	2	3

Solução ótima alternativa

Múltiplas soluções ótimas

Exemplo

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-2	-4	0	0	0
s_1	1	2	1	0	5
s_2	1	1	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	0	0	2	0	10
x_2	$1/2$	1	$1/2$	0	$5/2$
s_2	$1/2$	0	$-1/2$	1	$3/2$

Solução ótima

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	0	0	2	0	10
x_2	0	1	1	-1	1
x_1	1	0	-1	2	3

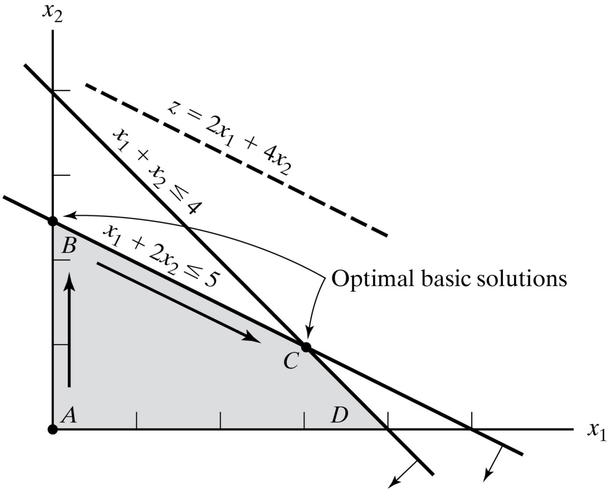
Solução ótima alternativa

Soluções ótimas:

- $x_1 = 0; x_2 = 5/2; z = 10;$
- $x_1 = 3; x_2 = 1; z = 10.$

Múltiplas soluções ótimas

Exemplo



Múltiplas soluções ótimas

Exemplo

Soluções ótimas identificadas:

- $x_1 = 0; x_2 = 5/2; z = 10$ (solução B);
- $x_1 = 3; x_2 = 1; z = 10$ (solução C).

Múltiplas soluções ótimas

Exemplo

Soluções ótimas identificadas:

- $x_1 = 0; x_2 = 5/2; z = 10$ (solução B);
- $x_1 = 3; x_2 = 1; z = 10$ (solução C).

Qualquer solução ótima pode ser determinada pela combinação linear das soluções acima. Seja $\alpha \in [0, 1]$ o peso da combinação linear,

$$\hat{x}_1 = \alpha \cdot x_1^B + (1 - \alpha) \cdot x_1^C$$
$$\hat{x}_2 = \alpha \cdot x_2^B + (1 - \alpha) \cdot x_2^C$$

Múltiplas soluções ótimas

Exemplo

Soluções ótimas identificadas:

- $x_1 = 0; x_2 = 5/2; z = 10$ (solução B);
- $x_1 = 3; x_2 = 1; z = 10$ (solução C).

Qualquer solução ótima pode ser determinada pela combinação linear das soluções acima. Seja $\alpha \in [0, 1]$ o peso da combinação linear,

$$\hat{x}_1 = \alpha \cdot x_1^B + (1 - \alpha) \cdot x_1^C$$
$$\hat{x}_2 = \alpha \cdot x_2^B + (1 - \alpha) \cdot x_2^C$$

Exemplo: seja $\alpha = 0{,}3$,

$$\hat{x}_1 = 0{,}3 \cdot 0 + 0{,}7 \cdot 3 = 2{,}1$$
$$\hat{x}_2 = 0{,}3 \cdot 5/2 + 0{,}7 \cdot 1 = 1{,}45$$

Sistema ilimitado

Situação:

- Pode-se aumentar indefinidamente o valor de (pelo menos) uma variável, melhorando (i.e. diminuindo ou aumentando) indefinidamente o valor da função objetivo.

Detecção:

- Os valores na coluna de uma variável não básica são todos não positivos (i.e. ≤ 0).
  - Ou seja, pode-se aumentar o valor da variável até o infinito sem violar nenhuma restrição.

Sistema ilimitado

Exemplo

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & x_1 - x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-2	-1	0	0	0
s_1	1	-1	1	0	10
s_2	2	0	0	1	40

Sistema ilimitado

Exemplo

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & x_1 - x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-2	-1	0	0	0
s_1	1	-1	1	0	10
s_2	2	0	0	1	40

As restrições não limitam o crescimento de x_2.

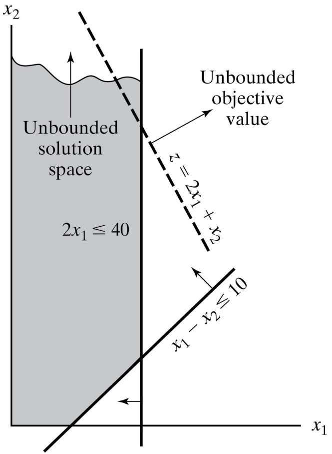
- Razões 10/-1 e 40/0;
- Podemos aumentar seu valor até ∞.

Sistema ilimitado

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 2x_1 + x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_1 - x_2 \leq 10 \\
& 2x_1 \leq 40 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-2	-1	0	0	0
s_1	1	-1	1	0	10
s_2	2	0	0	1	40



Sistema inviável

Situação:

- Não há nenhuma solução viável (i.e. que não viole nenhuma restrição).

Detecção:

- Só pode acontecer se há restrições do tipo $=$ e/ou $\geq$;
- Neste caso, introduzimos variáveis artificiais;
- Ocorre quanto alguma variável artificial é positiva na iteração ótima.

Sistema inviável

Exemplo

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R	Sol.
z	-303	-402	0	100	0	-1200
s_1	2	1	1	0	0	2
R	3	4	0	-1	1	12

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\
& 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Sistema inviável

Exemplo

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R	Sol.
z	-303	-402	0	100	0	-1200
s_1	2	1	1	0	0	2
R	3	4	0	-1	1	12

$$
\begin{array}{rl}
\textbf{maximiza} & z = 3x_1 + 2x_2 \\
\textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Pelo método M-grande:

- Introduzimos uma variável artificial R para a segunda restrição;
- Penalizamos a função objetivo com o valor dessa variável multiplicada por $M = -100$;
- Ajustamos a linha z na tabela simplex inicial.

Sistema inviável

Exemplo

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R	Sol.
z	-303	-402	0	100	0	-1200
s_1	2	1	1	0	0	2
R	3	4	0	-1	1	12

$$
\begin{array}{rl}
\textbf{maximiza} & z = 3x_1 + 2x_2 \\
\textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Pelo método M-grande:

- Introduzimos uma variável artificial R para a segunda restrição;
- Penalizamos a função objetivo com o valor dessa variável multiplicada por $M = -100$;
- Ajustamos a linha z na tabela simplex inicial.

Para a próxima iteração:

- Variável entrante: x_2;
- Variável sainte: s_1, com razão $2/1$.

Sistema inviável

Exemplo

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R	Sol.
z	-303	-402	0	100	0	-1200
s_1	2	1	1	0	0	2
R	3	4	0	-1	1	12

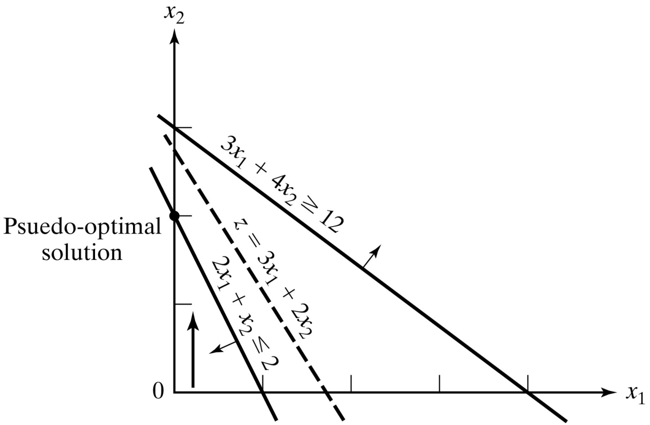
Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R	Sol.
z	501	0	402	100	0	-396
x_2	2	1	1	0	0	2
R	-5	0	-4	-1	1	4

A nova solução é ótima, no entanto:

- A variável artificial R está na base da solução;
- Ou seja, possui valor positivo $R = 4$;
- Logo, a solução obtida viola restrições e não existe solução viável para o modelo original.

Sistema inviável

Exemplo



55MQU – Métodos Quantitativos
Prof. Marcelo de Souza