

Programação Linear Inteira

Conceitos básicos e relaxação linear

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos
Universidade do Estado de Santa Catarina



Programação linear

Um exemplo



$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 16 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

Programação linear

Um exemplo



$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 16 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+\end{array}$$

Programação linear: variáveis de decisão são **contínuas**.

► Bem resolvido: método simplex!

Programação linear inteira

Restrições de integralidade



$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 16 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+\end{array}$$

Programação linear inteira **pura**: variáveis de decisão são **discretas** (inteiras).

Programação linear inteira

Restrições de integralidade



$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 16 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+, \quad x_3 \in \mathbb{R}_+\end{array}$$

Programação linear inteira **mista**: variáveis de decisão são **contínuas** e **discretas** (inteiras).



Programação linear inteira

Restrições de integralidade

$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 16 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}\end{array}$$

Programação linear inteira **binária**: variáveis de decisão são **binárias** (inteiras em $[0, 1]$).



Programação linear inteira

Restrições de integralidade

$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 16 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+\end{array}$$

Programação inteira é **mais complexa!**

- ▶ Programação linear: $PL \in P$;
- ▶ Programação inteira: $PI \in NP\text{-difícil}$.



Programação linear inteira

Por que variáveis inteiras?

O uso de variáveis inteiras nos possibilita representar diferentes situações:

- ▶ Quando são necessários somente valores inteiros;
 - ▶ quantos funcionários contratar; quantas unidades produzir, . . .



Programação linear inteira

Por que variáveis inteiras?

O uso de variáveis inteiras nos possibilita representar diferentes situações:

- ▶ Quando são necessários somente valores inteiros;
 - ▶ quantos funcionários contratar; quantas unidades produzir, ...
- ▶ Escolher entre tomar uma decisão ou outra;
 - ▶ quais investimentos selecionar, quais funcionários contratar, ...



Programação linear inteira

Por que variáveis inteiras?

O uso de variáveis inteiras nos possibilita representar diferentes situações:

- ▶ Quando são necessários somente valores inteiros;
 - ▶ quantos funcionários contratar; quantas unidades produzir, ...
- ▶ Escolher entre tomar uma decisão ou outra;
 - ▶ quais investimentos selecionar, quais funcionários contratar, ...
- ▶ Modelagem de condicionais;
 - ▶ Restrição se aplica somente se um investimento de dado tipo é selecionado, ...



Programação linear inteira

Por que variáveis inteiras?

O uso de variáveis inteiras nos possibilita representar diferentes situações:

- ▶ Quando são necessários somente valores inteiros;
 - ▶ quantos funcionários contratar; quantas unidades produzir, ...
- ▶ Escolher entre tomar uma decisão ou outra;
 - ▶ quais investimentos selecionar, quais funcionários contratar, ...
- ▶ Modelagem de condicionais;
 - ▶ Restrição se aplica somente se um investimento de dado tipo é selecionado, ...
- ▶ Entre outras ...

Em resumo: **maior poder de modelagem!**

Programação linear inteira

Exemplos clássicos



Problemas em grafos

- ▶ árvore geradora mínima, emparelhamento máximo (ponderado e não ponderado), cortes mínimo e máximo, clique máximo, coloração de vértices e arestas, problema de Steiner, caixeiro viajante, roteamento de veículos, ...

Programação linear inteira

Exemplos clássicos



Problemas em grafos

- ▶ árvore geradora mínima, emparelhamento máximo (ponderado e não ponderado), cortes mínimo e máximo, clique máximo, coloração de vértices e arestas, problema de Steiner, caixeiro viajante, roteamento de veículos, ...

Problemas de fluxo

- ▶ fluxo máximo, caminho mais curto, fluxo a custo mínimo, fluxos com ganhos, multi-fluxos, ...

Programação linear inteira

Exemplos clássicos



Problemas em grafos

- ▶ árvore geradora mínima, emparelhamento máximo (ponderado e não ponderado), cortes mínimo e máximo, clique máximo, coloração de vértices e arestas, problema de Steiner, caixeiro viajante, roteamento de veículos, ...

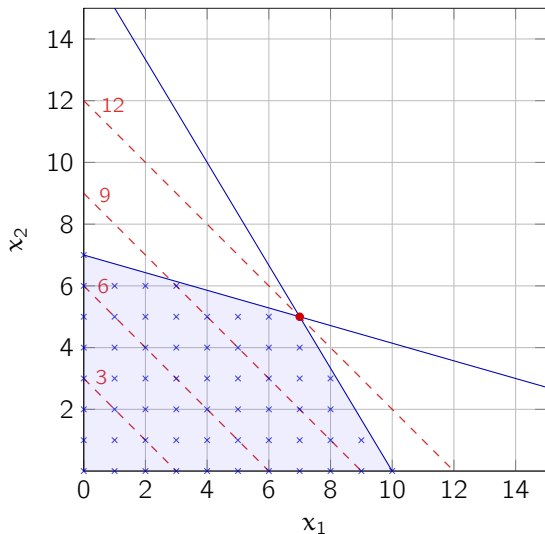
Problemas de fluxo

- ▶ fluxo máximo, caminho mais curto, fluxo a custo mínimo, fluxos com ganhos, multi-fluxos, ...

Problemas numéricos

- ▶ mochila, empacotamento uni- e multi-dimensional, lot sizing, ...

Programação linear inteira



maximiza $z = x_1 + x_2$

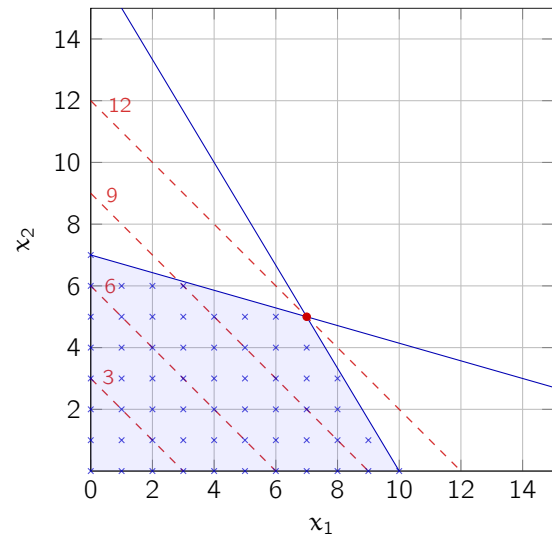
sujeito a $2x_1 + 7x_2 \leq 49$

$5x_1 + 3x_2 \leq 50$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$

Relaxação linear: ignora as restrições de integralidade e resolve o problema com otimização linear.

Programação linear inteira



maximiza $z = x_1 + x_2$

sujeito a $2x_1 + 7x_2 \leq 49$

$5x_1 + 3x_2 \leq 50$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$

Relaxação linear: ignora as restrições de integralidade e resolve o problema com otimização linear.

Neste caso, a solução ótima do programa linear é $x_1 = 7$ e $x_2 = 5$. Como as variáveis assumem valores inteiros, essa é a solução ótima para o programa inteiro.



Programação linear inteira

Relaxação

Um modelo (programa) $\mathcal{R} = \{\max f_{\mathcal{R}}(x) : x \in X_{\mathcal{R}}\}$ é considerado uma **relaxação** de um modelo $\mathcal{M} = \{\max f(x) : x \in X\}$ se e somente se:

- ▶ todas as soluções de \mathcal{M} são também soluções de \mathcal{R} , ou seja, $X \subseteq X_{\mathcal{R}}$,
- ▶ e toda solução $x \in X$ tem custo em \mathcal{R} menor ou igual ao custo em \mathcal{M} , ou seja, $f_{\mathcal{R}}(x) \geq f(x), \forall x \in X$.



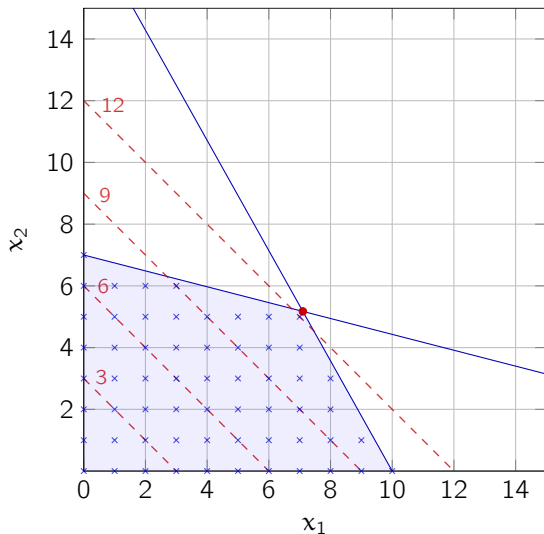
Um modelo (programa) $\mathcal{R} = \{\max f_{\mathcal{R}}(x) : x \in X_{\mathcal{R}}\}$ é considerado uma **relaxação** de um modelo $\mathcal{M} = \{\max f(x) : x \in X\}$ se e somente se:

- ▶ todas as soluções de \mathcal{M} são também soluções de \mathcal{R} , ou seja, $X \subseteq X_{\mathcal{R}}$,
- ▶ e toda solução $x \in X$ tem custo em \mathcal{R} menor ou igual ao custo em \mathcal{M} , ou seja, $f_{\mathcal{R}}(x) \geq f(x), \forall x \in X$.

Ou seja, uma relaxação fornece um **limite superior** para a formulação original!

Exemplo: **relaxação linear**.

Programação linear inteira



maximiza $z = x_1 + x_2$

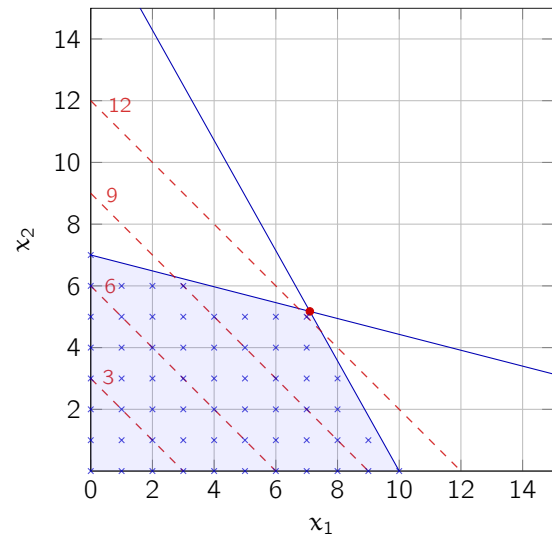
sujeito a $1,8x_1 + 7x_2 \leq 49$

$5x_1 + 2,8x_2 \leq 50$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$

Relaxação linear: ignora as restrições de integralidade e resolve o problema com otimização linear.

Programação linear inteira



maximiza $z = x_1 + x_2$

sujeito a $1,8x_1 + 7x_2 \leq 49$

$5x_1 + 2,8x_2 \leq 50$

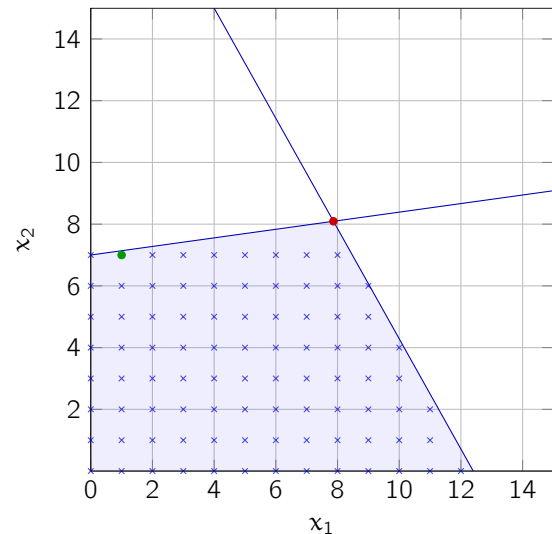
$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$

Relaxação linear: ignora as restrições de integralidade e resolve o problema com otimização linear.

Neste caso, a solução ótima do programa linear é $x_1 \approx 7,1$ e $x_2 \approx 5,2$ ($z \approx 12,3$). Essa solução não é válida para o programa inteiro!

Ideia: arredondar; solução inteira mais próxima.

Programação linear inteira



maximiza $z = -x_1 + 7,5x_2$

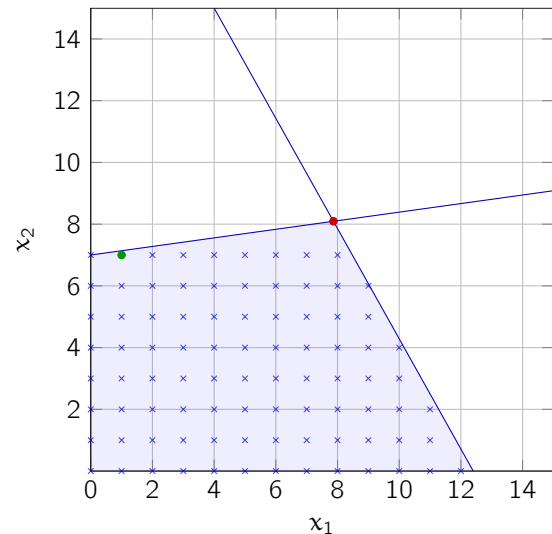
sujeito a $-x_1 + 7,2x_2 \leq 50,4$

$5x_1 + 2,8x_2 \leq 62$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$

Relaxação linear: ignora as restrições de integralidade e resolve o problema com otimização linear.

Programação linear inteira



maximiza $z = -x_1 + 7,5x_2$
sujeito a $-x_1 + 7,2x_2 \leq 50,4$
 $5x_1 + 2,8x_2 \leq 62$
 $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$

Relaxação linear: ignora as restrições de integralidade e resolve o problema com otimização linear.

Neste caso, a solução ótima do programa linear é $x_1 \approx 7,9$ e $x_2 \approx 8,1$. A solução ótima para o programa inteiro, no entanto, é $x_1 = 1$ e $x_2 = 7$ (verde)!

Conclusão: relaxação linear **não resolve** otimização inteira, mas **fornece um limite superior**.



Como resolver programas inteiros (algoritmos)?

- ▶ Branch & bound;
- ▶ Planos de corte;
- ▶ Geração de colunas;
- ▶ Heurísticas e metaheurísticas.

55MQU – Métodos Quantitativos
Prof. Marcelo de Souza