# ANÁLISE PÓS-OTIMIZAÇÃO: ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

↗ Seção 3.6 (Taha)

PROBLEMA → MODELO → SOLUÇÃO → ANÁLISE PÓS-OTIMIZAÇÃO

## IDEIA GERAL

- Parâmetros (dados de entrada) de um PL geralmente não são exatos.

  Ex: limite de uma matéria prima,
  Receita/lucro pela venda de um produto, ...

- Qual o impacto dessa incerteza na qualidade da solução ótima?

  Ex: Quanto o lucro pela venda do produto A pode variar para que a solução ótima continue a mesma?

  ↳ Se ±52% → Solução Robusta
  Se ±2% → Solução Sensível

  100% ↑ + Robusta
  0% ↓ + Sensível

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE: Quais os limites dentro dos quais os parâmetros do modelo podem variar sem alterar a solução ótima?

↳ Ou seja, analisar a sensibilidade da solução diante de alterações desses parâmetros.

TIPOS:

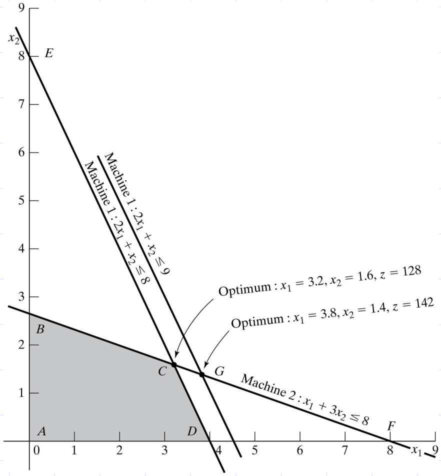
(1) Sensibilidade da solução ótima às variações na disponibilidade dos recursos, i.e. lado direito das restrições.

(2) Sensibilidade da solução ótima às variações no lucro/custo unitário, i.e. coeficientes da função objetivo.

# Variações no Lado Direito (1)

Maximiza $Z = 30x_1 + 20x_2$ → Receitas produtos 1 e 2
sujeito a $2x_1 + x_2 \leq 8$ → Horas máquina 1 ($b_1$)
$x_1 + 3x_2 \leq 8$ → Horas máquina 2 ($b_2$)
$x_1, x_2 \geq 0$

Se alterarmos a capacidade da máquina 1?




| | $b_1$ | | $b_1'$ |
|---|---|---|---|
| $b_1$: | 8h | → | 9h |
| $Z$: | 128 | → | 142 |
| | $z$ | | $z'$ |

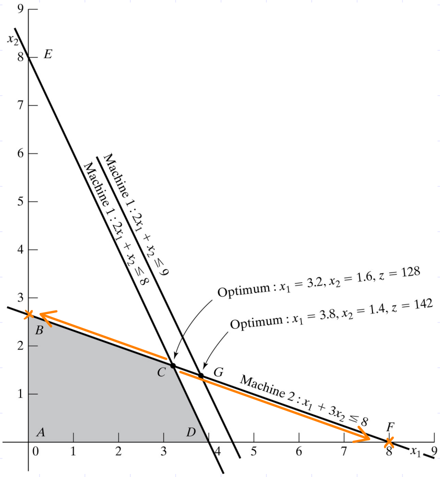
↳ Taxa de variação $V$ na receita por aumentar a capacidade da máquina 1 ($b_1$) em 1h é

$$V = \frac{Z' - Z}{b_1' - b_1} = \frac{142 - 128}{9 - 8} = 14\ \$/h$$

↳ Preço dual (ou preço sombra)

**Preço dual:** Variação no valor ótimo da função objetivo ($Z$) por unidade de variação na disponibilidade do recurso. ($b_i$)

Podemos também determinar os valores mínimo e máximo para o Recurso, de modo que o preço dual continue o mesmo.




Capacidade Mínima da Máquina 1 (Ponto B)

$2x_1 + x_2$ $\qquad x_1 = 0$

$2\cdot 0 + 1\cdot 2{,}67 = 2{,}67$ $\qquad x_2 = 2{,}67$

Capacidade Máxima da Máquina 1 (Ponto F)

$2x_1 + x_2$ $\qquad x_1 = 8$

$2\cdot 8 + 1\cdot 0 = 16$ $\qquad x_2 = 0$

Logo, o preço dual de \$14/hora é válido no intervalo

$2{,}67 \le b_1 \le 16h$ → **Faixa de Viabilidade**

Capacidade Máquina 1

---

Qual o preço dual e faixa de viabilidade para a capacidade da máquina 2? ($b_2$)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

$-5x_2 = -10$

$\boxed{x_2 = 2}$

$x_1 + 3\cdot 2 = 9$

$\boxed{x_1 = 3}$

Ponto (sol. ótima) → (3,2)

Na função objetivo: $z' = 30x_1 + 20x_2$

$= 30\cdot 3 + 20\cdot 2$

$\boxed{z' = 130}$

Preço dual do $b_2$: $\frac{Z'-Z}{b'_2-b_2} = \frac{130-128}{9-8} = \boxed{2 \text{ \$/h}}$

Faixa de viabilidade: Mínimo $\to (4,0) \to x_1+3x_2 = 4+3\cdot 0 = 4$
Máximo $\to (0,8) \to x_1+3x_2 = 0+3\cdot 8 = 24$

Logo, preço dual é 2 \$/h para $4 \leq b_2 \leq 24$.

---

Em posse dessas informações, podemos tomar decisões econômicas: $\begin{cases} b_1: 14 \ (2{,}67 \leq b_1 \leq 16) \\ b_2: 2 \ (4 \leq b_2 \leq 24) \end{cases}$

1. Se quisermos aumentar a capacidade das máquinas, qual delas deve ter prioridade?

   ↳ 1, pois o preço dual é 14 (contra 2)

2. Podemos aumentar a capacidade de cada máquina por \$10/hora. Isso é bom?

   ↳ Máq 1: \$14 − \$10 = \$4 → lucro, sim!
   ↳ Máq 2: \$2 − \$10 = −\$8 → Prejuízo, não!

3. Se aumentarmos a capacidade da máquina 1 para 13h/dia, qual o impacto na receita ótima?

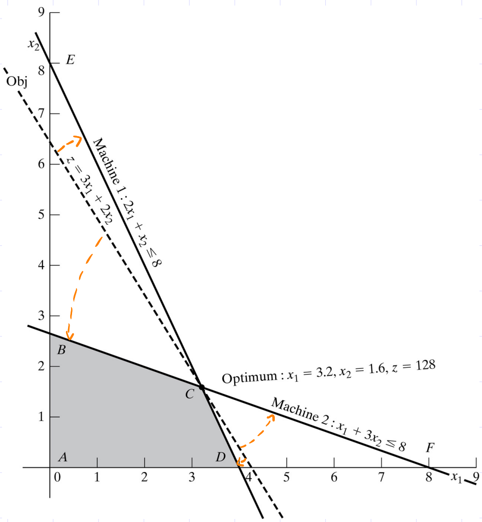
   ↳ 13h está dentro da faixa de viabilidade e o preço dual associado é \$14/hora. Logo, $14\cdot(13-8) = 70$ e a receita passa de 128 para $128+70 = 198$.

4. Agora o aumento da capacidade da máquina 1 é para 20h. Qual o impacto na Receita ótima?

↳ 20h está fora da faixa de viabilidade, i.e. $20 \notin [2{,}67, 16]$. Só podemos concluir até 16h.

---

## Alterações nos Coeficientes da Função Objetivo




Ao alterar os coeficientes da função objetivo, alteramos a inclinação da reta correspondente, bem como os valores das soluções.

No entanto, a solução ótima (Ponto C) não muda, desde que a função objetivo esteja entre as retas BF e DE.

Dada uma função objetivo genérica

$$\boxed{z = c_1 x_1 + c_2 x_2}$$

Há intervalos de valores para $c_1$ e $c_2$ que mantêm inalterada a solução ótima. Para calcular:

Dadas restrições $c_1^1 x_1 + c_2^1 x_2 = b_1$ e $c_1^2 x_1 + c_2^2 x_2 = b_2$, temos que

$$\boxed{\underbrace{\frac{c_1^1}{c_2^1}}_{\text{Restrição 1}} \leq \underbrace{\frac{c_1}{c_2}}_{\text{Função objetivo}} \leq \underbrace{\frac{c_1^2}{c_2^2}}_{\text{Restrição 2}}}$$

→ Dado que $c_1^1/c_2^1 \leq c_1^2/c_2^2$

Para o modelo apresentado (figura):

- Reta BF : $x_1 + 3x_2 = 8$ $\quad 1/3$
- Reta DE : $2x_1 + x_2 = 8$ $\quad 2/1$

Logo,

$$\boxed{1/3 \leq c_1/c_2 \leq 2/1} \quad \text{ou} \quad \boxed{0{,}33 \leq c_1/c_2 \leq 2}$$

FAIXA DE OTIMALIDADE

---

Em posse da faixa de otimalidade, podemos tomar decisões econômicas:

1. Se as receitas dos produtos 1 e 2 forem alteradas para \$35 e \$25, respectivamente, a solução ótima será a mesma?

$c_1/c_2 = 35/25 = 1{,}4 \in [0{,}33 , 2]$. Logo, sim!

2. Se fixamos a receita do produto 2 em $c_2 = \$20$, qual a faixa de variação da receita do produto 1 ($c_1$) que mantém inalterada a solução ótima?

$$0{,}33 \leq c_1/20 \leq 2$$
$$20 \cdot 0{,}33 \leq c_1 \leq 20 \cdot 2$$
$$\boxed{6{,}67 \leq c_1 \leq 40}$$

Faixa de otimalidade para $c_1$ (fixando o valor de $c_2$)

## Extra (desafio):

Dado o PL

$$\text{Maximiza } Z = 30x_1 + 20x_2$$
$$\text{sujeito a } 2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

É possível determinar um limite superior (upper bound) para $Z$?

↳ Dada a restrição: $2x_1 + x_2 \leq 8 \quad (\times 20)$

$$40x_1 + 20x_2 \leq 160$$

↳ Sabemos que

$$Z = 30x_1 + 20x_2 \leq 40x_1 + 20x_2$$

Logo,

$$Z \leq 40x_1 + 20x_2 \leq 160$$

**Conclusão:** A solução ótima não será maior que 160.