

Método Simplex

Solução inicial artificial

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos
Universidade do Estado de Santa Catarina

Solução básica inicial



Um solução básica inicial conveniente é $x_i = 0$ (para toda variável i do problema original).

- ▶ Neste caso, as variáveis de folga formam a base da solução ($s_j \neq 0$);
- ▶ Essa solução só é viável quando todas as restrições forem do tipo \leq ;



Um solução básica inicial conveniente é $x_i = 0$ (para toda variável i do problema original).

- ▶ Neste caso, as variáveis de folga formam a base da solução ($s_j \neq 0$);
- ▶ Essa solução só é viável quando todas as restrições forem do tipo \leq ;

Quando há restrições \geq ou $=$, recorremos a uma solução básica inicial **artificial**.

1. Introduzimos variáveis artificiais para desempenhar o papel de folgas (problema auxiliar);
2. Usamos o problema auxiliar para encontrar uma solução básica viável e resolver o problema original.



Um solução básica inicial conveniente é $x_i = 0$ (para toda variável i do problema original).

- ▶ Neste caso, as variáveis de folga formam a base da solução ($s_j \neq 0$);
- ▶ Essa solução só é viável quando todas as restrições forem do tipo \leq ;

Quando há restrições \geq ou $=$, recorremos a uma solução básica inicial **artificial**.

1. Introduzimos variáveis artificiais para desempenhar o papel de folgas (problema auxiliar);
2. Usamos o problema auxiliar para encontrar uma solução básica viável e resolver o problema original.

Métodos:

- ▶ M-grande;
- ▶ Duas fases.



Dado um problema na forma padrão:

- ▶ Para cada equação i sem uma variável de folga, adiciona uma variável artificial R_i ;
- ▶ Penaliza R_i na função objetivo com um coeficiente M ;
- ▶ M deve ser suficientemente grande para que as R_i seja descartada na solução ótima.

$$M \rightarrow \begin{cases} \infty, & \text{para minimização,} \\ -\infty, & \text{para maximização.} \end{cases}$$

Se M é suficientemente grande e o **modelo tem solução viável**, então as variáveis artificiais são descartadas e recebem valor zero na solução ótima.



Método do M-grande

Exemplo – variáveis artificiais e programa auxiliar

minimiza $z = 4x_1 + x_2$

sujeito a $3x_1 + x_2 = 3$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Método do M-grande

Exemplo – variáveis artificiais e programa auxiliar

minimiza $z = 4x_1 + x_2$

sujeito a $3x_1 + x_2 = 3$

$$4x_1 + 3x_2 - s_1 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$



Método do M-grande

Exemplo – variáveis artificiais e programa auxiliar

$$\begin{array}{ll}\text{minimiza} & z = 4x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - s_1 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 4 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0\end{array}$$

(programa original)

$$\begin{array}{ll}\text{minimiza} & z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2 \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + x_2 + R_1 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - s_1 + R_2 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 4 \\ & x_1, x_2, s_1, R_1, R_2, s_2 \geq 0\end{array}$$

(programa auxiliar)

- ▶ R_1 e R_2 são as variáveis artificiais introduzidas, formando o programa auxiliar;
- ▶ Uma penalização M é usada na função objetivo como coeficientes de R_1 e R_2 ;
 - ▶ M é positivo porque o problema é de minimização.
- ▶ **Solução básica:** $(R_1, R_2, s_2) = (3, 6, 4)$.



Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

$$\text{minimiza } z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$$

$$\text{sujeito a } 3x_1 + x_2 + R_1 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - s_1 + R_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$$

$$x_1, x_2, s_1, R_1, R_2, s_2 \geq 0$$

Para resolver o programa linear:

- ▶ Opção 1: manipular a penalidade M algebricamente nas iterações do simplex;
- ▶ **Opção 2:** atribuir a M um valor alto suficiente para que R_i sejam descartadas.

Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	-4	-1	0	-100	-100	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

minimiza $z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$

sujeito a $3x_1 + x_2 + R_1 = 3$

$4x_1 + 3x_2 - s_1 + R_2 = 6$

$x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$

$x_1, x_2, s_1, R_1, R_2, s_2 \geq 0$

Para resolver o programa linear:

- ▶ Opção 1: manipular a penalidade M algebricamente nas iterações do simplex;
- ▶ **Opção 2:** atribuir a M um valor alto suficiente para que R_i sejam descartadas.

Como os coeficientes de x_1 e x_2 são 4 e 1, respectivamente, atribuímos 100.

- ▶ Montamos a tabela simplex com esses valores.



Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	-4	-1	0	-100	-100	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

A linha z não está consistente: o valor de z não é zero, pois R_i têm coeficientes não zero. Para corrigir:

$$\text{Nova linha } z = \text{Linha } z \text{ atual} + (M \times \text{linha } R_1 + M \times \text{linha } R_2)$$



Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	696	399	-100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Correção da linha z:

$$\begin{aligned}
 \text{Linha } z \text{ atual} &\rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & -100 & -100 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\
 &\quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times 100 + && [\text{linha } R_1 \times M] \\
 &\quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \times 100 && [\text{linha } R_2 \times M] \\
 \hline
 \text{Nova linha } z &\rightarrow \begin{pmatrix} 696 & 399 & -100 & 0 & 0 & 0 & 900 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	696	399	-100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Procedemos com a solução do programa pelo método simplex:

- ▶ Como trata-se de minimização, a variável entrante é a de coeficiente **mais positivo**: x_1 ;
- ▶ A variável sainte é R_1 , pois apresenta a **menor razão não negativa** ($3/3 = 1$);
- ▶ Prossiga com as iterações do método simplex.



Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	696	399	-100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z							
x_1							
R_2							
s_2							

Atualização da linha pivô:

$$\text{Nova linha pivô} = \frac{\text{linha pivô atual}}{\text{elemento pivô}}$$

Atualização das demais linhas:

$$\text{Nova linha} = \text{linha atual} - \text{coeficiente na coluna pivô} \times \text{nova linha pivô}$$



Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	696	399	-100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	167	-100	-232	0	0	204
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1
R_2	0	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$	1	0	2
s_2	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	3



Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	696	399	-100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	167	-100	-232	0	0	204
x_1	1	$1/3$	0	$1/3$	0	0	1
R_2	0	$5/3$	-1	$-4/3$	1	0	2
s_2	0	$5/3$	0	$-1/3$	0	1	3

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	0	0,2	-98,4	-100,2	0	3,6
x_1	1	0	$1/5$	$3/5$	$-1/5$	0	$3/5$
x_2	0	1	$-3/5$	$-4/5$	$3/5$	0	$6/5$
s_2	0	0	1	1	-1	1	1

Solução básica viável para o programa original



Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	696	399	-100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	0	0,2	-98,4	-100,2	0	3,6
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
s_2	0	0	1	1	-1	1	1

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	167	-100	-232	0	0	204
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1
R_2	0	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$	1	0	2
s_2	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	3

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	0	0	-98,6	-100	-0,2	3,4
x_1	1	0	0	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$
s_1	0	0	1	1	-1	1	1



Método do M-grande

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	696	399	-100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	0	0,2	-98,4	-100,2	0	3,6
x_1	1	0	$1/5$	$3/5$	$-1/5$	0	$3/5$
x_2	0	1	$-3/5$	$-4/5$	$3/5$	0	$6/5$
s_2	0	0	1	1	-1	1	1

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	167	-100	-232	0	0	204
x_1	1	$1/3$	0	$1/3$	0	0	1
R_2	0	$5/3$	-1	$-4/3$	1	0	2
s_2	0	$5/3$	0	$-1/3$	0	1	3

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	0	0	-98,6	-100	-0,2	3,4
x_1	1	0	0	$2/5$	0	$-1/5$	$2/5$
x_2	0	1	0	$-1/5$	0	$3/5$	$9/5$
s_1	0	0	1	1	-1	1	1

Solução ótima



Método do M-grande

Exemplo – solução inicial para o programa original

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
z	0	0	0	-98,6	-100	-0,2	3,4
x_1	1	0	0	$2/5$	0	$-1/5$	$2/5$
x_2	0	1	0	$-1/5$	0	$3/5$	$9/5$
s_1	0	0	1	1	-1	1	1

A solução ótima é:

- ▶ Variáveis não básicas: $s_2 = 0$ (bem como $R_1 = 0$ e $R_2 = 0$);
- ▶ Variáveis básicas: $x_1 = 2/5$, $x_2 = 9/5$ e $s_1 = 1$;
- ▶ Função objetivo: $z = 3,4$.



Fase 1: encontrar uma solução básica viável (transformando as equações de restrição originais);

Fase 2: resolver o programa original com a solução encontrada e as restrições transformadas.



Fase 1: encontrar uma solução básica viável (transformando as equações de restrição originais);

1. expressar o problema na forma de equações;
2. adicionar as variáveis artificiais (similar ao método do M-grande);
3. substituir a função objetivo pela minimização de $r = \sum R_j$, para toda variável artificial j ;
4. resolver o programa auxiliar resultante.
 - ▶ se o valor mínimo de r for positivo, o programa original não tem nenhuma solução viável;
 - ▶ caso contrário, procedemos à fase 2.

Fase 2: resolver o programa original com a solução encontrada e as restrições transformadas.

Método das duas fases

Exemplo – programa auxiliar



$$\begin{array}{ll}\text{minimiza} & z = 4x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - s_1 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 4 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0\end{array}$$

(programa original)

$$\begin{array}{ll}\text{minimiza} & r = R_1 + R_2 \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + x_2 + R_1 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - s_1 + R_2 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 4 \\ & x_1, x_2, s_1, R_1, R_2, s_2 \geq 0\end{array}$$

(programa auxiliar)

- ▶ A função objetivo r é minimizada, mesmo se o programa original for de maximização;
- ▶ Não há penalização das variáveis artificiais na função objetivo;
- ▶ **Solução básica:** $(R_1, R_2, s_2) = (3, 6, 4)$.



Método das duas fases

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
r	0	0	0	-1	-1	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

minimiza $r = R_1 + R_2$

sujeito a $3x_1 + x_2 + R_1 = 3$

$4x_1 + 3x_2 - s_1 + R_2 = 6$

$x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$

$x_1, x_2, s_1, R_1, R_2, s_2 \geq 0$

Para corrigir a inconsistência da linha r (causada por variáveis não nulas na função objetivo):

$$\text{Nova linha r} = \text{Linha r atual} + (1 \times \text{linha } R_1 + 1 \times \text{linha } R_2)$$

(note que 1 é o coeficiente de R_1 e R_2 na função objetivo)

Método das duas fases

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
r	7	4	-1	0	0	0	9
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Correção da linha r:

$$\begin{aligned}
 \text{Linha r atual} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\
 &\quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times 1 + \quad [\text{linha } R_1 \times 1] \\
 &\quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \times 1 \quad [\text{linha } R_2 \times 1] \\
 \hline
 \text{Nova linha r} &\rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



Método das duas fases

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
r	7	4	-1	0	0	0	9
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
r	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	1	0	$1/5$	$3/5$	$-1/5$	0	$3/5$
x_2	0	1	$-3/5$	$-4/5$	$3/5$	0	$6/5$
s_2	0	0	1	1	-1	1	1

Solução ótima para o programa auxiliar

Resolvendo pelo método simplex, chegamos à solução ótima do programa auxiliar:

- ▶ Variáveis não básicas: $s_1 = 0$, $R_1 = 0$ e $R_2 = 0$;
- ▶ Solução ótima: $x_1 = 3/5$, $x_2 = 6/5$, $s_2 = 1$;
- ▶ Função objetivo: $r = 0$.

Método das duas fases

Exemplo – solução do programa auxiliar

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
r	7	4	-1	0	0	0	9
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	1	2	0	0	0	1	4

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
r	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	1	0	$1/5$	$3/5$	$-1/5$	0	$3/5$
x_2	0	1	$-3/5$	$-4/5$	$3/5$	0	$6/5$
s_2	0	0	1	1	-1	1	1

Solução ótima para o programa auxiliar

Resolvendo pelo método simplex, chegamos à solução ótima do programa auxiliar:

- ▶ Variáveis não básicas: $s_1 = 0$, $R_1 = 0$ e $R_2 = 0$;
- ▶ Solução ótima: $x_1 = 3/5$, $x_2 = 6/5$, $s_2 = 1$;
- ▶ Função objetivo: $r = 0$.

Como a solução ótima tem $r = 0$, a fase 1 produz uma solução básica viável. Com isso, temos:

- ▶ Uma solução básica inicial para resolver o programa original;
- ▶ Restrições do programa original ajustadas para que a solução seja viável.

Método das duas fases

Exemplo – solução do programa auxiliar

minimiza $z = 4x_1 + x_2$

sujeito a $x_1 + \frac{1}{5} \cdot s_1 = \frac{3}{5}$

$x_2 - \frac{3}{5} \cdot s_1 = \frac{6}{5}$

$s_1 + s_2 = 1$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Base	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Sol.
r	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
s_2	0	0	1	1	-1	1	1

Ajustamos o programa original com os coeficientes da solução ótima do programa auxiliar.

- ▶ A função objetivo é a mesma do programa original;
- ▶ As variáveis artificiais são eliminadas;
- ▶ As restrições são dadas pelas linhas da tabela da solução ótima do programa auxiliar.



Método das duas fases

Exemplo – solução do programa auxiliar

minimiza $z = 4x_1 + x_2$
sujeito a $x_1 + \frac{1}{5} \cdot s_1 = \frac{3}{5}$
 $x_2 - \frac{3}{5} \cdot s_1 = \frac{6}{5}$
 $s_1 + s_2 = 1$
 $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	-4	-1	0	0	0
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
s_2	0	0	1	1	1

A tabela associada ao programa original ajustado (acima) possui somente as variáveis não artificiais.

- Como as variáveis x_1 e x_2 da função objetivo são não nulas, a linha z precisa ser ajustada.

$$\text{Nova linha } z = \text{Linha } z \text{ atual} + (4 \times \text{linha } x_1 + 1 \times \text{linha } x_2)$$



Método das duas fases

Exemplo – solução do programa auxiliar

minimiza $z = 4x_1 + x_2$
sujeito a $x_1 + 1/5 \cdot s_1 = 3/5$
 $x_2 - 3/5 \cdot s_1 = 6/5$
 $s_1 + s_2 = 1$
 $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Sol.
z	0	0	$1/5$	0	$18/5$
x_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$
x_2	0	1	$-3/5$	0	$6/5$
s_2	0	0	1	1	1

Com a tabela corrigida, use o método simplex para encontrar a solução ótima do programa original.

- ▶ Solução ótima: $x_1 = 2/5$, $x_2 = 9/5$ e $s_1 = 1$ ($s_2 = 0$);
- ▶ Função objetivo: $z = 3,4$.

55MQU – Métodos Quantitativos
Prof. Marcelo de Souza