

Programação Linear

Solução gráfica

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos
Universidade do Estado de Santa Catarina



Etapas

1. Determinação da **região de soluções viáveis**;
 - ▶ em um plano cartesiano, expresse cada restrição;
 - ▶ cada restrição divide o plano em uma região viável e uma região inviável;
 - ▶ a região viável do modelo é a intersecção das regiões viáveis dadas por cada restrição.
2. Determinação da **solução ótima** entre os pontos viáveis.
 - ▶ **a solução ótima estará em algum ponto nos extremos da região viável**;
 - ▶ liste os pontos extremos da região viável e calcule seus valores; ou
 - ▶ identifique a direção da reta definida pela função objetivo e o último ponto extremo da região viável atingido por ela.



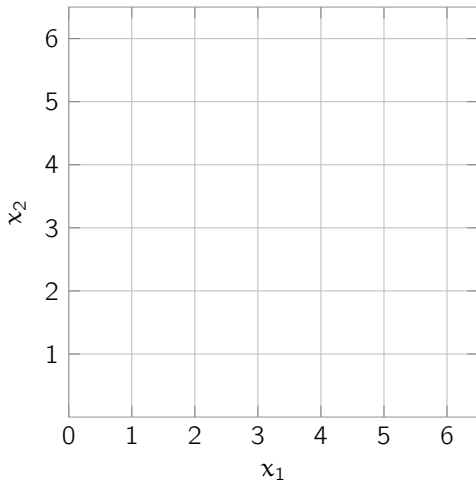
Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & z = 5x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeito a} & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico



maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$

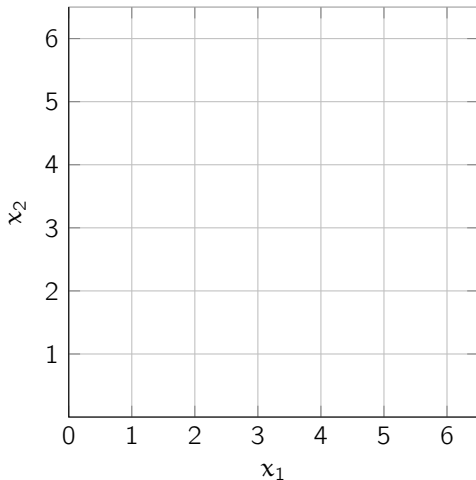
sujeito a

- $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
- $x_1 + 2x_2 \leq 6$
- $-x_1 + x_2 \leq 1$
- $x_2 \leq 2$
- $x_1, x_2 \geq 0$

Represente as variáveis x_1 e x_2 como eixos de um plano cartesiano onde o modelo será expresso graficamente.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico



$$x_1, x_2 \geq 0$$

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$

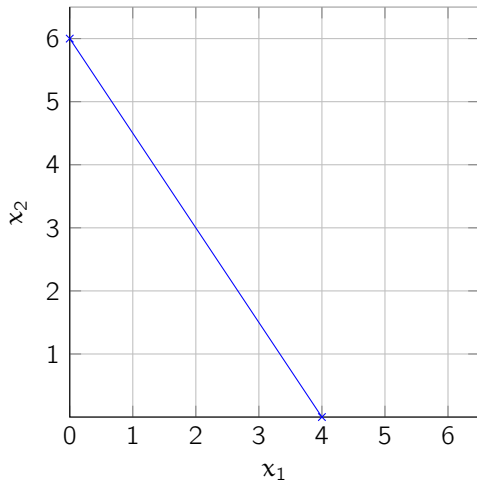
sujeito a

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Note que os eixos são limitados a $x_1, x_2 \geq 0$, respeitando as restrições de não-negatividade.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico



—	$x_1, \quad x_2 \geq 0$
—x	$6x_1 + 4x_2 \leq 24$

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$

sujeito a $6x_1 + 4x_2 \leq 24$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

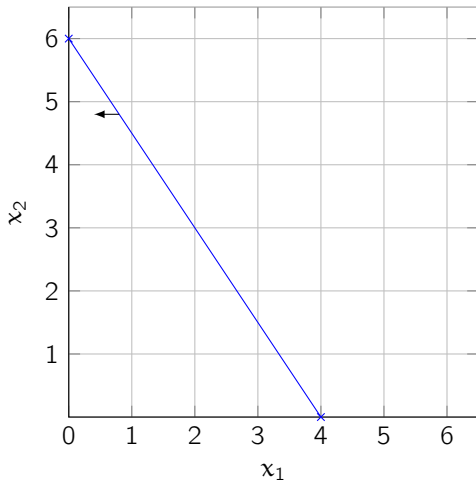
$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Agora represente a primeira restrição, transformando a inequação em uma equação e calculando dois pontos para definir a reta correspondente. Para $x_1 = 0$, $6 \cdot 0 + 4x_2 = 24$ e $x_2 = 6$, enquanto para $x_2 = 0$, $6x_1 + 4 \cdot 0 = 24$ e $x_1 = 4$.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico



—	$x_1, x_2 \geq 0$
—x	$6x_1 + 4x_2 \leq 24$

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$

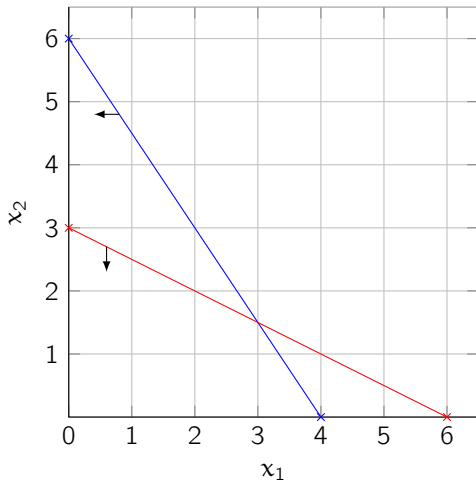
sujeito a

- $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
- $x_1 + 2x_2 \leq 6$
- $-x_1 + x_2 \leq 1$
- $x_2 \leq 2$
- $x_1, x_2 \geq 0$

Determine qual dos lados contém as soluções viáveis, identificando-o com uma seta. O ponto (0,0) satisfaz a restrição, pois $6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 \leq 24$. Logo, o lado que contém o ponto (0,0) também contém as soluções que satisfazem a primeira restrição.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico



—	$x_1, x_2 \geq 0$
—x—	$6x_1 + 4x_2 \leq 24$
—x—	$x_1 + 2x_2 \leq 6$

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$

sujeito a

- $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
- $x_1 + 2x_2 \leq 6$
- $-x_1 + x_2 \leq 1$
- $x_2 \leq 2$
- $x_1, x_2 \geq 0$

Para a segunda restrição, $0 + 2x_2 = 6$ então $x_2 = 3$, enquanto $x_1 + 2 \cdot 0 = 6$ então $x_1 = 6$. Para o ponto $(0, 0)$, a restrição é satisfeita, pois $0 + 2 \cdot 0 = 0 \leq 6$. Portanto, a região de soluções viáveis em função da segunda restrição está abaixo da reta correspondente.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico



—	$x_1, x_2 \geq 0$
—x	$6x_1 + 4x_2 \leq 24$
—x	$x_1 + 2x_2 \leq 6$
—x	$-x_1 + x_2 \leq 1$

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$

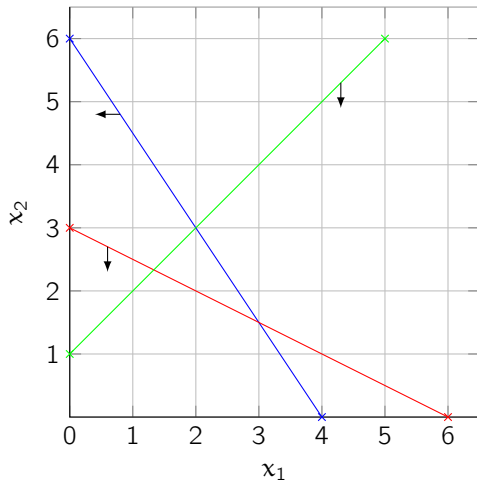
sujeito a

- $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
- $x_1 + 2x_2 \leq 6$
- $-x_1 + x_2 \leq 1$
- $x_2 \leq 2$
- $x_1, x_2 \geq 0$

Para a terceira restrição, $-0 + x_2 = 1$ então $x_2 = 1$, enquanto $-x_1 + 0 = 1$ então $x_1 = -1$. O segmento de reta entre os pontos usados possui valores negativos para x_1 , o que não impede a determinação da reta. Para facilitar, pode-se usar um novo ponto com $x_2 = 6$, obtendo $-x_1 + 6 = 1$ e $x_1 = 5$.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico



—	$x_1, x_2 \geq 0$
—x	$6x_1 + 4x_2 \leq 24$
—x	$x_1 + 2x_2 \leq 6$
—x	$-x_1 + x_2 \leq 1$

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$

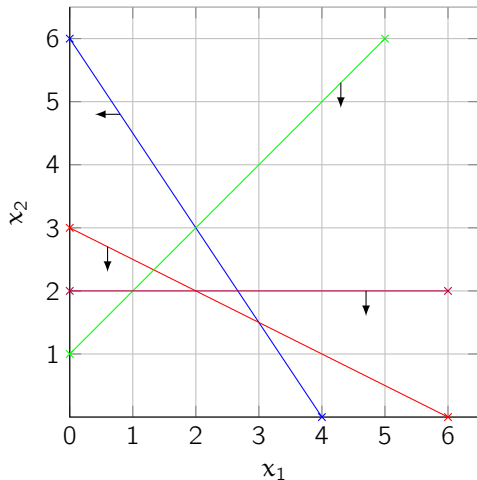
sujeito a

- $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
- $x_1 + 2x_2 \leq 6$
- $-x_1 + x_2 \leq 1$
- $x_2 \leq 2$
- $x_1, x_2 \geq 0$

O ponto (0,0) satisfaz a terceira restrição, pois $-0 + 0 \leq 1$. Logo, a região que contém o ponto (0,0) apresenta as soluções viáveis em relação à terceira restrição.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico



—	$x_1, x_2 \geq 0$
—x	$6x_1 + 4x_2 \leq 24$
—x	$x_1 + 2x_2 \leq 6$
—x	$-x_1 + x_2 \leq 1$
—x	$x_2 \leq 2$

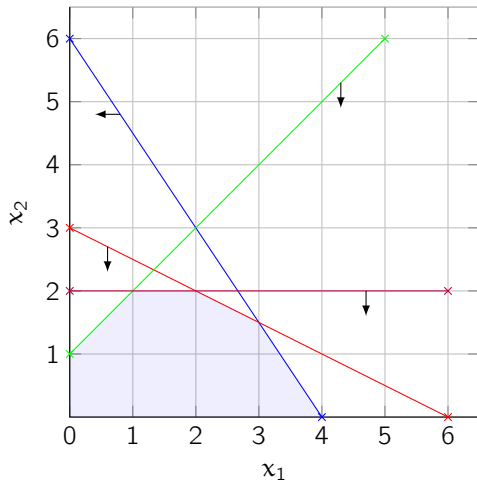
maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$

sujeito a $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
 $x_1 + 2x_2 \leq 6$
 $-x_1 + x_2 \leq 1$
 $x_2 \leq 2$
 $x_1, x_2 \geq 0$

Como a quarta restrição é constante em x_2 , basta representar a reta horizontal em $x_2 = 2$ e verificar que a região abaixo da reta contém as soluções viáveis, pois o ponto $(0, 0)$ ali contido satisfaz a restrição, uma vez que $x_2 = 0$ e $0 \leq 2$.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico



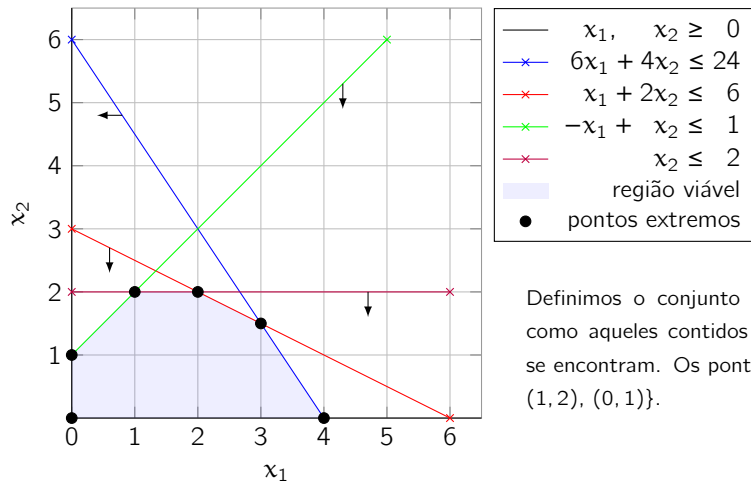
—	$x_1, x_2 \geq 0$
—x	$6x_1 + 4x_2 \leq 24$
—x	$x_1 + 2x_2 \leq 6$
—x	$-x_1 + x_2 \leq 1$
—x	$x_2 \leq 2$
■	região viável

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$
sujeito a $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
 $x_1 + 2x_2 \leq 6$
 $-x_1 + x_2 \leq 1$
 $x_2 \leq 2$
 $x_1, x_2 \geq 0$

Representadas todas as restrições, definimos a região de soluções viáveis do modelo como a região onde todas as restrições são satisfeitas, i.e. a intersecção das regiões viáveis de cada restrição.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico



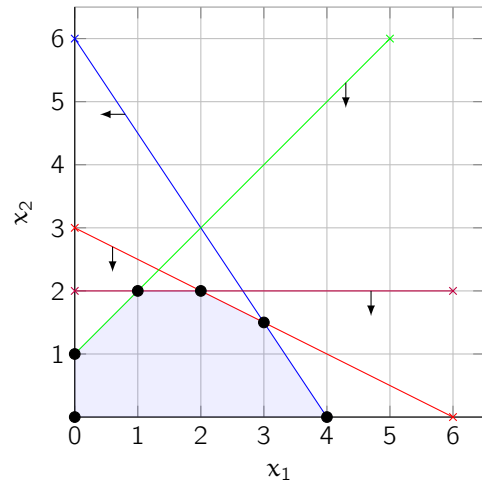
maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$

sujeito a $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
 $x_1 + 2x_2 \leq 6$
 $-x_1 + x_2 \leq 1$
 $x_2 \leq 2$
 $x_1, x_2 \geq 0$

Definimos o conjunto de pontos extremos da região viável como aqueles contidos na região viável e onde as restrições se encontram. Os pontos são: $\{(0, 0), (4, 0), (3, 1.5), (2, 2), (1, 2), (0, 1)\}$.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico



—	$x_1, x_2 \geq 0$
—x	$6x_1 + 4x_2 \leq 24$
—x	$x_1 + 2x_2 \leq 6$
—x	$-x_1 + x_2 \leq 1$
—x	$x_2 \leq 2$
■	região viável
●	pontos extremos

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$
sujeito a $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
 $x_1 + 2x_2 \leq 6$
 $-x_1 + x_2 \leq 1$
 $x_2 \leq 2$
 $x_1, x_2 \geq 0$

Ao calcular o valor da solução em cada ponto, temos que $(0,0) \rightarrow 0$; $(4,0) \rightarrow 20$; $(3,1,5) \rightarrow 21$; $(2,2) \rightarrow 18$, $(1,2) \rightarrow 13$; $(0,1) \rightarrow 4$. Logo, a solução ótima é $x_1 = 3$ e $x_2 = 1,5$, com valor $z = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1,5 = 21$.



Exemplo I

Determinar os valores de x_1 e x_2 de pontos extremos

Quando não é possível identificar os valores das variáveis de um ponto extremo visualmente, identifique as restrições r_1 e r_2 que definem esse ponto e calcule os valores das variáveis no ponto de intersecção em que $r_1 = r_2$.



Exemplo I

Determinar os valores de x_1 e x_2 de pontos extremos

Quando não é possível identificar os valores das variáveis de um ponto extremo visualmente, identifique as restrições r_1 e r_2 que definem esse ponto e calcule os valores das variáveis no ponto de intersecção em que $r_1 = r_2$.

Exemplo: dadas as restrições $6x_1 + 4x_2 = 24$ e $x_1 + 2x_2 = 6$, o ponto de intersecção é

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 24 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 24 \\ -2x_1 - 4x_2 = -12 \end{cases}$$

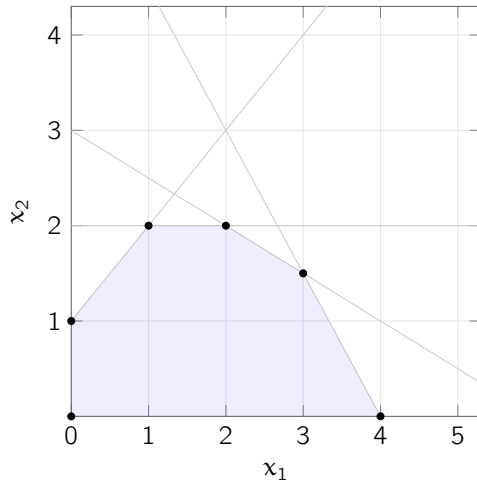
Com isso, $4x_1 = 12$ e $x_1 = 3$. Substituindo x_1 em alguma das equações temos que $x_2 = 1,5$. Logo, o ponto onde as referidas restrições se encontram é $(3, 1,5)$.

Exemplo I

Identificar a solução ótima sem avaliar todos os pontos extremos

Uma alternativa para identificar a solução ótima a partir da região viável é:

1. traçar a reta da função objetivo para diferentes valores de z (*conjuntos de nível*);
2. identificar a direção de crescimento (max.) ou decrescimento (min.) da função objetivo;
3. determinar o último ponto da região viável que a função “toca” → solução ótima.



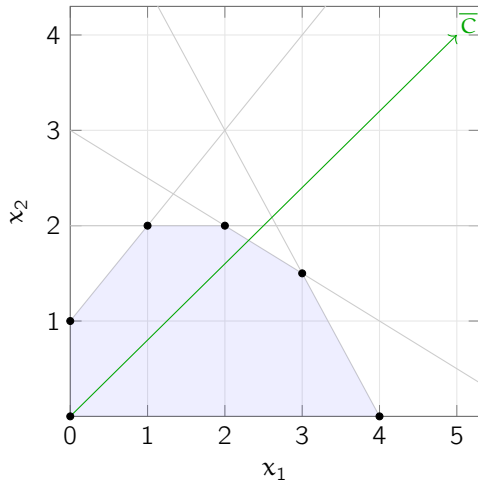
Exemplo I

Identificar a solução ótima sem avaliar todos os pontos extremos

Uma alternativa para identificar a solução ótima a partir da região viável é:

1. traçar a reta da função objetivo para diferentes valores de z (*conjuntos de nível*);
2. identificar a direção de crescimento (max.) ou decrescimento (min.) da função objetivo;
3. determinar o último ponto da região viável que a função “toca” → solução ótima.

A inclinação da reta definida pela função objetivo ($z = 5x_1 + 4x_2$) é perpendicular ao vetor $\bar{C} = (5, 4)$, cujas coordenadas são os coeficientes da função.



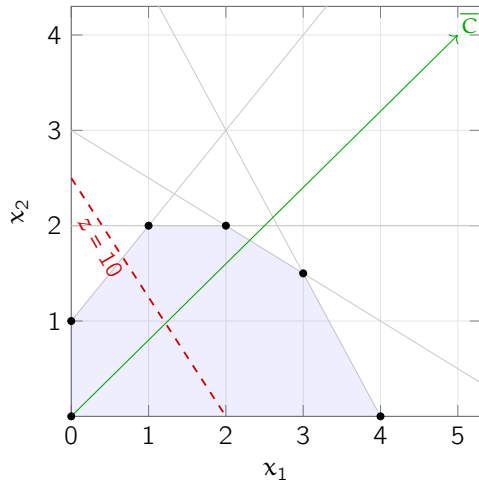
Exemplo I

Identificar a solução ótima sem avaliar todos os pontos extremos

Uma alternativa para identificar a solução ótima a partir da região viável é:

1. traçar a reta da função objetivo para diferentes valores de z (*conjuntos de nível*);
2. identificar a direção de crescimento (max.) ou decrescimento (min.) da função objetivo;
3. determinar o último ponto da região viável que a função “toca” → solução ótima.

A inclinação da reta definida pela função objetivo ($z = 5x_1 + 4x_2$) é perpendicular ao vetor $\bar{C} = (5, 4)$, cujas coordenadas são os coeficientes da função.



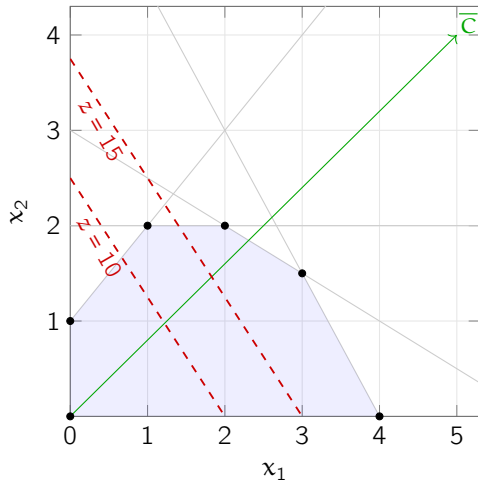
Exemplo I

Identificar a solução ótima sem avaliar todos os pontos extremos

Uma alternativa para identificar a solução ótima a partir da região viável é:

1. traçar a reta da função objetivo para diferentes valores de z (*conjuntos de nível*);
2. identificar a direção de crescimento (max.) ou decrescimento (min.) da função objetivo;
3. determinar o último ponto da região viável que a função “toca” → solução ótima.

A inclinação da reta definida pela função objetivo ($z = 5x_1 + 4x_2$) é perpendicular ao vetor $\bar{C} = (5, 4)$, cujas coordenadas são os coeficientes da função.



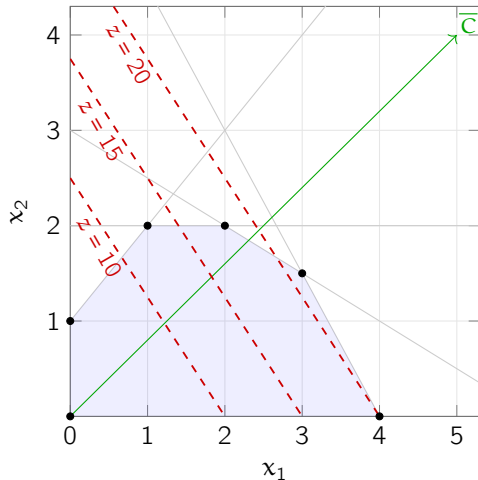
Exemplo I

Identificar a solução ótima sem avaliar todos os pontos extremos

Uma alternativa para identificar a solução ótima a partir da região viável é:

1. traçar a reta da função objetivo para diferentes valores de z (*conjuntos de nível*);
2. identificar a direção de crescimento (max.) ou decrescimento (min.) da função objetivo;
3. determinar o último ponto da região viável que a função “toca” → solução ótima.

A inclinação da reta definida pela função objetivo ($z = 5x_1 + 4x_2$) é perpendicular ao vetor $\bar{C} = (5, 4)$, cujas coordenadas são os coeficientes da função.



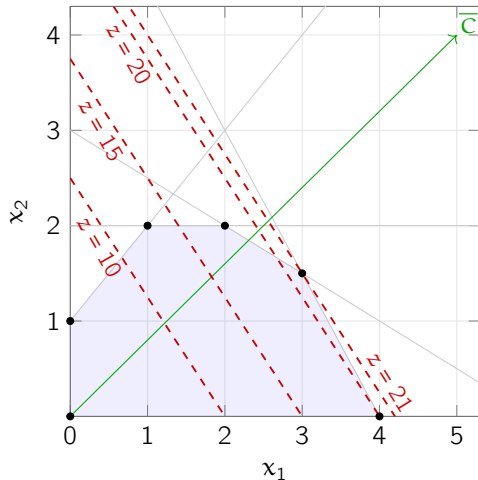
Exemplo I

Identificar a solução ótima sem avaliar todos os pontos extremos

Uma alternativa para identificar a solução ótima a partir da região viável é:

1. traçar a reta da função objetivo para diferentes valores de z (*conjuntos de nível*);
2. identificar a direção de crescimento (max.) ou decrescimento (min.) da função objetivo;
3. determinar o último ponto da região viável que a função “toca” → solução ótima.

A inclinação da reta definida pela função objetivo ($z = 5x_1 + 4x_2$) é perpendicular ao vetor $\bar{C} = (5, 4)$, cujas coordenadas são os coeficientes da função.



Ferramentas para solução via método gráfico



Programas lineares simples podem ser resolvidos via método gráfico usando a ferramenta *Linear Programming Graphic Method Calculator* da *Reshmat.ru*.

- ▶ Acesse em http://reshmat.ru/graphical_method_lpp.html.

Uma boa alternativa é a ferramenta de programação linear da *PM Calculators*.

- ▶ Acesse em <https://www.pmc calculators.com/graphical-method-calculator>.

A ferramenta Desmos também pode ser usada para visualizar o programa linear e testar modificações nas restrições e função objetivo.

- ▶ Acesse em <https://www.desmos.com/calculator>;
- ▶ Exemplo “Reddy Mikks”: <https://www.desmos.com/calculator/no8uqdkm9g>.



Considere o modelo Reddy Mikks e use as ferramentas sugeridas para responder:

1. O que acontece ao adicionar a restrição $x_1 + x_2 \geq 5$?
2. O que acontece ao remover as restrições $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ e $x_1 + 2x_2 \leq 6$?
3. O que acontece se a função objetivo for $z = 3x_1 + 2x_2$?



Considere o modelo Reddy Mikks e use as ferramentas sugeridas para responder:

1. O que acontece ao adicionar a restrição $x_1 + x_2 \geq 5$?
▶ **Não existe solução viável.**
2. O que acontece ao remover as restrições $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ e $x_1 + 2x_2 \leq 6$?
▶ **O sistema é ilimitado.**
3. O que acontece se a função objetivo for $z = 3x_1 + 2x_2$?
▶ **Existem infinitas soluções ótimas.**



Casos especiais

Considere o modelo Reddy Mikks e use as ferramentas sugeridas para responder:

1. O que acontece ao adicionar a restrição $x_1 + x_2 \geq 5$?
▶ **Não existe solução viável.**
2. O que acontece ao remover as restrições $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ e $x_1 + 2x_2 \leq 6$?
▶ **O sistema é ilimitado.**
3. O que acontece se a função objetivo for $z = 3x_1 + 2x_2$?
▶ **Existem infinitas soluções ótimas.**

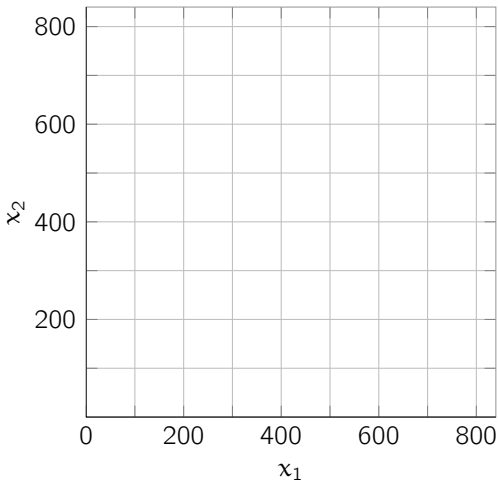
Em resumo, o programa linear pode

- a) ter uma única solução ótima;
- b) ter infinitas soluções ótimas;
- c) não ter solução ótima;
- d) ter solução ótima indefinida.



Exemplo II

Revisitando o modelo Ozark Farms – solução pelo método gráfico



— $x_1, x_2 \geq 0$

minimiza $z = 0,3x_1 + 0,9x_2$

sujeito a $x_1 + x_2 \geq 800$

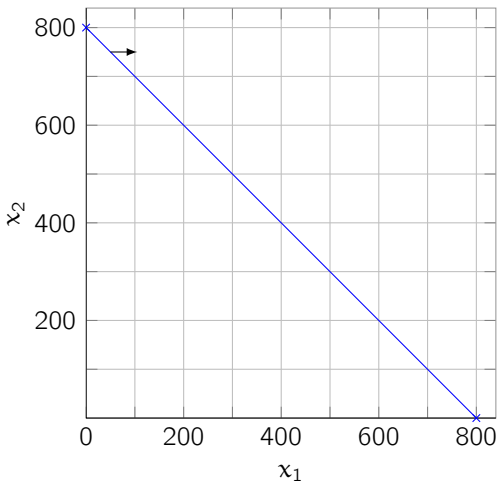
$0,21x_1 - 0,3x_2 \leq 0$

$0,03x_1 - 0,01x_2 \geq 0$

$x_1, x_2 \geq 0$

Exemplo II

Revisitando o modelo Ozark Farms – solução pelo método gráfico



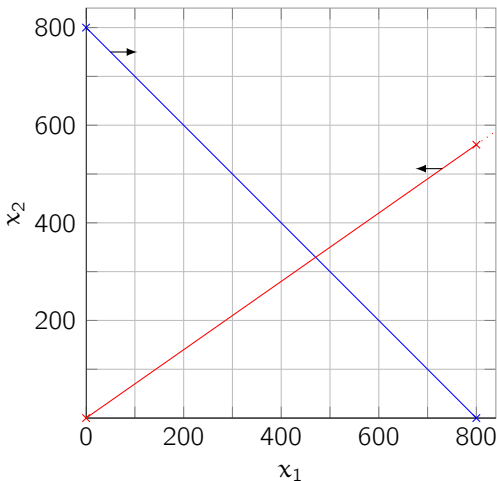
—	$x_1, x_2 \geq 0$
—x—	$x_1 + x_2 \geq 800$

minimiza $z = 0,3x_1 + 0,9x_2$
sujeito a $x_1 + x_2 \geq 800$
 $0,21x_1 - 0,3x_2 \leq 0$
 $0,03x_1 - 0,01x_2 \geq 0$
 $x_1, x_2 \geq 0$

- ▶ Pontos: (800, 0) e (0, 800)
- ▶ Área viável: direita; (0, 0) $\rightarrow 0 < 800$

Exemplo II

Revisitando o modelo Ozark Farms – solução pelo método gráfico



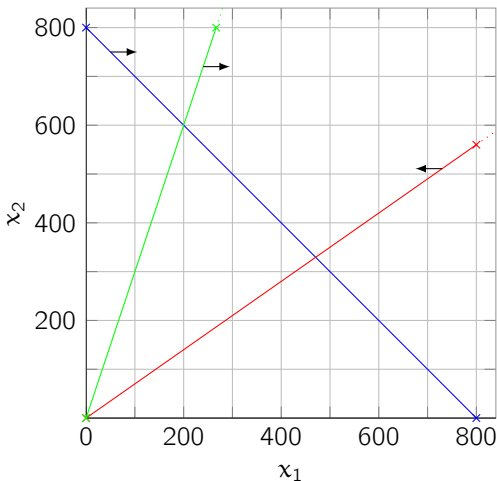
—	$x_1, x_2 \geq 0$
—x—	$x_1 + x_2 \geq 800$
—x—	$0,21x_1 - 0,3x_2 \leq 0$

minimiza $z = 0,3x_1 + 0,9x_2$
sujeito a $x_1 + x_2 \geq 800$
 $0,21x_1 - 0,3x_2 \leq 0$
 $0,03x_1 - 0,01x_2 \geq 0$
 $x_1, x_2 \geq 0$

- ▶ Pontos: (0, 0) e (800, 560)
- ▶ Área viável: esquerda; (100, 100) → $-9 \leq 0$
 - ▶ veja que o ponto (0, 0) não pode ser usado!

Exemplo II

Revisitando o modelo Ozark Farms – solução pelo método gráfico



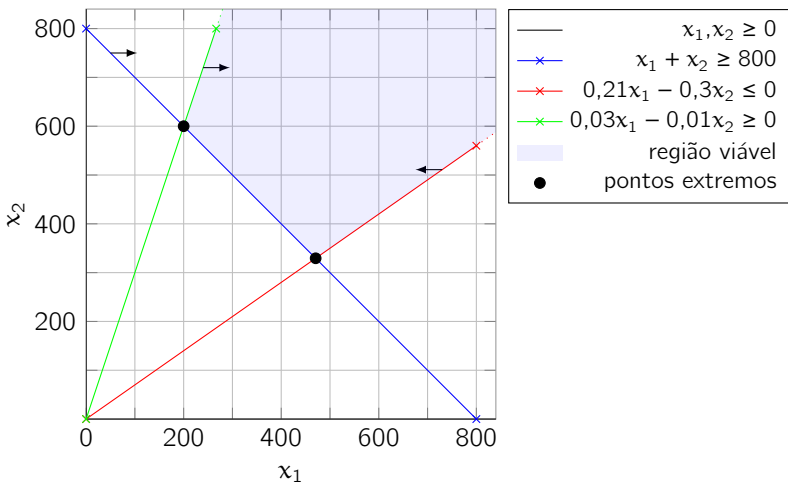
—	$x_1, x_2 \geq 0$
—x—	$x_1 + x_2 \geq 800$
—x—	$0,21x_1 - 0,3x_2 \leq 0$
—x—	$0,03x_1 - 0,01x_2 \geq 0$

minimiza $z = 0,3x_1 + 0,9x_2$
sujeito a $x_1 + x_2 \geq 800$
 $0,21x_1 - 0,3x_2 \leq 0$
 $0,03x_1 - 0,01x_2 \geq 0$
 $x_1, x_2 \geq 0$

- ▶ Pontos: (0, 0) e (266,67, 800)
- ▶ Área viável: direita; (100, 100) → 2 > 0
 - ▶ veja que o ponto (0, 0) não pode ser usado!

Exemplo II

Revisitando o modelo Ozark Farms – solução pelo método gráfico

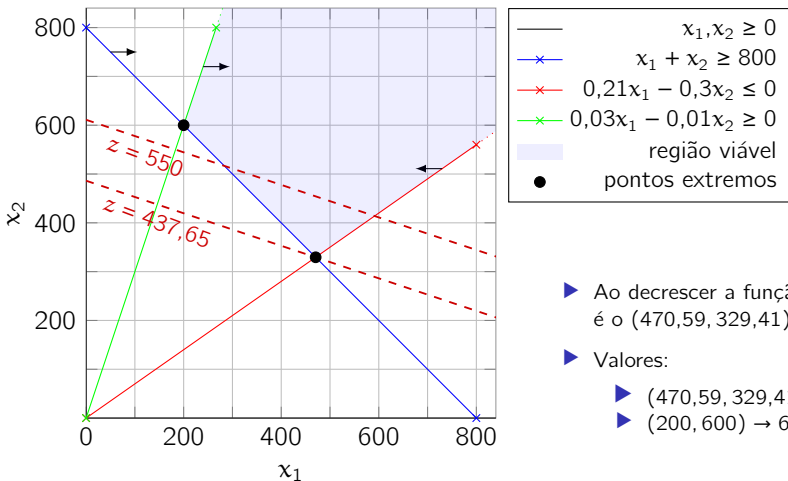


minimiza $z = 0,3x_1 + 0,9x_2$

sujeito a $x_1 + x_2 \geq 800$
 $0,21x_1 - 0,3x_2 \leq 0$
 $0,03x_1 - 0,01x_2 \geq 0$
 $x_1, x_2 \geq 0$

Exemplo II

Revisitando o modelo Ozark Farms – solução pelo método gráfico



minimiza $z = 0,3x_1 + 0,9x_2$
sujeito a $x_1 + x_2 \geq 800$
 $0,21x_1 - 0,3x_2 \leq 0$
 $0,03x_1 - 0,01x_2 \geq 0$
 $x_1, x_2 \geq 0$

- ▶ Ao decrescer a função objetivo, o último ponto visitado é o (470,59, 329,41).
- ▶ Valores:
 - ▶ (470,59, 329,41) → 437,65 (solução ótima)
 - ▶ (200, 600) → 600

55MQU – Métodos Quantitativos
Prof. Marcelo de Souza