

# Método Simplex

## Casos especiais

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos  
Universidade do Estado de Santa Catarina



1. Degeneração;
2. Múltiplas (ou infinitas) soluções ótimas;
3. Sistema ilimitado (ou soluções ilimitadas);
4. Sistema inviável (ou soluções inviáveis/inexistentes).



# Casos especiais

... e sua interpretação prática

1. Degeneração;
  - ▶ Ao menos uma das restrições é redundante.
2. Múltiplas (ou infinitas) soluções ótimas;
3. Sistema ilimitado (ou soluções ilimitadas);
4. Sistema inviável (ou soluções inviáveis/inexistentes).

# Casos especiais

... e sua interpretação prática



1. Degeneração;
  - ▶ Ao menos uma das restrições é redundante.
2. Múltiplas (ou infinitas) soluções ótimas;
  - ▶ A função objetivo é paralela a uma das restrições;
  - ▶ É possível escolher entre as múltiplas soluções ótimas sem impacto na função objetivo.
    - ▶ Ex: no mix de produtos, é melhor produzir um número maior de produtos diferentes.
3. Sistema ilimitado (ou soluções ilimitadas);
4. Sistema inviável (ou soluções inviáveis/inexistentes).

# Casos especiais

... e sua interpretação prática



1. Degeneração;
  - ▶ Ao menos uma das restrições é redundante.
2. Múltiplas (ou infinitas) soluções ótimas;
  - ▶ A função objetivo é paralela a uma das restrições;
  - ▶ É possível escolher entre as múltiplas soluções ótimas sem impacto na função objetivo.
    - ▶ Ex: no mix de produtos, é melhor produzir um número maior de produtos diferentes.
3. Sistema ilimitado (ou soluções ilimitadas);
  - ▶ Erro na construção do modelo: falta restrição.
4. Sistema inviável (ou soluções inviáveis/inexistentes).



# Casos especiais

... e sua interpretação prática

1. Degeneração;
  - ▶ Ao menos uma das restrições é redundante.
2. Múltiplas (ou infinitas) soluções ótimas;
  - ▶ A função objetivo é paralela a uma das restrições;
  - ▶ É possível escolher entre as múltiplas soluções ótimas sem impacto na função objetivo.
    - ▶ Ex: no mix de produtos, é melhor produzir um número maior de produtos diferentes.
3. Sistema ilimitado (ou soluções ilimitadas);
  - ▶ Erro na construção do modelo: falta restrição.
4. Sistema inviável (ou soluções inviáveis/inexistentes).
  - ▶ Erro na construção do modelo: há restrições inconsistentes.



Situação:

- ▶ Há ao menos uma restrição redundante.

Detecção:

- ▶ Ocorre empate na razão mínima ao determinar a variável sainte;
  - ▶ Neste caso, escolhe uma delas arbitrariamente.
- ▶ Na iteração seguinte, ao menos uma variável básica será 0;
- ▶ Essa nova solução é chamada de **solução degenerada**.

# Degeneração

## Exemplo



Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	-3	-9	0	0	0
$s_1$	1	4	1	0	8
$s_2$	1	2	0	1	4

**maximiza**  $z = 3x_1 + 9x_2$

**sujeito a**  $x_1 + 4x_2 \leq 8$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



# Degeneração

## Exemplo



Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	-3	-9	0	0	0
$s_1$	1	4	1	0	8
$s_2$	1	2	0	1	4

**maximiza**  $z = 3x_1 + 9x_2$

**sujeito a**  $x_1 + 4x_2 \leq 8$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Variável entrante é  $x_2$ . Analisando as razões mínimas em relação a essa variável:

- ▶ Linha  $s_1$ :  $8/4 = 2$ ;
- ▶ Linha  $s_2$ :  $4/2 = 2$ ;
- ▶ Ou seja, uma delas é redundante.

# Degeneração

## Exemplo

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	-3	-9	0	0	0
$s_1$	1	4	1	0	8
$s_2$	1	2	0	1	4

**maximiza**  $z = 3x_1 + 9x_2$

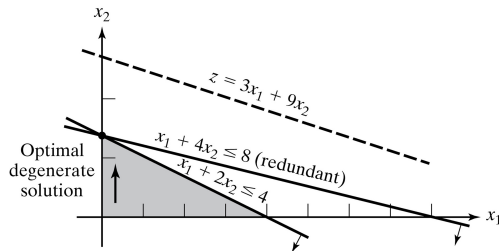
**sujeito a**  $x_1 + 4x_2 \leq 8$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

Variável entrante é  $x_2$ . Analisando as razões mínimas em relação a essa variável:

- ▶ Linha  $s_1$ :  $8/4 = 2$ ;
- ▶ Linha  $s_2$ :  $4/2 = 2$ ;
- ▶ Ou seja, uma delas é redundante.



# Degeneração

## Exemplo

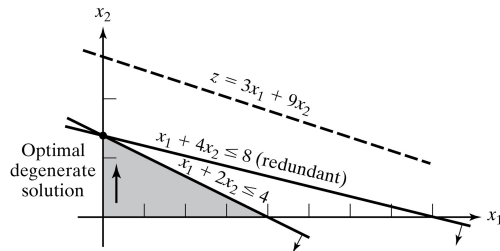
Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	-3	-9	0	0	0
$s_1$	1	4	1	0	8
$s_2$	1	2	0	1	4

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	$-3/4$	0	$9/4$	0	18
$x_2$	$1/4$	1	$1/4$	0	2
$s_2$	$1/2$	0	$-1/2$	1	0

Solução degenerada

Na nova solução:

- ▶ Variável básica  $s_2 = 0$ ;
- ▶ Logo, a solução é degenerada.



# Degeneração

## Exemplo

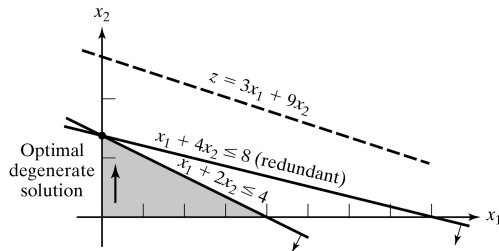
Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	-3	-9	0	0	0
$s_1$	1	4	1	0	8
$s_2$	1	2	0	1	4

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	0	0	$3/2$	$3/2$	18
$x_2$	0	1	$1/2$	$-1/2$	2
$x_1$	1	0	-1	2	0

**Solução ótima degenerada**

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	$-3/4$	0	$9/4$	0	18
$x_2$	$1/4$	1	$1/4$	0	2
$s_2$	$1/2$	0	$-1/2$	1	0

**Solução degenerada**



# Degeneração

## Exemplo

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	-3	-9	0	0	0
$s_1$	1	4	1	0	8
$s_2$	1	2	0	1	4

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	0	0	$3/2$	$3/2$	18
$x_2$	0	1	$1/2$	$-1/2$	2
$x_1$	1	0	-1	2	0

**Solução ótima degenerada**

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	$-3/4$	0	$9/4$	0	18
$x_2$	$1/4$	1	$1/4$	0	2
$s_2$	$1/2$	0	$-1/2$	1	0

**Solução degenerada**

A nova solução:

- ▶ É ótima;
- ▶ Segue sendo degenerada ( $x_1 = 0$ );
- ▶ Possui o mesmo valor de  $z = 18$ .





Situação:

- ▶ A função objetivo assume seu melhor valor em mais de um ponto de solução (geralmente em infinitas soluções).

Detecção:

- ▶ Variável não básica tem coeficiente 0 na linha  $z$  (função objetivo) da tabela simplex.



# Múltiplas soluções ótimas

## Exemplo

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	-2	-4	0	0	0
$s_1$	1	2	1	0	5
$s_2$	1	1	0	1	4

**maximiza**  $z = 2x_1 + 4x_2$

**sujeito a**  $x_1 + 2x_2 \leq 5$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$



# Múltiplas soluções ótimas

## Exemplo

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	-2	-4	0	0	0
$s_1$	1	2	1	0	5
$s_2$	1	1	0	1	4

**maximiza**  $z = 2x_1 + 4x_2$

**sujeito a**  $x_1 + 2x_2 \leq 5$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Para calcular a solução básica adjacente:

- ▶ Variável entrante:  $x_2$ ;
- ▶ Variável saínte:  $s_1$ , com razão mínima  $5/2$ .





# Múltiplas soluções ótimas

## Exemplo

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	-2	-4	0	0	0
$s_1$	1	2	1	0	5
$s_2$	1	1	0	1	4

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	0	0	2	0	10
$x_2$	$1/2$	1	$1/2$	0	$5/2$
$s_2$	$1/2$	0	$-1/2$	1	$3/2$

**Solução ótima**

A solução é ótima, no entanto:

- ▶ A variável não básica  $x_1$  tem coeficiente 0 na linha  $z$ ;
- ▶ Isso significa que aumentar seu valor não produz alteração da função objetivo  $z$ ;
- ▶ Logo, há (pelo menos) outra solução ótima!



# Múltiplas soluções ótimas

## Exemplo

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	-2	-4	0	0	0
$s_1$	1	2	1	0	5
$s_2$	1	1	0	1	4

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	0	0	2	0	10
$x_2$	$1/2$	1	$1/2$	0	$5/2$
$s_2$	$1/2$	0	$-1/2$	1	$3/2$

**Solução ótima**

Calculamos uma nova iteração:

- ▶ Variável entrante:  $x_1$ ;
- ▶ Variável saínte:  $s_2$ , com razão mínima  $3/2 \cdot 2/1 = 3$ .

# Múltiplas soluções ótimas

## Exemplo



Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	-2	-4	0	0	0
$s_1$	1	2	1	0	5
$s_2$	1	1	0	1	4

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	0	0	2	0	10
$x_2$	$1/2$	1	$1/2$	0	$5/2$
$s_2$	$1/2$	0	$-1/2$	1	$3/2$

**Solução ótima**

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	0	0	2	0	10
$x_2$	0	1	1	-1	1
$x_1$	1	0	-1	2	3

**Solução ótima alternativa**

# Múltiplas soluções ótimas

## Exemplo

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	-2	-4	0	0	0
$s_1$	1	2	1	0	5
$s_2$	1	1	0	1	4

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	0	0	2	0	10
$x_2$	$1/2$	1	$1/2$	0	$5/2$
$s_2$	$1/2$	0	$-1/2$	1	$3/2$

**Solução ótima**

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	0	0	2	0	10
$x_2$	0	1	1	-1	1
$x_1$	1	0	-1	2	3

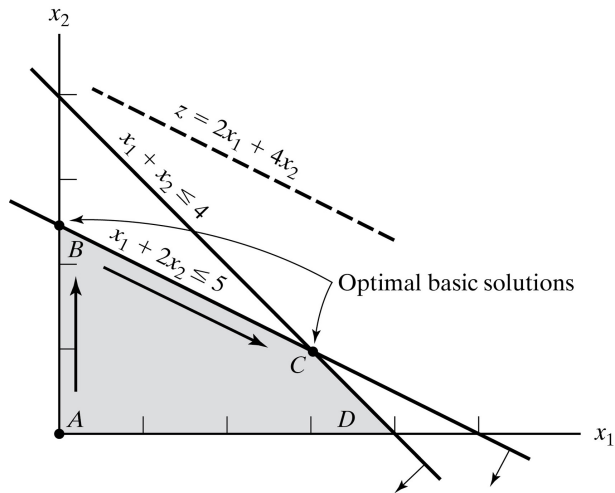
**Solução ótima alternativa**

Soluções ótimas:

- ▶  $x_1 = 0; x_2 = 5/2; z = 10;$
- ▶  $x_1 = 3; x_2 = 1; z = 10.$

# Múltiplas soluções ótimas

Exemplo



# Múltiplas soluções ótimas

## Exemplo

Soluções ótimas identificadas:

- ▶  $x_1 = 0; x_2 = 5/2; z = 10$  (solução B);
- ▶  $x_1 = 3; x_2 = 1; z = 10$  (solução C).





# Múltiplas soluções ótimas

## Exemplo

Soluções ótimas identificadas:

- ▶  $x_1 = 0; x_2 = 5/2; z = 10$  (solução B);
- ▶  $x_1 = 3; x_2 = 1; z = 10$  (solução C).

Qualquer solução ótima pode ser determinada pela combinação linear das soluções acima. Seja  $\alpha \in [0, 1]$  o peso da combinação linear,

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= \alpha \cdot x_1^B + (1 - \alpha) \cdot x_1^C \\ \hat{x}_2 &= \alpha \cdot x_2^B + (1 - \alpha) \cdot x_2^C\end{aligned}$$



# Múltiplas soluções ótimas

## Exemplo

Soluções ótimas identificadas:

- ▶  $x_1 = 0; x_2 = 5/2; z = 10$  (solução B);
- ▶  $x_1 = 3; x_2 = 1; z = 10$  (solução C).

Qualquer solução ótima pode ser determinada pela combinação linear das soluções acima. Seja  $\alpha \in [0, 1]$  o peso da combinação linear,

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= \alpha \cdot x_1^B + (1 - \alpha) \cdot x_1^C \\ \hat{x}_2 &= \alpha \cdot x_2^B + (1 - \alpha) \cdot x_2^C\end{aligned}$$

Exemplo: seja  $\alpha = 0,3$ ,

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= 0,3 \cdot 0 + 0,7 \cdot 3 = 2,1 \\ \hat{x}_2 &= 0,3 \cdot 5/2 + 0,7 \cdot 1 = 1,45\end{aligned}$$





Situação:

- ▶ Pode-se aumentar indefinidamente o valor de (pelo menos) uma variável, melhorando (i.e. diminuindo ou aumentando) indefinidamente o valor da função objetivo.

Detecção:

- ▶ Os valores na coluna de uma variável não básica são todos não positivos (i.e.  $\leq 0$ ).
  - ▶ Ou seja, pode-se aumentar o valor da variável até o infinito sem violar nenhuma restrição.

# Sistema ilimitado

## Exemplo



**maximiza**  $z = 2x_1 + x_2$

**sujeito a**  $x_1 - x_2 \leq 10$

$$2x_1 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	-2	-1	0	0	0
$s_1$	1	-1	1	0	10
$s_2$	2	0	0	1	40

# Sistema ilimitado

## Exemplo



**maximiza**  $z = 2x_1 + x_2$

**sujeito a**  $x_1 - x_2 \leq 10$

$$2x_1 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	-2	-1	0	0	0
$s_1$	1	-1	1	0	10
$s_2$	2	0	0	1	40

As restrições não limitam o crescimento de  $x_2$ .

- ▶ Razões  $10/-1$  e  $40/0$ ;
- ▶ Podemos aumentar seu valor até  $\infty$ .

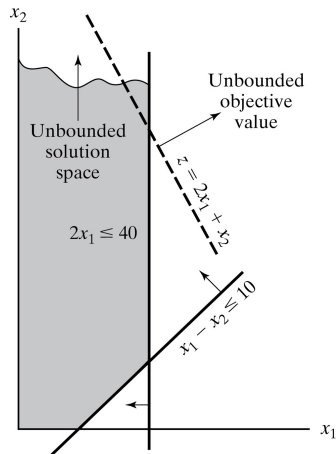
# Sistema ilimitado

## Exemplo



**maximiza**  $z = 2x_1 + x_2$   
**sujeito a**  $x_1 - x_2 \leq 10$   
 $2x_1 \leq 40$   
 $x_1, x_2 \geq 0$

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Sol.
$z$	-2	-1	0	0	0
$s_1$	1	-1	1	0	10
$s_2$	2	0	0	1	40





Situação:

- ▶ Não há nenhuma solução viável (i.e. que não viole nenhuma restrição).

Detecção:

- ▶ Só pode acontecer se há restrições do tipo  $=$  e/ou  $\geq$ ;
- ▶ Neste caso, introduzimos variáveis artificiais;
- ▶ Ocorre quando alguma variável artificial é positiva na iteração ótima.

# Sistema inviável

## Exemplo

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	R	Sol.
$z$	-303	-402	0	100	0	-1200
$s_1$	2	1	1	0	0	2
R	3	4	0	-1	1	12

**maximiza**  $z = 3x_1 + 2x_2$

**sujeito a**  $2x_1 + x_2 \leq 2$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



# Sistema inviável

## Exemplo

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	R	Sol.
$z$	-303	-402	0	100	0	-1200
$s_1$	2	1	1	0	0	2
R	3	4	0	-1	1	12

$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Pelo método M-grande:

- ▶ Introduzimos uma variável artificial **R** para a segunda restrição;
- ▶ Penalizamos a função objetivo com o valor dessa variável multiplicada por  $M = -100$ ;
- ▶ Ajustamos a linha  $z$  na tabela simplex inicial.

# Sistema inviável

## Exemplo



Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	R	Sol.
$z$	-303	-402	0	100	0	-1200
$s_1$	2	1	1	0	0	2
R	3	4	0	-1	1	12

$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Pelo método M-grande:

- ▶ Introduzimos uma variável artificial  $R$  para a segunda restrição;
- ▶ Penalizamos a função objetivo com o valor dessa variável multiplicada por  $M = -100$ ;
- ▶ Ajustamos a linha  $z$  na tabela simplex inicial.

Para a próxima iteração:

- ▶ Variável entrante:  $x_2$ ;
- ▶ Variável sainte:  $s_1$ , com razão  $2/1$ .



# Sistema inviável

## Exemplo



Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	R	Sol.
$z$	-303	-402	0	100	0	-1200
$s_1$	2	1	1	0	0	2
R	3	4	0	-1	1	12

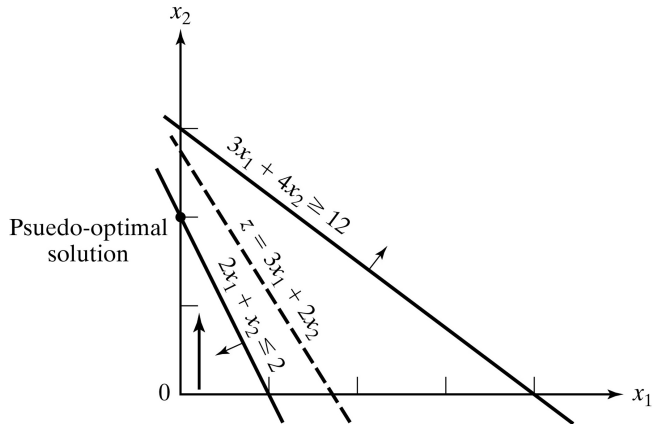
Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	R	Sol.
$z$	501	0	402	100	0	-396
$x_2$	2	1	1	0	0	2
R	-5	0	-4	-1	1	4

A nova solução é ótima, no entanto:

- ▶ A variável artificial R está na base da solução;
- ▶ Ou seja, possui valor positivo  $R = 4$ ;
- ▶ Logo, a solução obtida viola restrições e não existe solução viável para o modelo original.

# Sistema inviável

## Exemplo



55MQU – Métodos Quantitativos  
Prof. Marcelo de Souza