

Modelagem Matemática

Formulação de problemas de otimização

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos
Universidade do Estado de Santa Catarina





Processo de formulação de problemas

Etapas

1. Definir as **variáveis de decisão**;
 - ▶ aquelas cujos valores serão determinados pela solução.
2. Determinar a **função objetivo**;
 - ▶ está relacionada com o que se busca (maior lucro, menor custo, menor tempo, etc.).
3. Definir o conjunto de **restrições**.
 - ▶ definem soluções viáveis e inviáveis;
 - ▶ não esquecer das restrições de não negatividade (i.e. $x_i \geq 0$).



Processo de formulação de problemas

Etapas

1. Definir as **variáveis de decisão**;
 - ▶ aquelas cujos valores serão determinados pela solução.
2. Determinar a **função objetivo**;
 - ▶ está relacionada com o que se busca (maior lucro, menor custo, menor tempo, etc.).
3. Definir o conjunto de **restrições**.
 - ▶ definem soluções viáveis e inviáveis;
 - ▶ não esquecer das restrições de não negatividade (i.e. $x_i \geq 0$).

Alguns detalhes

- ▶ As restrições são definidas por equações e/ou inequações;
- ▶ Mantenha as variáveis do lado direito, e as constantes do lado esquerdo;
- ▶ Escreva as restrições respeitando a ordem das variáveis, i.e. x_i antes de x_{i+1} .

Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – enunciado

A Reddy Mikks produz tintas para interiores e exteriores com base em duas matérias-primas, $M1$ e $M2$. A tabela abaixo apresenta os dados básicos do problema.

	Tonelada de matéria-prima para produzir 1 t de		Máximo diário
	Tinta para exteriores	Tinta para interiores	
Matéria-prima $M1$	6	4	24
Matéria-prima $M2$	1	2	6
Lucro/tonelada (\$ 1000)	5	4	

Uma pesquisa de mercado indica que a demanda diária de tintas para interiores não pode ultrapassar a de tintas para exteriores por mais de 1 t. Além disso, a demanda máxima diária de tinta para interiores é de 2 t.

A Reddy Mikks quer determinar o mix ótimo (o melhor) de produtos de tintas para interiores e exteriores que maximize o lucro total diário.



Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- ▶ x_1 : produção de tinta para **exteriores** (em toneladas);
- ▶ x_2 : produção de tinta para **interiores** (em toneladas).



Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- ▶ x_1 : produção de tinta para **exteriores** (em toneladas);
- ▶ x_2 : produção de tinta para **interiores** (em toneladas).

Função objetivo:

- ▶ **maximiza** $z = 5x_1 + 4x_2$
 - ▶ lucro total z : \$ 5/t para x_1 t de tinta de exteriores e \$ 4/t para x_2 t de tinta de interiores.



Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- ▶ x_1 : produção de tinta para **exteriores** (em toneladas);
- ▶ x_2 : produção de tinta para **interiores** (em toneladas).

Função objetivo:

- ▶ **maximiza** $z = 5x_1 + 4x_2$
 - ▶ lucro total z : \$5/t para x_1 t de tinta de exteriores e \$4/t para x_2 t de tinta de interiores.

Restrições:

1. Limite máximo de matéria-prima M1: $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
2. Limite máximo de matéria-prima M2: $x_1 + 2x_2 \leq 6$
3. Relação entre a produção dos tipos de tinta: $-x_1 + x_2 \leq 1$
4. Produção máxima de tinta para interiores: $x_2 \leq 2$
5. Restrições de não-negatividade: $x_1, x_2 \geq 0$



Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – modelo/programa linear

$$\begin{array}{ll}\textbf{maximiza} & z = 5x_1 + 4x_2 \\ \textbf{sujeito a} & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – enunciado



A Ozark Farms usa no mínimo 800 kg de ração especial por dia. Essa ração especial é uma mistura de milho e soja com as composições mostradas na tabela abaixo.

Ração	kg por kg de ração		Custo (\$/kg)
	Proteína	Fibra	
Milho	0,09	0,02	0,30
Soja	0,60	0,06	0,90

Os requisitos nutricionais da ração especial são de no mínimo 30% de proteína e de no máximo 5% de fibra. A Ozark Farms quer determinar a mistura que gera a ração de mínimo custo diário.



Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- ▶ x_1 : kg de **milho** na mistura;
- ▶ x_2 : kg de **soja** na mistura.



Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- ▶ x_1 : kg de **milho** na mistura;
- ▶ x_2 : kg de **soja** na mistura.

Função objetivo:

- ▶ **minimiza** $z = 0,3x_1 + 0,9x_2$
 - ▶ custo total z : \$ 0,30/kg para x_1 kg de milho e \$ 0,90/kg para x_2 kg de soja.



Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- ▶ x_1 : kg de **milho** na mistura;
- ▶ x_2 : kg de **soja** na mistura.

Função objetivo:

- ▶ **minimiza** $z = 0,3x_1 + 0,9x_2$
 - ▶ custo total z : \$ 0,30/kg para x_1 kg de milho e \$ 0,90/kg para x_2 kg de soja.

Restrições:

1. Produção mínima: $x_1 + x_2 \geq 800$
2. Requisito de proteína: $0,09x_1 + 0,6x_2 \geq 0,3(x_1 + x_2) \quad \therefore \quad 0,21x_1 - 0,3x_2 \leq 0$
3. Requisito de fibra: $0,02x_1 + 0,06x_2 \leq 0,05(x_1 + x_2) \quad \therefore \quad 0,03x_1 - 0,01x_2 \geq 0$
4. Restrições de não-negatividade: $x_1, x_2 \geq 0$



Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – modelo/programa linear

minimiza $z = 0,3x_1 + 0,9x_2$

sujeito a $x_1 + x_2 \geq 800$

$$0,21x_1 - 0,3x_2 \leq 0$$

$$0,03x_1 - 0,01x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

55MQU – Métodos Quantitativos
Prof. Marcelo de Souza