Programação Linear

Modelagem matemática

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos
Universidade do Estado de Santa Catarina

Processo de formulação de problemas

Etapas

1. Definir as **variáveis de decisão**;
   - aquelas cujos valores serão determinados pela solução.
2. Determinar a **função objetivo**;
   - está relacionada com o que se busca (maior lucro, menor custo, menor tempo, etc.).
3. Definir o conjunto de **restrições**.
   - definem soluções viáveis e inviáveis;
   - não esquecer das restrições de não negatividade (i.e. $x_i \geq 0$).

Processo de formulação de problemas

Etapas

1. Definir as **variáveis de decisão**;
   - aquelas cujos valores serão determinados pela solução.
2. Determinar a **função objetivo**;
   - está relacionada com o que se busca (maior lucro, menor custo, menor tempo, etc.).
3. Definir o conjunto de **restrições**.
   - definem soluções viáveis e inviáveis;
   - não esquecer das restrições de não negatividade (i.e. $x_i \geq 0$).

Alguns detalhes

- As restrições são definidas por equações e/ou inequações;
- Mantenha as variáveis do lado esquerdo, e as constantes do lado direito;
- Escreva as restrições respeitando a ordem das variáveis, i.e. x_i antes de x_{i+i}.

Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – enunciado

A Reddy Mikks produz tintas para interiores e exteriores com base em duas matérias-primas, *M1* e *M2*. A tabela abaixo apresenta os dados básicos do problema.

	Tonelada de matéria-prima para produzir 1 t de		
	Tinta para exteriores	Tinta para interiores	Máximo diário
Matéria-prima *M1*	6	4	24
Matéria-prima *M2*	1	2	6
Lucro/tonelada ($ 1000)	5	4	

Uma pesquisa de mercado indica que a demanda diária de tintas para interiores não pode ultrapassar a de tintas para exteriores por mais de 1 t. Além disso, a demanda máxima diária de tinta para interiores é de 2 t.

A Reddy Mikks quer determinar o mix ótimo (o melhor) de produtos de tintas para interiores e exteriores que maximize o lucro total diário.

Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- x_1: produção de tinta para **exteriores** (em toneladas);
- x_2: produção de tinta para **interiores** (em toneladas).

Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- x_1: produção de tinta para **exteriores** (em toneladas);
- x_2: produção de tinta para **interiores** (em toneladas).

Função objetivo:

- **maximiza** $z = 5x_1 + 4x_2$
  - lucro total z: \$ 5/t para x_1 t de tinta de exteriores e \$ 4/t para x_2 t de tinta de interiores.

Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- x_1: produção de tinta para **exteriores** (em toneladas);
- x_2: produção de tinta para **interiores** (em toneladas).

Função objetivo:

- **maximiza** $z = 5x_1 + 4x_2$
  - lucro total z: \$ 5/t para x_1 t de tinta de exteriores e \$ 4/t para x_2 t de tinta de interiores.

Restrições:

1. Limite máximo de matéria-prima M1: $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
2. Limite máximo de matéria-prima M2: $x_1 + 2x_2 \leq 6$
3. Relação entre a produção dos tipos de tinta: $-x_1 + x_2 \leq 1$
4. Produção máxima de tinta para interiores: $x_2 \leq 2$
5. Restrições de não-negatividade: $x_1, x_2 \geq 0$

Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – modelo/programa linear

Reddy Mikks

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \le 24 \\
& x_1 + 2x_2 \le 6 \\
& -x_1 + x_2 \le 1 \\
& x_2 \le 2 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – enunciado

A Ozark Farms usa no mínimo 800 kg de ração especial por dia. Essa ração especial é uma mistura de milho e soja com as composições mostradas na tabela abaixo.

	kg por kg de ração		
Ração	Proteína	Fibra	Custo ($/kg)
Milho	0,09	0,02	0,30
Soja	0,60	0,06	0,90

Os requisitos nutricionais da ração especial são de no mínimo 30% de proteína e de no máximo 5% de fibra. A Ozark Farms quer determinar a mistura que gera a ração de mínimo custo diário.

Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- x_1: kg de **milho** na mistura;
- x_2: kg de **soja** na mistura.

Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- x_1: kg de **milho** na mistura;
- x_2: kg de **soja** na mistura.

Função objetivo:

- **minimiza** $z = 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2$
  - custo total z: \$ 0,30/kg para x_1 kg de milho e \$ 0,90/kg para x_2 kg de soja.

Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- x_1: kg de **milho** na mistura;
- x_2: kg de **soja** na mistura.

Função objetivo:

- **minimiza** $z = 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2$
  - custo total z: \$ 0,30/kg para x_1 kg de milho e \$ 0,90/kg para x_2 kg de soja.

Restrições:

1. Produção mínima: $x_1 + x_2 \geq 800$
2. Requisito de proteína: $0{,}09x_1 + 0{,}6x_2 \geq 0{,}3(x_1 + x_2) \;\therefore\; 0{,}21x_1 - 0{,}3x_2 \leq 0$
3. Requisito de fibra: $0{,}02x_1 + 0{,}06x_2 \leq 0{,}05(x_1 + x_2) \;\therefore\; 0{,}03x_1 - 0{,}01x_2 \geq 0$
4. Restrições de não-negatividade: $x_1, x_2 \geq 0$

Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – modelo/programa linear

Ozark Farms

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & z = 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \geq 800 \\
& 0{,}21x_1 - 0{,}3x_2 \leq 0 \\
& 0{,}03x_1 - 0{,}01x_2 \geq 0 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Formulação genérica de problemas

Em geral, os elementos associados a problemas de otimização são **dinâmicos**. Por exemplo:

- Produção varia conforme encomendas de clientes.
- Contratação de funcionários varia de acordo com candidaturas.
- Valor de venda de mercadoria depende da demanda de mercado.
- Limite de produção definido pela matéria-prima recebida do fornecedor.

Formulação genérica de problemas

Em geral, os elementos associados a problemas de otimização são **dinâmicos**. Por exemplo:

- Produção varia conforme encomendas de clientes.
- Contratação de funcionários varia de acordo com candidaturas.
- Valor de venda de mercadoria depende da demanda de mercado.
- Limite de produção definido pela matéria-prima recebida do fornecedor.

Neste caso, devemos construir **modelos genéricos**.

- Número variável de **variáveis de decisão**, **restrições** e **dados**.
- O modelo se ajusta a uma instância concreta do problema.
- Analogia: classes e objetos em POO.

Exemplo

Reddy Mikks genérico

Consideremos o seguinte cenário para o problema Reddy Mikks:

- Variados **tipos de tinta**, com respectivos **lucros/tonelada**.
- Variadas **matérias-primas**, com respectivos **limites diários**.
- **Matéria-prima necessária** para produção de cada tipo de tinta.
- **Demanda** diária máxima de produção de cada tipo de tinta.

Exemplo

Reddy Mikks genérico

Consideremos o seguinte cenário para o problema Reddy Mikks:

- Variados **tipos de tinta**, com respectivos **lucros/tonelada**.
- Variadas **matérias-primas**, com respectivos **limites diários**.
- **Matéria-prima necessária** para produção de cada tipo de tinta.
- **Demanda** diária máxima de produção de cada tipo de tinta.

Etapas para a construção do modelo genérico:

1. Definir os **dados do problema**;
   - introduzindo **variáveis matemáticas** para grandezas dinâmicas.
2. Definir as **variáveis de decisão** e a **função objetivo**;
3. Construir as **restrições**.
   - agrupando restrições, quando necessário.

Exemplo

Reddy Mikks genérico

Dados:

- n tipos de tinta e m matérias-primas;
- L_i é o lucro da tinta $i \in \{1,2,\dots,n\}$;
- P_i é a produção máxima diária da tinta $i \in \{1,2,\dots,n\}$;
- E_j é a quantidade máxima (estoque) da matéria-prima $j \in \{1,2,\dots,m\}$;
- Q_{ij} é a quantidade da matéria-prima $j \in \{1,2,\dots,m\}$ ao produzir a tinta $i \in \{1,2,\dots,n\}$.

Exemplo

Reddy Mikks genérico

Dados:

- n tipos de tinta e m matérias-primas;
- L_i é o lucro da tinta $i \in \{1,2,\ldots,n\}$;
- P_i é a produção máxima diária da tinta $i \in \{1,2,\ldots,n\}$;
- E_j é a quantidade máxima (estoque) da matéria-prima $j \in \{1,2,\ldots,m\}$;
- Q_{ij} é a quantidade da matéria-prima $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ ao produzir a tinta $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Variáveis de decisão: x_i: produção de tinta do tipo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exemplo

Reddy Mikks genérico

Dados:

- n tipos de tinta e m matérias-primas;
- L_i é o lucro da tinta $i \in \{1,2,...,n\}$;
- P_i é a produção máxima diária da tinta $i \in \{1,2,...,n\}$;
- E_j é a quantidade máxima (estoque) da matéria-prima $j \in \{1,2,...,m\}$;
- Q_{ij} é a quantidade da matéria-prima $j \in \{1,2,...,m\}$ ao produzir a tinta $i \in \{1,2,...,n\}$.

Variáveis de decisão: x_i: produção de tinta do tipo $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Função objetivo: maximiza $\sum_{i=1}^{n} L_i x_i$

Exemplo

Reddy Mikks genérico

Dados:

- n tipos de tinta e m matérias-primas;
- L_i é o lucro da tinta $i \in \{1,2,...,n\}$;
- P_i é a produção máxima diária da tinta $i \in \{1,2,...,n\}$;
- E_j é a quantidade máxima (estoque) da matéria-prima $j \in \{1,2,...,m\}$;
- Q_{ij} é a quantidade da matéria-prima $j \in \{1,2,...,m\}$ ao produzir a tinta $i \in \{1,2,...,n\}$.

Variáveis de decisão: x_i: produção de tinta do tipo $i \in \{1,2,...,n\}$.

Função objetivo: maximiza $\sum_{i=1}^{n} L_i x_i$

Restrições:

- Produção máxima de cada tinta: $x_i \leq P_i \quad , i \in 1,2,...,n$
- Limite de cada matéria-prima: $\sum_{i=1}^{n} Q_{ij} x_i \leq E_j \quad , j \in \{1,2,...,m\}$
- Restrições de não-negatividade: $x_i \geq 0 \quad , i \in \{1,2,...,n\}$

Exemplo

Reddy Mikks genérico

Reddy Mikks

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & \sum_{i=1}^{n} L_i x_i \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_i \le P_i && , i \in \{1,2,\ldots,n\} \\
& \sum_{i=1}^{n} Q_{ij} x_i \le E_j && , j \in \{1,2,\ldots,m\} \\
& x_i \ge 0 && , i \in \{1,2,\ldots,n\}
\end{aligned}
$$

Exemplo

Ozark Farms genérico

Dados:

- m ingredientes;
- n nutrientes;
- Q é a quantidade mínima de ração;
- c_i é o custo do ingrediente $i \in [m]$;
- m_j é o mínimo do nutriente $j \in [n]$;
- M_j é o máximo do nutriente $j \in [n]$;
- A_{ij} é quanto do nutriente $j \in [n]$ há no ingrediente $i \in [m]$.

Variáveis de decisão:

- x_i: quantidade do ingrediente $i \in [n]$.

Exemplo

Ozark Farms genérico

Dados:

- m ingredientes;
- n nutrientes;
- Q é a quantidade mínima de ração;
- c_i é o custo do ingrediente $i \in [m]$;
- m_j é o mínimo do nutriente $j \in [n]$;
- M_j é o máximo do nutriente $j \in [n]$;
- A_{ij} é quanto do nutriente $j \in [n]$ há no ingrediente $i \in [m]$.

Variáveis de decisão:

- x_i: quantidade do ingrediente $i \in [n]$.

Ozark Farms

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{maximiza} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_i x_i & \\
\textbf{sujeito a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i \geq Q & \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} A_{ij} x_i \geq m_j & , j \in [n] \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} A_{ij} x_i \leq M_j & , j \in [n] \\
& x_i \geq 0 & , i \in [m]
\end{array}
$$

55MQU – Métodos Quantitativos
Prof. Marcelo de Souza