# Programação Linear Inteira

## Conceitos básicos e relaxação linear

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos

Universidade do Estado de Santa Catarina

# Programação linear

## Um exemplo

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\
& -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 16 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

# Programação linear

## Um exemplo

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\
& -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 16 \\
& x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}
$$

Programação linear: variáveis de decisão são **contínuas**.

- Bem resolvido: método simplex!

# Programação linear inteira

## Restrições de integralidade

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\
& -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 16 \\
& x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

Programação linear inteira **pura**: variáveis de decisão são **discretas** (inteiras).

# Programação linear inteira

## Restrições de integralidade

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\
& -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 16 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+, \;\; x_3 \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}
$$

Programação linear inteira **mista**: variáveis de decisão são **contínuas** e **discretas** (inteiras).

# Programação linear inteira

## Restrições de integralidade

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\
& -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 16 \\
& x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Programação linear inteira **binária**: variáveis de decisão são **binárias** (inteiras em $[0, 1]$).

# Programação linear inteira

## Restrições de integralidade

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\
& -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 16 \\
& x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

Programação inteira é **mais complexa**!

- Programação linear: PL $\in$ P;
- Programação inteira: PI $\in$ NP-difícil.

# Programação linear inteira

## Por que variáveis inteiras?

O uso de variáveis inteiras nos possibilita representar diferentes situações:

- Quando são necessários somente valores inteiros;
  - quantos funcionários contratar; quantas unidades produzir, . . .

# Programação linear inteira

## Por que variáveis inteiras?

O uso de variáveis inteiras nos possibilita representar diferentes situações:

- Quando são necessários somente valores inteiros;
    - quantos funcionários contratar; quantas unidades produzir, . . .
- Escolher entre tomar uma decisão ou outra;
    - quais investimentos selecionar, quais funcionários contratar, . . .

# Programação linear inteira

## Por que variáveis inteiras?

O uso de variáveis inteiras nos possibilita representar diferentes situações:

- Quando são necessários somente valores inteiros;
  - quantos funcionários contratar; quantas unidades produzir, ...
- Escolher entre tomar uma decisão ou outra;
  - quais investimentos selecionar, quais funcionários contratar, ...
- Modelagem de condicionais;
  - Restrição se aplica somente se um investimento de dado tipo é selecionado, ...

# Programação linear inteira

## Por que variáveis inteiras?

O uso de variáveis inteiras nos possibilita representar diferentes situações:

- Quando são necessários somente valores inteiros;
  - quantos funcionários contratar; quantas unidades produzir, ...
- Escolher entre tomar uma decisão ou outra;
  - quais investimentos selecionar, quais funcionários contratar, ...
- Modelagem de condicionais;
  - Restrição se aplica somente se um investimento de dado tipo é selecionado, ...
- Entre outras ...

Em resumo: **maior poder de modelagem**!

# Programação linear inteira

## Exemplos clássicos

Problemas em grafos

- árvore geradora mínima, emparelhamento máximo (ponderado e não ponderado), cortes mínimo e máximo, clique máximo, coloração de vértices e arestas, problema de Steiner, caixeiro viajante, roteamento de veículos, ...

# Programação linear inteira

## Exemplos clássicos

Problemas em grafos

- árvore geradora mínima, emparelhamento máximo (ponderado e não ponderado), cortes mínimo e máximo, clique máximo, coloração de vértices e arestas, problema de Steiner, caixeiro viajante, roteamento de veículos, ...

Problemas de fluxo

- fluxo máximo, caminho mais curto, fluxo a custo mínimo, fluxos com ganhos, multi-fluxos, ...

# Programação linear inteira

## Exemplos clássicos

Problemas em grafos

- árvore geradora mínima, emparelhamento máximo (ponderado e não ponderado), cortes mínimo e máximo, clique máximo, coloração de vértices e arestas, problema de Steiner, caixeiro viajante, roteamento de veículos, ...

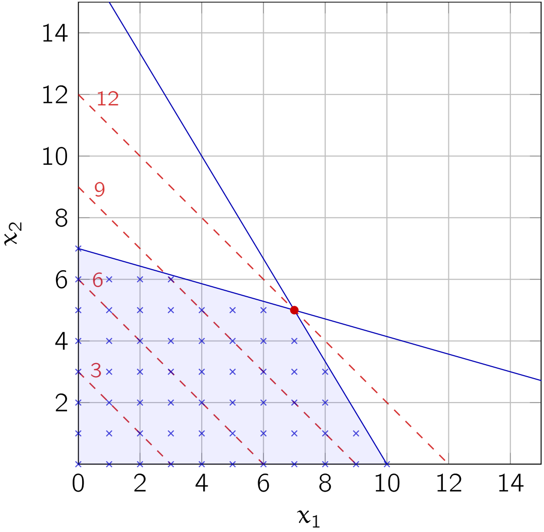
Problemas de fluxo

- fluxo máximo, caminho mais curto, fluxo a custo mínimo, fluxos com ganhos, multi-fluxos, ...

Problemas numéricos

- mochila, empacotamento uni- e multi-dimensional, lot sizing, ...

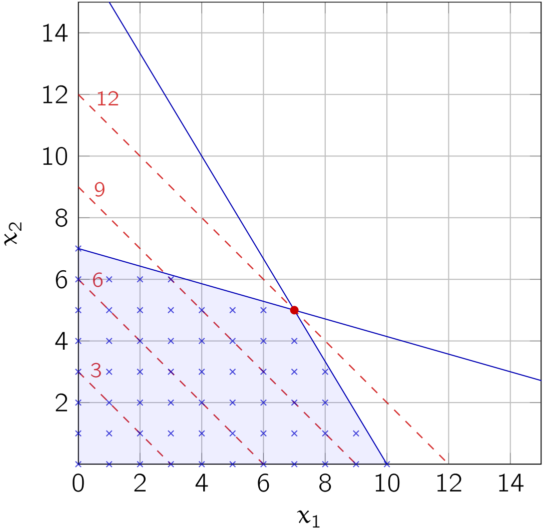
# Programação linear inteira




$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = x_1 + x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 2x_1 + 7x_2 \leq 49 \\
& 5x_1 + 3x_2 \leq 50 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

**Relaxação linear**: ignora as restrições de integralidade e resolve o problema com otimização linear.

# Programação linear inteira




$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = x_1 + x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 2x_1 + 7x_2 \leq 49 \\
& 5x_1 + 3x_2 \leq 50 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

**Relaxação linear**: ignora as restrições de integralidade e resolve o problema com otimização linear.

Neste caso, a solução ótima do programa linear é $x_1 = 7$ e $x_2 = 5$. Como as variáveis assumem valores inteiros, essa é a solução ótima para o programa inteiro.

# Programação linear inteira

## Relaxação

Um modelo (programa) $\mathcal{R} = \{\max \ f_{\mathcal{R}}(x) : x \in X_{\mathcal{R}}\}$ é considerado uma **relaxação** de um modelo $\mathcal{M} = \{\max \ f(x) : x \in X\}$ se e somente se:

- todas as soluções de $\mathcal{M}$ são também soluções de $\mathcal{R}$, ou seja, $X \subseteq X_{\mathcal{R}}$,
- e toda solução $x \in X$ tem custo em $\mathcal{R}$ menor ou igual ao custo em $\mathcal{M}$, ou seja, $f_{\mathcal{R}}(x) \geq f(x), \forall x \in X$.

# Programação linear inteira

## Relaxação

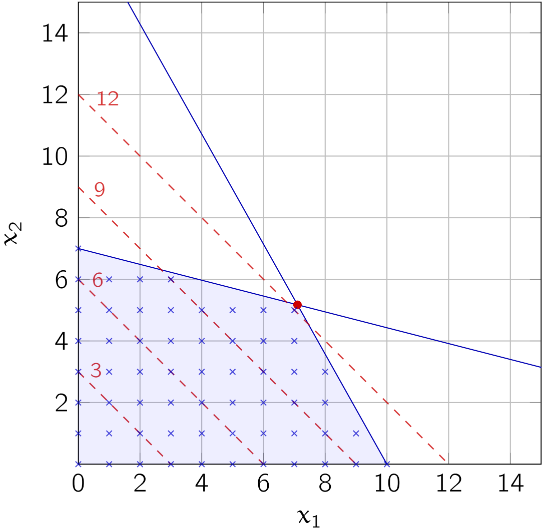
Um modelo (programa) $\mathcal{R} = \{\max \ f_{\mathcal{R}}(x) : x \in X_{\mathcal{R}}\}$ é considerado uma **relaxação** de um modelo $\mathcal{M} = \{\max \ f(x) : x \in X\}$ se e somente se:

- todas as soluções de $\mathcal{M}$ são também soluções de $\mathcal{R}$, ou seja, $X \subseteq X_{\mathcal{R}}$,
- e toda solução $x \in X$ tem custo em $\mathcal{R}$ menor ou igual ao custo em $\mathcal{M}$, ou seja, $f_{\mathcal{R}}(x) \geq f(x), \forall x \in X$.

Ou seja, uma relaxação fornece um **limite superior** para a formulação original!

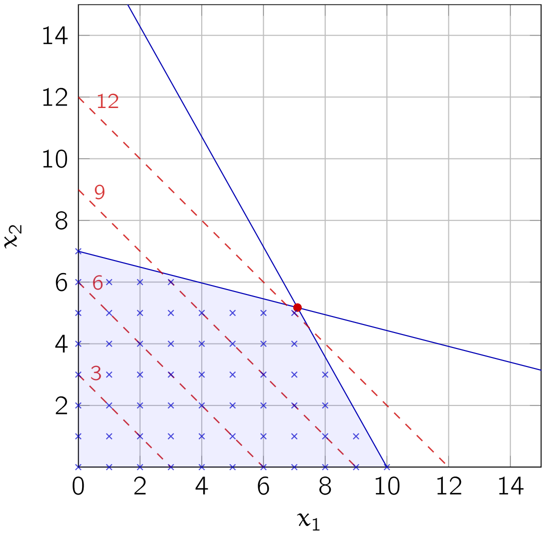
Exemplo: **relaxação linear**.

# Programação linear inteira




| | |
|---|---|
| **maximiza** | $z = x_1 + x_2$ |
| **sujeito a** | $1{,}8x_1 + 7x_2 \leq 49$ |
| | $5x_1 + 2{,}8x_2 \leq 50$ |
| | $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$ |

**Relaxação linear**: ignora as restrições de integralidade e resolve o problema com otimização linear.



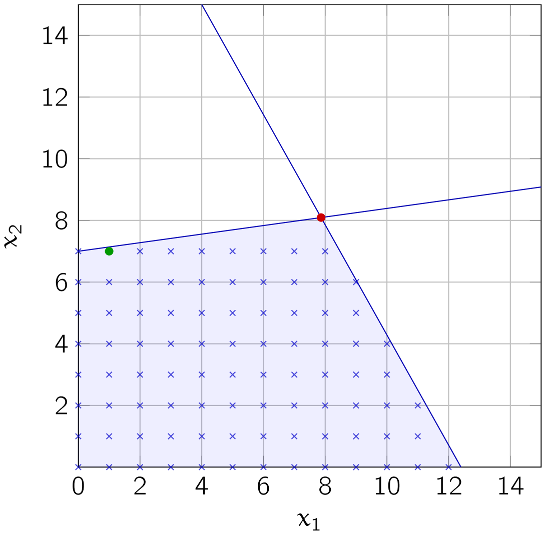

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & z = x_1 + x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 1{,}8x_1 + 7x_2 \leq 49 \\ & 5x_1 + 2{,}8x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

**Relaxação linear**: ignora as restrições de integralidade e resolve o problema com otimização linear.

Neste caso, a solução ótima do programa linear é $x_1 \approx 7{,}1$ e $x_2 \approx 5{,}2$ ($z \approx 12{,}3$). Essa solução não é válida para o programa inteiro!

**Ideia**: arredondar; solução inteira mais próxima.

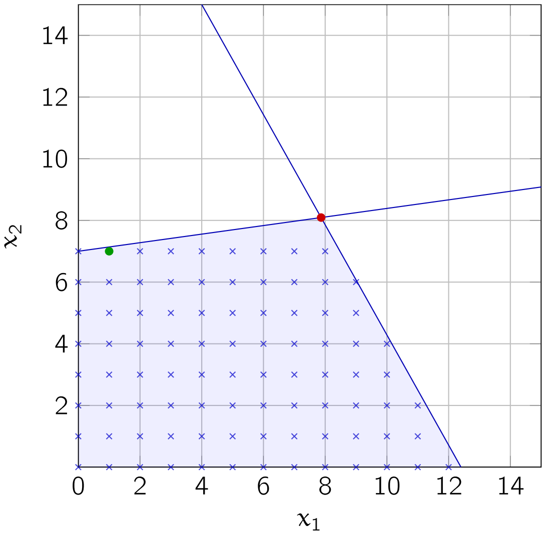
# Programação linear inteira




$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = -x_1 + 7{,}5x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & -x_1 + 7{,}2x_2 \leq 50{,}4 \\
& 5x_1 + 2{,}8x_2 \leq 62 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

**Relaxação linear**: ignora as restrições de integralidade e resolve o problema com otimização linear.

# Programação linear inteira




$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = -x_1 + 7{,}5x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & -x_1 + 7{,}2x_2 \le 50{,}4 \\
& 5x_1 + 2{,}8x_2 \le 62 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

**Relaxação linear**: ignora as restrições de integralidade e resolve o problema com otimização linear.

Neste caso, a solução ótima do programa linear é $x_1 \approx 7{,}9$ e $x_2 \approx 8{,}1$. A solução ótima para o programa inteiro, no entanto, é $x_1 = 1$ e $x_2 = 7$ (verde)!

**Conclusão**: relaxação linear **não resolve** otimização inteira, mas **fornece um limite superior**.

# Programação linear inteira

**Como resolver** programas inteiros (algoritmos)?

- Branch & bound;
- Planos de corte;
- Geração de colunas;
- Heurísticas e metaheurísticas.

55MQU – Métodos Quantitativos
Prof. Marcelo de Souza