Método Simplex

Conceitos básicos e algoritmo

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos
Universidade do Estado de Santa Catarina

Forma padrão

Pré-condições para aplicação do método simplex

- Função objetivo deve ser de **maximização**;

$$\textbf{maximiza} \quad z = \sum_{i \in [n]} c_i x_i$$

- Restrições devem ser **equações** com lado direito **não negativo**;
  - exceto restrições triviais (não-negatividade).

$$\sum_{i \in [n]} a_{ji} x_i = b_j, \quad \forall j \in [m]$$

- Todas as variáveis devem ser **não negativas**.

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in [n]$$

Forma padrão

Transformações (função objetivo)

Função objetivo de minimização para maximização (e vice-versa)

- Multiplica por -1.

$$\textbf{minimiza} \quad z = 3x_1 - 2x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \textbf{maximiza} \quad -z = -3x_1 + 2x_2$$

Forma padrão

Transformações (restrições)

Desigualdades para equações com lado direito não negativo

- As restrições representam limites no uso de algum recurso por meio de inequações;
- A diferença entre o primeiro e segundo membros da inequação indica a quantidade de recurso sobrando ou excedente;
- Para transformar desigualdades em equações introduzimos variáveis de **folga** ou **sobra**;
- Em caso de lado direito negativo, multiplicamos por -1.

Forma padrão

Transformações (restrições)

Desigualdades para equações com lado direito não negativo

- As restrições representam limites no uso de algum recurso por meio de inequações;
- A diferença entre o primeiro e segundo membros da inequação indica a quantidade de recurso sobrando ou excedente;
- Para transformar desigualdades em equações introduzimos variáveis de **folga** ou **sobra**;
- Em caso de lado direito negativo, multiplicamos por -1.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 16 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 16, \quad s_1 \geq 0$$

Forma padrão

Transformações (restrições)

Desigualdades para equações com lado direito não negativo

- As restrições representam limites no uso de algum recurso por meio de inequações;
- A diferença entre o primeiro e segundo membros da inequação indica a quantidade de recurso sobrando ou excedente;
- Para transformar desigualdades em equações introduzimos variáveis de **folga** ou **sobra**;
- Em caso de lado direito negativo, multiplicamos por -1.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 16 \iff 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 16, \quad s_1 \geq 0$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 6 \iff x_1 - 2x_2 - s_1 = 6, \quad s_1 \geq 0$$

Forma padrão

Transformações (restrições)

Desigualdades para equações com lado direito não negativo

- As restrições representam limites no uso de algum recurso por meio de inequações;
- A diferença entre o primeiro e segundo membros da inequação indica a quantidade de recurso sobrando ou excedente;
- Para transformar desigualdades em equações introduzimos variáveis de **folga** ou **sobra**;
- Em caso de lado direito negativo, multiplicamos por -1.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 16 \iff 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 16, \quad s_1 \geq 0$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 6 \iff x_1 - 2x_2 - s_1 = 6, \quad s_1 \geq 0$$

$$2x_1 - x_2 \geq -8 \iff -2x_1 + x_2 + s_1 = 8, \quad s_1 \geq 0$$

Forma padrão

Transformações (adicionais)

Restrição $\leq$ em $\geq$ (e vice-versa)

- Multiplica por -1.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 16 \quad \Longleftrightarrow \quad -3x_1 - 2x_2 \geq -16$$

Variável irrestrita x_i em não negativa

- Introduz novas variáveis $x_i^+ \geq 0$ e $x_i^- \geq 0$, e define $x_i = x_i^+ - x_i^-$.

$$2x_1 + x_2 \leq 10, \quad x_1 \geq 0, x_2 \lesseqgtr 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x_1 + x_2^+ - x_2^- \leq 10, \quad x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0.$$

Forma padrão

Exemplo

Dado o modelo abaixo, apresente o modelo equivalente na forma padrão.

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & z = 2x_1 - x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \geq 2 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& x_1 + 2x_2 = 3 \\
& x_1 \lesseqgtr 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Forma padrão

Exemplo

Dado o modelo abaixo, apresente o modelo equivalente na forma padrão.

$$
\begin{array}{rl}
\textbf{minimiza} & z = 2x_1 - x_2 \\
\textbf{sujeito a} & x_1 + x_2 \geq 2 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
 & x_1 + 2x_2 = 3 \\
 & x_1 \lesseqgtr 0, x_2 \geq 0
\end{array}
\iff
\begin{array}{rl}
\textbf{maximiza} & -z = -2x_1^+ + 2x_1^- + x_2 \\
\textbf{sujeito a} & x_1^+ - x_1^- + x_2 - s_1 = 2 \\
 & 3x_1^+ - 3x_1^- + 2x_2 + s_2 = 4 \\
 & x_1^+ - x_1^- + 2x_2 = 3 \\
 & x_1^+, x_1^-, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

Conceitos fundamentais

Se o modelo de PL está na forma padrão:

- ele é representado por um conjunto de m equações em n variáveis;
- sendo $m < n$ (regra geral);
  - se $m = n$: o sistema possui uma única solução trivial;
  - se $m > n$: existem pelo menos $m - n$ restrições redundantes.

Conceitos fundamentais

Se o modelo de PL está na forma padrão:

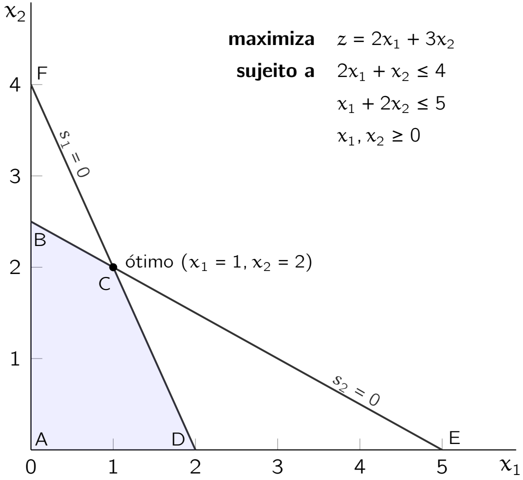
- ele é representado por um conjunto de m equações em n variáveis;
- sendo $m < n$ (regra geral);
  - se $m = n$: o sistema possui uma única solução trivial;
  - se $m > n$: existem pelo menos $m - n$ restrições redundantes.

Ao igualar $n - m$ variáveis a zero e resolver as m equações para as m variáveis restantes, obtemos uma **solução básica**, que corresponde a um ponto extremo (viável ou inviável) e, portanto, a uma solução candidata a ótima.

Conceitos fundamentais

Exemplo

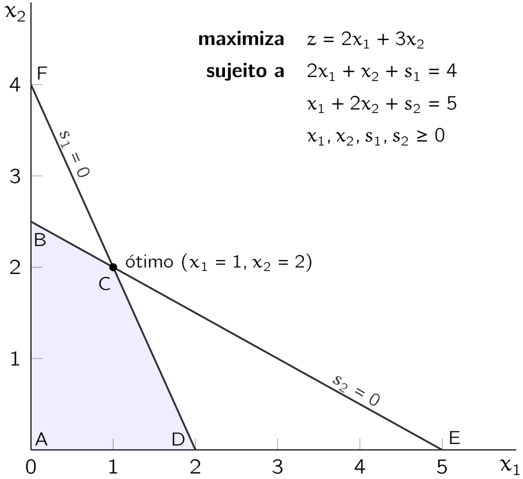
$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Conceitos fundamentais

Exemplo

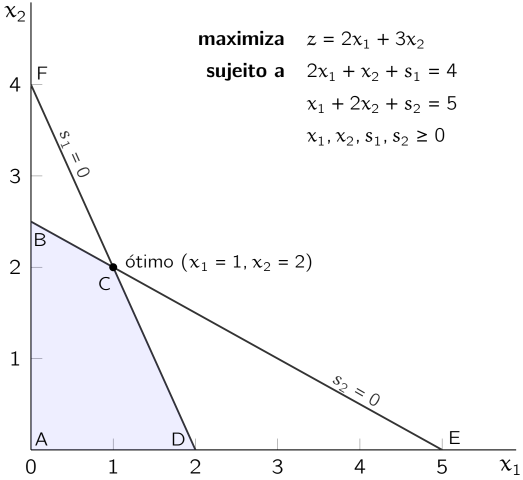
$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 5 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Conceitos fundamentais

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 5 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

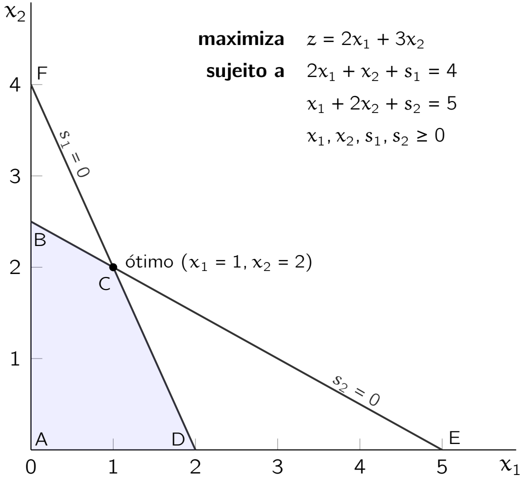


O sistema possui:

- $m = 2$ equações
  $\{2x_1 + x_2 + s_1 = 4, \quad x_1 + 2x_2 + s_2 = 5\}$;
- $n = 4$ variáveis $\{x_1, x_2, s_1, s_2\}$

Conceitos fundamentais

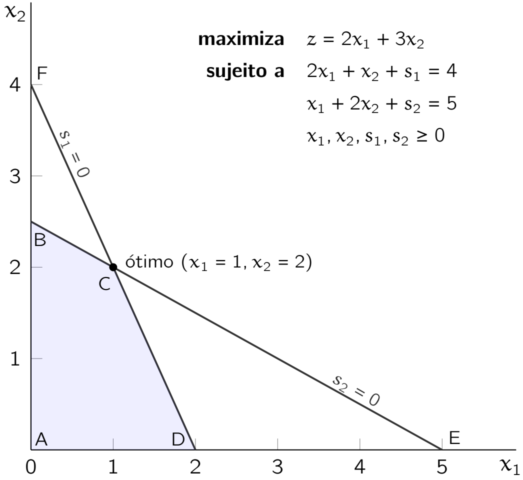
Exemplo



O sistema possui:

- $m = 2$ equações
  $\{2x_1 + x_2 + s_1 = 4, \quad x_1 + 2x_2 + s_2 = 5\};$
- $n = 4$ variáveis $\{x_1, x_2, s_1, s_2\}$

Logo, zerando $n - m = 4 - 2 = 2$ variáveis e determinando o valor das $m = 2$ variáveis restantes, obtemos uma solução básica.



$$
\begin{array}{rl}
\textbf{maximiza} & z = 2x_1 + 3x_2 \\
\textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\
 & x_1 + 2x_2 + s_2 = 5 \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

O sistema possui:

- $m = 2$ equações
  $\{2x_1 + x_2 + s_1 = 4, \quad x_1 + 2x_2 + s_2 = 5\}$;
- $n = 4$ variáveis $\{x_1, x_2, s_1, s_2\}$

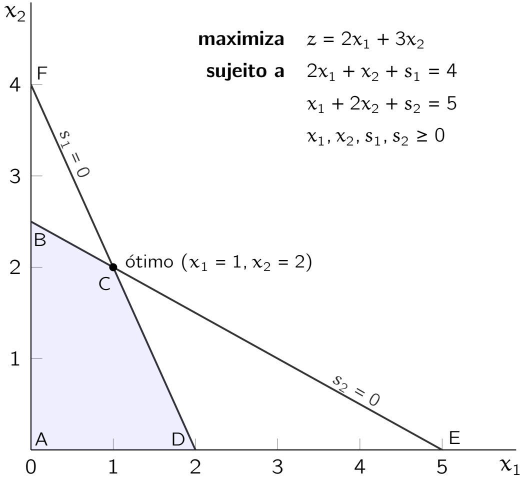
Logo, zerando $n - m = 4 - 2 = 2$ variáveis e determinando o valor das $m = 2$ variáveis restantes, obtemos uma solução básica.

Exemplos:

- $x_1 = 0,\ x_2 = 0 \ \rightarrow \ s_1 = 4,\ s_2 = 5$ (A)
- $s_1 = 0,\ s_2 = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 1,\ x_2 = 2$ (C)
- $x_1 = 0,\ s_1 = 0 \ \rightarrow \ x_2 = 4,\ s_2 = $ -3 (F)

Conceitos fundamentais

Exemplo



maximiza $z = 2x_1 + 3x_2$

sujeito a $2x_1 + x_2 + s_1 = 4$

$x_1 + 2x_2 + s_2 = 5$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Todas as soluções básicas

Variáveis não básicas	Variáveis básicas	Solução básica	Ponto	Viável	Valor
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	(4, 5)	A	Sim	0
(x_1, s_1)	(x_2, s_2)	(4, -3)	F	Não	–
(x_1, s_2)	(x_2, s_1)	(2,5, 1,5)	B	Sim	7,5
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	(2, 3)	D	Sim	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	(5, -6)	E	Não	–
(s_1, s_2)	(x_1, x_2)	(1, 2)	C	Sim	8

A solução $(1, 2)$ é a **solução ótima**, com valor 8.

Conceitos fundamentais

Solução algébrica por busca exaustiva

1. Determina todas as soluções básicas do modelo;
   - Zera $n - m$ variáveis (não básicas) e determina o valor para as m variáveis restantes (básicas); repete para toda combinação possível.
2. Calcula o valor da função objetivo para cada solução básica viável e retorna a melhor.

Conceitos fundamentais

Solução algébrica por busca exaustiva

1. Determina todas as soluções básicas do modelo;
   - Zera $n - m$ variáveis (não básicas) e determina o valor para as m variáveis restantes (básicas); repete para toda combinação possível.
2. Calcula o valor da função objetivo para cada solução básica viável e retorna a melhor.

Número total de soluções básicas é dado por

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Para $n = 20$ e $m = 10$ (PL pequeno): $C_{10}^{20} = 184.756$ conjuntos de 10×10 equações!

Conceitos fundamentais

Solução algébrica por busca exaustiva

1. Determina todas as soluções básicas do modelo;
   - Zera $n - m$ variáveis (não básicas) e determina o valor para as m variáveis restantes (básicas); repete para toda combinação possível.
2. Calcula o valor da função objetivo para cada solução básica viável e retorna a melhor.

Número total de soluções básicas é dado por

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Para $n = 20$ e $m = 10$ (PL pequeno): $C_{10}^{20} = 184.756$ conjuntos de 10×10 equações!

Método simplex propõe estratégias para avaliar somente parte das soluções básicas viáveis.

Método simplex

O método simplex foi desenvolvido pelo matemático **George Dantzig** em 1947. O corpo editorial da *SIAM News* o listou como um dos *Top 10 Algoritmos do Século XX*, junto com o método de Monte Carlo, o algoritmo *quicksort*, a transformada rápida de Fourier, e outros algoritmos importantes.

"*In terms of widespread use, George Dantzig's simplex method is among the most successful algorithms of all time.*"

(SIAM News, Volume 33, Number 4)

Método simplex

Natureza iterativa

Dado um programa linear na forma padrão:

1. Determina uma solução básica inicial;
2. Se a solução for ótima, retorna;
3. Caso contrário, determina a melhor solução básica viável adjacente;
4. Volta ao passo 2.

Método simplex

Natureza iterativa

Dado um programa linear na forma padrão:

1. Determina uma solução básica inicial;
2. Se a solução for ótima, retorna;
3. Caso contrário, determina a melhor solução básica viável adjacente;
4. Volta ao passo 2.

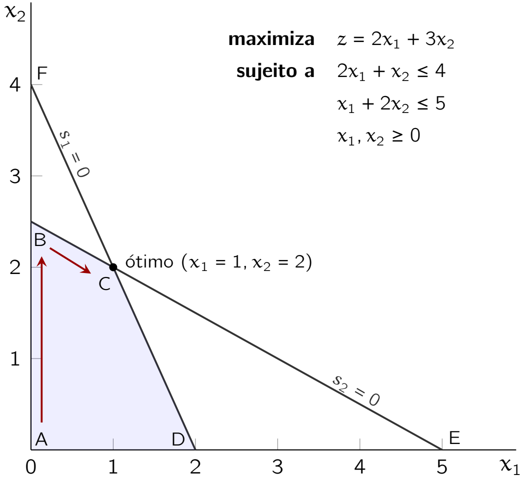
Solução básica inicial: geralmente $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, com função objetivo $z = 0$.

Determinação da solução adjacente: seleciona a variável não básica que produz a maior taxa de melhoria na função objetivo, e aumenta seu valor o máximo possível sem violar restrições.

- Neste caso, uma variável sai da base para dar lugar à nova.

Método simplex

Visão geral

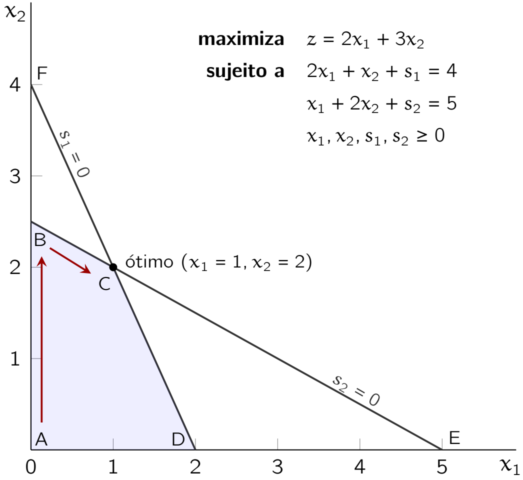


$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Método simplex

Visão geral

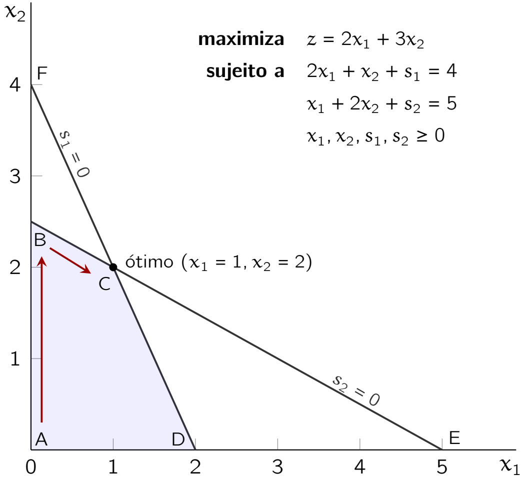
$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 5 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Método simplex

Visão geral

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 5 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Inicia no ponto A:

- Solução básica inicial: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$;
- Variáveis não básicas: (x_1, x_2);
- Variáveis básicas: (s_1, s_2);

Pela função objetivo $(z = 2x_1 + 3x_2)$:

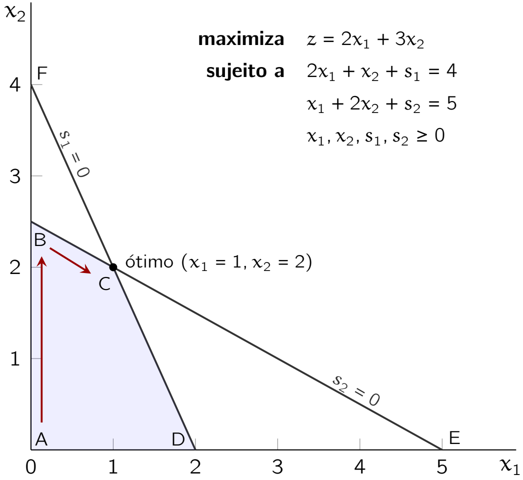
- Variável x_2 tem maior contribuição;
- Seleciona x_2 e aumenta o máximo possível;
- ...

Detalhes:

- Seleciona uma variável por vez;
- Sempre faz o caminho "guloso";
- A próxima solução é sempre "vizinha".

Método simplex

Visão geral



$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 5 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Variáveis básicas e não básicas:

Ponto extremo	Variáveis básicas	Variáveis não básicas
A	s_1, s_2	x_1, x_2
B	s_1, x_2	x_1, s_2
C	x_1, x_2	s_1, s_2

Passos:

1. x_2 *entra na base*; s_2 *sai da base*;
2. x_1 *entra na base*; s_1 *sai da base*.

Questões:

- Como decidir quem entra e quem sai?
- Como identificar a solução ótima?

Método simplex

Algoritmo

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \\
& -x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\
& x_2 + s_4 = 2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

$$
\begin{array}{rl}
\textbf{maximiza} & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} & 6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \\
& -x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\
& x_2 + s_4 = 2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{array}
$$

Dada a solução básica inicial $(x_1,x_2) = (0,0)$, montamos a tabela simplex inicial com:

- todas variáveis do modelo (colunas);
- as variáveis da base (linhas);
- equações do modelo e seus coeficientes (linhas);
- valor de cada equação (última coluna).

Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \\
& -x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\
& x_2 + s_4 = 2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Informações:

- Variáveis não básicas: (x_1, x_2)
- Variáveis básicas: (s_1, s_2, s_3, s_4)
- Solução básica: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 24$, $s_2 = 6$, $s_3 = 1$, $s_4 = 2$. Função objetivo $z = 0$.

Teste de otimalidade: solução é ótima se na linha z não há nenhum valor negativo.

- Se há valores negativos, mudar as variáveis correspondentes melhoram a solução!

Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$

sujeito a
$$6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$$
$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$$
$$-x_1 + x_2 + s_3 = 1$$
$$x_2 + s_4 = 2$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

Solução **não é ótima**. Logo,

- seleciona uma variável para entrar na base (aumentar o valor) e outra para sair (zerar o valor).

Seleção de variável entrante: aquela com coeficiente mais negativo na linha z.

- Ou seja, a que mais contribui para a melhoria da função objetivo!
- A variável define a **coluna pivô**.

Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \\
& -x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\
& x_2 + s_4 = 2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Variável x_1 tem o menor coeficiente (-5).

- x_1 entra na base e identificamos a coluna pivô.

Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$

sujeito a
$$6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$$
$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$$
$$-x_1 + x_2 + s_3 = 1$$
$$x_2 + s_4 = 2$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

Seleção de variável sainte: aquela cuja linha apresenta a menor razão não negativa.

- A variável define a **linha pivô**.

$$\text{Razão não negativa} = \frac{\text{valor da solução}}{\text{valor na coluna pivô}}$$

Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \\
& -x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\
& x_2 + s_4 = 2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Razão não negativa:

- Linha s_1: $24/6 = 4$
- Linha s_2: $6/1 = 6$
- Linha s_3: $1/-1 = -1$ (negativa; descarta)
- Linha s_4: $2/0 = \infty$ (descarta)

Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$

sujeito a

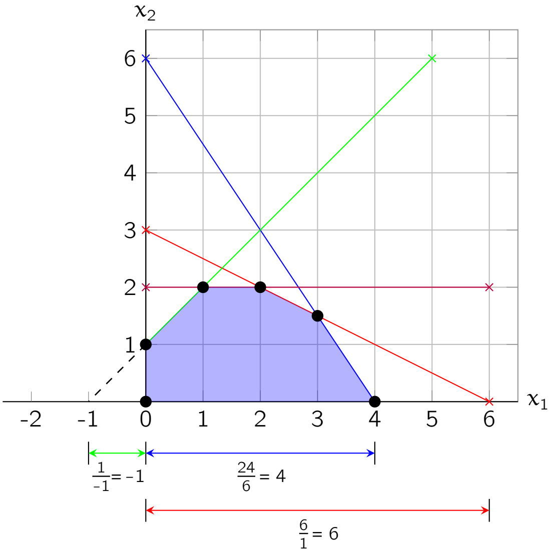
$$6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$$
$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$$
$$-x_1 + x_2 + s_3 = 1$$
$$x_2 + s_4 = 2$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

Razão não negativa:

- Linha s_1: $24/6 = 4 \leftarrow$ **menor valor não negativo!**
- Linha s_2: $6/1 = 6$
- Linha s_3: $1/-1 = -1$ (negativa; descarta)
- Linha s_4: $2/0 = \infty$ (descarta)

Método simplex

Algoritmo



maximiza	$z = 5x_1 + 4x_2$
sujeito a	$6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$
	$x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$
	$-x_1 + x_2 + s_3 = 1$
	$x_2 + s_4 = 2$
	$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

$$
\begin{array}{rl}
\textbf{maximiza} & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} & 6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \\
& -x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\
& x_2 + s_4 = 2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{array}
$$

Informações:

- Variável que entra na base: x_1 (terá seu valor aumentado);
- Variável que sai da base: s_1 (terá seu valor zerado);
- Coluna pivô: x_1;
- Linha pivô: s_1;
- **Elemento pivô**: 6 (interseção da coluna e linha pivôs).

Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z								
s_1								
s_2								
s_3								
s_4								

Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z								
s_1								
s_2								
s_3								
s_4								

Troca de variáveis (tabela): operações de Gauss-Jordan

- Na linha pivô:
  1. Substitui a variável que sai da base pela variável que entra na base (coluna "Base");
  2. Calcula a nova linha pivô como

$$\text{Nova linha pivô} = \frac{\text{linha pivô atual}}{\text{elemento pivô}}$$

Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z								
x_1	0	1	$^2/_3$	$^1/_6$	0	0	0	4
s_2								
s_3								
s_4								

Atualização da linha pivô:

$$\text{Linha pivô atual} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \div 6 \text{ (elemento pivô)}$$

$$\text{Nova linha pivô} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & ^2/_3 & ^1/_6 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z								
x_1	0	1	$^2/_3$	$^1/_6$	0	0	0	4
s_2								
s_3								
s_4								

Troca de variáveis (tabela): operações de Gauss-Jordan

- Nas demais linhas:

$$\text{Nova linha} = \text{linha atual} - \text{coeficiente na coluna pivô} \times \text{nova linha pivô}$$

Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	0	-2/3	5/6	0	0	0	20
x_1	0	1	2/3	1/6	0	0	0	4
s_2								
s_3								
s_4								

Atualização da linha z:

$$\begin{array}{rl} \text{Linha atual} \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \\ \text{Nova linha pivô} \rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times (-5) \quad \text{[coeficiente na coluna pivô]} \\ \hline \text{Nova linha} \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	0	$-2/3$	$5/6$	0	0	0	20
x_1	0	1	$2/3$	$1/6$	0	0	0	4
s_2	0	0	$4/3$	$-1/6$	1	0	0	2
s_3	0	0	$5/3$	$1/6$	0	1	0	5
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Informações:

- Variáveis não básicas: (s_1, x_2)
- Variáveis básicas: (x_1, s_2, s_3, s_4)
- Solução básica: $s_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 4$, $s_2 = 2$, $s_3 = 5$, $s_4 = 2$. Função objetivo $z = 20$.

Solução é ótima? Não, pois há valores negativos na linha z.

- Repita o processo.

55MQU – Métodos Quantitativos
Prof. Marcelo de Souza