Programação Linear
Solução gráfica

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos
Universidade do Estado de Santa Catarina

Método Gráfico

Etapas

1. Determinação da **região de soluções viáveis**;
   - em um plano cartesiano, expresse cada restrição;
   - cada restrição divide o plano em uma região viável e uma região inviável;
   - a região viável do modelo é a intersecção das regiões viáveis dadas por cada restrição.
2. Determinação da **solução ótima** entre os pontos viáveis.
   - **a solução ótima estará em algum ponto nos extremos da região viável**;
   - liste os pontos extremos da região viável e calcule seus valores; ou
   - identifique a direção da reta definida pela função objetivo e o último ponto extremo da região viável atingido por ela.

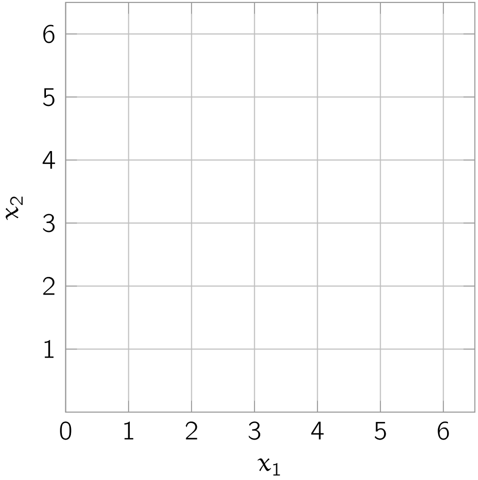
Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

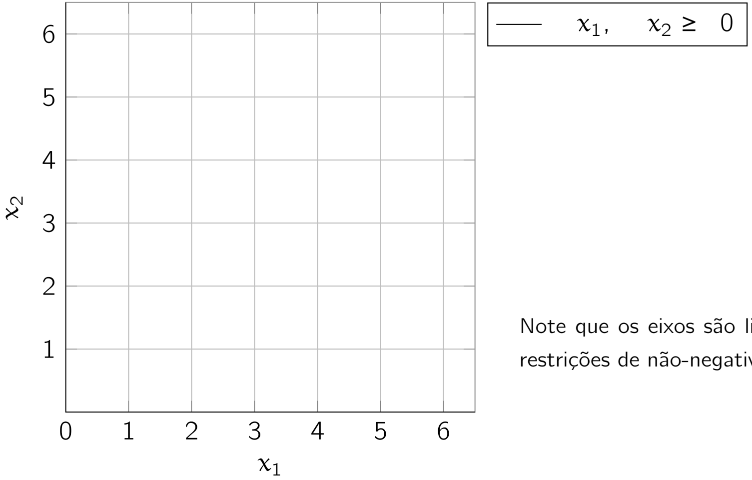


$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Represente as variáveis x_1 e x_2 como eixos de um plano cartesiano onde o modelo será expresso graficamente.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

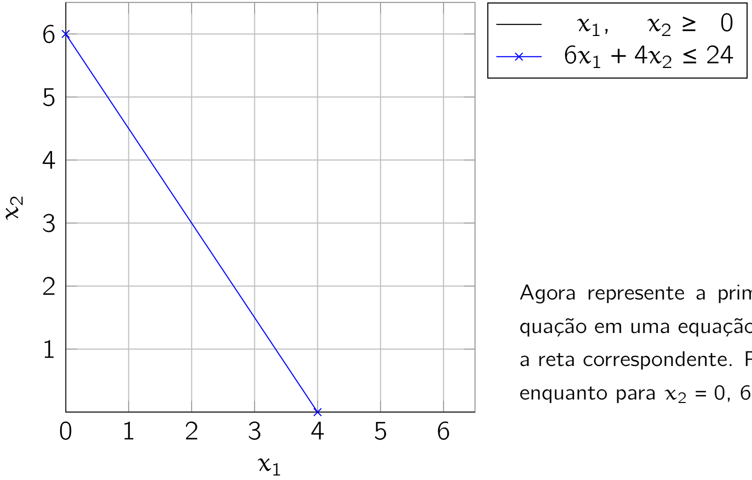


maximiza	$z = 5x_1 + 4x_2$
sujeito a	$6x_1 + 4x_2 \leq 24$
	$x_1 + 2x_2 \leq 6$
	$-x_1 + x_2 \leq 1$
	$x_2 \leq 2$
	$x_1, x_2 \geq 0$

Note que os eixos são limitados a $x_1, x_2 \geq 0$, respeitando as restrições de não-negatividade.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

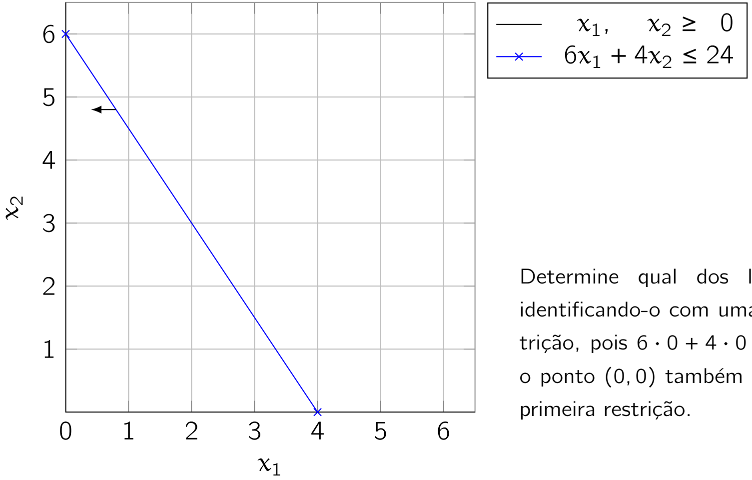


$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Agora represente a primeira restrição, transformando a inequação em uma equação e calculando dois pontos para definir a reta correspondente. Para $x_1 = 0$, $6 \cdot 0 + 4x_2 = 24$ e $x_2 = 6$, enquanto para $x_2 = 0$, $6x_1 + 4 \cdot 0 = 24$ e $x_1 = 4$.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

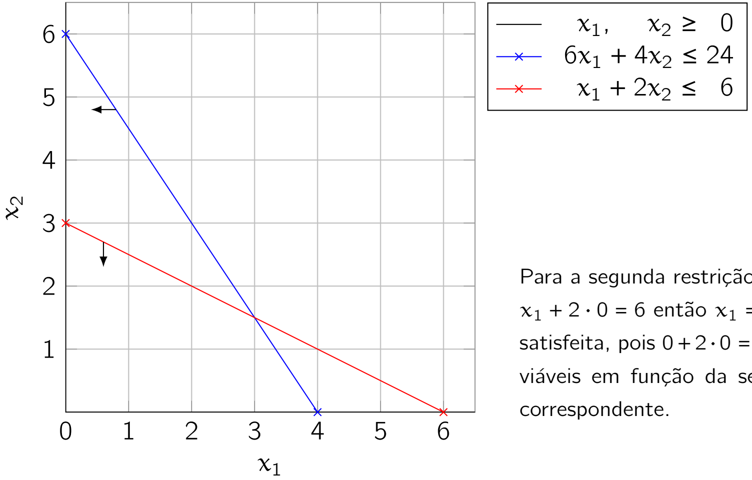


$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Determine qual dos lados contém as soluções viáveis, identificando-o com uma seta. O ponto $(0, 0)$ satisfaz a restrição, pois $6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 \leq 24$. Logo, o lado que contém o ponto $(0, 0)$ também contém as soluções que satisfazem a primeira restrição.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

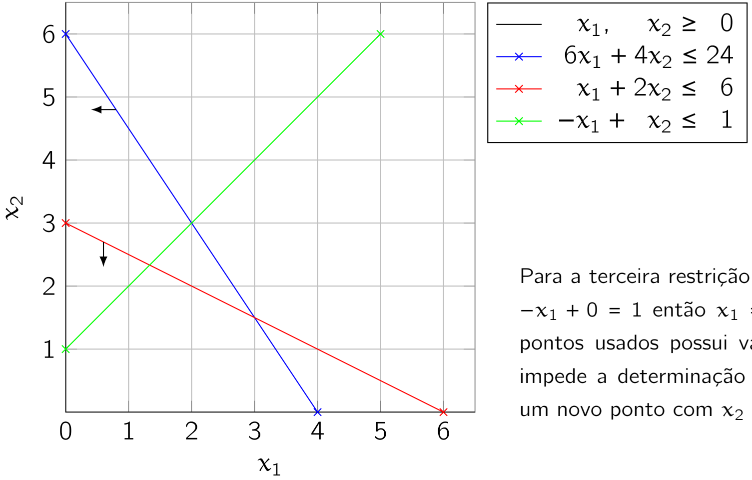


$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Para a segunda restrição, $0 + 2x_2 = 6$ então $x_2 = 3$, enquanto $x_1 + 2 \cdot 0 = 6$ então $x_1 = 6$. Para o ponto $(0, 0)$, a restrição é satisfeita, pois $0 + 2 \cdot 0 = 0 \leq 6$. Portanto, a região de soluções viáveis em função da segunda restrição está abaixo da reta correspondente.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

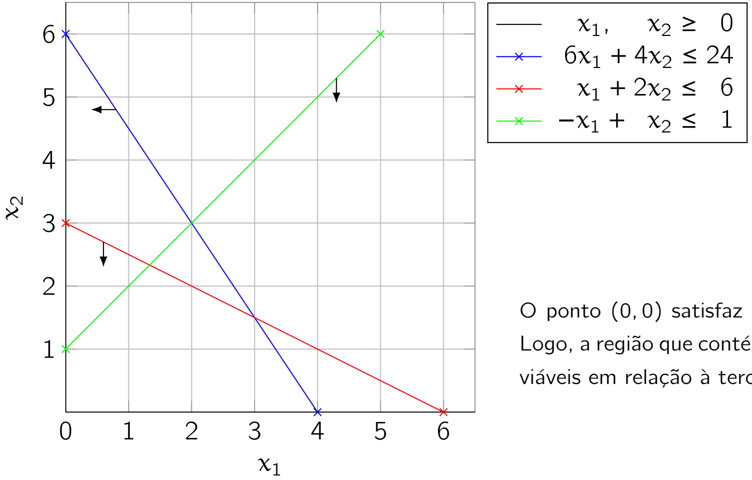


$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Para a terceira restrição, $-0 + x_2 = 1$ então $x_2 = 1$, enquanto $-x_1 + 0 = 1$ então $x_1 = -1$. O segmento de reta entre os pontos usados possui valores negativos para x_1, o que não impede a determinação da reta. Para facilitar, pode-se usar um novo ponto com $x_2 = 6$, obtendo $-x_1 + 6 = 1$ e $x_1 = 5$.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

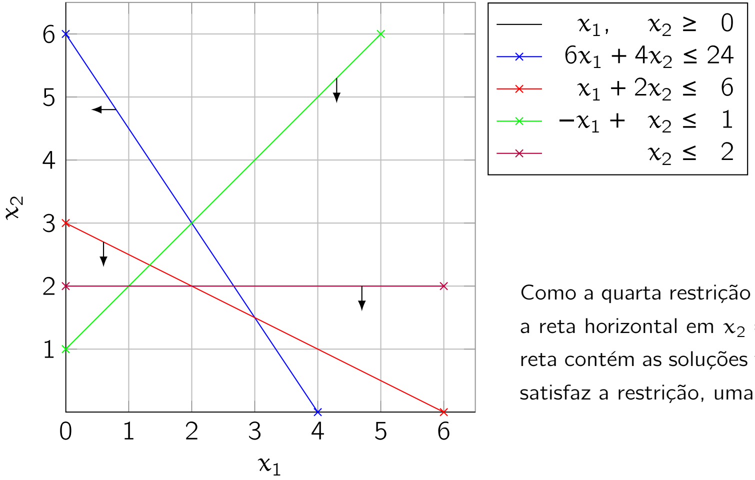


maximiza	$z = 5x_1 + 4x_2$
sujeito a	$6x_1 + 4x_2 \leq 24$
	$x_1 + 2x_2 \leq 6$
	$-x_1 + x_2 \leq 1$
	$x_2 \leq 2$
	$x_1, x_2 \geq 0$

O ponto $(0, 0)$ satisfaz a terceira restrição, pois $-0 + 0 \leq 1$. Logo, a região que contém o ponto $(0, 0)$ apresenta as soluções viáveis em relação à terceira restrição.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

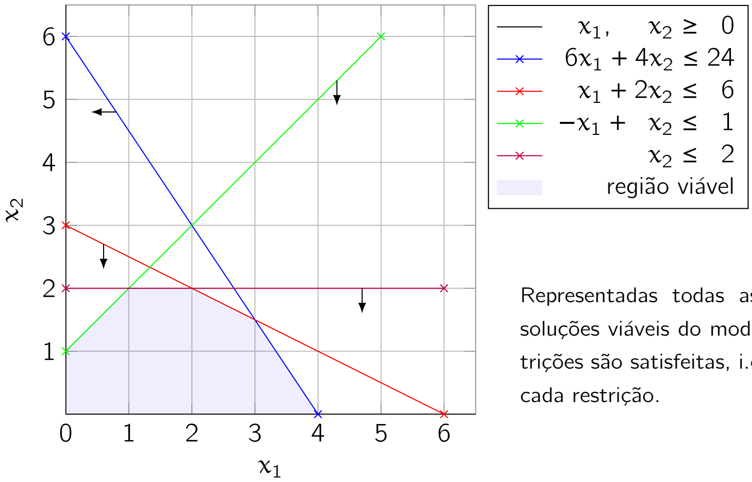


$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Como a quarta restrição é constante em x_2, basta representar a reta horizontal em $x_2 = 2$ e verificar que a região abaixo da reta contém as soluções viáveis, pois o ponto $(0, 0)$ ali contido satisfaz a restrição, uma vez que $x_2 = 0$ e $0 \leq 2$.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

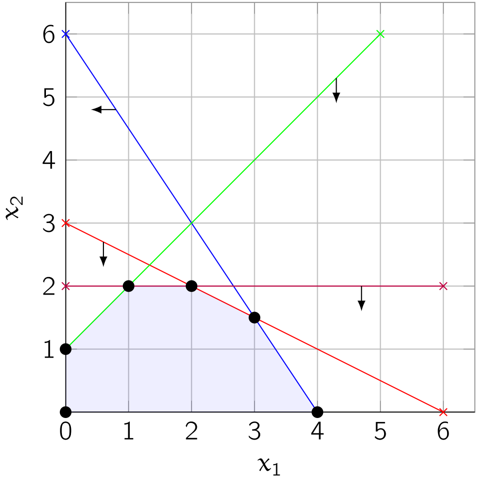


$$
\begin{array}{rl}
\textbf{maximiza} & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Representadas todas as restrições, definimos a região de soluções viáveis do modelo como a região onde todas as restrições são satisfeitas, i.e. a intersecção das regiões viáveis de cada restrição.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico



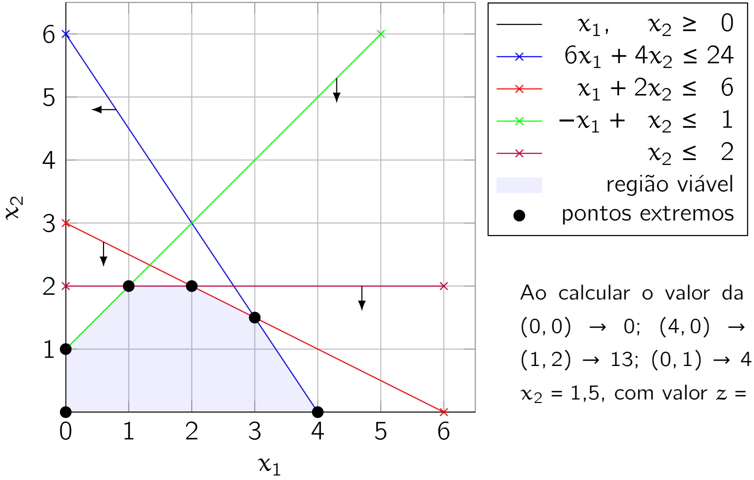
	$x_1, \quad x_2 \geq 0$
	$6x_1 + 4x_2 \leq 24$
	$x_1 + 2x_2 \leq 6$
	$-x_1 + x_2 \leq 1$
	$x_2 \leq 2$
	região viável
●	pontos extremos

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{maximiza} & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Definimos o conjunto de pontos extremos da região viável como aqueles contidos na região viável e onde as restrições se encontram. Os pontos são: $\{(0,0), (4,0), (3,1{,}5), (2,2), (1,2), (0,1)\}$.

Exemplo I

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico



$$
\begin{array}{rl}
\textbf{maximiza} & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_2 \leq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Ao calcular o valor da solução em cada ponto, temos que $(0,0) \rightarrow 0$; $(4,0) \rightarrow 20$; $(3,1{,}5) \rightarrow 21$; $(2,2) \rightarrow 18$, $(1,2) \rightarrow 13$; $(0,1) \rightarrow 4$. Logo, a solução ótima é $x_1 = 3$ e $x_2 = 1{,}5$, com valor $z = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1{,}5 = 21$.

Exemplo I

Determinar os valores de x_1 e x_2 de pontos extremos

Quando não é possível identificar os valores das variáveis de um ponto extremo visualmente, identifique as restrições r_1 e r_2 que definem esse ponto e calcule os valores das variáveis no ponto de intersecção em que $r_1 = r_2$.

Exemplo I

Determinar os valores de x_1 e x_2 de pontos extremos

Quando não é possível identificar os valores das variáveis de um ponto extremo visualmente, identifique as restrições r_1 e r_2 que definem esse ponto e calcule os valores das variáveis no ponto de intersecção em que $r_1 = r_2$.

Exemplo: dadas as restrições $6x_1 + 4x_2 = 24$ e $x_1 + 2x_2 = 6$, o ponto de intersecção é

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 24 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 24 \\ -2x_1 - 4x_2 = -12 \end{cases}$$

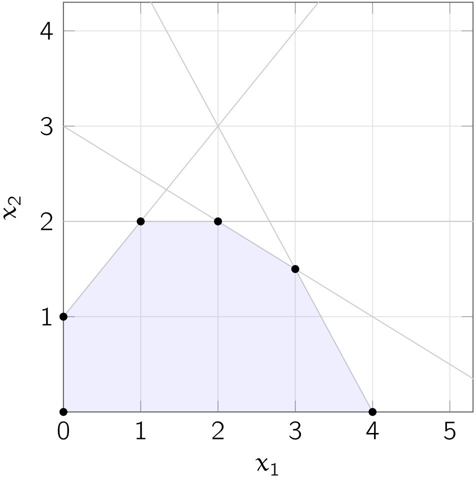
Com isso, $4x_1 = 12$ e $x_1 = 3$. Substituindo x_1 em alguma das equações temos que $x_2 = 1{,}5$. Logo, o ponto onde as referidas restrições se encontram é $(3, 1{,}5)$.

Exemplo I

Identificar a solução ótima sem avaliar todos os pontos extremos

Uma alternativa para identificar a solução ótima a partir da região viável é:

1. traçar a reta da função objetivo para diferentes valores de z (*conjuntos de nível*);
2. identificar a direção de crescimento (max.) ou decrescimento (min.) da função objetivo;
3. determinar o último ponto da região viável que a função "toca" → solução ótima.



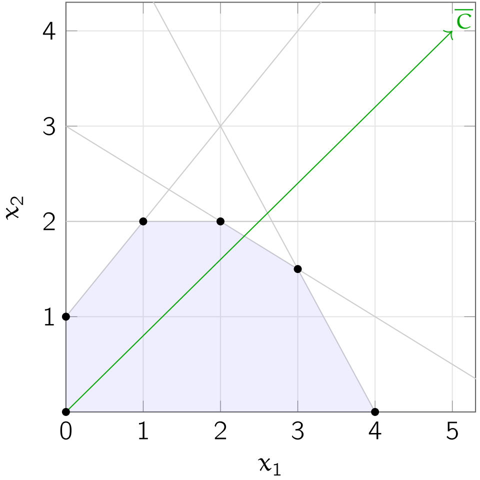
Exemplo I

Identificar a solução ótima sem avaliar todos os pontos extremos

Uma alternativa para identificar a solução ótima a partir da região viável é:

1. traçar a reta da função objetivo para diferentes valores de z (*conjuntos de nível*);
2. identificar a direção de crescimento (max.) ou decrescimento (min.) da função objetivo;
3. determinar o último ponto da região viável que a função "toca" → solução ótima.

A inclinação da reta definida pela função objetivo ($z = 5x_1 + 4x_2$) é perpendicular ao vetor $\overline{C} = (5,4)$, cujas coordenadas são os coeficientes da função.



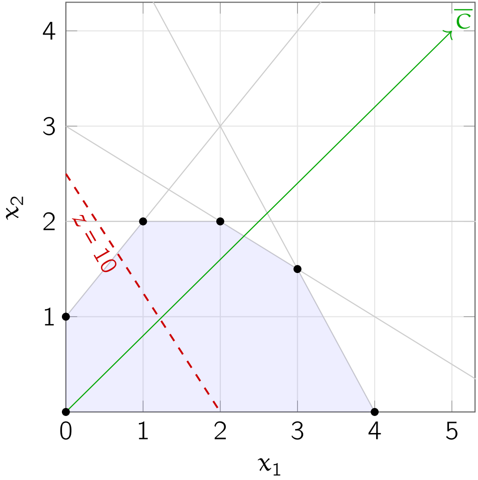
Exemplo I

Identificar a solução ótima sem avaliar todos os pontos extremos

Uma alternativa para identificar a solução ótima a partir da região viável é:

1. traçar a reta da função objetivo para diferentes valores de z (*conjuntos de nível*);
2. identificar a direção de crescimento (max.) ou decrescimento (min.) da função objetivo;
3. determinar o último ponto da região viável que a função "toca" → solução ótima.

A inclinação da reta definida pela função objetivo ($z = 5x_1 + 4x_2$) é perpendicular ao vetor $\overline{C} = (5{,}4)$, cujas coordenadas são os coeficientes da função.



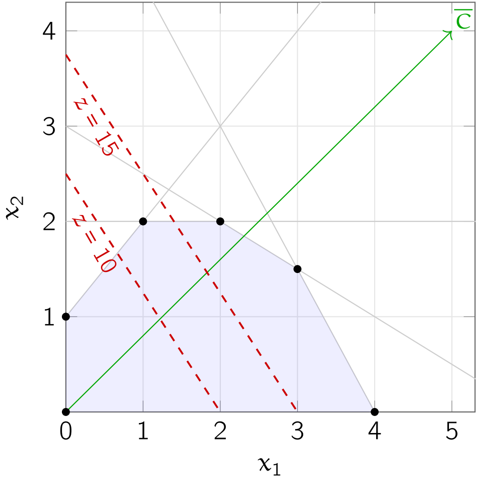
Exemplo I

Identificar a solução ótima sem avaliar todos os pontos extremos

Uma alternativa para identificar a solução ótima a partir da região viável é:

1. traçar a reta da função objetivo para diferentes valores de z (*conjuntos de nível*);
2. identificar a direção de crescimento (max.) ou decrescimento (min.) da função objetivo;
3. determinar o último ponto da região viável que a função "toca" → solução ótima.

A inclinação da reta definida pela função objetivo ($z = 5x_1 + 4x_2$) é perpendicular ao vetor $\overline{C} = (5,4)$, cujas coordenadas são os coeficientes da função.



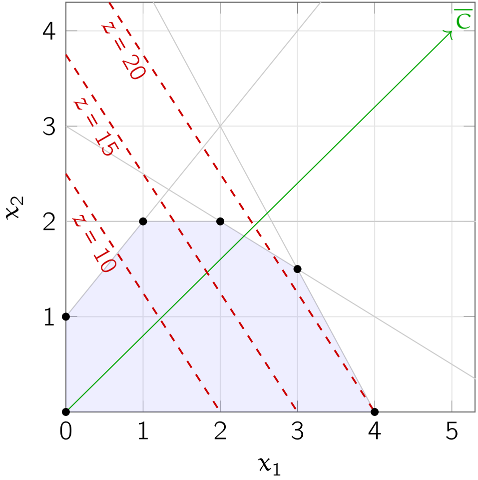
Exemplo I

Identificar a solução ótima sem avaliar todos os pontos extremos

Uma alternativa para identificar a solução ótima a partir da região viável é:

1. traçar a reta da função objetivo para diferentes valores de z (*conjuntos de nível*);
2. identificar a direção de crescimento (max.) ou decrescimento (min.) da função objetivo;
3. determinar o último ponto da região viável que a função "toca" → solução ótima.

A inclinação da reta definida pela função objetivo ($z = 5x_1 + 4x_2$) é perpendicular ao vetor $\overline{C} = (5{,}4)$, cujas coordenadas são os coeficientes da função.



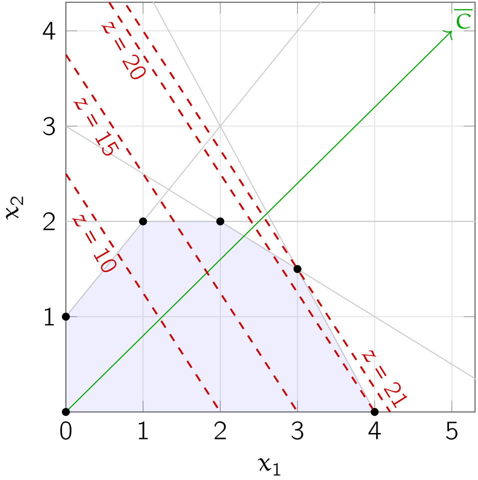
Exemplo I

Identificar a solução ótima sem avaliar todos os pontos extremos

Uma alternativa para identificar a solução ótima a partir da região viável é:

1. traçar a reta da função objetivo para diferentes valores de z (*conjuntos de nível*);
2. identificar a direção de crescimento (max.) ou decrescimento (min.) da função objetivo;
3. determinar o último ponto da região viável que a função "toca" → solução ótima.

A inclinação da reta definida pela função objetivo ($z = 5x_1 + 4x_2$) é perpendicular ao vetor $\overline{C} = (5{,}4)$, cujas coordenadas são os coeficientes da função.



Ferramentas para solução via método gráfico

Programas lineares simples podem ser resolvidos via método gráfico usando a ferramenta *Linear Programming Graphic Method Calculator* da *Reshmat.ru*.

- Acesse em `http://reshmat.ru/graphical_method_lpp.html`.

Uma boa alternativa é a ferramenta de programação linear da *PM Calculators*.

- Acesse em `https://www.pmcalculators.com/graphical-method-calculator`.

A ferramenta Desmos também pode ser usada para visualizar o programa linear e testar modificações nas restrições e função objetivo.

- Acesse em `https://www.desmos.com/calculator`;
- Exemplo "Reddy Mikks": `https://www.desmos.com/calculator/no8uqdkm9g`.

Casos especiais

Considere o modelo Reddy Mikks e use as ferramentas sugeridas para responder:

1. O que acontece ao adicionar a restrição $x_1 + x_2 \geq 5$?

2. O que acontece ao remover as restrições $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ e $x_1 + 2x_2 \leq 6$?

3. O que acontece se a função objetivo for $z = 3x_1 + 2x_2$?

Casos especiais

Considere o modelo Reddy Mikks e use as ferramentas sugeridas para responder:

1. O que acontece ao adicionar a restrição $x_1 + x_2 \geq 5$?
   - **Não existe solução viável**.
2. O que acontece ao remover as restrições $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ e $x_1 + 2x_2 \leq 6$?
   - **O sistema é ilimitado**.
3. O que acontece se a função objetivo for $z = 3x_1 + 2x_2$?
   - **Existem infinitas soluções ótimas**.

Casos especiais

Considere o modelo Reddy Mikks e use as ferramentas sugeridas para responder:

1. O que acontece ao adicionar a restrição $x_1 + x_2 \geq 5$?
   - **Não existe solução viável**.
2. O que acontece ao remover as restrições $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ e $x_1 + 2x_2 \leq 6$?
   - **O sistema é ilimitado**.
3. O que acontece se a função objetivo for $z = 3x_1 + 2x_2$?
   - **Existem infinitas soluções ótimas**.

Em resumo, o programa linear pode

a) ter uma única solução ótima;

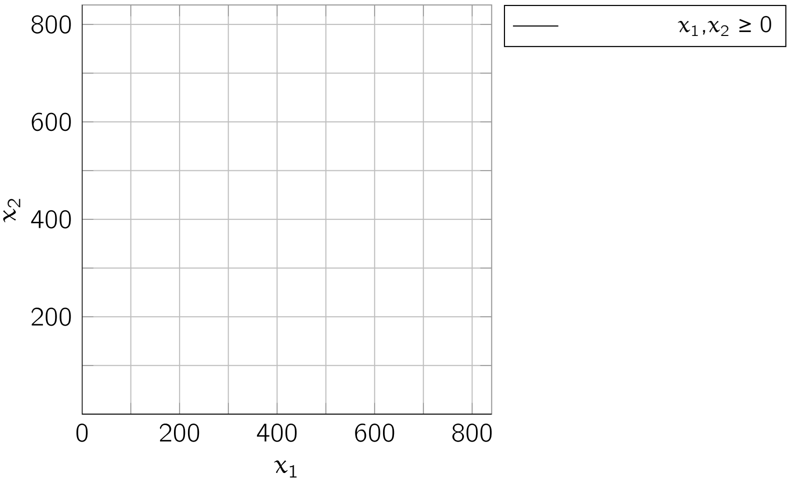
b) ter infinitas soluções ótimas;

c) não ter solução ótima;

d) ter solução ótima indefinida.

Exemplo II

Revisitando o modelo Ozark Farms – solução pelo método gráfico



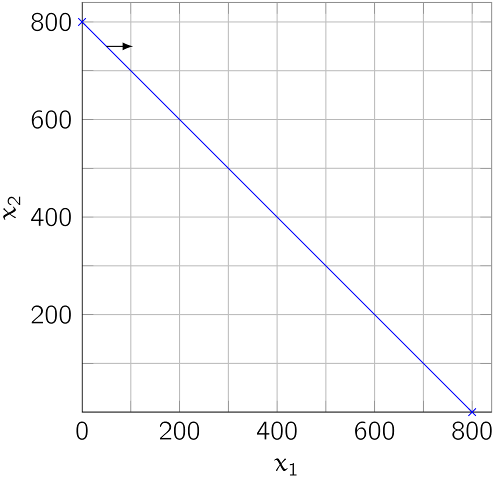
minimiza $z = 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \geq 800$$
$$0{,}21x_1 - 0{,}3x_2 \leq 0$$
$$0{,}03x_1 - 0{,}01x_2 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Exemplo II

Revisitando o modelo Ozark Farms – solução pelo método gráfico



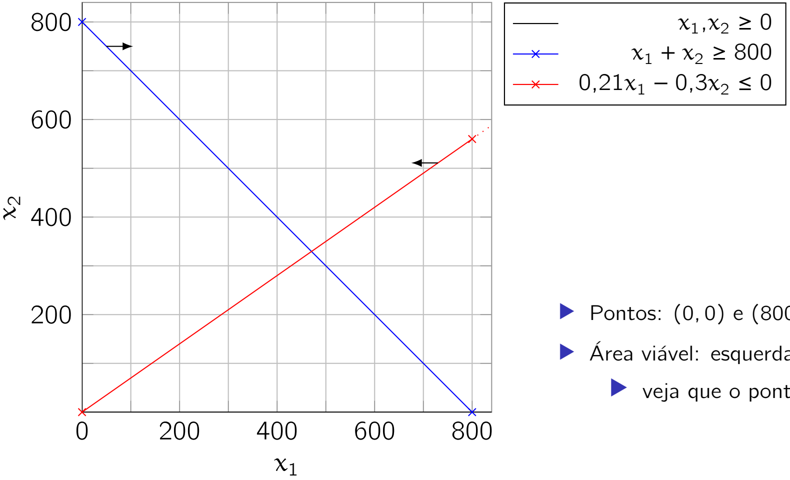
——	$x_1, x_2 \geq 0$
—×—	$x_1 + x_2 \geq 800$

minimiza	$z = 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2$
sujeito a	$x_1 + x_2 \geq 800$
	$0{,}21x_1 - 0{,}3x_2 \leq 0$
	$0{,}03x_1 - 0{,}01x_2 \geq 0$
	$x_1, x_2 \geq 0$

- Pontos: $(800, 0)$ e $(0, 800)$
- Área viável: direita; $(0, 0) \rightarrow 0 < 800$

Exemplo II

Revisitando o modelo Ozark Farms – solução pelo método gráfico

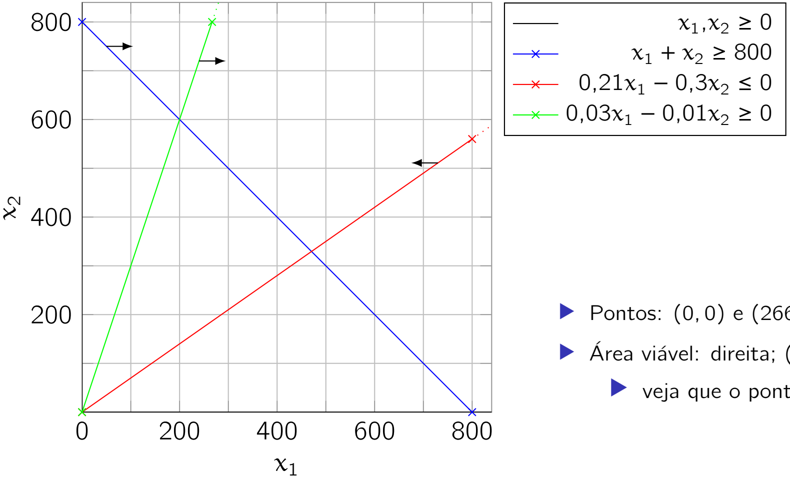


minimiza	$z = 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2$
sujeito a	$x_1 + x_2 \geq 800$
	$0{,}21x_1 - 0{,}3x_2 \leq 0$
	$0{,}03x_1 - 0{,}01x_2 \geq 0$
	$x_1, x_2 \geq 0$

- Pontos: $(0, 0)$ e $(800, 560)$
- Área viável: esquerda; $(100, 100) \to -9 \leq 0$
  - veja que o ponto $(0, 0)$ não pode ser usado!

Exemplo II

Revisitando o modelo Ozark Farms – solução pelo método gráfico

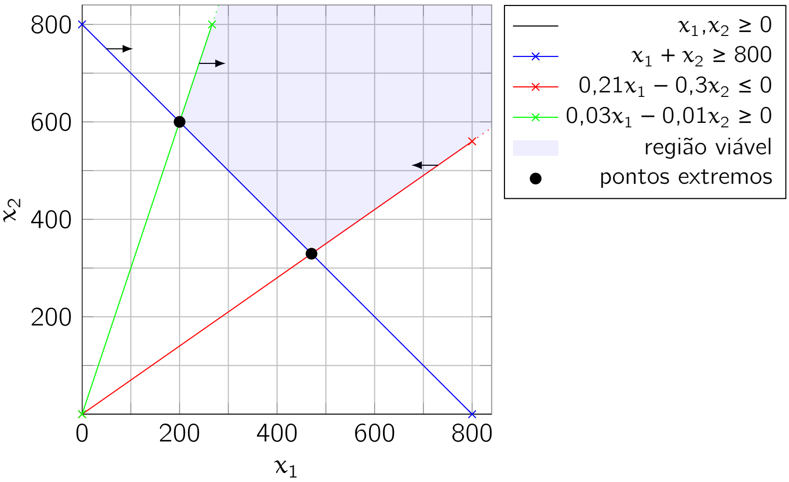


minimiza	$z = 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2$
sujeito a	$x_1 + x_2 \geq 800$
	$0{,}21x_1 - 0{,}3x_2 \leq 0$
	$0{,}03x_1 - 0{,}01x_2 \geq 0$
	$x_1, x_2 \geq 0$

- Pontos: $(0, 0)$ e $(266{,}67, 800)$
- Área viável: direita; $(100, 100) \rightarrow 2 > 0$
  - veja que o ponto $(0, 0)$ não pode ser usado!

Exemplo II

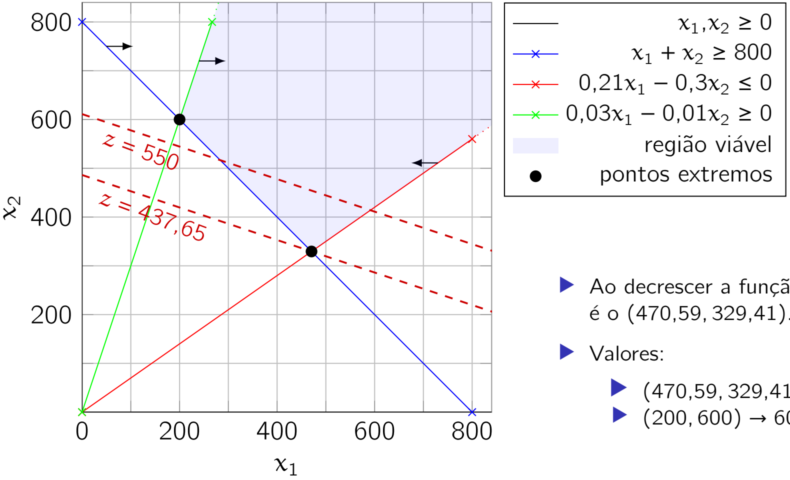
Revisitando o modelo Ozark Farms – solução pelo método gráfico



$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & z = 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \geq 800 \\
& 0{,}21x_1 - 0{,}3x_2 \leq 0 \\
& 0{,}03x_1 - 0{,}01x_2 \geq 0 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemplo II

Revisitando o modelo Ozark Farms – solução pelo método gráfico



minimiza	$z = 0,3x_1 + 0,9x_2$
sujeito a	$x_1 + x_2 \geq 800$
	$0,21x_1 - 0,3x_2 \leq 0$
	$0,03x_1 - 0,01x_2 \geq 0$
	$x_1, x_2 \geq 0$

- Ao decrescer a função objetivo, o último ponto visitado é o $(470{,}59, 329{,}41)$.
- Valores:
  - $(470{,}59, 329{,}41) \rightarrow 437{,}65$ (solução ótima)
  - $(200, 600) \rightarrow 600$

55MQU – Métodos Quantitativos
Prof. Marcelo de Souza