

# Método Simplex

## Conceitos básicos e algoritmo

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos  
Universidade do Estado de Santa Catarina



# Forma padrão

Pré-condições para aplicação do método Simplex

- ▶ Função objetivo deve ser de **maximização**;

$$\text{maximiza } z = \sum_{i \in [n]} c_i x_i$$

- ▶ Restrições devem ser **equações** com lado direito **não negativo**;
  - ▶ exceto restrições triviais (não-negatividade).

$$\sum_{i \in [n]} a_{ji} x_i = b_j, \quad \forall j \in [m]$$

- ▶ Todas as variáveis devem ser **não negativas**.

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in [n]$$



# Forma padrão

Transformações (função objetivo)

Função objetivo de minimização para maximização (e vice-versa)

- Multiplica por  $-1$ .

$$\text{minimiza } z = 3x_1 - 2x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{maximiza } -z = -3x_1 + 2x_2$$

# Forma padrão

## Transformações (restrições)



Desigualdades para equações com lado direito não negativo

- ▶ As restrições representam limites no uso de algum recurso por meio de inequações;
- ▶ A diferença entre o primeiro e segundo membros da inequação indica a quantidade de recurso sobrando ou excedente;
- ▶ Para transformar desigualdades em equações introduzimos variáveis de **folga** ou **sobra**;
- ▶ Em caso de lado direito negativo, multiplicamos por  $-1$ .

# Forma padrão

## Transformações (restrições)



Desigualdades para equações com lado direito não negativo

- ▶ As restrições representam limites no uso de algum recurso por meio de inequações;
- ▶ A diferença entre o primeiro e segundo membros da inequação indica a quantidade de recurso sobrando ou excedente;
- ▶ Para transformar desigualdades em equações introduzimos variáveis de **folga** ou **sobra**;
- ▶ Em caso de lado direito negativo, multiplicamos por  $-1$ .

$$3x_1 + 2x_2 \leq 16 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 16, \quad s_1 \geq 0$$

# Forma padrão

## Transformações (restrições)



Desigualdades para equações com lado direito não negativo

- ▶ As restrições representam limites no uso de algum recurso por meio de inequações;
- ▶ A diferença entre o primeiro e segundo membros da inequação indica a quantidade de recurso sobrando ou excedente;
- ▶ Para transformar desigualdades em equações introduzimos variáveis de **folga** ou **sobra**;
- ▶ Em caso de lado direito negativo, multiplicamos por  $-1$ .

$$3x_1 + 2x_2 \leq 16 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 16, \quad s_1 \geq 0$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 6 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 - 2x_2 - s_1 = 6, \quad s_1 \geq 0$$

# Forma padrão

## Transformações (restrições)



Desigualdades para equações com lado direito não negativo

- ▶ As restrições representam limites no uso de algum recurso por meio de inequações;
- ▶ A diferença entre o primeiro e segundo membros da inequação indica a quantidade de recurso sobrando ou excedente;
- ▶ Para transformar desigualdades em equações introduzimos variáveis de **folga** ou **sobra**;
- ▶ Em caso de lado direito negativo, multiplicamos por  $-1$ .

$$3x_1 + 2x_2 \leq 16 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 16, \quad s_1 \geq 0$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 6 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 - 2x_2 - s_1 = 6, \quad s_1 \geq 0$$

$$2x_1 - x_2 \geq -8 \quad \Longleftrightarrow \quad -2x_1 + x_2 + s_1 = 8, \quad s_1 \geq 0$$



# Forma padrão

## Transformações (adicionais)

Restrição  $\leq$  em  $\geq$  (e vice-versa)

- ▶ Multiplica por  $-1$ .

$$3x_1 + 2x_2 \leq 16 \quad \Longleftrightarrow \quad -3x_1 - 2x_2 \geq -16$$

Variável irrestrita  $x_i$  em não negativa

- ▶ Introduz novas variáveis  $x_i^+ \geq 0$  e  $x_i^- \geq 0$ , e define  $x_i = x_i^+ - x_i^-$ .

$$2x_1 + x_2 \leq 10, \quad x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x_1 + x_2^+ - x_2^- \leq 10, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$



# Forma padrão

## Exemplo



Dado o modelo abaixo, apresente o modelo equivalente na forma padrão.

**minimiza**  $z = 2x_1 - x_2$

**sujeito a**  $x_1 + x_2 \geq 2$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$$

# Forma padrão

## Exemplo



Dado o modelo abaixo, apresente o modelo equivalente na forma padrão.

$$\text{minimiza } z = 2x_1 - x_2$$

$$\text{sujeito a } x_1 + x_2 \geq 2$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$$



$$\text{maximiza } -z = -2x_1^+ + 2x_1^- + x_2$$

$$\text{sujeito a } x_1^+ - x_1^- + x_2 - s_1 = 2$$

$$3x_1^+ - 3x_1^- + 2x_2 + s_2 = 4$$

$$x_1^+ - x_1^- + 2x_2 = 3$$

$$x_1^+, x_1^-, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$



Se o modelo de PL está na forma padrão:

- ▶ ele é representado por um conjunto de  $m$  equações em  $n$  variáveis;
- ▶ sendo  $m < n$  (regra geral);
  - ▶ se  $m = n$ : o sistema possui uma única solução trivial;
  - ▶ se  $m > n$ : existem pelo menos  $m - n$  restrições redundantes.



Se o modelo de PL está na forma padrão:

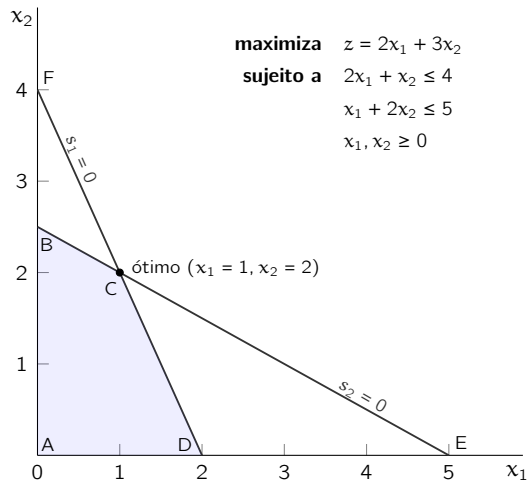
- ▶ ele é representado por um conjunto de  $m$  equações em  $n$  variáveis;
- ▶ sendo  $m < n$  (regra geral);
  - ▶ se  $m = n$ : o sistema possui uma única solução trivial;
  - ▶ se  $m > n$ : existem pelo menos  $m - n$  restrições redundantes.

Ao igualar  $n - m$  variáveis a zero e resolver as  $m$  equações para as  $m$  variáveis restantes, obtemos uma **solução básica**, que corresponde a um ponto extremo (viável ou inviável) e, portanto, a uma solução candidata a ótima.

# Conceitos fundamentais

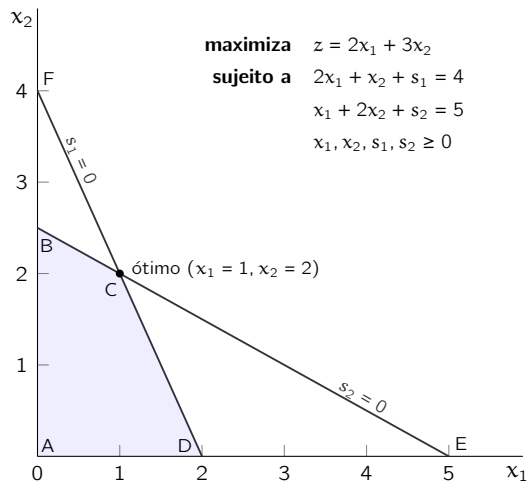
## Exemplo

**maximiza**  $z = 2x_1 + 3x_2$   
**sujeito a**  $2x_1 + x_2 \leq 4$   
 $x_1 + 2x_2 \leq 5$   
 $x_1, x_2 \geq 0$



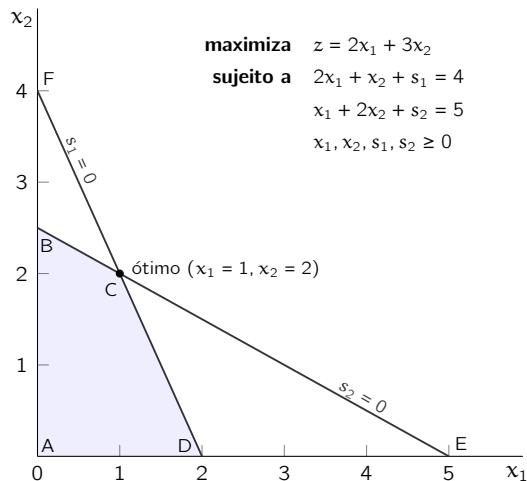
# Conceitos fundamentais

## Exemplo



# Conceitos fundamentais

## Exemplo

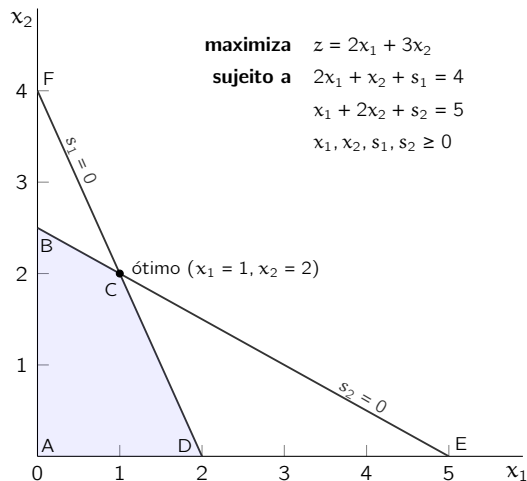


O sistema possui:

- ▶  $m = 2$  equações  
 $\{2x_1 + x_2 + s_1 = 4, \quad x_1 + 2x_2 + s_2 = 5\};$
- ▶  $n = 4$  variáveis  $\{x_1, x_2, s_1, s_2\}$

# Conceitos fundamentais

## Exemplo



O sistema possui:

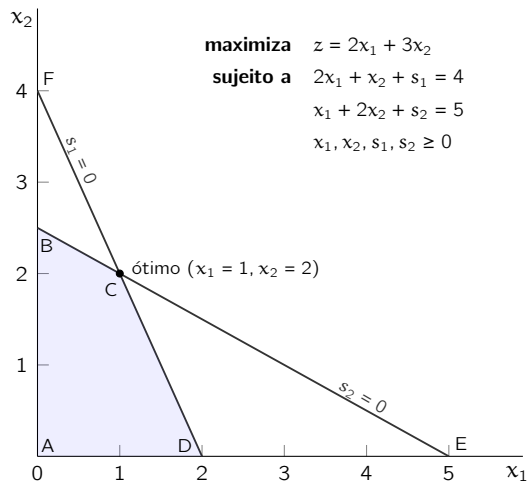
- ▶  $m = 2$  equações  
 $\{2x_1 + x_2 + s_1 = 4, \quad x_1 + 2x_2 + s_2 = 5\};$
- ▶  $n = 4$  variáveis  $\{x_1, x_2, s_1, s_2\}$

Logo, zerando  $n - m = 4 - 2 = 2$  variáveis e determinando o valor das  $m = 2$  variáveis restantes, obtemos uma solução básica.



# Conceitos fundamentais

## Exemplo



O sistema possui:

- ▶  $m = 2$  equações  
 $\{2x_1 + x_2 + s_1 = 4, \quad x_1 + 2x_2 + s_2 = 5\};$
- ▶  $n = 4$  variáveis  $\{x_1, x_2, s_1, s_2\}$

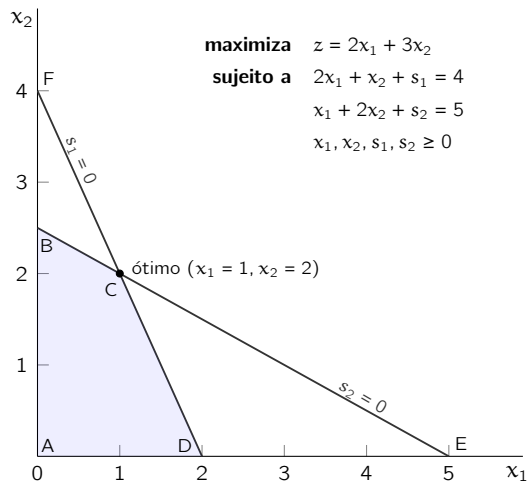
Logo, zerando  $n - m = 4 - 2 = 2$  variáveis e determinando o valor das  $m = 2$  variáveis restantes, obtemos uma solução básica.

Exemplos:

- ▶  $x_1 = 0, x_2 = 0 \rightarrow s_1 = 4, s_2 = 5$  (A)
- ▶  $s_1 = 0, s_2 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$  (C)
- ▶  $x_1 = 0, s_1 = 0 \rightarrow x_2 = 4, s_2 = -3$  (F)

# Conceitos fundamentais

## Exemplo



## Todas as soluções básicas

Variáveis não básicas	Variáveis básicas	Solução básica	Ponto	Viável	Valor
$(x_1, x_2)$	$(s_1, s_2)$	(4, 5)	A	Sim	0
$(x_1, s_1)$	$(x_2, s_2)$	(4, -3)	F	Não	-
$(x_1, s_2)$	$(x_2, s_1)$	(2,5, 1,5)	B	Sim	7,5
$(x_2, s_1)$	$(x_1, s_2)$	(2, 3)	D	Sim	4
$(x_2, s_2)$	$(x_1, s_1)$	(5, -6)	E	Não	-
$(s_1, s_2)$	$(x_1, x_2)$	(1, 2)	C	Sim	8

A solução (1, 2) é a **solução ótima**, com valor 8.



## **Solução algébrica por busca exaustiva**

1. Determina todas as soluções básicas do modelo;
  - ▶ Zera  $n - m$  variáveis (não básicas) e determina o valor para as  $m$  variáveis restantes (básicas); repete para toda combinação possível.
2. Calcula o valor da função objetivo para cada solução básica viável e retorna a melhor.



## Solução algébrica por busca exaustiva

1. Determina todas as soluções básicas do modelo;
  - ▶ Zera  $n - m$  variáveis (não básicas) e determina o valor para as  $m$  variáveis restantes (básicas); repete para toda combinação possível.
2. Calcula o valor da função objetivo para cada solução básica viável e retorna a melhor.

Número total de soluções básicas é dado por

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n - m)!}$$

Para  $n = 20$  e  $m = 10$  (PL pequeno):  $C_{10}^{20} = 184.756$  conjuntos de  $10 \times 10$  equações!



## Solução algébrica por busca exaustiva

1. Determina todas as soluções básicas do modelo;
  - ▶ Zera  $n - m$  variáveis (não básicas) e determina o valor para as  $m$  variáveis restantes (básicas); repete para toda combinação possível.
2. Calcula o valor da função objetivo para cada solução básica viável e retorna a melhor.

Número total de soluções básicas é dado por

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Para  $n = 20$  e  $m = 10$  (PL pequeno):  $C_{10}^{20} = 184.756$  conjuntos de  $10 \times 10$  equações!

**Método simplex** propõe estratégias para avaliar somente parte das soluções básicas viáveis.



*George B. Dantzig*

O método Simplex foi desenvolvido pelo matemático **George Dantzig** em 1947. O corpo editorial da *SIAM News* o listou como um dos *Top 10 Algoritmos do Século XX*, junto com o método de Monte Carlo, o algoritmo *quicksort*, a transformada rápida de Fourier, e outros algoritmos importantes.

*"In terms of widespread use, George Dantzig's simplex method is among the most successful algorithms of all time."*

(SIAM News, Volume 33, Number 4)

# Método Simplex

Natureza iterativa



Dado um programa linear na forma padrão:

1. Determina uma solução básica inicial;
2. Se a solução for ótima, retorna;
3. Caso contrário, determina a melhor solução básica viável adjacente;
4. Volta ao passo 2.

# Método Simplex

Natureza iterativa



Dado um programa linear na forma padrão:

1. Determina uma solução básica inicial;
2. Se a solução for ótima, retorna;
3. Caso contrário, determina a melhor solução básica viável adjacente;
4. Volta ao passo 2.

**Solução básica inicial:** geralmente  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ , com função objetivo  $z = 0$ .

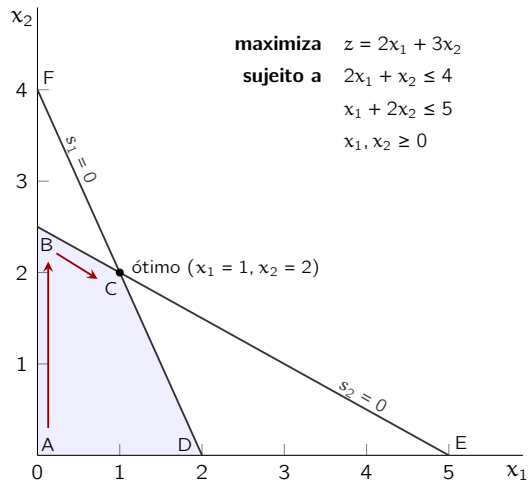
**Determinação da solução adjacente:** seleciona a variável não básica que produz a maior taxa de melhoria na função objetivo, e aumenta seu valor o máximo possível sem violar restrições.

- Neste caso, uma variável sai da base para dar lugar à nova.



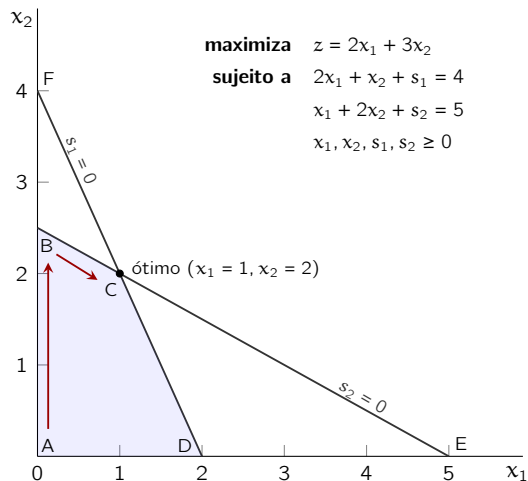
# Método Simplex

## Visão geral



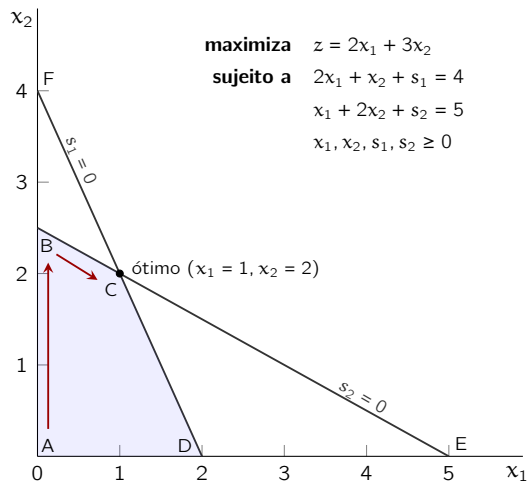
# Método Simplex

## Visão geral



# Método Simplex

## Visão geral



Inicia no ponto A:

- ▶ Solução básica inicial:  $x_1 = 0, x_2 = 0$ ;
- ▶ Variáveis não básicas:  $(x_1, x_2)$ ;
- ▶ Variáveis básicas:  $(s_1, s_2)$ ;

Pela função objetivo ( $z = 2x_1 + 3x_2$ ):

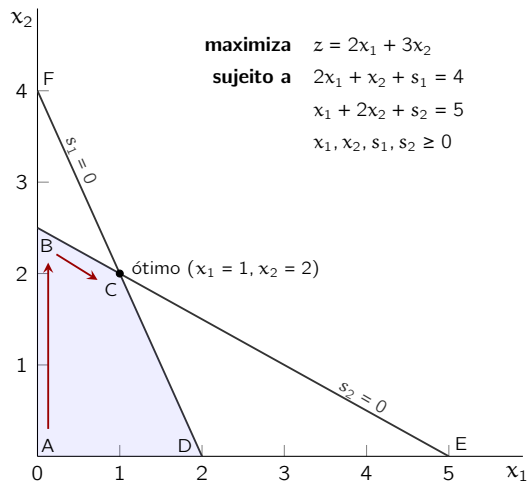
- ▶ Variável  $x_2$  tem maior contribuição;
- ▶ Seleciona  $x_2$  e aumenta o máximo possível;
- ▶ ...

Detalhes:

- ▶ Seleciona uma variável por vez;
- ▶ Sempre faz o caminho “guloso”;
- ▶ A próxima solução é sempre “vizinha”.

# Método Simplex

## Visão geral



Variáveis básicas e não básicas:

Ponto extremo	Variáveis básicas	Variáveis não básicas
A	$s_1, s_2$	$x_1, x_2$
B	$s_1, x_2$	$x_1, s_2$
C	$x_1, x_2$	$s_1, s_2$

Passos:

1.  $x_2$  entra na base;  $s_2$  sai da base;
2.  $x_1$  entra na base;  $s_1$  sai da base.

Questões:

- ▶ Como decidir quem entra e quem sai?
- ▶ Como identificar a solução ótima?

# Método Simplex

## Algoritmo



**maximiza**  $z = 5x_1 + 4x_2$

**sujeito a**  $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$$

$$-x_1 + x_2 + s_3 = 1$$

$$x_2 + s_4 = 2$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

# Método Simplex

## Algoritmo

Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
$s_1$	0	6	4	1	0	0	0	24
$s_2$	0	1	2	0	1	0	0	6
$s_3$	0	-1	1	0	0	1	0	1
$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

**maximiza**  $z = 5x_1 + 4x_2$   
**sujeito a**  $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$   
 $x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$   
 $-x_1 + x_2 + s_3 = 1$   
 $x_2 + s_4 = 2$   
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Dada a solução básica inicial  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ , montamos a tabela simplex inicial com:

- ▶ todas variáveis do modelo (colunas);
- ▶ as variáveis da base (linhas);
- ▶ equações do modelo e seus coeficientes (linhas);
- ▶ valor de cada equação (última coluna).



# Método Simplex

## Algoritmo

Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
$s_1$	0	6	4	1	0	0	0	24
$s_2$	0	1	2	0	1	0	0	6
$s_3$	0	-1	1	0	0	1	0	1
$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

**maximiza**  $z = 5x_1 + 4x_2$   
**sujeito a**  $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$   
 $x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$   
 $-x_1 + x_2 + s_3 = 1$   
 $x_2 + s_4 = 2$   
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Informações:

- ▶ Variáveis não básicas:  $(x_1, x_2)$
- ▶ Variáveis básicas:  $(s_1, s_2, s_3, s_4)$
- ▶ Solução básica:  $x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 24, s_2 = 6, s_3 = 1, s_4 = 2$ . Função objetivo  $z = 0$ .

**Teste de otimalidade:** solução é ótima se na linha z não há nenhum valor negativo.

- ▶ Se há valores negativos, mudar as variáveis correspondentes melhoram a solução!

# Método Simplex

## Algoritmo

Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
$s_1$	0	6	4	1	0	0	0	24
$s_2$	0	1	2	0	1	0	0	6
$s_3$	0	-1	1	0	0	1	0	1
$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

**maximiza**  $z = 5x_1 + 4x_2$   
**sujeito a**  $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$   
 $x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$   
 $-x_1 + x_2 + s_3 = 1$   
 $x_2 + s_4 = 2$   
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Solução **não é ótima**. Logo,

- ▶ seleciona uma variável para entrar na base (aumentar o valor) e outra para sair (zerar o valor).

**Seleção de variável entrante:** aquela com coeficiente mais negativo na linha z.

- ▶ Ou seja, a que mais contribui para a melhoria da função objetivo!
- ▶ A variável define a **coluna pivô**.



# Método Simplex

## Algoritmo

Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
$s_1$	0	6	4	1	0	0	0	24
$s_2$	0	1	2	0	1	0	0	6
$s_3$	0	-1	1	0	0	1	0	1
$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

**maximiza**  $z = 5x_1 + 4x_2$   
**sujeito a**  $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$   
 $x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$   
 $-x_1 + x_2 + s_3 = 1$   
 $x_2 + s_4 = 2$   
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Variável  $x_1$  tem o menor coeficiente (-5).

- ▶  $x_1$  entra na base e identificamos a coluna pivô.

# Método Simplex

## Algoritmo

Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
$s_1$	0	6	4	1	0	0	0	24
$s_2$	0	1	2	0	1	0	0	6
$s_3$	0	-1	1	0	0	1	0	1
$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

**maximiza**  $z = 5x_1 + 4x_2$   
**sujeito a**  $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$   
 $x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$   
 $-x_1 + x_2 + s_3 = 1$   
 $x_2 + s_4 = 2$   
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

**Seleção de variável sainte:** aquela cuja linha apresenta a menor razão não negativa.

► A variável define a **linha pivô**.

$$\text{Razão não negativa} = \frac{\text{valor da solução}}{\text{valor na coluna pivô}}$$

# Método Simplex

## Algoritmo

Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
$s_1$	0	6	4	1	0	0	0	24
$s_2$	0	1	2	0	1	0	0	6
$s_3$	0	-1	1	0	0	1	0	1
$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

**maximiza**  $z = 5x_1 + 4x_2$   
**sujeito a**  $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$   
 $x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$   
 $-x_1 + x_2 + s_3 = 1$   
 $x_2 + s_4 = 2$   
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Razão não negativa:

- ▶ Linha  $s_1$ :  $24/6 = 4$
- ▶ Linha  $s_2$ :  $6/1 = 6$
- ▶ Linha  $s_3$ :  $1/-1 = -1$  (negativa; descarta)
- ▶ Linha  $s_4$ :  $2/0 = \infty$  (descarta)

# Método Simplex

## Algoritmo

Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
$s_1$	0	6	4	1	0	0	0	24
$s_2$	0	1	2	0	1	0	0	6
$s_3$	0	-1	1	0	0	1	0	1
$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

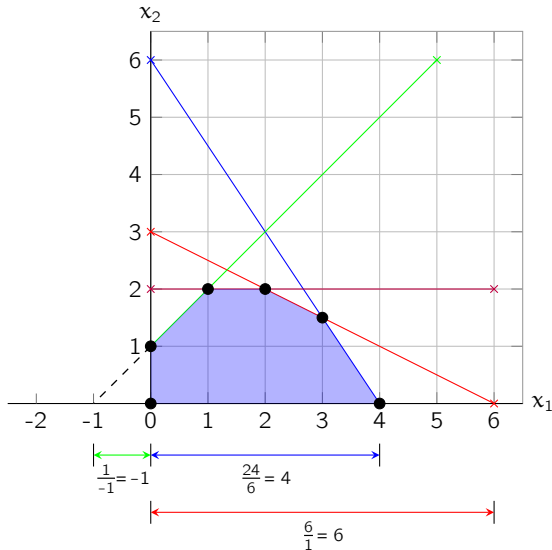
**maximiza**  $z = 5x_1 + 4x_2$   
**sujeito a**  $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$   
 $x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$   
 $-x_1 + x_2 + s_3 = 1$   
 $x_2 + s_4 = 2$   
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Razão não negativa:

- ▶ Linha  $s_1$ :  $24/6 = 4 \leftarrow$  **menor valor não negativo!**
- ▶ Linha  $s_2$ :  $6/1 = 6$
- ▶ Linha  $s_3$ :  $1/-1 = -1$  (negativa; descarta)
- ▶ Linha  $s_4$ :  $2/0 = \infty$  (descarta)

# Método Simplex

## Algoritmo



**maximiza**  $z = 5x_1 + 4x_2$

**sujeito a**  $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$

$x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$

$-x_1 + x_2 + s_3 = 1$

$x_2 + s_4 = 2$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

# Método Simplex

## Algoritmo

Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
$s_1$	0	6	4	1	0	0	0	24
$s_2$	0	1	2	0	1	0	0	6
$s_3$	0	-1	1	0	0	1	0	1
$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

**maximiza**  $z = 5x_1 + 4x_2$   
**sujeito a**  $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$   
 $x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$   
 $-x_1 + x_2 + s_3 = 1$   
 $x_2 + s_4 = 2$   
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Informações:

- ▶ Variável que entra na base:  $x_1$  (terá seu valor aumentado);
- ▶ Variável que sai da base:  $s_1$  (terá seu valor zerado);
- ▶ Coluna pivô:  $x_1$ ;
- ▶ Linha pivô:  $s_1$ ;
- ▶ **Elemento pivô:** 6 (interseção da coluna e linha pivôs).



# Método Simplex

## Algoritmo

Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
$s_1$	0	6	4	1	0	0	0	24
$s_2$	0	1	2	0	1	0	0	6
$s_3$	0	-1	1	0	0	1	0	1
$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z								
$s_1$								
$s_2$								
$s_3$								
$s_4$								



# Método Simplex

## Algoritmo

Base	z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	s <sub>4</sub>	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s <sub>1</sub>	0	6	4	1	0	0	0	24
s <sub>2</sub>	0	1	2	0	1	0	0	6
s <sub>3</sub>	0	-1	1	0	0	1	0	1
s <sub>4</sub>	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	s <sub>4</sub>	Sol.
z								
s <sub>1</sub>								
s <sub>2</sub>								
s <sub>3</sub>								
s <sub>4</sub>								

**Troca de variáveis (tabela):** operações de Gauss-Jordan

► Na linha pivô:

1. Substitui a variável que sai da base pela variável que entra na base (coluna “Base”);
2. Calcula a nova linha pivô como

$$\text{Nova linha pivô} = \frac{\text{linha pivô atual}}{\text{elemento pivô}}$$



# Método Simplex

## Algoritmo



Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
$s_1$	0	6	4	1	0	0	0	24
$s_2$	0	1	2	0	1	0	0	6
$s_3$	0	-1	1	0	0	1	0	1
$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z								
$x_1$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	4
$s_2$								
$s_3$								
$s_4$								

### Atualização da linha pivô:

Linha pivô atual  $\rightarrow \left( 0 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 24 \right) \div 6$  (elemento pivô)

Nova linha pivô  $\rightarrow \left( 0 \quad 1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \right)$



# Método Simplex

## Algoritmo

Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
$s_1$	0	6	4	1	0	0	0	24
$s_2$	0	1	2	0	1	0	0	6
$s_3$	0	-1	1	0	0	1	0	1
$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z								
$x_1$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	4
$s_2$								
$s_3$								
$s_4$								

**Troca de variáveis (tabela):** operações de Gauss-Jordan

► Nas demais linhas:

Nova linha = linha atual – coeficiente na coluna pivô  $\times$  nova linha pivô

# Método Simplex

## Algoritmo



Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
$s_1$	0	6	4	1	0	0	0	24
$s_2$	0	1	2	0	1	0	0	6
$s_3$	0	-1	1	0	0	1	0	1
$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z	1	0	$-2/3$	$5/6$	0	0	0	20
$x_1$	0	1	$2/3$	$1/6$	0	0	0	4
$s_2$								
$s_3$								
$s_4$								

### Atualização da linha z:

$$\text{Linha atual} \rightarrow \left( 1 \quad -5 \quad -4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right) -$$

$$\text{Nova linha pivô} \rightarrow \left( 0 \quad 1 \quad 2/3 \quad 1/6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \right) \times (-5) \quad [\text{coeficiente na coluna pivô}]$$

$$\text{Nova linha} \rightarrow \left( 1 \quad 0 \quad -2/3 \quad 5/6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 20 \right)$$



# Método Simplex

## Algoritmo

Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
$s_1$	0	6	4	1	0	0	0	24
$s_2$	0	1	2	0	1	0	0	6
$s_3$	0	-1	1	0	0	1	0	1
$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

Base	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Sol.
z	1	0	$-2/3$	$5/6$	0	0	0	20
$x_1$	0	1	$2/3$	$1/6$	0	0	0	4
$s_2$	0	0	$4/3$	$-1/6$	1	0	0	2
$s_3$	0	0	$5/3$	$1/6$	0	1	0	5
$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

Informações:

- ▶ Variáveis não básicas:  $(s_1, x_2)$
- ▶ Variáveis básicas:  $(x_1, s_2, s_3, s_4)$
- ▶ Solução básica:  $s_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = 4$ ,  $s_2 = 2$ ,  $s_3 = 5$ ,  $s_4 = 2$ . Função objetivo  $z = 20$ .

Solução é ótima? Não, pois há valores negativos na linha z.

- ▶ Repita o processo.

55MQU – Métodos Quantitativos  
Prof. Marcelo de Souza