Método Simplex

Solução inicial artificial

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos
Universidade do Estado de Santa Catarina

Solução básica inicial

Um solução básica inicial conveniente é $x_i = 0$ (para toda variável i do problema original).

- Neste caso, as variáveis de folga formam a base da solução ($s_j \neq 0$);
- Essa solução só é viável quando todas as restrições forem do tipo $\leq$;

Solução básica inicial

Um solução básica inicial conveniente é $x_i = 0$ (para toda variável i do problema original).

- Neste caso, as variáveis de folga formam a base da solução ($s_j \neq 0$);
- Essa solução só é viável quando todas as restrições forem do tipo $\leq$;

Quando há restrições $\geq$ ou $=$, recorremos a uma solução básica inicial **artificial**.

1. Introduzimos variáveis artificiais para desempenhar o papel de folgas (problema auxiliar);
2. Usamos o problema auxiliar para encontrar uma solução básica viável e resolver o problema original.

Solução básica inicial

Um solução básica inicial conveniente é $x_i = 0$ (para toda variável i do problema original).

- Neste caso, as variáveis de folga formam a base da solução ($s_j \neq 0$);
- Essa solução só é viável quando todas as restrições forem do tipo $\leq$;

Quando há restrições $\geq$ ou $=$, recorremos a uma solução básica inicial **artificial**.

1. Introduzimos variáveis artificiais para desempenhar o papel de folgas (problema auxiliar);
2. Usamos o problema auxiliar para encontrar uma solução básica viável e resolver o problema original.

Métodos:

- M-grande;
- Duas fases.

Método do M-grande

Dado um problema na forma padrão:

- Para cada equação i sem uma variável de folga, adiciona uma variável artificial R_i;
- Penaliza R_i na função objetivo com um coeficiente M ;
- M deve ser suficientemente grande para que as R_i seja descartada na solução ótima.

$$M \to \begin{cases} \infty, & \text{para minimização,} \\ -\infty, & \text{para maximização.} \end{cases}$$

Se M é suficientemente grande e o **modelo tem solução viável**, então as variáveis artificiais são descartadas e recebem valor zero na solução ótima.

Método do M-grande

Exemplo – variáveis artificiais e programa auxiliar

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & z = 4x_1 + x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + x_2 = 3 \\
& 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Método do M-grande

Exemplo – variáveis artificiais e programa auxiliar

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & z = 4x_1 + x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + x_2 = 3 \\
& 4x_1 + 3x_2 - s_1 = 6 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 4 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Método do M-grande

Exemplo – variáveis artificiais e programa auxiliar

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & z = 4x_1 + x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - s_1 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 4 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(programa original)

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + x_2 + R_1 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - s_1 + R_2 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 4 \\ & x_1, x_2, s_1, R_1, R_2, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(programa auxiliar)

- R_1 e R_2 são as variáveis artificiais introduzidas, formando o programa auxiliar;
- Uma penalização M é usada na função objetivo como coeficientes de R_1 e R_2;
  - M é positivo porque o problema é de minimização.
- **Solução básica**: $(R_1, R_2, s_2) = (3, 6, 4)$.

Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + x_2 + R_1 = 3 \\
& 4x_1 + 3x_2 - s_1 + R_2 = 6 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 4 \\
& x_1, x_2, s_1, R_1, R_2, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Para resolver o programa linear:

- Opção 1: manipular a penalidade M algebricamente nas iterações do Simplex;
- **Opção 2**: atribuir a M um valor alto suficiente para que R_i sejam descartadas.

Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	-4	-1	0	-100	-100	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + x_2 + R_1 = 3 \\
& 4x_1 + 3x_2 - s_1 + R_2 = 6 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 4 \\
& x_1, x_2, s_1, R_1, R_2, s_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Para resolver o programa linear:

- Opção 1: manipular a penalidade M algebricamente nas iterações do Simplex;
- **Opção 2**: atribuir a M um valor alto suficiente para que R_i sejam descartadas.

Como os coeficientes de x_1 e x_2 são 4 e 1, respectivamente, atribuímos 100.

- Montamos a tabela simplex com esses valores.

Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	-4	-1	0	-100	-100	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

A linha z não está consistente: o valor de z não é zero, pois R_i têm coeficientes não zero. Para corrigir:

$$\text{Nova linha } z = \text{Linha } z \text{ atual} + (M \times \text{linha } R_1 + M \times \text{linha } R_2)$$

Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	696	399	-100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Correção da linha z:

$$
\begin{array}{rll}
\text{Linha } z \text{ atual} \rightarrow & \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & -100 & -100 & 0 & 0 \end{pmatrix} + & \\
& \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times 100 + & [\text{linha } R_1 \times M] \\
& \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \times 100 & [\text{linha } R_2 \times M] \\
\hline
\text{Nova linha } z \rightarrow & \begin{pmatrix} 696 & 399 & -100 & 0 & 0 & 0 & 900 \end{pmatrix} &
\end{array}
$$

Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	696	399	-100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Procedemos com a solução do programa pelo método Simplex:

- Como trata-se de minimização, a variável entrante é a de coeficiente **mais positivo**: x_1;
- A variável sainte é R_1, pois apresenta a **menor razão não negativa** $(3/3 = 1)$;
- Prossiga com as iterações do método Simplex.

Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	696	399	-100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z							
x_1							
R_2							
s_2							

Atualização da linha pivô:

$$\text{Nova linha pivô} = \frac{\text{linha pivô atual}}{\text{elemento pivô}}$$

Atualização das demais linhas:

$$\text{Nova linha} = \text{linha atual} - \text{coeficiente na coluna pivô} \times \text{nova linha pivô}$$

Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	696	399	-100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	167	-100	-232	0	0	204
x_1	1	$1/3$	0	$1/3$	0	0	1
R_2	0	$5/3$	-1	$-4/3$	1	0	2
s_2	0	$5/3$	0	$-1/3$	0	1	3

Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	696	399	-100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	167	-100	-232	0	0	204
x_1	1	$1/3$	0	$1/3$	0	0	1
R_2	0	$5/3$	-1	$-4/3$	1	0	2
s_2	0	$5/3$	0	$-1/3$	0	1	3

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	0	0,2	-98,4	-100,2	0	3,6
x_1	1	0	$1/5$	$3/5$	$-1/5$	0	$3/5$
x_2	0	1	$-3/5$	$-4/5$	$3/5$	0	$6/5$
s_2	0	0	1	1	-1	1	1

Solução básica viável para o programa original

Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	696	399	-100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	167	-100	-232	0	0	204
x_1	1	$1/3$	0	$1/3$	0	0	1
R_2	0	$5/3$	-1	$-4/3$	1	0	2
s_2	0	$5/3$	0	$-1/3$	0	1	3

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	0	0,2	-98,4	-100,2	0	3,6
x_1	1	0	$1/5$	$3/5$	$-1/5$	0	$3/5$
x_2	0	1	$-3/5$	$-4/5$	$3/5$	0	$6/5$
s_2	0	0	1	1	-1	1	1

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	0	0	-98,6	-100	-0,2	3,4
x_1	1	0	0	$2/5$	0	$-1/5$	$2/5$
x_2	0	1	0	$-1/5$	0	$3/5$	$9/5$
s_1	0	0	1	1	-1	1	1

Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	696	399	-100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	167	-100	-232	0	0	204
x_1	1	$^1/_3$	0	$^1/_3$	0	0	1
R_2	0	$^5/_3$	-1	$^{-4}/_3$	1	0	2
s_2	0	$^5/_3$	0	$^{-1}/_3$	0	1	3

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	0	0,2	-98,4	-100,2	0	3,6
x_1	1	0	$^1/_5$	$^3/_5$	$^{-1}/_5$	0	$^3/_5$
x_2	0	1	$^{-3}/_5$	$^{-4}/_5$	$^3/_5$	0	$^6/_5$
s_2	0	0	1	1	-1	1	1

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	0	0	-98,6	-100	-0,2	3,4
x_1	1	0	0	$^2/_5$	0	$^{-1}/_5$	$^2/_5$
x_2	0	1	0	$^{-1}/_5$	0	$^3/_5$	$^9/_5$
s_1	0	0	1	1	-1	1	1

Solução ótima

Método do M-grande

Exemplo – solução inicial para o programa original

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	0	0	−98,6	−100	−0,2	3,4
x_1	1	0	0	$^2/_5$	0	$^{-1}/_5$	$^2/_5$
x_2	0	1	0	$^{-1}/_5$	0	$^3/_5$	$^9/_5$
s_1	0	0	1	1	-1	1	1

A solução ótima é:

- Variáveis não básicas: $s_2 = 0$ (bem como $R_1 = 0$ e $R_2 = 0$);
- Variáveis básicas: $x_1 = 2/5$, $x_2 = 9/5$ e $s_1 = 1$;
- Função objetivo: $z = 3{,}4$.

Método das duas fases

Fase 1: encontrar uma solução básica viável (transformando as equações de restrição originais);

Fase 2: resolver o programa original com a solução encontrada e as restrições transformadas.

Método das duas fases

Fase 1: encontrar uma solução básica viável (transformando as equações de restrição originais);

1. expressar o problema na forma de equações;
2. adicionar as variáveis artificiais (similar ao método do M-grande);
3. substituir a função objetivo pela minimização de $r = \sum R_j$, para toda variável artificial j;
4. resolver o programa auxiliar resultante.
    - se o valor mínimo de r for positivo, o programa original não tem nenhuma solução viável;
    - caso contrário, procedemos à fase 2.

Fase 2: resolver o programa original com a solução encontrada e as restrições transformadas.

Método das duas fases

Exemplo – programa auxiliar

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & z = 4x_1 + x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - s_1 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 4 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(programa original)

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & r = R_1 + R_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + x_2 + R_1 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - s_1 + R_2 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 4 \\ & x_1, x_2, s_1, R_1, R_2, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(programa auxiliar)

- A função objetivo r é minimizada, mesmo se o programa original for de maximização;
- Não há penalização das variáveis artificiais na função objetivo;
- **Solução básica**: $(R_1, R_2, s_2) = (3, 6, 4)$.

Método das duas fases

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
r	0	0	0	-1	-1	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

minimiza $r = R_1 + R_2$

sujeito a $3x_1 + x_2 + R_1 = 3$

$4x_1 + 3x_2 - s_1 + R_2 = 6$

$x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$

$x_1, x_2, s_1, R_1, R_2, s_2 \geq 0$

Para corrigir a inconsistência da linha r (causada por variáveis não nulas na função objetivo):

$$\text{Nova linha } r = \text{Linha } r \text{ atual} + (1 \times \text{linha } R_1 + 1 \times \text{linha } R_2)$$

(note que 1 é o coeficiente de R_1 e R_2 na função objetivo)

Método das duas fases

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
r	7	4	-1	0	0	0	9
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Correção da linha r:

$$
\begin{array}{rcll}
\text{Linha } r \text{ atual} \rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + & & \\
& \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times 1 + & & [\text{linha } R_1 \times 1] \\
& \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \times 1 & & [\text{linha } R_2 \times 1] \\
\hline
\text{Nova linha } r \rightarrow & \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} & &
\end{array}
$$

Método das duas fases

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
r	7	4	-1	0	0	0	9
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
r	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	1	0	$1/5$	$3/5$	$-1/5$	0	$3/5$
x_2	0	1	$-3/5$	$-4/5$	$3/5$	0	$6/5$
s_2	0	0	1	1	-1	1	1

Solução ótima para o programa auxiliar

Resolvendo pelo método Simplex, chegamos à solução ótima do programa auxiliar:

- Variáveis não básicas: $s_1 = 0$, $R_1 = 0$ e $R_2 = 0$;
- Solução ótima: $x_1 = 3/5$, $x_2 = 6/5$, $s_2 = 1$;
- Função objetivo: $r = 0$.

Método das duas fases

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
r	7	4	-1	0	0	0	9
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
r	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	1	0	$1/5$	$3/5$	$-1/5$	0	$3/5$
x_2	0	1	$-3/5$	$-4/5$	$3/5$	0	$6/5$
s_2	0	0	1	1	-1	1	1

Solução ótima para o programa auxiliar

Resolvendo pelo método Simplex, chegamos à solução ótima do programa auxiliar:

- Variáveis não básicas: $s_1 = 0$, $R_1 = 0$ e $R_2 = 0$;
- Solução ótima: $x_1 = 3/5$, $x_2 = 6/5$, $s_2 = 1$;
- Função objetivo: $r = 0$.

Como a solução ótima tem $r = 0$, a fase 1 produz uma solução básica viável. Com isso, temos:

- Uma solução básica inicial para resolver o programa original;
- Restrições do programa original ajustadas para que a solução seja viável.

Método das duas fases

Exemplo – solução do programa auxiliar

minimiza $z = 4x_1 + x_2$

sujeito a $x_1 + {}^1/_5 \cdot s_1 = {}^3/_5$

$x_2 - {}^3/_5 \cdot s_1 = {}^6/_5$

$s_1 + s_2 = 1$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
r	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	1	0	$^1/_5$	$^3/_5$	$^{-1}/_5$	0	$^3/_5$
x_2	0	1	$^{-3}/_5$	$^{-4}/_5$	$^3/_5$	0	$^6/_5$
s_2	0	0	1	1	-1	1	1

Ajustamos o programa original com os coeficientes da solução ótima do programa auxiliar.

- A função objetivo é a mesma do programa original;
- As variáveis artificiais são eliminadas;
- As restrições são dadas pelas linhas da tabela da solução ótima do programa auxiliar.

Método das duas fases

Exemplo – solução do programa auxiliar

minimiza $z = 4x_1 + x_2$

sujeito a $x_1 + {}^1/_5 \cdot s_1 = {}^3/_5$

$x_2 - {}^3/_5 \cdot s_1 = {}^6/_5$

$s_1 + s_2 = 1$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-4	-1	0	0	0
x_1	1	0	$^1/_5$	0	$^3/_5$
x_2	0	1	$^{-3}/_5$	0	$^6/_5$
s_2	0	0	1	1	1

A tabela associada ao programa original ajustado (acima) possui somente as variáveis não artificiais.

- Como as variáveis x_1 e x_2 da função objetivo são não nulas, a linha z precisa ser ajustada.

$$\text{Nova linha } z = \text{Linha } z \text{ atual} + (4 \times \text{linha } x_1 + 1 \times \text{linha } x_2)$$

Método das duas fases

Exemplo – solução do programa auxiliar

minimiza $z = 4x_1 + x_2$

sujeito a $x_1 + {}^1/_5 \cdot s_1 = {}^3/_5$

$x_2 - {}^3/_5 \cdot s_1 = {}^6/_5$

$s_1 + s_2 = 1$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	0	0	${}^1/_5$	0	${}^{18}/_5$
x_1	1	0	${}^1/_5$	0	${}^3/_5$
x_2	0	1	-${}^3/_5$	0	${}^6/_5$
s_2	0	0	1	1	1

Com a tabela corrigida, use o método Simplex para encontrar a solução ótima do programa original.

- Solução ótima: $x_1 = 2/5$, $x_2 = 9/5$ e $s_1 = 1$ ($s_2 = 0$);
- Função objetivo: $z = 3{,}4$.

55MQU – Métodos Quantitativos
Prof. Marcelo de Souza