

Programação Linear

Modelagem matemática

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos
Universidade do Estado de Santa Catarina



Processo de formulação de problemas



Etapas

1. Definir as **variáveis de decisão**;
 - ▶ aquelas cujos valores serão determinados pela solução.
2. Determinar a **função objetivo**;
 - ▶ está relacionada com o que se busca (maior lucro, menor custo, menor tempo, etc.).
3. Definir o conjunto de **restrições**.
 - ▶ definem soluções viáveis e inviáveis;
 - ▶ não esquecer das restrições de não negatividade (i.e. $x_i \geq 0$).



Processo de formulação de problemas

Etapas

1. Definir as **variáveis de decisão**;
 - ▶ aquelas cujos valores serão determinados pela solução.
2. Determinar a **função objetivo**;
 - ▶ está relacionada com o que se busca (maior lucro, menor custo, menor tempo, etc.).
3. Definir o conjunto de **restrições**.
 - ▶ definem soluções viáveis e inviáveis;
 - ▶ não esquecer das restrições de não negatividade (i.e. $x_i \geq 0$).

Alguns detalhes

- ▶ As restrições são definidas por equações e/ou inequações;
- ▶ Mantenha as variáveis do lado esquerdo, e as constantes do lado direito;
- ▶ Escreva as restrições respeitando a ordem das variáveis, i.e. x_i antes de x_{i+1} .



Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – enunciado

A Reddy Mikks produz tintas para interiores e exteriores com base em duas matérias-primas, $M1$ e $M2$. A tabela abaixo apresenta os dados básicos do problema.

	Tonelada de matéria-prima para produzir 1 t de		Máximo diário
	Tinta para exteriores	Tinta para interiores	
Matéria-prima $M1$	6	4	24
Matéria-prima $M2$	1	2	6
Lucro/tonelada (\$ 1000)	5	4	

Uma pesquisa de mercado indica que a demanda diária de tintas para interiores não pode ultrapassar a de tintas para exteriores por mais de 1 t. Além disso, a demanda máxima diária de tinta para interiores é de 2 t.

A Reddy Mikks quer determinar o mix ótimo (o melhor) de produtos de tintas para interiores e exteriores que maximize o lucro total diário.



Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- ▶ x_1 : produção de tinta para **exteriores** (em toneladas);
- ▶ x_2 : produção de tinta para **interiores** (em toneladas).



Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- ▶ x_1 : produção de tinta para **exteriores** (em toneladas);
- ▶ x_2 : produção de tinta para **interiores** (em toneladas).

Função objetivo:

- ▶ **maximiza** $z = 5x_1 + 4x_2$
 - ▶ lucro total z : \$ 5/t para x_1 t de tinta de exteriores e \$ 4/t para x_2 t de tinta de interiores.



Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- ▶ x_1 : produção de tinta para **exteriores** (em toneladas);
- ▶ x_2 : produção de tinta para **interiores** (em toneladas).

Função objetivo:

- ▶ **maximiza** $z = 5x_1 + 4x_2$
 - ▶ lucro total z : \$5/t para x_1 t de tinta de exteriores e \$4/t para x_2 t de tinta de interiores.

Restrições:

1. Limite máximo de matéria-prima M1: $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
2. Limite máximo de matéria-prima M2: $x_1 + 2x_2 \leq 6$
3. Relação entre a produção dos tipos de tinta: $-x_1 + x_2 \leq 1$
4. Produção máxima de tinta para interiores: $x_2 \leq 2$
5. Restrições de não-negatividade: $x_1, x_2 \geq 0$

Exemplo



Reddy Mikks (mix de produtos) – modelo/programa linear

Reddy Mikks

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$

sujeito a $6x_1 + 4x_2 \leq 24$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – enunciado

A Ozark Farms usa no mínimo 800 kg de ração especial por dia. Essa ração especial é uma mistura de milho e soja com as composições mostradas na tabela abaixo.

Ração	kg por kg de ração		Custo (\$/kg)
	Proteína	Fibra	
Milho	0,09	0,02	0,30
Soja	0,60	0,06	0,90

Os requisitos nutricionais da ração especial são de no mínimo 30% de proteína e de no máximo 5% de fibra. A Ozark Farms quer determinar a mistura que gera a ração de mínimo custo diário.



Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- ▶ x_1 : kg de **milho** na mistura;
- ▶ x_2 : kg de **soja** na mistura.



Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- ▶ x_1 : kg de **milho** na mistura;
- ▶ x_2 : kg de **soja** na mistura.

Função objetivo:

- ▶ **minimiza** $z = 0,3x_1 + 0,9x_2$
 - ▶ custo total z : \$ 0,30/kg para x_1 kg de milho e \$ 0,90/kg para x_2 kg de soja.



Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- ▶ x_1 : kg de **milho** na mistura;
- ▶ x_2 : kg de **soja** na mistura.

Função objetivo:

- ▶ **minimiza** $z = 0,3x_1 + 0,9x_2$
 - ▶ custo total z : \$ 0,30/kg para x_1 kg de milho e \$ 0,90/kg para x_2 kg de soja.

Restrições:

1. Produção mínima: $x_1 + x_2 \geq 800$
2. Requisito de proteína: $0,09x_1 + 0,6x_2 \geq 0,3(x_1 + x_2) \therefore 0,21x_1 - 0,3x_2 \leq 0$
3. Requisito de fibra: $0,02x_1 + 0,06x_2 \leq 0,05(x_1 + x_2) \therefore 0,03x_1 - 0,01x_2 \geq 0$
4. Restrições de não-negatividade: $x_1, x_2 \geq 0$



Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – modelo/programa linear

Ozark Farms

minimiza $z = 0,3x_1 + 0,9x_2$

sujeito a $x_1 + x_2 \geq 800$

$$0,21x_1 - 0,3x_2 \leq 0$$

$$0,03x_1 - 0,01x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Formulação genérica de problemas



Em geral, os elementos associados a problemas de otimização são **dinâmicos**. Por exemplo:

- ▶ Produção varia conforme encomendas de clientes.
- ▶ Contratação de funcionários varia de acordo com candidaturas.
- ▶ Valor de venda de mercadoria depende da demanda de mercado.
- ▶ Limite de produção definido pela matéria-prima recebida do fornecedor.



Formulação genérica de problemas

Em geral, os elementos associados a problemas de otimização são **dinâmicos**. Por exemplo:

- ▶ Produção varia conforme encomendas de clientes.
- ▶ Contratação de funcionários varia de acordo com candidaturas.
- ▶ Valor de venda de mercadoria depende da demanda de mercado.
- ▶ Limite de produção definido pela matéria-prima recebida do fornecedor.

Neste caso, devemos construir **modelos genéricos**.

- ▶ Número variável de **variáveis de decisão**, **restrições** e **dados**.
- ▶ O modelo se ajusta a uma instância concreta do problema.
- ▶ Analogia: classes e objetos em POO.

Exemplo

Reddy Mikks genérico



Consideremos o seguinte cenário para o problema Reddy Mikks:

- ▶ Variados **tipos de tinta**, com respectivos **lucros/tonelada**.
- ▶ Variadas **matérias-primas**, com respectivos **limites diários**.
- ▶ **Matéria-prima necessária** para produção de cada tipo de tinta.
- ▶ **Demanda** diária máxima de produção de cada tipo de tinta.

Exemplo

Reddy Mikks genérico



Consideremos o seguinte cenário para o problema Reddy Mikks:

- ▶ Variados **tipos de tinta**, com respectivos **lucros/tonelada**.
- ▶ Variadas **matérias-primas**, com respectivos **limites diários**.
- ▶ **Matéria-prima necessária** para produção de cada tipo de tinta.
- ▶ **Demanda** diária máxima de produção de cada tipo de tinta.

Etapas para a construção do modelo genérico:

1. Definir os **dados do problema**;
 - ▶ introduzindo **variáveis matemáticas** para grandezas dinâmicas.
2. Definir as **variáveis de decisão** e a **função objetivo**;
3. Construir as **restrições**.
 - ▶ agrupando restrições, quando necessário.

Exemplo

Reddy Mikks genérico



Dados:

- ▶ n tipos de tinta e m matérias-primas;
- ▶ L_i é o lucro da tinta $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- ▶ P_i é a produção máxima diária da tinta $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- ▶ E_j é a quantidade máxima (estoque) da matéria-prima $j \in \{1, 2, \dots, m\}$;
- ▶ Q_{ij} é a quantidade da matéria-prima $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ao produzir a tinta $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Exemplo

Reddy Mikks genérico



Dados:

- ▶ n tipos de tinta e m matérias-primas;
- ▶ L_i é o lucro da tinta $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- ▶ P_i é a produção máxima diária da tinta $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- ▶ E_j é a quantidade máxima (estoque) da matéria-prima $j \in \{1, 2, \dots, m\}$;
- ▶ Q_{ij} é a quantidade da matéria-prima $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ao produzir a tinta $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Variáveis de decisão: x_i : produção de tinta do tipo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Exemplo

Reddy Mikks genérico



Dados:

- ▶ n tipos de tinta e m matérias-primas;
- ▶ L_i é o lucro da tinta $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- ▶ P_i é a produção máxima diária da tinta $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- ▶ E_j é a quantidade máxima (estoque) da matéria-prima $j \in \{1, 2, \dots, m\}$;
- ▶ Q_{ij} é a quantidade da matéria-prima $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ao produzir a tinta $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Variáveis de decisão: x_i : produção de tinta do tipo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Função objetivo: maximiza $\sum_{i=1}^n L_i x_i$

Exemplo

Reddy Mikks genérico



Dados:

- ▶ n tipos de tinta e m matérias-primas;
- ▶ L_i é o lucro da tinta $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- ▶ P_i é a produção máxima diária da tinta $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- ▶ E_j é a quantidade máxima (estoque) da matéria-prima $j \in \{1, 2, \dots, m\}$;
- ▶ Q_{ij} é a quantidade da matéria-prima $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ao produzir a tinta $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Variáveis de decisão: x_i : produção de tinta do tipo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Função objetivo: maximiza $\sum_{i=1}^n L_i x_i$

Restrições:

- ▶ Produção máxima de cada tinta: $x_i \leq P_i$, $i \in 1, 2, \dots, n$
- ▶ Limite de cada matéria-prima: $\sum_{i=1}^n Q_{ij} x_i \leq E_j$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$
- ▶ Restrições de não-negatividade: $x_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Exemplo

Reddy Mikks genérico



Reddy Mikks

$$\begin{array}{ll} \text{maximiza} & \sum_{i=1}^n L_i x_i \\ \text{sujeito a} & x_i \leq P_i \quad , i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ & \sum_{i=1}^n Q_{ij} x_i \leq E_j \quad , j \in \{1, 2, \dots, m\} \\ & x_i \geq 0 \quad , i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array}$$

Exemplo

Ozark Farms genérico



Dados:

- ▶ m ingredientes;
- ▶ n nutrientes;
- ▶ Q é a quantidade mínima de ração;
- ▶ c_i é o custo do ingrediente $i \in [m]$;
- ▶ m_j é o mínimo do nutriente $j \in [n]$;
- ▶ M_j é o máximo do nutriente $j \in [n]$;
- ▶ A_{ij} é quanto do nutriente $j \in [n]$ há no ingrediente $i \in [m]$.

Variáveis de decisão:

- ▶ x_i : quantidade do ingrediente $i \in [m]$.

Exemplo

Ozark Farms genérico

Dados:

- ▶ m ingredientes;
- ▶ n nutrientes;
- ▶ Q é a quantidade mínima de ração;
- ▶ c_i é o custo do ingrediente $i \in [m]$;
- ▶ m_j é o mínimo do nutriente $j \in [n]$;
- ▶ M_j é o máximo do nutriente $j \in [n]$;
- ▶ A_{ij} é quanto do nutriente $j \in [n]$ há no ingrediente $i \in [m]$.

Variáveis de decisão:

- ▶ x_i : quantidade do ingrediente $i \in [m]$.

Ozark Farms

$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & \sum_{i=1}^m c_i x_i \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^m x_i \geq Q \\ & \sum_{i=1}^m A_{ij} x_i \geq m_j \quad , j \in [n] \\ & \sum_{i=1}^m A_{ij} x_i \leq M_j \quad , j \in [n] \\ & x_i \geq 0 \quad , i \in [m]\end{array}$$

55MQU – Métodos Quantitativos
Prof. Marcelo de Souza