Lista de exercícios

1 Fundamentos

Exercício 1.1
Assista ao vídeo "*Anything you can do I can do better*" (Marco Lübbecke) em https://youtu.be/Dc38La-Xvog.

Exercício 1.2
Assista ao vídeo "*What's your problem?*" (Túlio Toffolo) em https://youtu.be/ZBA0xKUBvG0.

2 Modelagem Matemática

Exercício 2.1 (Incluindo restrições no Reddy Mikks)
Construa, para o modelo Reddy Mikks (estudado em sala de aula), cada uma das seguintes restrições e as expresse com o lado esquerdo linear e com o lado direito constante:

(a) A demanda diária de tinta para interiores ultrapassa a de tinta para exteriores por no mínimo 1.

(b) A utilização diária da matéria-prima *M2* em toneladas é de no máximo 6 e de no mínimo 3.

(c) A demanda de tinta para interiores não pode ser menor do que a demanda de tinta para exteriores.

(d) A quantidade mínima a ser produzida de ambas as tintas, para interiores e para exteriores, é 3 t.

(e) A proporção de tinta para interiores em relação à produção total de ambas as tintas, para interiores e exteriores, não deve ultrapassar 0,5 t.

Exercício 2.2 (Avaliando soluções para o Reddy Mikks)
Determine a melhor solução viável entre as seguintes soluções (viáveis e inviáveis) do modelo Reddy Mikks:

(a) $x_1 = 1,\ x_2 = 4$

(b) $x_1 = 2,\ x_2 = 2$

(c) $x_1 = 3,\ x_2 = 1{,}5$

(d) $x_1 = 2,\ x_2 = 1$

(e) $x_1 = 2,\ x_2 = -1$

Exercício 2.3 (Calculando sobras no Reddy Mikks)
Para a solução viável $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ do modelo Reddy Mikks, determine as quantidades não utilizadas das matérias-primas *M1* e *M2*.

Exercício 2.4 (Concedendo desconto no Reddy Mikks)
Suponha que a Reddy Mikks venda sua tinta para exteriores a um único varejista com um desconto por quantidade. O lucro por tonelada é \$ 5000 se o contratante comprar não mais do que 2 t diárias e, caso contrário, é \$ 4500. Expresse a função objetivo matematicamente. A função resultante é linear?

Exercício 2.5 (Os processos de produção)
Uma empresa que funciona dez horas por dia fabrica dois produtos, os quais passam por três processos de produção. Cada processo é executado em um dia. Logo, cada lote da produção fica pronto em três dias. A tabela abaixo resume os dados do problema.

	Minutos por unidade			
Produto	Processo 1	Processo 2	Processo 3	Lucro por unidade ($)
1	10	6	8	2
2	5	20	10	3

Modele esse cenário como um problema de otimização linear, com o objetivo de determinar o mix ótimo de produtos para cada três dias de produção.

Exercício 2.6 (FacFactory)
A FacFactory fabrica dois produtos, A e B. O volume de vendas de A é de no mínimo 80% do total de vendas de ambos (A e B). Contudo, a empresa não pode vender mais do que 100 unidades de A por dia. Ambos os produtos usam uma matéria-prima cuja disponibilidade máxima diária é 240 kg. As taxas de utilização da matéria-prima são 2 kg por unidade de A e 4 kg por unidade de B. Os lucros unitários para A e B são $ 20 e $ 50, respectivamente. Construa um programa linear para modelar esse problema e determinar o mix de produto ótimo para a empresa.

Exercício 2.7 (O investidor)
Um indivíduo quer investir $ 5.000 no próximo ano em dois tipos de investimento: o investimento A rende 5% e o investimento B rende 8%. Pesquisas de mercado recomendam ua alocação de no mínimo 25% em A e no máximo 50% em B. Além do mais, o investimento em A deve ser no mínimo a metade do investimento em B. Construa o programa linear para calcular o melhor plano de investimento.

Exercício 2.8 (Ozark Community College)
A Divisão de Educação Continuada (DEC) da Ozark Community College oferece um total de 30 cursos a cada semestre. Os cursos oferecidos são, geralmente, de dois tipos: práticos, como de marcenaria, edição de textos e manutenção de carros; e na área de Humanas, como história, música, belas-artes. Para satisfazer as demandas da comunidade, devem ser oferecidos no mínimo dez cursos de cada tipo a cada semestre. A DEC estima que as receitas geradas pelos cursos práticos e da área de Humanas sejam de aproximadamente $ 1.500 e $ 1.000 por curso, respectivamente. Elabore um programa linear para o cenário apresentado, com o objetivo de maximizar o lucro da instituição.

Exercício 2.9 (Jack na Ulern)
Jack pretende entrar na Ulern University e já percebeu que "só trabalho e nenhuma diversão faz do Jack um bobalhão". O resultado é que ele quer partilhar seu tempo disponível de aproximadamente dez horas por dia entre estudo e diversão. Ele estima que se divertir é duas vezes mais interessante do que estudar e, além disso, ele quer estudar pelo menos o mesmo tempo que dedica à diversão. Contudo, Jack percebeu que, se quiser realizar todas as suas tarefas escolares, não pode se divertir mais do que 4 horas por dia. Como ele deve alocar seu tempo para maximizar seu prazer em termos de estudar e se divertir?

Exercício 2.10 (Show & Sell)
A Show & Sell pode anunciar seus produtos na rádio local e na televisão. A verba de propaganda é limitada a $ 10.000 por mês. Cada minuto de propaganda pelo rádio custa $ 15 e cada minuto de comerciais na TV custa $ 300. A Show & Sell gosta de anunciar pelo rádio no mínimo duas vezes mais do que na TV. Ao mesmo tempo, não é prático usar mais do que 400 minutos por mês de propaganda pelo rádio. Por experiência anterior, a empresa estima que anunciar na TV é 25 vezes mais eficiente

do que anunciar no rádio. Elabore um programa linear para determinar a alocação ótima da verba de propaganda entre rádio e TV.

Exercício 2.11 (Os empregos de John)
John deve trabalhar no mínimo 20 horas por semana para reforçar sua renda enquanto ainda está na escola. Ele tem a oportunidade de trabalhar em duas lojas de varejo. Na loja 1, pode trabalhar entre 5 e 12 horas por semana, e na loja 2, entre 6 e 10 horas. Ambas pagam o mesmo salário por hora. Para decidir quanto trabalhará em cada loja, John quer basear sua decisão no estresse causado pelo trabalho. Com base em conversas com os atuais empregados, John estima que, em uma escala ascendente de 1 a 10, os fatores de estresse são 8 e 6 nas lojas 1 e 2, respectivamente. Como o estresse aumenta com o tempo, ele considera que o estresse total para cada loja no final da semana seja proporcional ao número de horas que ele trabalhar na loja. Construa um programa linear para decidir quantas horas John deve trabalhar em cada loja.

Exercício 2.12 (OilCo)
A OilCo está construindo uma refinaria para fabricar quatro produtos: óleo diesel, gasolina, lubrificantes e combustível para jatos. A demanda mínima (em barris/dia) para cada um desses produtos é 14.000, 30.000, 10.000 e 8.000, respectivamente. A OilCo tem contratos de fornecimento de óleo cru pelo Irã e Dubai. Por causa das cotas de produção especificadas pela Organização dos Países Exportadores de Petróleo (Opep), a nova refinaria pode receber no mínimo 40% de seu óleo cru do Irã e a quantidade restante de Dubai. A OilCo prevê que a demanda e as cotas de óleo cru permanecerão estáveis nos próximos dez anos.

As especificações dos dois óleos crus resultam em duas misturas de produtos diferentes: um barril de óleo cru do Irã rende 0,2 barril de diesel, 0,25 barril de gasolina, 0,1 barril de lubrificante e 0,15 barril de combustíveis para jatos; os rendimentos correspondentes do óleo cru de Dubai são 0,1, 0,6, 0,15 e 0,1, respectivamente. A OilCo precisa determinar a capacidade mínima da refinaria (em barris/dia). Elabore o programa linear correspondente.

Exercício 2.13 (Day Trader)
A Day Trader quer investir uma quantia de dinheiro para gerar um rendimento anual de no mínimo $ 10.000. Há dois grupos de ações disponíveis: as de primeira linha e as de alta tecnologia, cujos rendimentos médios anuais são 10% e 25%, respectivamente. Embora as ações de empresas de alta tecnologia apresentem um rendimento médio mais alto, são mais arriscadas, e a Trader quer limitar a quantia investida nessas ações a não mais do que 60% do investimento total. Construa um programa linear para determinar a quantidade mínima que a Trader deve investir em cada grupo de ações para cumprir a meta de rendimento do investimento.

Exercício 2.14 (Sucatas)
Uma central industrial de reciclagem usa dois tipos de sucata de alumínio, A e B, para produzir uma liga especial. A sucata A contém 6% de alumínio, 3% de silício e 4% de carbono. A sucata B tem 3% de alumínio, 6% de silício e 3% de carbono. Os custos por tonelada das sucatas A e B são $ 100 e $ 80, respectivamente. As especificações da liga especial requerem que 1) o teor de alumínio deva ser no mínimo 3% e no máximo 6%; 2) o teor de silício deva ficar entre 3% e 5%; e 3) o teor de carbono deva ficar entre 3% e 7%. Formule esse cenário como um problema de otimização linear para determinar o mix ótimo (i.e. de menor custo) de sucatas que deve ser usado para produzir 1.000 toneladas da liga.

Exercício 2.15 (Produção de rádios)
Uma linha de montagem que consiste em três estações consecutivas produz dois modelos de rádio: HiFi-1 e HiFi-2. A tabela abaixo dá os tempos de montagem para as três estações de trabalho.

	Minutos por unidade	
Estações de trabalho	HiFi-1	HiFi-2
1	6	4
2	5	5
3	4	6

A manutenção diária para as estações 1, 2 e 3 consome 10%, 14% e 12%, respectivamente, de um máximo de 480 minutos disponíveis para cada estação por dia. Elabore um programa linear para determinar o mix ótimo de produtos que minimizará o tempo ocioso (ou não utilizado) nas três estações de trabalho.

3 Método Gráfico

Exercício 3.1 (Aplicação do método gráfico)
Resolva os modelos construídos nos exercícios anteriores usando o método gráfico. Em particular, encontre a solução ótima e o valor correspondente da função objetivo para os modelos dos exercícios:

- *Os processos de produção*;
- *FacFactory*;
- *O investidor*;
- *Ozark Community College*;
- *Jack na Ulern*;
- *Show & Sell*;
- *Os empregos de John*;
- *OilCo*;
- *Day Trader*;
- *Sucatas*;
- *Produção de rádios*.

4 Método simplex

Exercício 4.1 (Bases do simplex)
Considere o seguinte problema de PL:

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

(a) Expresse o problema na forma padrão.

(b) Determine todas as soluções básicas do problema e classifique-as como viáveis e não viáveis.

(c) Use substituição direta na função objetivo para determinar a solução básica viável ótima.

(d) Verifique graficamente que a solução obtida em (c) é a solução ótima do problema de PL.

(e) Mostre como as soluções básicas não viáveis são representadas graficamente na região de soluções.

Exercício 4.2 (Otimização por enumeração de soluções básicas)
Determine a solução ótima para os problemas de PL abaixo, enumerando todas as soluções básicas.

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 \leq 2 \\
& -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Exercício 4.3 (Demonstrar que as soluções são não viáveis)
Mostre que todas as soluções básicas do seguinte problema de PL são não viáveis.

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = x_1 + x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 16 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Exercício 4.4 (Selecionar a variável sainte errada)
Considere a tabela simplex abaixo para um problema de maximização. Na próxima iteração, a variável x_1 entra na base (pois apresenta o maior valor negativo), enquanto a variável s_1 sai da base (pois apresenta a menor razão não negativa). Force s_2 a sair da base em vez de s_1 e execute a próxima iteração do simplex. Perceba que a solução produzida não é viável (a variável s_1 assume um valor negativo $= -12$). Essa situação nunca ocorrerá se usarmos o critério da razão mínima não negativa para selecionar a variável sainte.

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	6	4	1	0	0	0	24
s_2	1	2	0	1	0	0	6
s_3	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	1	0	0	0	1	2

Exercício 4.5 (Simplex com várias funções objetivo)
Considere o seguinte conjunto de restrições:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\leq 40 \\
2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 8 \\
4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &\leq 10 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Resolva o problema para cada uma das seguintes funções objetivo.

(a) Maximizar $z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$.

(b) Maximizar $z = 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4$.

(c) Maximizar $z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4$.

(d) Minimizar $z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4$.

Exercício 4.6 (Programa com restrição única)
Resolva o seguinte problema *por inspeção* e justifique o método de solução em termos das soluções básicas do método simplex.

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 12x_5 \\ \textbf{sujeito a} \quad & x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 3x_5 \leq 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Exercício 4.7 (Testando variáveis entrantes)
Considere o seguinte problema de PL.

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & z = 16x_1 + 15x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 40x_1 + 31x_2 \leq 124 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Resolva o problema pelo método simplex, no qual a variável que entra na base é a variável não básica que tem o coeficiente *mais* negativo na linha z.

(b) Resolva o problema pelo método simplex, sempre selecionando a variável que entra na base como a variável não básica que tem o coeficiente *menos* negativo na linha z.

(c) Compare o número de iterações em (a) e (b). A seleção da variável que entra na base como a variável não básica que tem o coeficiente *mais* negativo na linha z resulta em um número menor de iterações? A que conclusão podemos chegar quanto à forma de seleção da variável entrante?

(d) Suponha que o sentido de otimização seja mudado para minimização multiplicando z por -1. Como essa alteração afeta as iterações no método simplex?

5 Programação Linear com Pyomo

Exercício 5.1 (Aplicações com Pyomo)
Resolva os modelos construídos nos exercícios anteriores usando o método simplex e o framework Pyomo. Em particular, resolva os modelos dos exercícios:

- *O investidor*;
- *Jack na Ulern*;
- *Day Trader*;
- *Sucatas*.

6 Simplex – solução inicial artificial

Exercício 6.1 (Solução de modelos com restrições especiais)
Resolva os modelos de programação linear abaixo usando os métodos M-grande e simplex de duas fases.

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ & 2x_1 + 2x_2 = 8 \\ & x_1 + x_2 \leq -3 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & -5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ & 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & z = 4x_1 + 8x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & z = 8x_1 + 10x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 4x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$