Programação Inteira

Modelagem matemática

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos

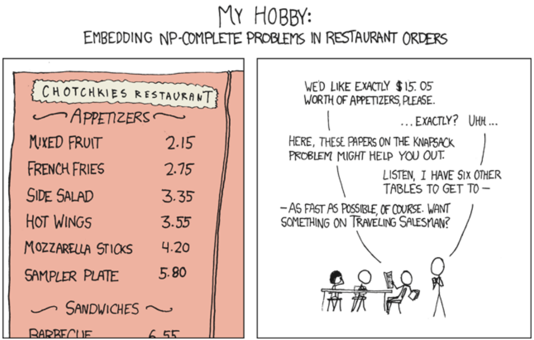
Universidade do Estado de Santa Catarina

Programação inteira

Modelagem matemática

Neste material, veremos exemplos de diversos problemas:

1. Problema da mochila ⏩ ver
2. Localização de instalações ⏩ ver
3. Problema de custo fixo ⏩ ver
4. Cobertura de vértices ⏩ ver
5. Caminhos mínimos ⏩ ver
6. Diversidade máxima ⏩ ver

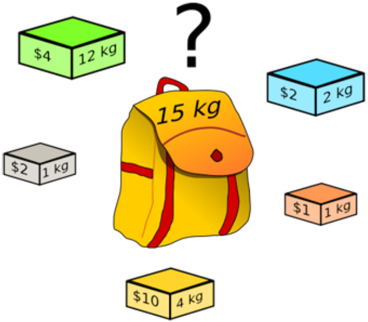


Problema da mochila

Knapsack problem

Definição

Temos uma mochila com capacidade P, e n itens com valores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e pesos $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Queremos selecionar um subconjunto dos itens a serem levados na mochila, de forma a maximizar o valor total dos itens selecionados, respeitando a capacidade da mochila.



Problema da mochila

Knapsack problem

Definição

Temos uma mochila com capacidade P, e n itens com valores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e pesos $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Queremos selecionar um subconjunto dos itens a serem levados na mochila, de forma a maximizar o valor total dos itens selecionados, respeitando a capacidade da mochila.

Exemplo

Considere uma instância do problema da mochila com $n = 4$, $P = 7$ e os itens abaixo.

i	1	2	3	4
v_i	2	3	4	3
p_i	2	4	6	1

Problema da mochila

Knapsack problem

Definição

Temos uma mochila com capacidade P, e n itens com valores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e pesos $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Queremos selecionar um subconjunto dos itens a serem levados na mochila, de forma a maximizar o valor total dos itens selecionados, respeitando a capacidade da mochila.

Exemplo

Considere uma instância do problema da mochila com $n = 4$, $P = 7$ e os itens abaixo.

i	1	2	3	4
v_i	2	3	4	3
p_i	2	4	6	1
x_i	0	0	1	1

Uma **solução** é selecionar os itens $\{3, 4\}$, com valor 7 e peso 7.

Problema da mochila

Knapsack problem

Definição

Temos uma mochila com capacidade P, e n itens com valores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e pesos $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Queremos selecionar um subconjunto dos itens a serem levados na mochila, de forma a maximizar o valor total dos itens selecionados, respeitando a capacidade da mochila.

Exemplo

Considere uma instância do problema da mochila com $n = 4$, $P = 7$ e os itens abaixo.

i	1	2	3	4
v_i	2	3	4	3
p_i	2	4	6	1
x_i	1	1	0	1

Uma **solução** é selecionar os itens $\{3, 4\}$, com valor 7 e peso 7.
Uma **solução melhor** é selecionar os itens $\{1,2,4\}$, com valor 8 e peso 7.

Problema da mochila

Knapsack problem

Definição

Temos uma mochila com capacidade P, e n itens com valores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e pesos $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Queremos selecionar um subconjunto dos itens a serem levados na mochila, de forma a maximizar o valor total dos itens selecionados, respeitando a capacidade da mochila.

Formulação

Variáveis de decisão

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{, se o item } i \text{ é selecionado,} \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Modelo matemático

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \\ \textbf{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq P \\ & x_i \in \{0, 1\}, i = \{1, 2, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Problema da mochila

Knapsack problem

E se quisermos adicionar restrições para:

1. Itens 1 e 3 **não podem** ser selecionados **juntos**?
2. Selecionar **pelo menos um** dos itens $\{2, 5, 6\}$?
3. Selecionar **no máximo três** dos itens $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?
4. Selecionar **entre 5 e 10** itens?

Problema da mochila

Knapsack problem

E se quisermos adicionar restrições para:

1. Itens 1 e 3 **não podem** ser selecionados **juntos**?
   - $x_1 + x_3 \leq 1$.
2. Selecionar **pelo menos um** dos itens $\{2, 5, 6\}$?
   - $x_2 + x_5 + x_6 \geq 1$.
3. Selecionar **no máximo três** dos itens $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?
   - $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$.
4. Selecionar **entre 5 e 10** itens?
   - $5 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 10$.

Problema da mochila

Knapsack problem

E se quisermos adicionar restrições para:

1. Itens 1 e 3 **não podem** ser selecionados **juntos**?
   - $x_1 + x_3 \leq 1$.
2. Selecionar **pelo menos um** dos itens $\{2, 5, 6\}$?
   - $x_2 + x_5 + x_6 \geq 1$.
3. Selecionar **no máximo três** dos itens $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?
   - $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$.
4. Selecionar **entre 5 e 10** itens?
   - $5 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 10$.

Seja $x, y \in \{0, 1\}$, temos:

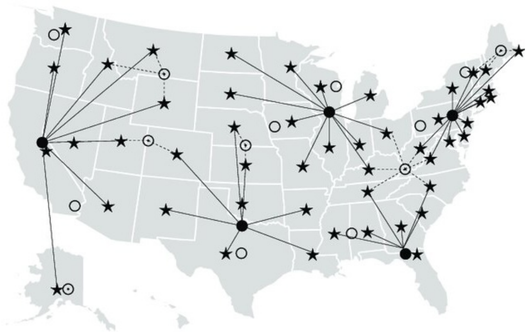
Lógica booleana	Formulação
$x \vee y$	$x + y \geq 1$
$x \wedge y$	$x + y = 2$
$x \oplus y$	$x + y = 1$
$x \rightarrow y$	$x \leq y$

Localização de instalações

Facility location

Definição

Queremos determinar o posicionamento (cidades) de até k instalações para atender a um conjunto de n clientes (cidades) com o menor custo possível. O custo de instalação na cidade $j \in [n]$ é dado por f_j, e o custo de atender a cidade $i \in [n]$ pela instalação da cidade $j \in [n]$ é dado por c_{ij}.



Localização de instalações

Facility location

Definição

Queremos determinar o posicionamento (cidades) de até k instalações para atender a um conjunto de n clientes (cidades) com o menor custo possível. O custo de instalação na cidade $j \in [n]$ é dado por f_j, e o custo de atender a cidade $i \in [n]$ pela instalação da cidade $j \in [n]$ é dado por c_{ij}.

Variáveis de decisão

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{, se a cidade } j \text{ recebe instalação,} \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, se a cidade } i \text{ é atendida pela } j\text{,} \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Modelo matemático

Localização de instalações

Facility location

Definição

Queremos determinar o posicionamento (cidades) de até k instalações para atender a um conjunto de n clientes (cidades) com o menor custo possível. O custo de instalação na cidade $j \in [n]$ é dado por f_j, e o custo de atender a cidade $i \in [n]$ pela instalação da cidade $j \in [n]$ é dado por c_{ij}.

Variáveis de decisão

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{, se a cidade } j \text{ recebe instalação,} \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, se a cidade } i \text{ é atendida pela } j\text{,} \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Modelo matemático

$$\textbf{minimiza} \quad \sum_{j \in [n]} f_j y_j + \sum_{i,j \in [n]} c_{ij} x_{ij}$$

Localização de instalações

Facility location

Definição

Queremos determinar o posicionamento (cidades) de até k instalações para atender a um conjunto de n clientes (cidades) com o menor custo possível. O custo de instalação na cidade $j \in [n]$ é dado por f_j, e o custo de atender a cidade $i \in [n]$ pela instalação da cidade $j \in [n]$ é dado por c_{ij}.

Variáveis de decisão

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{, se a cidade } j \text{ recebe instalação,} \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, se a cidade } i \text{ é atendida pela } j, \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Modelo matemático

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & \sum_{j \in [n]} f_j y_j + \sum_{i,j \in [n]} c_{ij} x_{ij} \\ \textbf{sujeito a} \quad & \sum_{j \in [n]} y_j \leq k \end{aligned}$$

Localização de instalações

Facility location

Definição

Queremos determinar o posicionamento (cidades) de até k instalações para atender a um conjunto de n clientes (cidades) com o menor custo possível. O custo de instalação na cidade $j \in [n]$ é dado por f_j, e o custo de atender a cidade $i \in [n]$ pela instalação da cidade $j \in [n]$ é dado por c_{ij}.

Variáveis de decisão

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{, se a cidade } j \text{ recebe instalação,} \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, se a cidade } i \text{ é atendida pela } j\text{,} \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Modelo matemático

$$\begin{array}{lll} \textbf{minimiza} & \sum_{j \in [n]} f_j y_j + \sum_{i,j \in [n]} c_{ij} x_{ij} & \\ \textbf{sujeito a} & \sum_{j \in [n]} y_j \leq k & \\ & \sum_{j \in [n]} x_{ij} = 1, & i \in [n] \end{array}$$

Localização de instalações

Facility location

Definição

Queremos determinar o posicionamento (cidades) de até k instalações para atender a um conjunto de n clientes (cidades) com o menor custo possível. O custo de instalação na cidade $j \in [n]$ é dado por f_j, e o custo de atender a cidade $i \in [n]$ pela instalação da cidade $j \in [n]$ é dado por c_{ij}.

Variáveis de decisão

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{, se a cidade } j \text{ recebe instalação,} \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, se a cidade } i \text{ é atendida pela } j\text{,} \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Modelo matemático

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & \sum_{j \in [n]} f_j y_j + \sum_{i,j \in [n]} c_{ij} x_{ij} \\ \textbf{sujeito a} \quad & \sum_{j \in [n]} y_j \leq k \\ & \sum_{j \in [n]} x_{ij} = 1, && i \in [n] \\ & x_{ij} \leq y_j, && i,j \in [n] \end{aligned}$$

Localização de instalações

Facility location

Definição

Queremos determinar o posicionamento (cidades) de até k instalações para atender a um conjunto de n clientes (cidades) com o menor custo possível. O custo de instalação na cidade $j \in [n]$ é dado por f_j, e o custo de atender a cidade $i \in [n]$ pela instalação da cidade $j \in [n]$ é dado por c_{ij}.

Variáveis de decisão

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{, se a cidade } j \text{ recebe instalação,} \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, se a cidade } i \text{ é atendida pela } j\text{,} \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Modelo matemático

$$\begin{array}{lll} \textbf{minimiza} & \displaystyle\sum_{j \in [n]} f_j y_j + \sum_{i,j \in [n]} c_{ij} x_{ij} & \\ \textbf{sujeito a} & \displaystyle\sum_{j \in [n]} y_j \leq k & \\ & \displaystyle\sum_{j \in [n]} x_{ij} = 1, & i \in [n] \\ & x_{ij} \leq y_j, & i,j \in [n] \\ & y_j, x_{ij} \in \{0, 1\}, & i,j \in [n] \end{array}$$

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Definição

Uma empresa fabrica camisetas, meias e calças, e dispõe de 150 h de trabalho e 160 m^2 de tecido por semana. Os dados referentes à produção são fornecidos abaixo. A empresa quer planejar sua produção semanal de modo a maximizar o lucro.

Produto	Aluguel máquina (p/ semana)	Tempo trabalho (h/unidade)	Tecido (m^2/unidade)	Preço venda ($/unidade)	Custo ($/unidade)
Camiseta	200	3	4	12	6
Meia	150	2	3	8	4
Calça	100	6	4	15	8

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Variáveis de decisão

x_1: quantidade de **camisetas** a produzir.
x_2: quantidade de **meias** a produzir.
x_3: quantidade de **calças** a produzir.
$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

Modelo matemático

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Variáveis de decisão

x_1: quantidade de **camisetas** a produzir.
x_2: quantidade de **meias** a produzir.
x_3: quantidade de **calças** a produzir.
$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

Modelo matemático

maximiza $\quad 6x_1 + 4x_2 + 7x_3$

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Variáveis de decisão

x_1: quantidade de **camisetas** a produzir.
x_2: quantidade de **meias** a produzir.
x_3: quantidade de **calças** a produzir.
$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

Modelo matemático

$$\begin{array}{rl} \textbf{maximiza} & 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ \textbf{sujeito a} & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160 \end{array}$$

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Variáveis de decisão

x_1: quantidade de **camisetas** a produzir.
x_2: quantidade de **meias** a produzir.
x_3: quantidade de **calças** a produzir.
$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

Modelo matemático

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160 \end{aligned}$$

Como incluir o **custo de aluguel das máquinas** necessárias para produção?

- Se há produção de um item, então o custo (fixo) de aluguel deve ser considerado.
- Ou seja, temos um condicional!

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Restrições do tipo big-M

$$\boxed{x \leq My}$$

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Restrições do tipo big-M

$$\boxed{x \leq My}$$

Essa restrição resulta em:

- Se $y = 0$, então x deverá ser 0.
- Se $y = 1$, então x é limitado por M.
  - Para M suficientemente grande, x é ilimitado!

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Restrições do tipo big-M

$$\boxed{x \leq My}$$

Essa restrição resulta em:

- Se $y = 0$, então x deverá ser 0.
- Se $y = 1$, então x é limitado por M.
  - Para M suficientemente grande, x é ilimitado!

Observações:

- Devemos calcular o maior valor que x pode assumir, para definir o valor de M.
- Quanto menor o valor de M (sem introduzir novas restrições), melhor!

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Variáveis de decisão

x_1: quantidade de **camisetas** a produzir.
x_2: quantidade de **meias** a produzir.
x_3: quantidade de **calças** a produzir.
$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

Modelo matemático

$$\begin{array}{rl}\textbf{maximiza} & 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ \textbf{sujeito a} & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160\end{array}$$

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Variáveis de decisão

x_1: quantidade de **camisetas** a produzir.
x_2: quantidade de **meias** a produzir.
x_3: quantidade de **calças** a produzir.
$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

y_1: produção de **camiseta** ou não.
y_2: produção de **meia** ou não.
y_3: produção de **calça** ou não.
$y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\}$

Modelo matemático

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \\
& 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160
\end{aligned}
$$

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Variáveis de decisão

x_1: quantidade de **camisetas** a produzir.
x_2: quantidade de **meias** a produzir.
x_3: quantidade de **calças** a produzir.
$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

y_1: produção de **camiseta** ou não.
y_2: produção de **meia** ou não.
y_3: produção de **calça** ou não.
$y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\}$

Modelo matemático

$$
\begin{array}{rl}
\textbf{maximiza} & 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\
 & \quad -200y_1 - 150y_2 - 100y_3 \\
\textbf{sujeito a} & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \\
 & 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160
\end{array}
$$

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Variáveis de decisão

x_1: quantidade de **camisetas** a produzir.
x_2: quantidade de **meias** a produzir.
x_3: quantidade de **calças** a produzir.
$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

y_1: produção de **camiseta** ou não.
y_2: produção de **meia** ou não.
y_3: produção de **calça** ou não.
$y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\}$

Modelo matemático

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\
& \quad -200y_1 - 150y_2 - 100y_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \\
& 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160 \\
& x_1 \leq My_1 \\
& x_2 \leq My_2 \\
& x_3 \leq My_3
\end{aligned}$$

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Variáveis de decisão

x_1: quantidade de **camisetas** a produzir.
x_2: quantidade de **meias** a produzir.
x_3: quantidade de **calças** a produzir.
$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

y_1: produção de **camiseta** ou não.
y_2: produção de **meia** ou não.
y_3: produção de **calça** ou não.
$y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\}$

Modelo matemático

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\
& \quad -200y_1 - 150y_2 - 100y_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \\
& 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160 \\
& x_1 \leq My_1 \\
& x_2 \leq My_2 \\
& x_3 \leq My_3 \\
& x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+ \\
& y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Note que:

- O modelo usa a notação M.
- A implementação usa algum valor.
  - e.g. $M = 50$.
- M pode ser diferente para cada x_i.

Modelo matemático

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\
& \quad -200y_1 - 150y_2 - 100y_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \\
& 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160 \\
& x_1 \leq My_1 \\
& x_2 \leq My_2 \\
& x_3 \leq My_3 \\
& x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+ \\
& y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Note que:

- O modelo usa a notação M.
- A implementação usa algum valor.
  - e.g. $M = 50$.
- M pode ser diferente para cada x_i.

Podemos **calcular** M para x_1:

- Para a restrição 1,
$$3x_1 \leq 150 \;\equiv\; x_1 \leq 50$$
- Para a restrição 2,
$$4x_1 \leq 160 \;\equiv\; x_1 \leq 40$$
- Logo, $M = 50$ para x_1.

Modelo matemático

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\
& \quad -200y_1 - 150y_2 - 100y_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \\
& 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160 \\
& x_1 \leq My_1 \\
& x_2 \leq My_2 \\
& x_3 \leq My_3 \\
& x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+ \\
& y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Dados

Para $i = \{1, 2, \ldots, n\}$,

- n: número de produtos,
- A_i: aluguel da máquina para produto i,
- t_i: tempo para unidade do produto i,
- m_i: tecido para unidade do produto i,
- p_i: preço de venda do produto i,
- c_i: custo de produção do produto i,
- H: tempo de trabalho semanal disponível,
- T: estoque semanal de tecido.

Variáveis de decisão

x_i: quantidade do produto i a produzir.

y_i: produção ou não do produto i.

Modelo matemático genérico

Problemas de custo fixo

Produção têxtil

Dados

Para $i = \{1, 2, \ldots, n\}$,

- n: número de produtos,
- A_i: aluguel da máquina para produto i,
- t_i: tempo para unidade do produto i,
- m_i: tecido para unidade do produto i,
- p_i: preço de venda do produto i,
- c_i: custo de produção do produto i,
- H: tempo de trabalho semanal disponível,
- T: estoque semanal de tecido.

Variáveis de decisão

x_i: quantidade do produto i a produzir.

y_i: produção ou não do produto i.

Modelo matemático genérico

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{maximiza} & \displaystyle\sum_{i\in[n]} x_i(p_i - c_i) - A_i y_i & \\
\textbf{sujeito a} & \displaystyle\sum_{i\in[n]} x_i t_i \leq H & \\
 & \displaystyle\sum_{i\in[n]} x_i m_i \leq T & \\
 & x_i \leq M y_i & , i \in [n] \\
 & x_i \in \mathbb{Z}_+ & , i \in [n] \\
 & y_i \in \{0,1\} & , i \in [n]
\end{array}
$$

Cobertura de vértices

Vertex cover

Definição

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma cobertura de (ou por) vértices é um conjunto $C \subseteq V$, tal que $u \in C$ ou $v \in C$, para toda aresta $\{u, v\} \in E$. Ou seja, o conjunto é considerado uma cobertura se toda a aresta possui ao menos uma de suas extremidades pertencentes ao conjunto. Na cobertura mínima, queremos a cobertura de menor tamanho, i.e. tal que $|C|$ seja o menor possível.

Cobertura de vértices

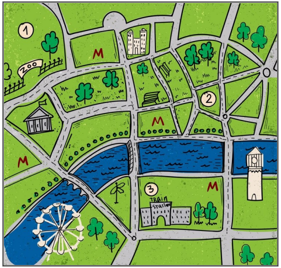
Vertex cover

Definição

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma cobertura de (ou por) vértices é um conjunto $C \subseteq V$, tal que $u \in C$ ou $v \in C$, para toda aresta $\{u, v\} \in E$. Ou seja, o conjunto é considerado uma cobertura se toda a aresta possui ao menos uma de suas extremidades pertencentes ao conjunto. Na cobertura mínima, queremos a cobertura de menor tamanho, i.e. tal que $|C|$ seja o menor possível.

Exemplo de aplicação

Instalar câmeras pelo bairro, de modo que cada rua seja monitorada por pelo menos uma delas.



Cobertura de vértices

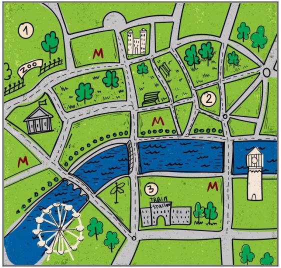
Vertex cover

Definição

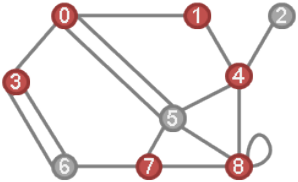
Dado um grafo $G = (V, E)$, uma cobertura de (ou por) vértices é um conjunto $C \subseteq V$, tal que $u \in C$ ou $v \in C$, para toda aresta $\{u, v\} \in E$. Ou seja, o conjunto é considerado uma cobertura se toda a aresta possui ao menos uma de suas extremidades pertencentes ao conjunto. Na cobertura mínima, queremos a cobertura de menor tamanho, i.e. tal que $|C|$ seja o menor possível.

Exemplo de aplicação

Instalar câmeras pelo bairro, de modo que cada rua seja monitorada por pelo menos uma delas.



$\rightsquigarrow$



Cobertura

Cobertura de vértices

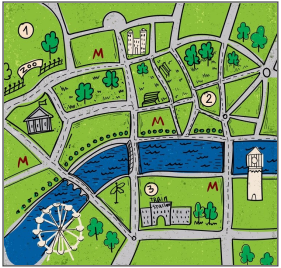
Vertex cover

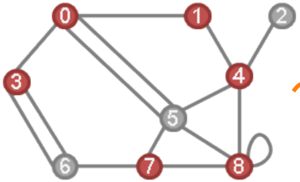
Definição

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma cobertura de (ou por) vértices é um conjunto $C \subseteq V$, tal que $u \in C$ ou $v \in C$, para toda aresta $\{u, v\} \in E$. Ou seja, o conjunto é considerado uma cobertura se toda a aresta possui ao menos uma de suas extremidades pertencentes ao conjunto. Na cobertura mínima, queremos a cobertura de menor tamanho, i.e. tal que $|C|$ seja o menor possível.

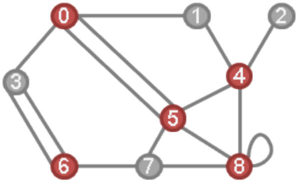
Exemplo de aplicação

Instalar câmeras pelo bairro, de modo que cada rua seja monitorada por pelo menos uma delas.





Cobertura



Cobertura mínima

Cobertura de vértices

Vertex cover

Definição

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma cobertura de (ou por) vértices é um conjunto $C \subseteq V$, tal que $u \in C$ ou $v \in C$, para toda aresta $\{u, v\} \in E$. Ou seja, o conjunto é considerado uma cobertura se toda a aresta possui ao menos uma de suas extremidades pertencentes ao conjunto. Na cobertura mínima, queremos a cobertura de menor tamanho, i.e. tal que $|C|$ seja o menor possível.

Formulação

Variáveis de decisão

$$x_v = \begin{cases} 1 & \text{, se } v \in C \text{ (está na cobertura),} \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Modelo matemático

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \textbf{sujeito a} \quad & x_u + x_v \geq 1 && , \forall \{u,v\} \in E \\ & x_v \in \{0, 1\} && , \forall v \in V \end{aligned}$$

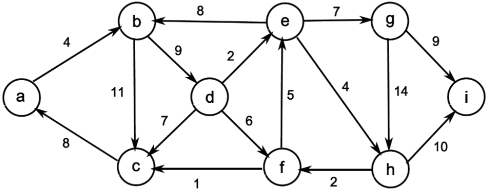
Caminhos mínimos

Shortest path

Definição

Dado um grafo dirigido e ponderado $G = (V, A)$ com pesos c_{ij} para $(i,j) \in A$, vértices $s,t \in V$ de origem e destino, respectivamente, queremos encontrar um caminho de $s \rightsquigarrow t$ de menor custo.

$\rightsquigarrow$



Caminhos mínimos

Shortest path

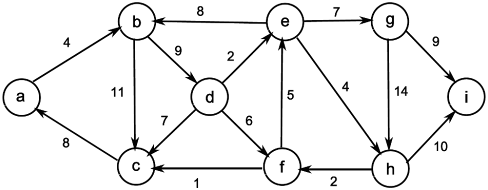
Definição

Dado um grafo dirigido e ponderado $G = (V, A)$ com pesos c_{ij} para $(i,j) \in A$, vértices $s,t \in V$ de origem e destino, respectivamente, queremos encontrar um caminho de $s \rightsquigarrow t$ de menor custo.

Fluxo em redes

Definimos uma solução como o fluxo em cada arco do grafo. Seja f_{ij} o fluxo do arco $(i,j) \in A$,

- se $f_{ij} = 1$, então há fluxo no arco e ele faz parte do caminho mínimo;
- se $f_{ij} = 0$, então o arco não faz parte do caminho mínimo.



Caminhos mínimos

Shortest path

Definição

Dado um grafo dirigido e ponderado $G = (V, A)$ com pesos c_{ij} para $(i,j) \in A$, vértices $s,t \in V$ de origem e destino, respectivamente, queremos encontrar um caminho de $s \rightsquigarrow t$ de menor custo.

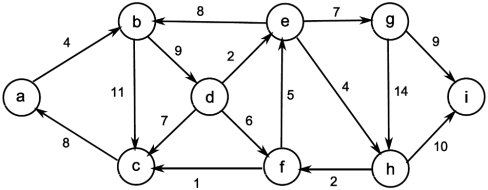
Fluxo em redes

Definimos uma solução como o fluxo em cada arco do grafo. Seja f_{ij} o fluxo do arco $(i,j) \in A$,

- se $f_{ij} = 1$, então há fluxo no arco e ele faz parte do caminho mínimo;
- se $f_{ij} = 0$, então o arco não faz parte do caminho mínimo.

Um pouco (mais) de notação:

- $N^+(i)$: sucessores de $i \in V$.
  - e.g., $N^+(e) = \{b, g, h\}$.
- $N^-(i)$: antecessores de $i \in V$.
  - e.g., $N^-(e) = \{d, f\}$.



Caminhos mínimos

Shortest path

Definição

Dado um grafo dirigido e ponderado $G = (V, A)$ com pesos c_{ij} para $(i,j) \in A$, vértices $s,t \in V$ de origem e destino, respectivamente, queremos encontrar um caminho de $s \rightsquigarrow t$ de menor custo.

Modelo matemático

$$\textbf{minimiza} \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} f_{ij}$$

$$\textbf{sujeito a} \quad \sum_{j\in N^+(i)} f_{ij} - \sum_{j\in N^-(i)} f_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{, se } i = s, \\ 0 & \text{, se } i \neq s,t, \\ -1 & \text{, se } i = t. \end{cases} \qquad , \forall i \in V$$

$$f_{ij} \in \{0,1\} \qquad , \forall (i,j) \in A$$

Diversidade máxima

Maximum diversity

Definição

Dado um conjunto de n elementos, onde d_{ij} é a diferença (ou distância) entre cada par de elementos $i, j \in [n]$, queremos selecionar exatamente $m < n$ elementos, de forma a maximizar a diferença (i.e. a diversidade) entre os elementos selecionados.

Diversidade máxima

Maximum diversity

Definição

Dado um conjunto de n elementos, onde d_{ij} é a diferença (ou distância) entre cada par de elementos $i, j \in [n]$, queremos selecionar exatamente $m < n$ elementos, de forma a maximizar a diferença (i.e. a diversidade) entre os elementos selecionados.

Exemplos de aplicações

Formação de **equipe** e escolha de **produtos** de catálogo com **características variadas**.

Diversidade máxima

Maximum diversity

Definição

Dado um conjunto de n elementos, onde d_{ij} é a diferença (ou distância) entre cada par de elementos $i, j \in [n]$, queremos selecionar exatamente $m < n$ elementos, de forma a maximizar a diferença (i.e. a diversidade) entre os elementos selecionados.

Formulação

Variáveis de decisão

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{, se o elemento } i \text{ é selecioando,} \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Modelo matemático

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} d_{ij} x_i x_j \\ \textbf{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = m \\ & x_i \in \{0, 1\} \qquad , 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

55MQU – Métodos Quantitativos
Prof. Marcelo de Souza