Método Gráfico

Solução de programas lineares simples

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos
Universidade do Estado de Santa Catarina

Método Gráfico

Etapas

1. Determinação da **região de soluções viáveis**;
   - em um plano cartesiano, expresse cada restrição;
   - cada restrição divide o plano em uma região viável e uma região inviável;
   - a região viável do modelo é a intersecção das regiões viáveis dadas por cada restrição.
2. Determinação da **solução ótima** entre os pontos viáveis.
   - **a solução ótima estará em algum ponto nos extremos da região viável**;
   - liste os pontos extremos da região viável e calcule seus valores; ou
   - identifique a direção da reta definida pela função objetivo e o último ponto extremo da região viável atingido por ela.

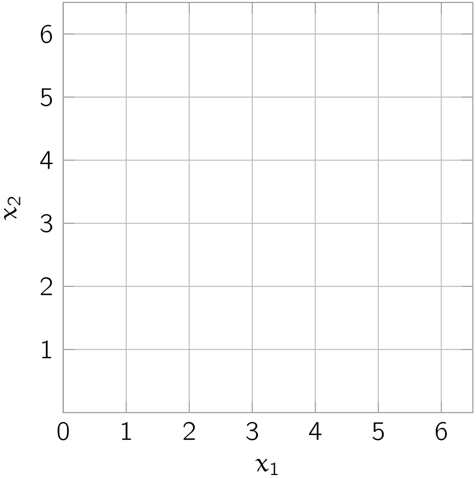
Exemplo

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\
& -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\
& x_2 \leqslant 2 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Exemplo

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

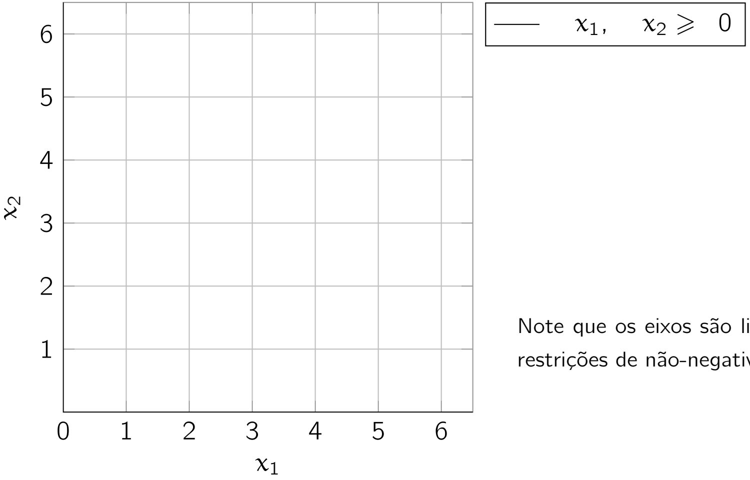


$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\
& -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\
& x_2 \leqslant 2 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Represente as variáveis x_1 e x_2 como eixos de um plano cartesiano onde o modelo será expresso graficamente.

Exemplo

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

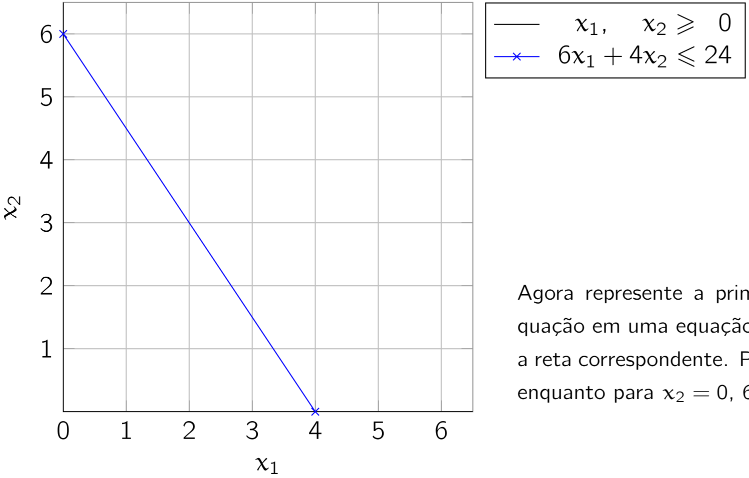


$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\
& -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\
& x_2 \leqslant 2 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Note que os eixos são limitados a $x_1, x_2 \geqslant 0$, respeitando as restrições de não-negatividade.

Exemplo

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

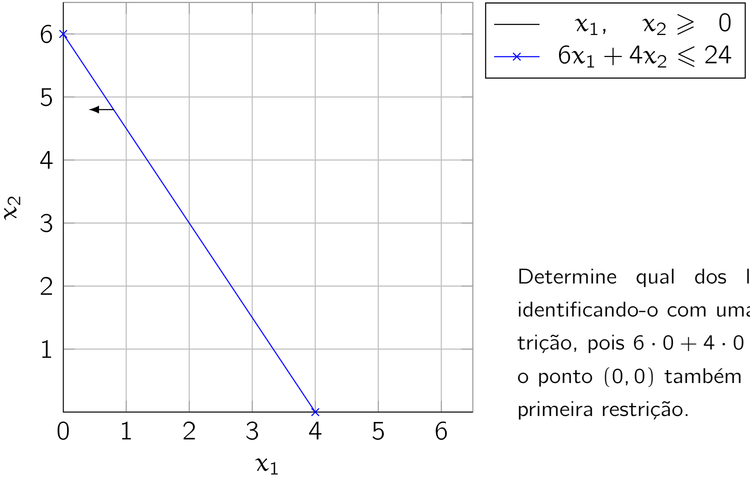


$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\
& -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\
& x_2 \leqslant 2 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Agora represente a primeira restrição, transformando a inequação em uma equação e calculando dois pontos para definir a reta correspondente. Para $x_1 = 0$, $6 \cdot 0 + 4x_2 = 24$ e $x_2 = 6$, enquanto para $x_2 = 0$, $6x_1 + 4 \cdot 0 = 24$ e $x_1 = 4$.

Exemplo

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

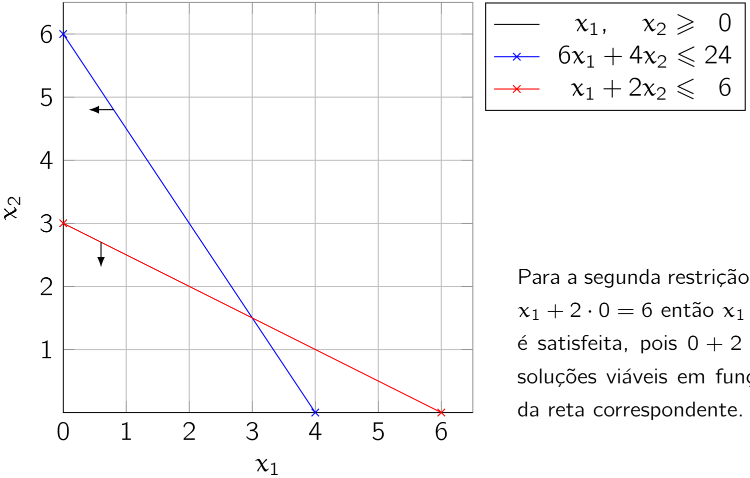


$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\
& -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\
& x_2 \leqslant 2 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Determine qual dos lados contém as soluções viáveis, identificando-o com uma seta. O ponto $(0, 0)$ satisfaz a restrição, pois $6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 \leqslant 24$. Logo, o lado que contém o ponto $(0, 0)$ também contém as soluções que satisfazem a primeira restrição.

Exemplo

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

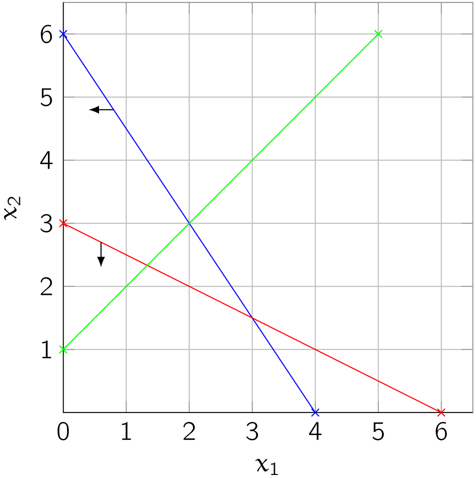


maximiza	$z = 5x_1 + 4x_2$
sujeito a	$6x_1 + 4x_2 \leqslant 24$
	$x_1 + 2x_2 \leqslant 6$
	$-x_1 + x_2 \leqslant 1$
	$x_2 \leqslant 2$
	$x_1, x_2 \geqslant 0$

Para a segunda restrição, $0+2x_2 = 6$ então $x_2 = 3$, enquanto $x_1 + 2 \cdot 0 = 6$ então $x_1 = 6$. Para o ponto $(0, 0)$, a restrição é satisfeita, pois $0 + 2 \cdot 0 = 0 \leqslant 6$. Portanto, a região de soluções viáveis em função da segunda restrição está abaixo da reta correspondente.

Exemplo

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico



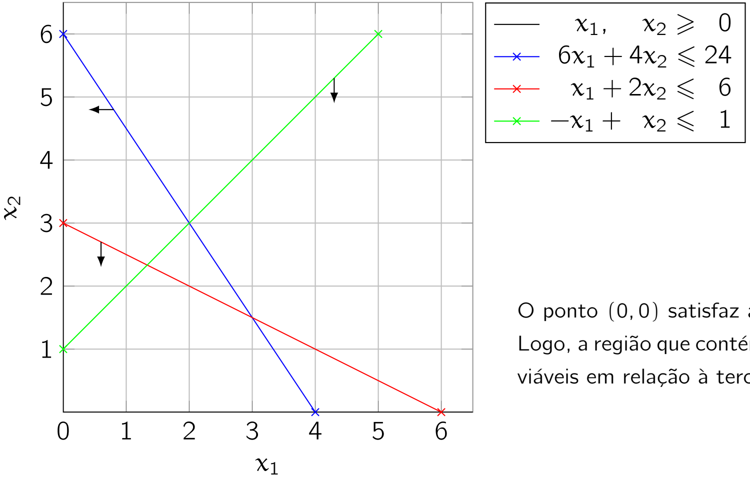
—	$x_1, \quad x_2 \geqslant 0$
—×—	$6x_1 + 4x_2 \leqslant 24$
—×—	$x_1 + 2x_2 \leqslant 6$
—×—	$-x_1 + x_2 \leqslant 1$

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\
& -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\
& x_2 \leqslant 2 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Para a terceira restrição, $-0 + x_2 = 1$ então $x_2 = 1$, enquanto $-x_1 + 0 = 1$ então $x_1 = -1$. O segmento de reta entre os pontos usados possui valores negativos para x_1, o que não impede a determinação da reta. Para facilitar, pode-se usar um novo ponto com $x_2 = 6$, obtendo $-x_1 + 6 = 1$ e $x_1 = 5$.

Exemplo

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

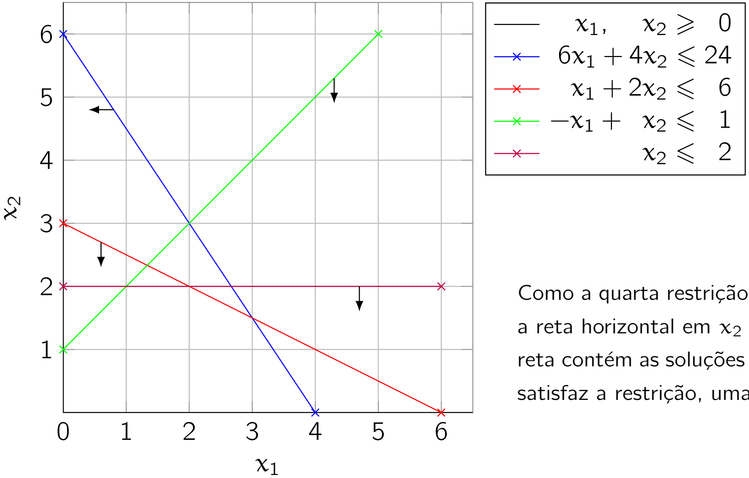


$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\
& -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\
& x_2 \leqslant 2 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

O ponto $(0, 0)$ satisfaz a terceira restrição, pois $-0 + 0 \leqslant 1$. Logo, a região que contém o ponto $(0, 0)$ apresenta as soluções viáveis em relação à terceira restrição.

Exemplo

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

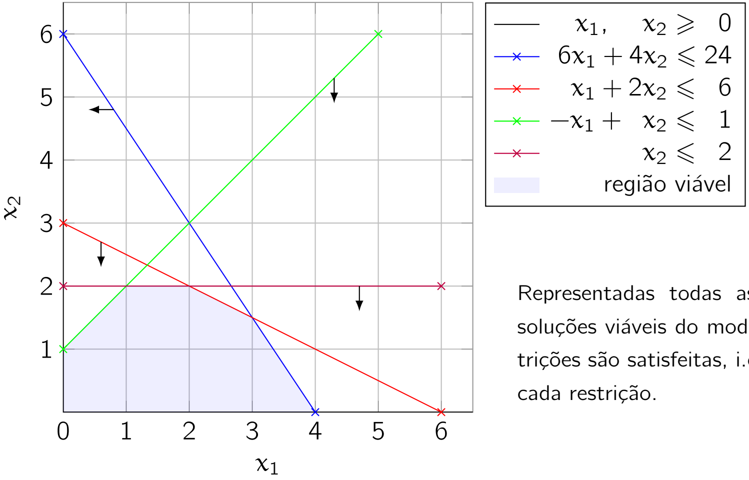


$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\
& -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\
& x_2 \leqslant 2 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Como a quarta restrição é constante em x_2, basta representar a reta horizontal em $x_2 = 2$ e verificar que a região abaixo da reta contém as soluções viáveis, pois o ponto $(0, 0)$ ali contido satisfaz a restrição, uma vez que $x_2 = 0$ e $0 \leqslant 2$.

Exemplo

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

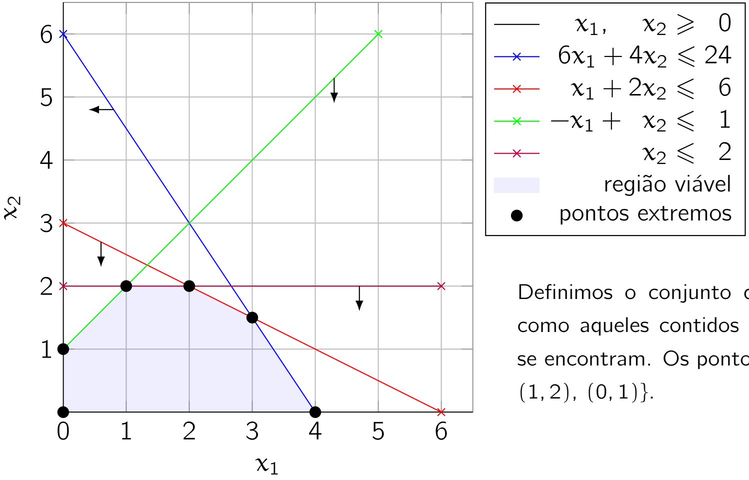


$$
\begin{array}{rl}
\textbf{maximiza} & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} & 6x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\
 & x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\
 & -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\
 & x_2 \leqslant 2 \\
 & x_1 , x_2 \geqslant 0
\end{array}
$$

Representadas todas as restrições, definimos a região de soluções viáveis do modelo como a região onde todas as restrições são satisfeitas, i.e. a intersecção das regiões viáveis de cada restrição.

Exemplo

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico

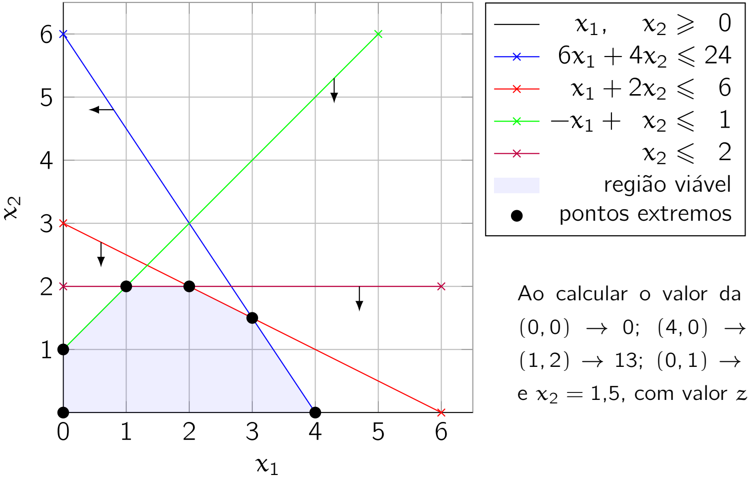


$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\
& -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\
& x_2 \leqslant 2 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Definimos o conjunto de pontos extremos da região viável como aqueles contidos na região viável e onde as restrições se encontram. Os pontos são: $\{(0,0), (4,0), (3,1{,}5), (2,2), (1,2), (0,1)\}$.

Exemplo

Revisitando o modelo Reddy Mikks – solução pelo método gráfico



maximiza	$z = 5x_1 + 4x_2$
sujeito a	$6x_1 + 4x_2 \leqslant 24$
	$x_1 + 2x_2 \leqslant 6$
	$-x_1 + x_2 \leqslant 1$
	$x_2 \leqslant 2$
	$x_1, x_2 \geqslant 0$

Ao calcular o valor da solução em cada ponto, temos que $(0,0) \to 0$; $(4,0) \to 20$; $(3, 1{,}5) \to 21$; $(2,2) \to 18$, $(1,2) \to 13$; $(0,1) \to 4$. Logo, a solução ótima é $x_1 = 3$ e $x_2 = 1{,}5$, com valor $z = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1{,}5 = 21$.

Exemplo

Determinar os valores de x_1 e x_2 de pontos extremos

Quando não é possível identificar os valores das variáveis de um ponto extremo visualmente, identifique as restrições r_1 e r_2 que definem esse ponto e calcule os valores das variáveis no ponto de intersecção em que $r_1 = r_2$.

Exemplo

Determinar os valores de x_1 e x_2 de pontos extremos

Quando não é possível identificar os valores das variáveis de um ponto extremo visualmente, identifique as restrições r_1 e r_2 que definem esse ponto e calcule os valores das variáveis no ponto de intersecção em que $r_1 = r_2$.

Exemplo: dadas as restrições $6x_1 + 4x_2 = 24$ e $x_1 + 2x_2 = 6$, o ponto de intersecção é

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 24 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 24 \\ -2x_1 - 4x_2 = -12 \end{cases}$$

Com isso, $4x_1 = 12$ e $x_1 = 3$. Substituindo x_1 em alguma das equações temos que $x_2 = 1{,}5$. Logo, o ponto onde as referidas restrições se encontram é $(3, 1{,}5)$.

Ferramenta para solução via método gráfico

Linear Programming Graphical Method Calculator

Programas lineares simples podem ser resolvidos via método gráfico usando a ferramenta *Linear Programming Graphic Method Calculator* da *Reshmat.ru*.

- Acesse em `http://reshmat.ru/graphical_method_lpp.html`.

Exemplo

Revisitando o modelo Ozark Farms – solução pelo método gráfico

Resolva o programa linear correspondente:

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & z = 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \geqslant 800 \\
& 0{,}21x_1 - 0{,}3x_2 \leqslant 0 \\
& 0{,}03x_1 - 0{,}01x_2 \geqslant 0 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

55MQU – Métodos Quantitativos
Prof. Marcelo de Souza