

Programação Linear

Solução analítica

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos
Universidade do Estado de Santa Catarina





Forma padrão

Pré-condições para aplicação do método simplex

- ▶ Função objetivo deve ser de **maximização**;

$$\text{maximiza } z = \sum_{i \in [n]} c_i x_i$$

- ▶ Restrições devem ser **equações** com lado direito **não negativo**;
 - ▶ exceto restrições triviais (não-negatividade).

$$\sum_{i \in [n]} a_{ji} x_i = b_j, \quad \forall j \in [m]$$

- ▶ Todas as variáveis devem ser **não negativas**.

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in [n]$$



Forma padrão

Transformações (função objetivo)

Função objetivo de minimização para maximização (e vice-versa)

- Multiplica por -1 .

$$\text{minimiza } z = 3x_1 - 2x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{maximiza } -z = -3x_1 + 2x_2$$



Forma padrão

Transformações (restrições)

Desigualdades para equações com lado direito não negativo

- ▶ As restrições representam limites no uso de algum recurso por meio de inequações;
- ▶ A diferença entre o primeiro e segundo membros da inequação indica a quantidade de recurso sobrando ou excedente;
- ▶ Para transformar desigualdades em equações introduzimos variáveis de **folga** ou **sobra**;
- ▶ Em caso de lado direito negativo, multiplicamos por -1 .



Forma padrão

Transformações (restrições)

Desigualdades para equações com lado direito não negativo

- ▶ As restrições representam limites no uso de algum recurso por meio de inequações;
- ▶ A diferença entre o primeiro e segundo membros da inequação indica a quantidade de recurso sobrando ou excedente;
- ▶ Para transformar desigualdades em equações introduzimos variáveis de **folga** ou **sobra**;
- ▶ Em caso de lado direito negativo, multiplicamos por -1 .

$$3x_1 + 2x_2 \leq 16 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 16, \quad s_1 \geq 0$$

Forma padrão

Transformações (restrições)



Desigualdades para equações com lado direito não negativo

- ▶ As restrições representam limites no uso de algum recurso por meio de inequações;
- ▶ A diferença entre o primeiro e segundo membros da inequação indica a quantidade de recurso sobrando ou excedente;
- ▶ Para transformar desigualdades em equações introduzimos variáveis de **folga** ou **sobra**;
- ▶ Em caso de lado direito negativo, multiplicamos por -1 .

$$3x_1 + 2x_2 \leq 16 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 16, \quad s_1 \geq 0$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 6 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 - 2x_2 - s_1 = 6, \quad s_1 \geq 0$$

Forma padrão

Transformações (restrições)



Desigualdades para equações com lado direito não negativo

- ▶ As restrições representam limites no uso de algum recurso por meio de inequações;
- ▶ A diferença entre o primeiro e segundo membros da inequação indica a quantidade de recurso sobrando ou excedente;
- ▶ Para transformar desigualdades em equações introduzimos variáveis de **folga** ou **sobra**;
- ▶ Em caso de lado direito negativo, multiplicamos por -1 .

$$3x_1 + 2x_2 \leq 16 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 16, \quad s_1 \geq 0$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 6 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 - 2x_2 - s_1 = 6, \quad s_1 \geq 0$$

$$2x_1 - x_2 \geq -8 \quad \Longleftrightarrow \quad -2x_1 + x_2 + s_1 = 8, \quad s_1 \geq 0$$



Forma padrão

Transformações (adicionais)

Restrição \leq em \geq (e vice-versa)

- Multiplica por -1 .

$$3x_1 + 2x_2 \leq 16 \quad \Longleftrightarrow \quad -3x_1 - 2x_2 \geq -16$$

Variável irrestrita x_i em não negativa

- Introduz novas variáveis $x_i^+ \geq 0$ e $x_i^- \geq 0$, e define $x_i = x_i^+ - x_i^-$.

$$2x_1 + x_2 \leq 10, \quad x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x_1 + x_2^+ - x_2^- \leq 10, \quad x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0.$$

Forma padrão

Exemplo



Dado o modelo abaixo, apresente o modelo equivalente na forma padrão.

minimiza $z = 2x_1 - x_2$

sujeito a $x_1 + x_2 \geq 2$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$$

Forma padrão

Exemplo



Dado o modelo abaixo, apresente o modelo equivalente na forma padrão.

$$\text{minimiza } z = 2x_1 - x_2$$

$$\text{sujeito a } x_1 + x_2 \geq 2$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$$

$$\iff$$

$$\text{maximiza } -z = -2x_1^+ + 2x_1^- + x_2$$

$$\text{sujeito a } x_1^+ - x_1^- + x_2 - s_1 = 2$$

$$3x_1^+ - 3x_1^- + 2x_2 + s_2 = 4$$

$$x_1^+ - x_1^- + 2x_2 = 3$$

$$x_1^+, x_1^-, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$



Se o modelo de PL está na forma padrão:

- ▶ ele é representado por um conjunto de m equações em n variáveis;
- ▶ sendo $m < n$ (regra geral);
 - ▶ se $m = n$: o sistema possui uma única solução trivial;
 - ▶ se $m > n$: existem pelo menos $m - n$ restrições redundantes.



Se o modelo de PL está na forma padrão:

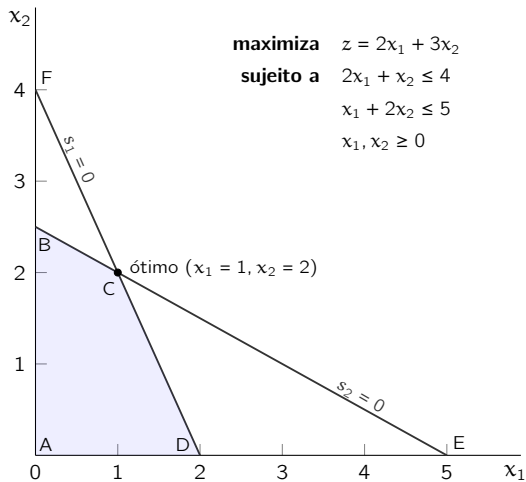
- ▶ ele é representado por um conjunto de m equações em n variáveis;
- ▶ sendo $m < n$ (regra geral);
 - ▶ se $m = n$: o sistema possui uma única solução trivial;
 - ▶ se $m > n$: existem pelo menos $m - n$ restrições redundantes.

Ao igualar $n - m$ variáveis a zero e resolver as m equações para as m variáveis restantes, obtemos uma **solução básica**, que corresponde a um ponto extremo (viável ou inviável) e, portanto, a uma solução candidata a ótima.

Conceitos fundamentais

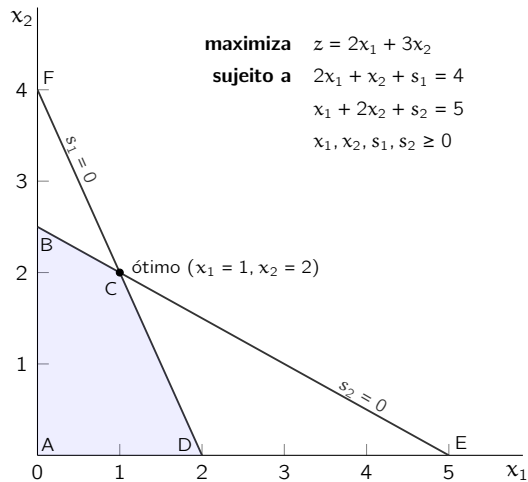
Exemplo

maximiza $z = 2x_1 + 3x_2$
sujeito a $2x_1 + x_2 \leq 4$
 $x_1 + 2x_2 \leq 5$
 $x_1, x_2 \geq 0$



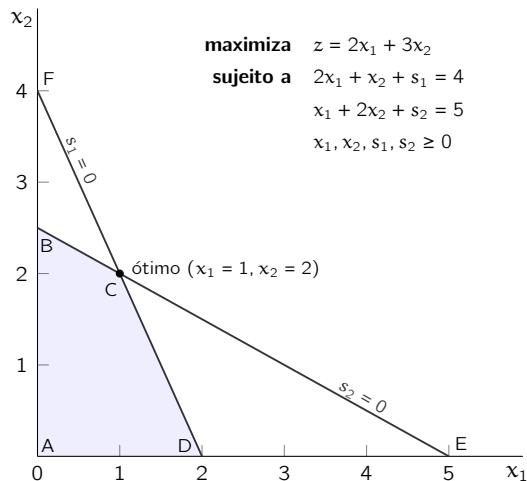
Conceitos fundamentais

Exemplo



Conceitos fundamentais

Exemplo

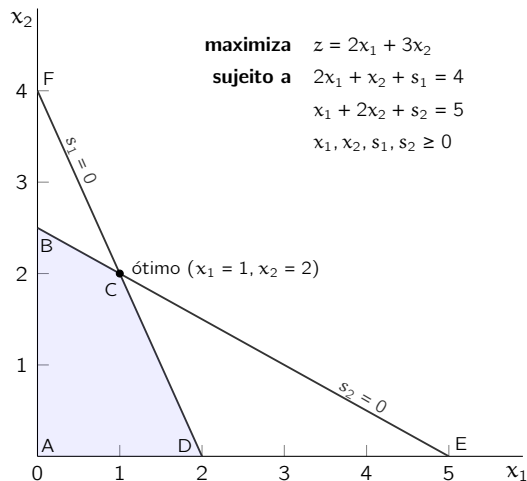


O sistema possui:

- ▶ $m = 2$ equações
 $\{2x_1 + x_2 + s_1 = 4, \quad x_1 + 2x_2 + s_2 = 5\};$
- ▶ $n = 4$ variáveis $\{x_1, x_2, s_1, s_2\}$

Conceitos fundamentais

Exemplo



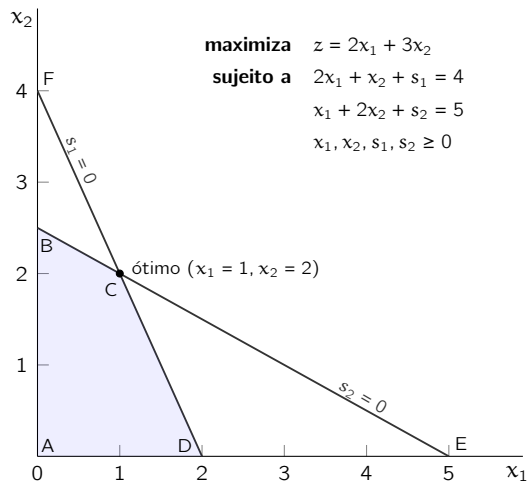
O sistema possui:

- ▶ $m = 2$ equações
 $\{2x_1 + x_2 + s_1 = 4, \quad x_1 + 2x_2 + s_2 = 5\};$
- ▶ $n = 4$ variáveis $\{x_1, x_2, s_1, s_2\}$

Logo, zerando $n - m = 4 - 2 = 2$ variáveis e determinando o valor das $m = 2$ variáveis restantes, obtemos uma solução básica.

Conceitos fundamentais

Exemplo



O sistema possui:

- ▶ $m = 2$ equações
 $\{2x_1 + x_2 + s_1 = 4, \quad x_1 + 2x_2 + s_2 = 5\};$
- ▶ $n = 4$ variáveis $\{x_1, x_2, s_1, s_2\}$

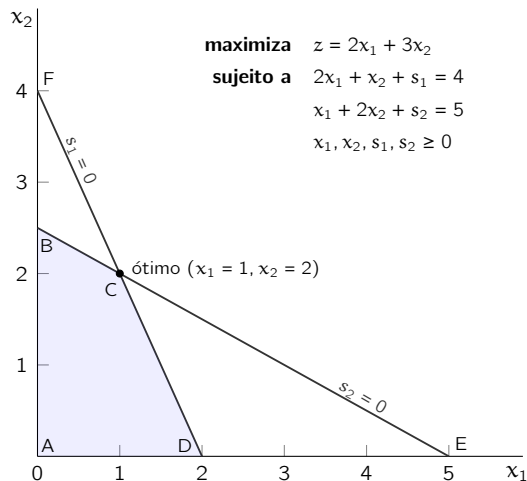
Logo, zerando $n - m = 4 - 2 = 2$ variáveis e determinando o valor das $m = 2$ variáveis restantes, obtemos uma solução básica.

Exemplos:

- ▶ $x_1 = 0, x_2 = 0 \rightarrow s_1 = 4, s_2 = 5$ (A)
- ▶ $s_1 = 0, s_2 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$ (C)
- ▶ $x_1 = 0, s_1 = 0 \rightarrow x_2 = 4, s_2 = -3$ (F)

Conceitos fundamentais

Exemplo



Todas as soluções básicas

Variáveis não básicas	Variáveis básicas	Solução básica	Ponto	Viável	Valor
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	(4, 5)	A	Sim	0
(x_1, s_1)	(x_2, s_2)	(4, -3)	F	Não	-
(x_1, s_2)	(x_2, s_1)	(2,5, 1,5)	B	Sim	7,5
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	(2, 3)	D	Sim	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	(5, -6)	E	Não	-
(s_1, s_2)	(x_1, x_2)	(1, 2)	C	Sim	8

A solução (1, 2) é a **solução ótima**, com valor 8.



Solução algébrica por busca exaustiva

1. Determina todas as soluções básicas do modelo;
 - ▶ Zera $n - m$ variáveis (não básicas) e determina o valor para as m variáveis restantes (básicas); repete para toda combinação possível.
2. Calcula o valor da função objetivo para cada solução básica viável e retorna a melhor.



Solução algébrica por busca exaustiva

1. Determina todas as soluções básicas do modelo;
 - ▶ Zera $n - m$ variáveis (não básicas) e determina o valor para as m variáveis restantes (básicas); repete para toda combinação possível.
2. Calcula o valor da função objetivo para cada solução básica viável e retorna a melhor.

Número total de soluções básicas é dado por

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Para $n = 20$ e $m = 10$ (PL pequeno): $C_{10}^{20} = 184.756$ conjuntos de 10×10 equações!



Solução algébrica por busca exaustiva

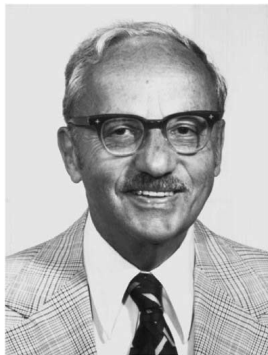
1. Determina todas as soluções básicas do modelo;
 - ▶ Zera $n - m$ variáveis (não básicas) e determina o valor para as m variáveis restantes (básicas); repete para toda combinação possível.
2. Calcula o valor da função objetivo para cada solução básica viável e retorna a melhor.

Número total de soluções básicas é dado por

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Para $n = 20$ e $m = 10$ (PL pequeno): $C_{10}^{20} = 184.756$ conjuntos de 10×10 equações!

Método simplex propõe estratégias para avaliar somente parte das soluções básicas viáveis.



George B. Dantzig

O método simplex foi desenvolvido pelo matemático **George Dantzig** em 1947. O corpo editorial da *SIAM News* o listou como um dos *Top 10 Algoritmos do Século XX*, junto com o método de Monte Carlo, o algoritmo *quicksort*, a transformada rápida de Fourier, e outros algoritmos importantes.

"In terms of widespread use, George Dantzig's simplex method is among the most successful algorithms of all time."

(SIAM News, Volume 33, Number 4)



Método simplex

Natureza iterativa

Dado um programa linear na forma padrão:

1. Determina uma solução básica inicial;
2. Se a solução for ótima, retorna;
3. Caso contrário, determina a melhor solução básica viável adjacente;
4. Volta ao passo 2.

Método simplex

Natureza iterativa



Dado um programa linear na forma padrão:

1. Determina uma solução básica inicial;
2. Se a solução for ótima, retorna;
3. Caso contrário, determina a melhor solução básica viável adjacente;
4. Volta ao passo 2.

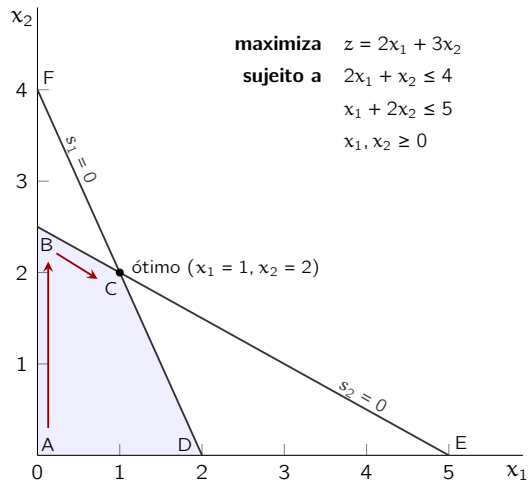
Solução básica inicial: geralmente $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, com função objetivo $z = 0$.

Determinação da solução adjacente: seleciona a variável não básica que produz a maior taxa de melhoria na função objetivo, e aumenta seu valor o máximo possível sem violar restrições.

- Neste caso, uma variável sai da base para dar lugar à nova.

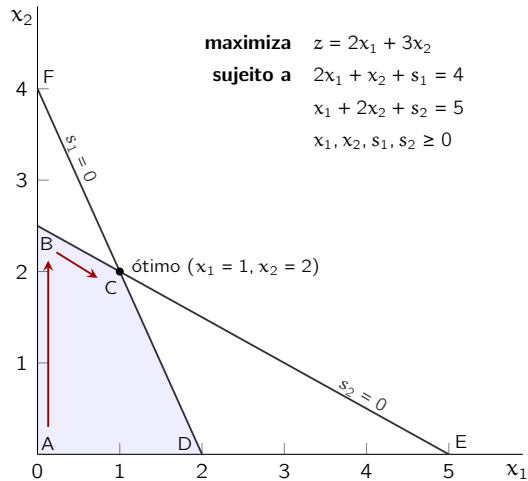
Método simplex

Visão geral



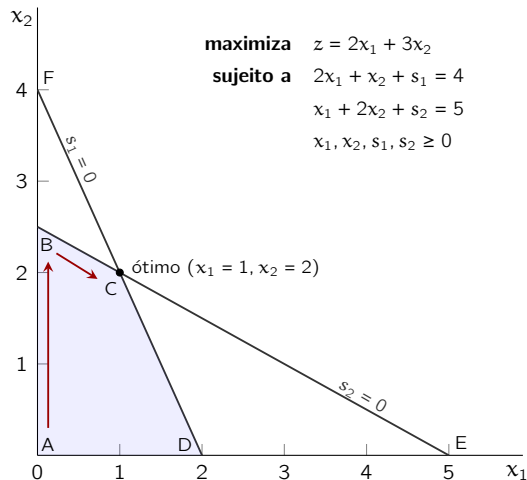
Método simplex

Visão geral



Método simplex

Visão geral



Inicia no ponto A:

- ▶ Solução básica inicial: $x_1 = 0, x_2 = 0$;
- ▶ Variáveis não básicas: (x_1, x_2) ;
- ▶ Variáveis básicas: (s_1, s_2) ;

Pela função objetivo ($z = 2x_1 + 3x_2$):

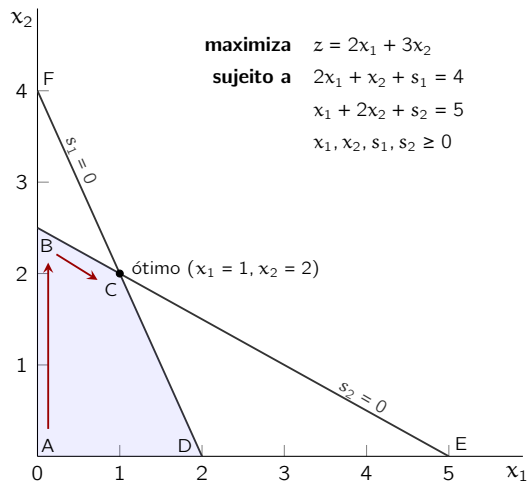
- ▶ Variável x_2 tem maior contribuição;
- ▶ Seleciona x_2 e aumenta o máximo possível;
- ▶ ...

Detalhes:

- ▶ Seleciona uma variável por vez;
- ▶ Sempre faz o caminho "guloso";
- ▶ A próxima solução é sempre "vizinha".

Método simplex

Visão geral



Variáveis básicas e não básicas:

Ponto extremo	Variáveis básicas	Variáveis não básicas
A	s_1, s_2	x_1, x_2
B	s_1, x_2	x_1, s_2
C	x_1, x_2	s_1, s_2

Passos:

1. x_2 entra na base; s_2 sai da base;
2. x_1 entra na base; s_1 sai da base.

Questões:

- ▶ Como decidir quem entra e quem sai?
- ▶ Como identificar a solução ótima?

Método simplex

Algoritmo



maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$

sujeito a $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$$

$$-x_1 + x_2 + s_3 = 1$$

$$x_2 + s_4 = 2$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$



Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$
sujeito a $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$
 $x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$
 $-x_1 + x_2 + s_3 = 1$
 $x_2 + s_4 = 2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Dada a solução básica inicial $(x_1, x_2) = (0, 0)$, montamos a tabela simplex inicial com:

- ▶ todas variáveis do modelo (colunas);
- ▶ as variáveis da base (linhas);
- ▶ equações do modelo e seus coeficientes (linhas);
- ▶ valor de cada equação (última coluna).



Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$
sujeito a $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$
 $x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$
 $-x_1 + x_2 + s_3 = 1$
 $x_2 + s_4 = 2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Informações:

- ▶ Variáveis não básicas: (x_1, x_2)
- ▶ Variáveis básicas: (s_1, s_2, s_3, s_4)
- ▶ Solução básica: $x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 24, s_2 = 6, s_3 = 1, s_4 = 2$. Função objetivo $z = 0$.

Teste de otimalidade: solução é ótima se na linha z não há nenhum valor negativo.

- ▶ Se há valores negativos, mudar as variáveis correspondentes melhoram a solução!



Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$
sujeito a $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$
 $x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$
 $-x_1 + x_2 + s_3 = 1$
 $x_2 + s_4 = 2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Solução **não é ótima**. Logo,

- ▶ seleciona uma variável para entrar na base (aumentar o valor) e outra para sair (zerar o valor).

Seleção de variável entrante: aquela com coeficiente mais negativo na linha z.

- ▶ Ou seja, a que mais contribui para a melhoria da função objetivo!
- ▶ A variável define a **coluna pivô**.



Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$
sujeito a $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$
 $x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$
 $-x_1 + x_2 + s_3 = 1$
 $x_2 + s_4 = 2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Variável x_1 tem o menor coeficiente (-5).

- ▶ x_1 entra na base e identificamos a coluna pivô.

Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$
sujeito a $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$
 $x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$
 $-x_1 + x_2 + s_3 = 1$
 $x_2 + s_4 = 2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Seleção de variável sainte: aquela cuja linha apresenta a menor razão não negativa.

► A variável define a **linha pivô**.

$$\text{Razão não negativa} = \frac{\text{valor da solução}}{\text{valor na coluna pivô}}$$

Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$
sujeito a $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$
 $x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$
 $-x_1 + x_2 + s_3 = 1$
 $x_2 + s_4 = 2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Razão não negativa:

- ▶ Linha s_1 : $24/6 = 4$
- ▶ Linha s_2 : $6/1 = 6$
- ▶ Linha s_3 : $1/-1 = -1$ (negativa; descarta)
- ▶ Linha s_4 : $2/0 = \infty$ (descarta)



Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

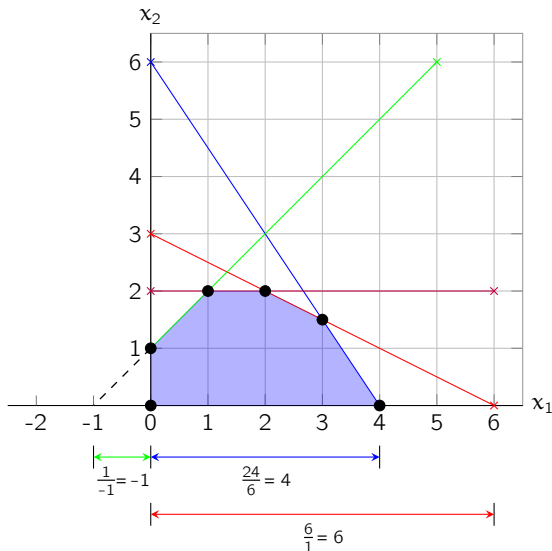
maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$
sujeito a $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$
 $x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$
 $-x_1 + x_2 + s_3 = 1$
 $x_2 + s_4 = 2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Razão não negativa:

- ▶ Linha s_1 : $24/6 = 4 \leftarrow$ **menor valor não negativo!**
- ▶ Linha s_2 : $6/1 = 6$
- ▶ Linha s_3 : $1/-1 = -1$ (negativa; descarta)
- ▶ Linha s_4 : $2/0 = \infty$ (descarta)

Método simplex

Algoritmo



maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$

sujeito a $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$$

$$-x_1 + x_2 + s_3 = 1$$

$$x_2 + s_4 = 2$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

maximiza $z = 5x_1 + 4x_2$
sujeito a $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$
 $x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$
 $-x_1 + x_2 + s_3 = 1$
 $x_2 + s_4 = 2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Informações:

- ▶ Variável que entra na base: x_1 (terá seu valor aumentado);
- ▶ Variável que sai da base: s_1 (terá seu valor zerado);
- ▶ Coluna pivô: x_1 ;
- ▶ Linha pivô: s_1 ;
- ▶ **Elemento pivô:** 6 (interseção da coluna e linha pivôs).



Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z								
s_1								
s_2								
s_3								
s_4								

Método simplex

Algoritmo



Base	z	x ₁	x ₂	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s ₁	0	6	4	1	0	0	0	24
s ₂	0	1	2	0	1	0	0	6
s ₃	0	-1	1	0	0	1	0	1
s ₄	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	x ₁	x ₂	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	Sol.
z								
s ₁								
s ₂								
s ₃								
s ₄								

Troca de variáveis (tabela): operações de Gauss-Jordan

► Na linha pivô:

1. Substitui a variável que sai da base pela variável que entra na base (coluna “Base”);
2. Calcula a nova linha pivô como

$$\text{Nova linha pivô} = \frac{\text{linha pivô atual}}{\text{elemento pivô}}$$

Método simplex

Algoritmo



Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z								
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	4
s_2								
s_3								
s_4								

Atualização da linha pivô:

Linha pivô atual $\rightarrow \left(0 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 24 \right) \div 6$ (elemento pivô)

Nova linha pivô $\rightarrow \left(0 \quad 1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \right)$



Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z								
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	4
s_2								
s_3								
s_4								

Troca de variáveis (tabela): operações de Gauss-Jordan

► Nas demais linhas:

Nova linha = linha atual – coeficiente na coluna pivô \times nova linha pivô

Método simplex

Algoritmo



Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	0	$-2/3$	$5/6$	0	0	0	20
x_1	0	1	$2/3$	$1/6$	0	0	0	4
s_2								
s_3								
s_4								

Atualização da linha z:

$$\text{Linha atual} \rightarrow \left(1 \quad -5 \quad -4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right) -$$

$$\text{Nova linha pivô} \rightarrow \left(0 \quad 1 \quad 2/3 \quad 1/6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \right) \times (-5) \quad [\text{coeficiente na coluna pivô}]$$

$$\text{Nova linha} \rightarrow \left(1 \quad 0 \quad -2/3 \quad 5/6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 20 \right)$$



Método simplex

Algoritmo

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Sol.
z	1	0	$-2/3$	$5/6$	0	0	0	20
x_1	0	1	$2/3$	$1/6$	0	0	0	4
s_2	0	0	$4/3$	$-1/6$	1	0	0	2
s_3	0	0	$5/3$	$1/6$	0	1	0	5
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Informações:

- ▶ Variáveis não básicas: (s_1, x_2)
- ▶ Variáveis básicas: (x_1, s_2, s_3, s_4)
- ▶ Solução básica: $s_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 4$, $s_2 = 2$, $s_3 = 5$, $s_4 = 2$. Função objetivo $z = 20$.

Solução é ótima? Não, pois há valores negativos na linha z.

- ▶ Repita o processo.

55MQU – Métodos Quantitativos
Prof. Marcelo de Souza