Modelagem Matemática

Formulação de problemas de otimização

Prof. Marcelo de Souza

55MQU – Métodos Quantitativos
Universidade do Estado de Santa Catarina

Processo de formulação de problemas

Etapas

1. Definir as **variáveis de decisão**;
   - aquelas cujos valores serão determinados pela solução.
2. Determinar a **função objetivo**;
   - está relacionada com o que se busca (maior lucro, menor custo, menor tempo, etc.).
3. Definir o conjunto de **restrições**.
   - definem soluções viáveis e inviáveis;
   - não esquecer das restrições de não negatividade (i.e. $x_i \geq 0$).

Processo de formulação de problemas

Etapas

1. Definir as **variáveis de decisão**;
   - aquelas cujos valores serão determinados pela solução.
2. Determinar a **função objetivo**;
   - está relacionada com o que se busca (maior lucro, menor custo, menor tempo, etc.).
3. Definir o conjunto de **restrições**.
   - definem soluções viáveis e inviáveis;
   - não esquecer das restrições de não negatividade (i.e. $x_i \geq 0$).

Alguns detalhes

- As restrições são definidas por equações e/ou inequações;
- Mantenha as variáveis do lado esquerdo, e as constantes do lado direito;
- Escreva as restrições respeitando a ordem das variáveis, i.e. x_i antes de x_{i+i}.

Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – enunciado

A Reddy Mikks produz tintas para interiores e exteriores com base em duas matérias-primas, *M1* e *M2*. A tabela abaixo apresenta os dados básicos do problema.

	Tonelada de matéria-prima para produzir 1 t de		
	Tinta para exteriores	Tinta para interiores	Máximo diário
Matéria-prima *M1*	6	4	24
Matéria-prima *M2*	1	2	6
Lucro/tonelada ($ 1000)	5	4	

Uma pesquisa de mercado indica que a demanda diária de tintas para interiores não pode ultrapassar a de tintas para exteriores por mais de 1 t. Além disso, a demanda máxima diária de tinta para interiores é de 2 t.

A Reddy Mikks quer determinar o mix ótimo (o melhor) de produtos de tintas para interiores e exteriores que maximize o lucro total diário.

Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- x_1: produção de tinta para **exteriores** (em toneladas);
- x_2: produção de tinta para **interiores** (em toneladas).

Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- x_1: produção de tinta para **exteriores** (em toneladas);
- x_2: produção de tinta para **interiores** (em toneladas).

Função objetivo:

- **maximiza** $z = 5x_1 + 4x_2$
  - lucro total z: \$ 5/t para x_1 t de tinta de exteriores e \$ 4/t para x_2 t de tinta de interiores.

Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- x_1: produção de tinta para **exteriores** (em toneladas);
- x_2: produção de tinta para **interiores** (em toneladas).

Função objetivo:

- **maximiza** $z = 5x_1 + 4x_2$
  - lucro total z: \$ 5/t para x_1 t de tinta de exteriores e \$ 4/t para x_2 t de tinta de interiores.

Restrições:

1. Limite máximo de matéria-prima M1: $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
2. Limite máximo de matéria-prima M2: $x_1 + 2x_2 \leq 6$
3. Relação entre a produção dos tipos de tinta: $-x_1 + x_2 \leq 1$
4. Produção máxima de tinta para interiores: $x_2 \leq 2$
5. Restrições de não-negatividade: $x_1, x_2 \geq 0$

Exemplo

Reddy Mikks (mix de produtos) – modelo/programa linear

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – enunciado

A Ozark Farms usa no mínimo 800 kg de ração especial por dia. Essa ração especial é uma mistura de milho e soja com as composições mostradas na tabela abaixo.

	kg por kg de ração		
Ração	Proteína	Fibra	Custo ($/kg)
Milho	0,09	0,02	0,30
Soja	0,60	0,06	0,90

Os requisitos nutricionais da ração especial são de no mínimo 30% de proteína e de no máximo 5% de fibra. A Ozark Farms quer determinar a mistura que gera a ração de mínimo custo diário.

Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- x_1: kg de **milho** na mistura;
- x_2: kg de **soja** na mistura.

Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- x_1: kg de **milho** na mistura;
- x_2: kg de **soja** na mistura.

Função objetivo:

- **minimiza** $z = 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2$
  - custo total z: \$ 0,30/kg para x_1 kg de milho e \$ 0,90/kg para x_2 kg de soja.

Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – processo de formulação

Variáveis de decisão:

- x_1: kg de **milho** na mistura;
- x_2: kg de **soja** na mistura.

Função objetivo:

- **minimiza** $z = 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2$
  - custo total z: \$ 0,30/kg para x_1 kg de milho e \$ 0,90/kg para x_2 kg de soja.

Restrições:

1. Produção mínima: $x_1 + x_2 \geq 800$
2. Requisito de proteína: $0{,}09x_1 + 0{,}6x_2 \geq 0{,}3(x_1 + x_2) \;\therefore\; 0{,}21x_1 - 0{,}3x_2 \leq 0$
3. Requisito de fibra: $0{,}02x_1 + 0{,}06x_2 \leq 0{,}05(x_1 + x_2) \;\therefore\; 0{,}03x_1 - 0{,}01x_2 \geq 0$
4. Restrições de não-negatividade: $x_1, x_2 \geq 0$

Exemplo

Ozark Farms (problema da dieta) – modelo/programa linear

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & z = 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \geq 800 \\
& 0{,}21x_1 - 0{,}3x_2 \leq 0 \\
& 0{,}03x_1 - 0{,}01x_2 \geq 0 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

55MQU – Métodos Quantitativos
Prof. Marcelo de Souza