# Árvores

## Conceitos, implementação e árvores binárias

**Prof. Marcelo de Souza**
marcelo.desouza@udesc.br

Algoritmos e Estruturas de Dados
Bacharelado em Engenharia de Software
Universidade do Estado de Santa Catarina

# Material de consulta

**Leitura obrigatória:**

- Capítulo 5 de Edelweiss and Galante (2009) – Árvores.

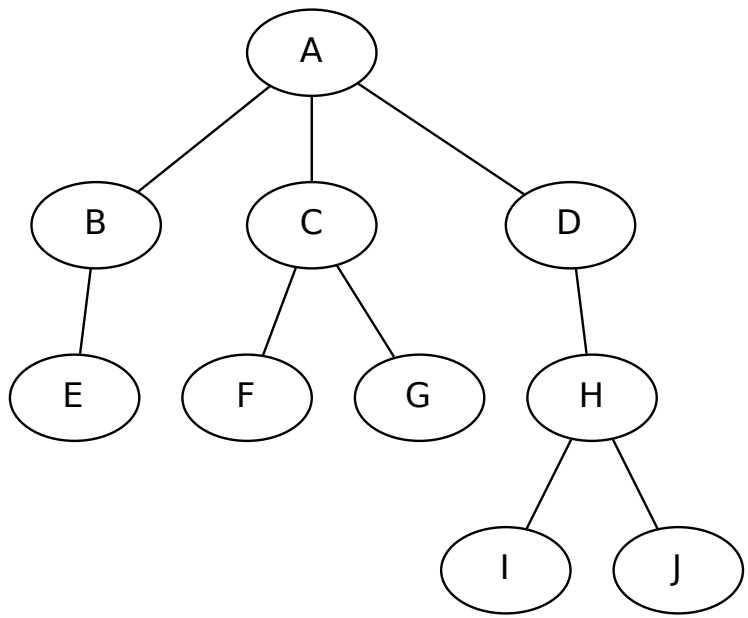
**Leitura complementar:**

- Capítulo 8 de Goodrich et al. (2014) – Árvores.
- Capítulo 14 de Pereira (2008) – Árvores.

# Conceitos básicos

## Árvore

- Estrutura de dados que modela **dependência** ou **hierarquia**.
  - Elementos não são organizados de maneira linear.
- Representada graficamente por um conjunto de nodos interligados.



# Exemplos

- **Hierarquias de especialização** (classes/sub-classes):
  - Tipos de veículos:
    - Aquático (barco, canoa).
    - Aéreo (avião, helicóptero).
    - Terrestre (carro, moto).

# Exemplos

- **Hierarquias de especialização** (classes/sub-classes):
  - Tipos de veículos:
    - Aquático (barco, canoa).
    - Aéreo (avião, helicóptero).
    - Terrestre (carro, moto).
- **Hierarquias de composição** (todo/parte):
  - Um carro é composto por chassi, motor e rodas.

# Exemplos

- **Hierarquias de especialização** (classes/sub-classes):
  - Tipos de veículos:
    - Aquático (barco, canoa).
    - Aéreo (avião, helicóptero).
    - Terrestre (carro, moto).
- **Hierarquias de composição** (todo/parte):
  - Um carro é composto por chassi, motor e rodas.
- **Hierarquias de subordinação ou dependência**:
  - Uma empresa organiza seus cargos e setores hierarquicamente:
    - Presidência comanda diretores.
    - Diretores comandam gerentes.
    - Gerentes comandam operadores.

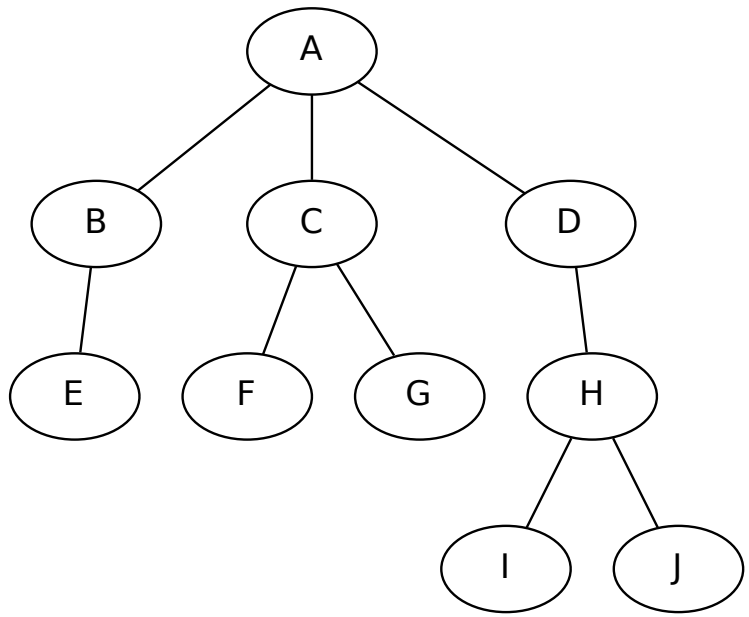
# Exemplos

- **Hierarquias de especialização** (classes/sub-classes):
  - Tipos de veículos:
    - Aquático (barco, canoa).
    - Aéreo (avião, helicóptero).
    - Terrestre (carro, moto).
- **Hierarquias de composição** (todo/parte):
  - Um carro é composto por chassi, motor e rodas.
- **Hierarquias de subordinação ou dependência**:
  - Uma empresa organiza seus cargos e setores hierarquicamente:
    - Presidência comanda diretores.
    - Diretores comandam gerentes.
    - Gerentes comandam operadores.

Faça a representação gráfica destes exemplos.

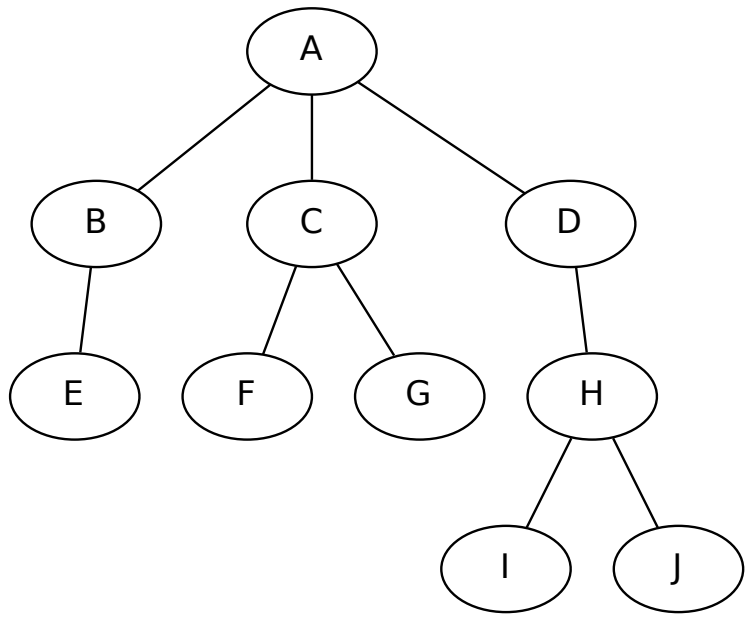
# Terminologia

- **Raiz:** é o primeiro nodo da árvore, ao qual todos os demais são subordinados. O acesso à árvore sempre inicia por ele.
  - $A$ é a raiz da árvore.



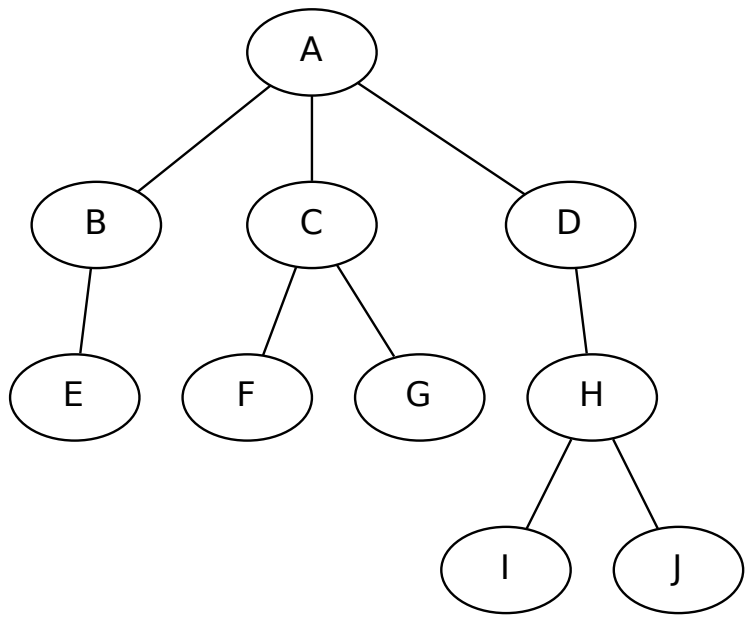
# Terminologia

- **Nodos descendentes:** aqueles que estão abaixo de um determinado nodo mais acima, apresentando alguma relação de dependência.
  - Nodos mais acima são chamados ascendentes.
  - Descendentes diretos são chamados de *filhos*.
  - Um ascendente direto é chamado de *pai*.
  - $F$ e $G$ são descendentes/filhos de $C$ (pai) e são ditos *irmãos*.
  - $F$ e $G$ também são descendentes de $A$.



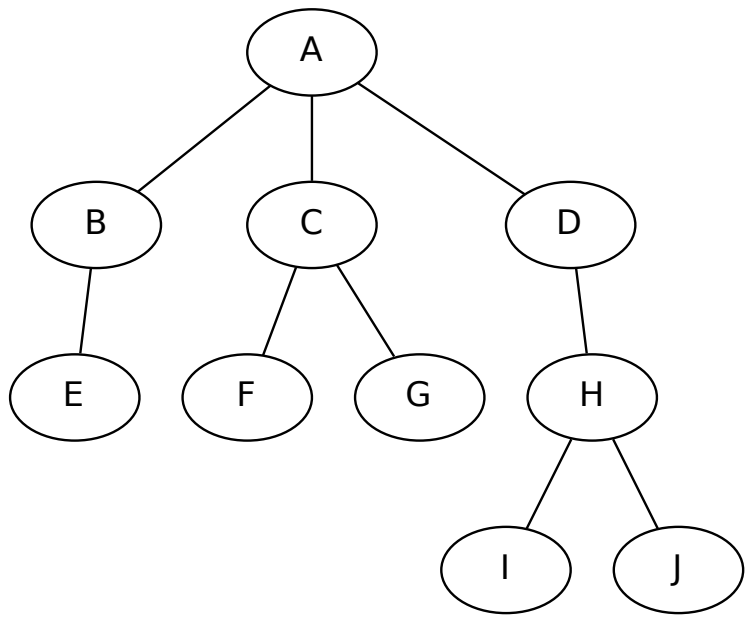
# Terminologia

- **Sub-árvore:** conjunto de nodos descendentes de um mesmo nodo.
  - $C$, $F$ e $G$ formam uma sub-árvore de $A$.
  - $H$, $I$ e $J$ formam uma sub-árvore de $D$.



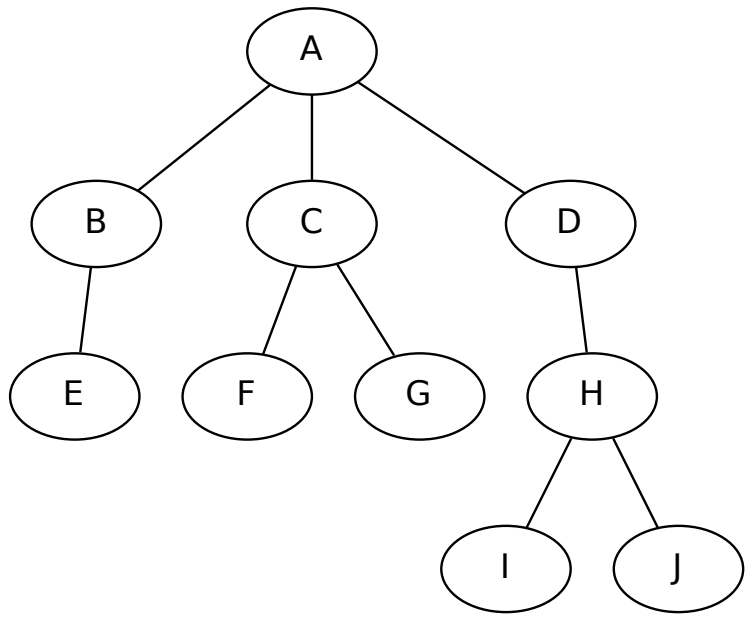
# Terminologia

- **Grau do nodo:** número de sub-árvores que o nodo possui. Ou seja, o número de filhos de um nodo.
  - O nodo $A$ possui grau $3$.
  - O nodo $C$ possui grau $2$.
  - O nodo $E$ possui grau $0$.



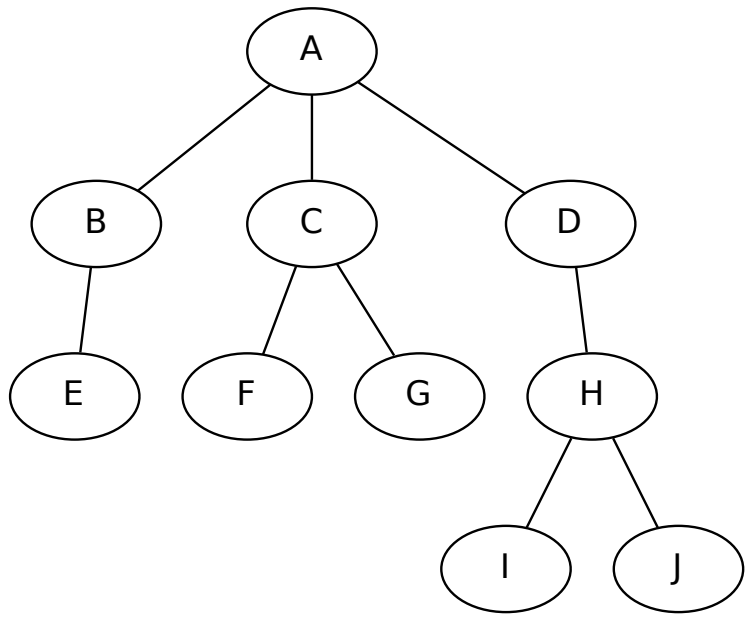
# Terminologia

- **Grau da árvore:** o maior valor entre os graus dos seus nodos.
  - A árvore possui grau $3$.



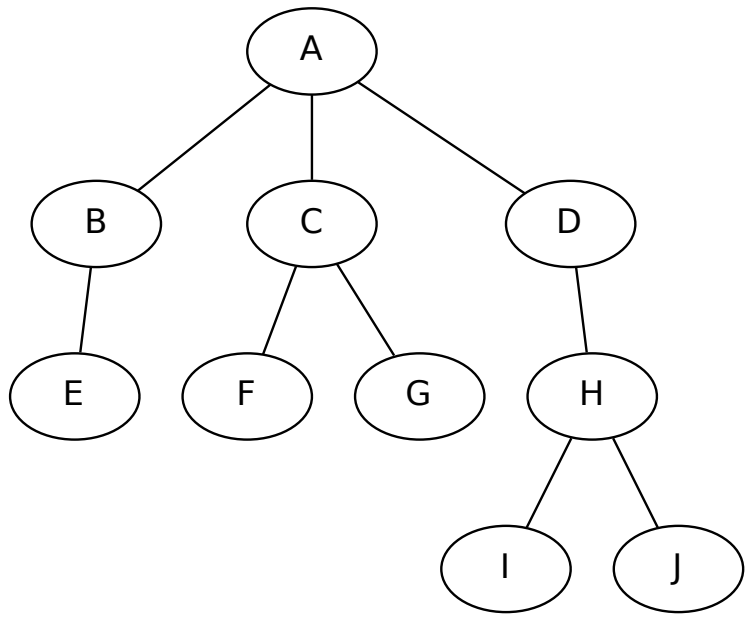
# Terminologia

- **Folha:** nodos de grau $0$, ou seja, que não possuem filhos.
  - Também chamados de nodos terminais ou externos.
  - As folhas da árvore são $E$, $F$, $G$, $I$ e $J$.



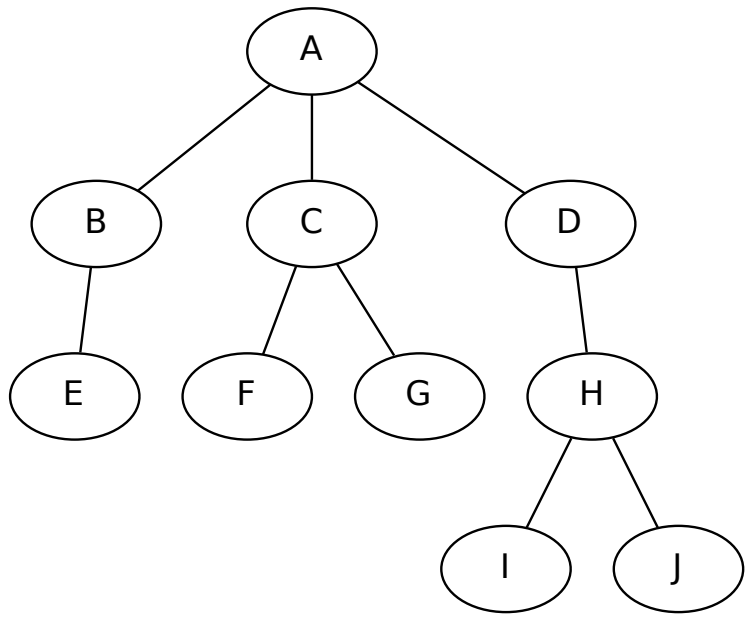
# Terminologia

- **Nodo de derivação:** nodos de grau maior que $0$, ou seja, que apresentam filhos (sub-árvores).
  - Também chamados de nodos internos.
  - Os nodos de derivação da árvore são $A$, $B$, $C$, $D$ e $H$.



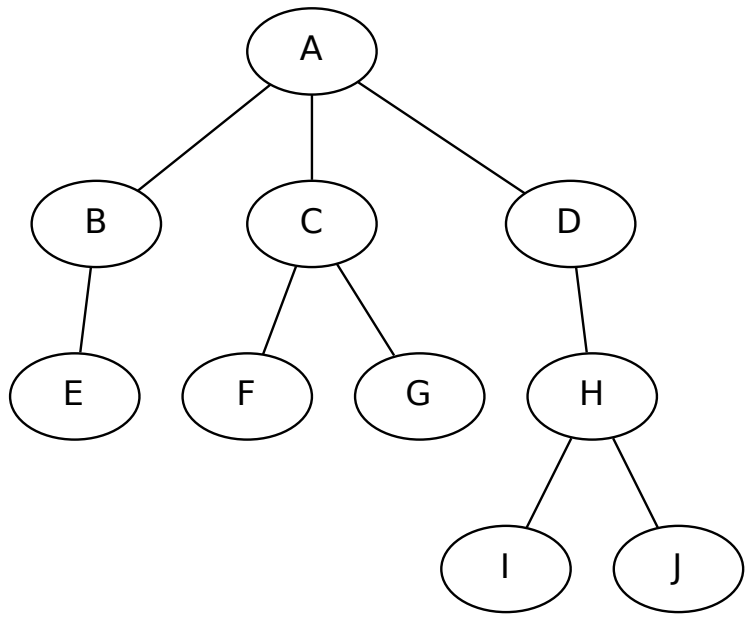
# Terminologia

- **Nível do nodo:** número de ligações entre o nodo e a raiz da árvore. Corresponde à profundidade do nodo na árvore. A raiz possui nível $1$, seus filhos possuem nível $2$, etc.
  - Também chamado de profundidade do nodo.
  - Os nodos $B$, $C$ e $D$ possuem nível $2$.
  - O nodo $I$ possui nível $4$.



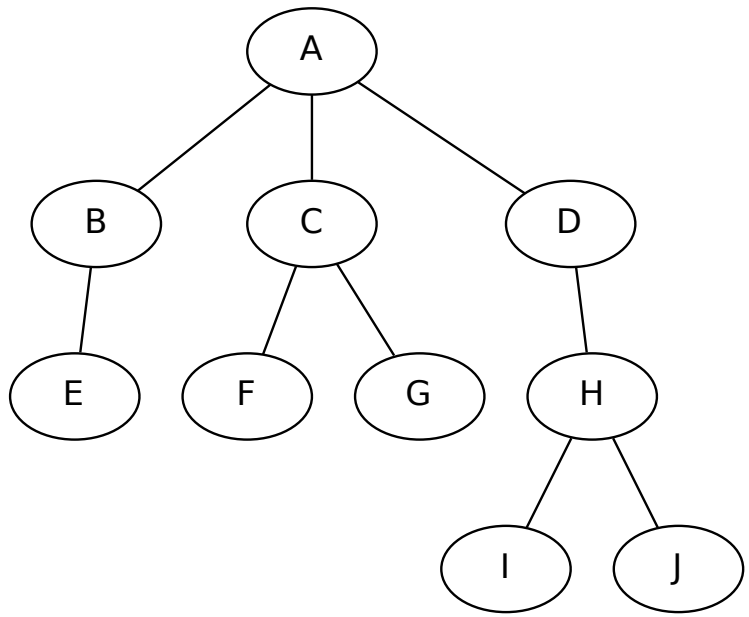
# Terminologia

- **Caminho:** consiste em uma sequência de nodos consecutivos distintos entre dois nodos.
  - $A - D - H - J$ é um caminho na árvore.
  - O *comprimento de um caminho* é o número de ligações que ele possui (número de saltos).



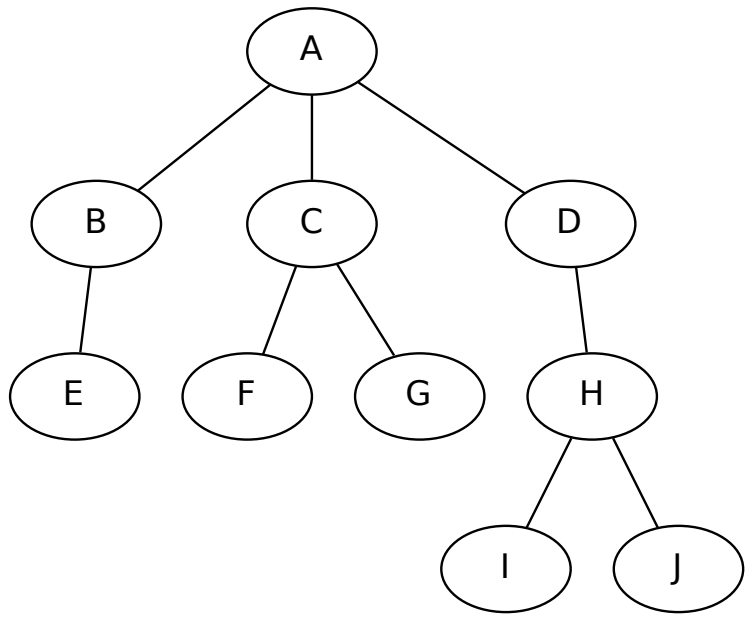
# Terminologia

- **Altura:** a *altura de um nodo* é o número de nodos do maior caminho deste nodo até um dos seus descendentes-folha. A *altura da árvore* é igual ao maior nível dos seus nodos.
  - Todos os nodos-folha possuem altura $1$.
  - A altura da árvore é $4$, o que indica que existe pelo menos um nodo com distância $3$ da raiz.



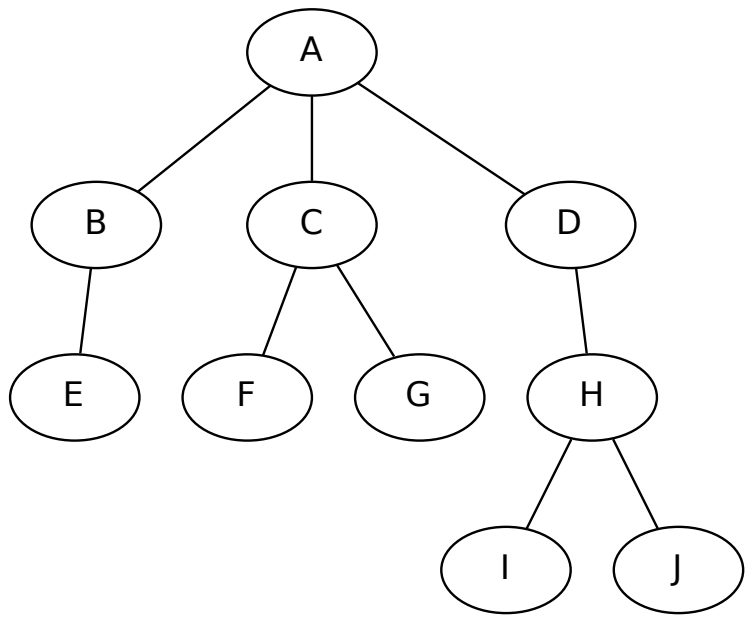
# Terminologia

- **Árvore ordenada:** é uma árvore onde a ordem das suas sub-árvores é relevante para o seu contexto.
  - Se a árvore for ordenada, trocar a posição das sub-árvores com raiz $B$ e $C$ resulta em uma árvore diferente.



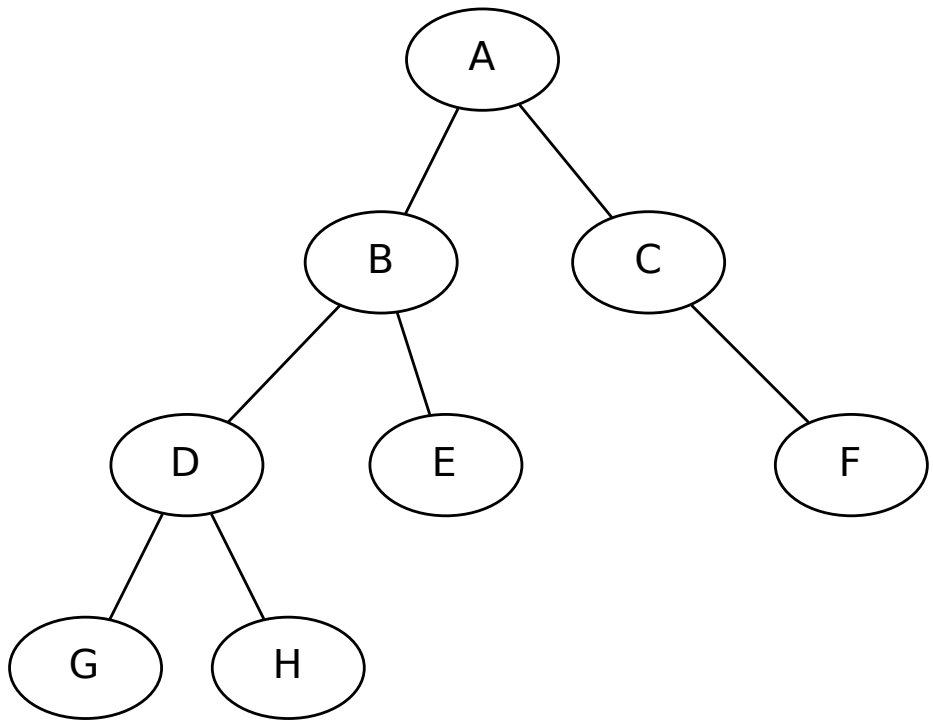
# Terminologia

- **Árvore binária:** uma árvore cujos nodos possuem no máximo grau $2$. Ou seja, um nodo possui $0$, $1$ ou $2$ filhos.
  - Uma árvore $n$-ária possui grau no máximo $n$.
  - A árvore não é binária.



# Árvores binárias

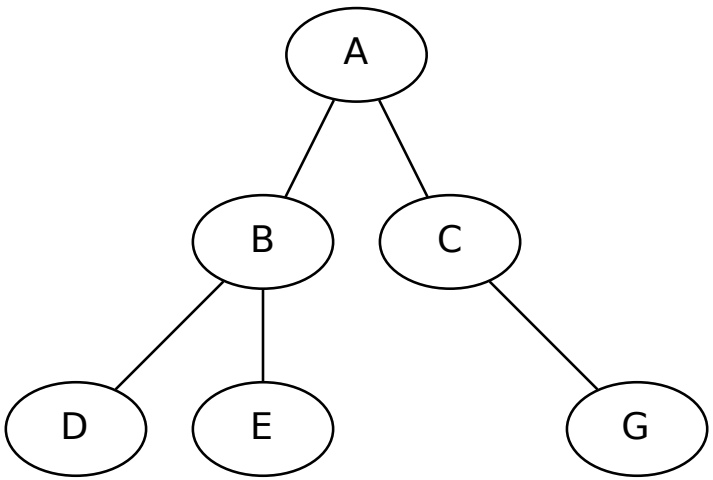
- Seus nodos possuem no máximo dois filhos.
- Cada nodo possui:
  - Filho da esquerda e filho da direita.
  - Sub-árvore da esquerda e uma sub-árvore da direita.

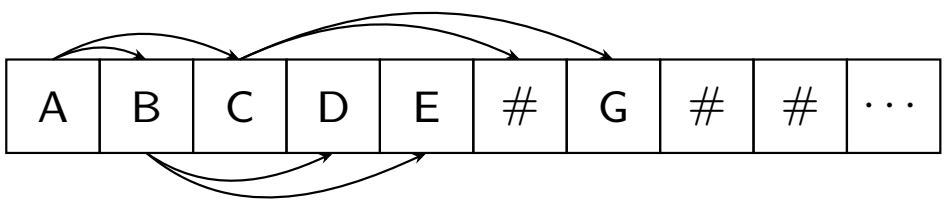


# Implementação

## Contiguidade – vetores

- Vetor armazena todos os nodos da árvore em uma ordem predefinida.
- Primeiro a raiz, depois seus filhos, depois os filhos dos seus filhos, etc.

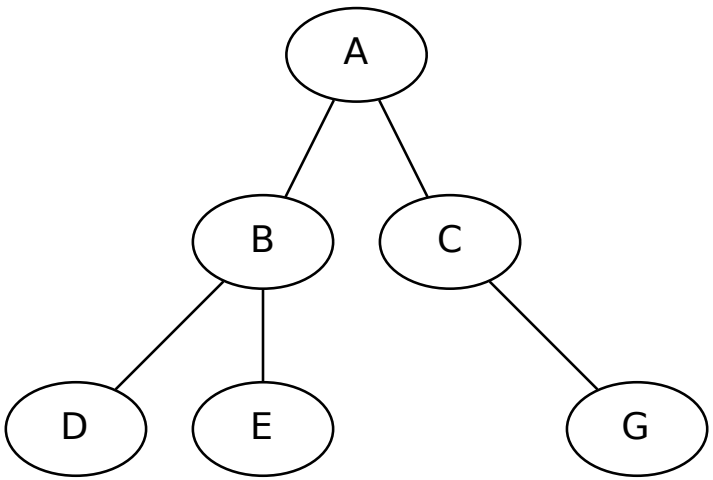


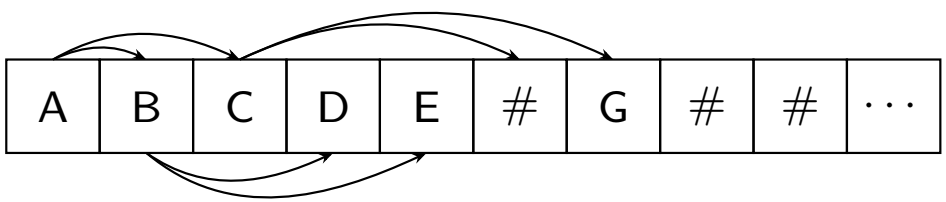



# Implementação

## Contiguidade – vetores

- Vetor armazena todos os nodos da árvore em uma ordem predefinida.
- Primeiro a raiz, depois seus filhos, depois os filhos dos seus filhos, etc.




**Detalhes de implementação**

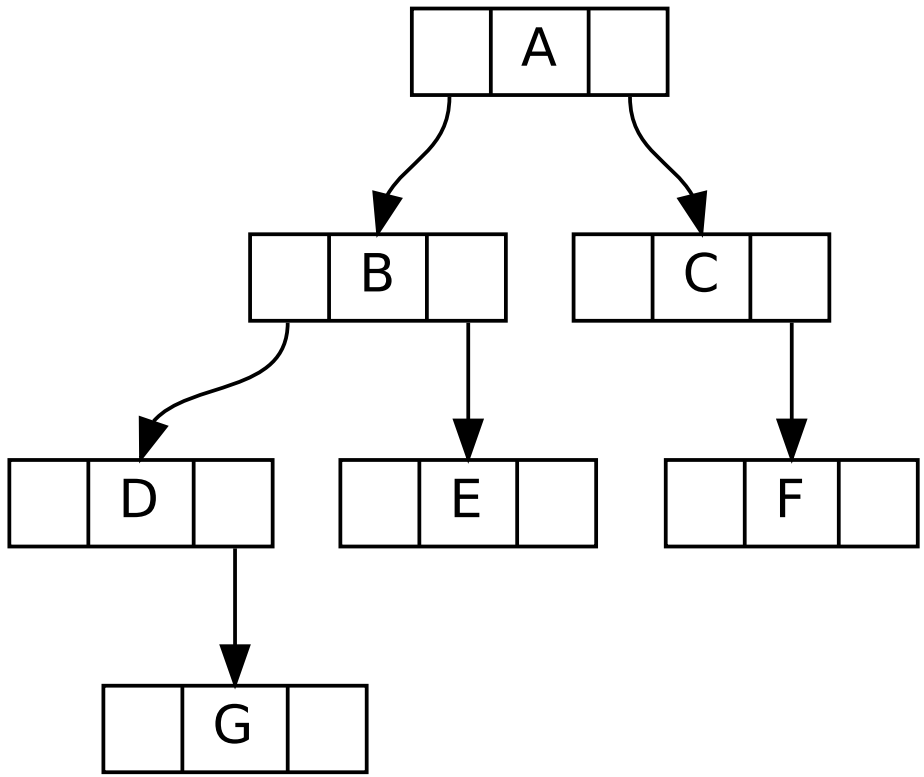
Seja um elemento $i$ da árvore:

- $\texttt{leftChild}(i) = 2i + 1$
- $\texttt{rightChild}(i) = 2i + 2$
- $\texttt{parent}(i) = \lfloor (i - 1)/2 \rfloor$

# Implementação

## Encadeamento

- Cada nodo possui um apontamento para seus filhos (direita e esquerda) e para seu pai, além de armazenar o elemento correspondente.
- A árvore é representada através de uma referência para sua raiz.



# Exercício

## Implementação com encadeamento

1. Implemente uma árvore binária usando encadeamento. A estrutura de dados deve fornecer as seguintes operações:
   - tamanho
   - vazio
   - inserir um elemento
   - setar um elemento
   - remover um elemento
   - irmãos de um nodo
   - profundidade de um nodo
   - altura de um nodo
   - verificar se um nodo é interno, externo e raiz

**Dicas:** crie uma classe `Node` que conterá o elemento, filhos e pai; o elemento é definido pela classe `Element`; a estrutura de nodos é visível externamente.

# Exercício

## Implementação com encadeamento

1. Implemente uma árvore binária usando encadeamento. A estrutura de dados deve fornecer as seguintes operações:
   - tamanho
   - vazio
   - inserir um elemento
   - setar um elemento
   - remover um elemento
   - irmãos de um nodo
   - profundidade de um nodo
   - altura de um nodo
   - verificar se um nodo é interno, externo e raiz

**Dicas:** crie uma classe `Node` que conterá o elemento, filhos e pai; o elemento é definido pela classe `Element`; a estrutura de nodos é visível externamente.

Veja a implementação nos códigos-fonte da disciplina.

# Percurso

- Um percurso (também chamado de travessia ou caminhamento) de uma árvore consiste em acessar (ou visitar) todos os seus nodos.
- Principais métodos de travessia de árvores:
  - Pré-ordem (profundidade);
  - Pós-ordem;
  - In-ordem;
  - Largura.
- Esses métodos são aplicáveis a qualquer árvore.
- Os algoritmos percorrem toda a árvore – complexidade $O(n)$.

# Percurso em pré-ordem

- Dada uma árvore $T$, o percurso de pré-ordem:
  1. visita a raiz de $T$.
  2. as sub-árvores dos filhos são visitadas recursivamente.
- Pode ser adotada alguma estratégia para explorar os filhos seguindo uma ordem desejada.

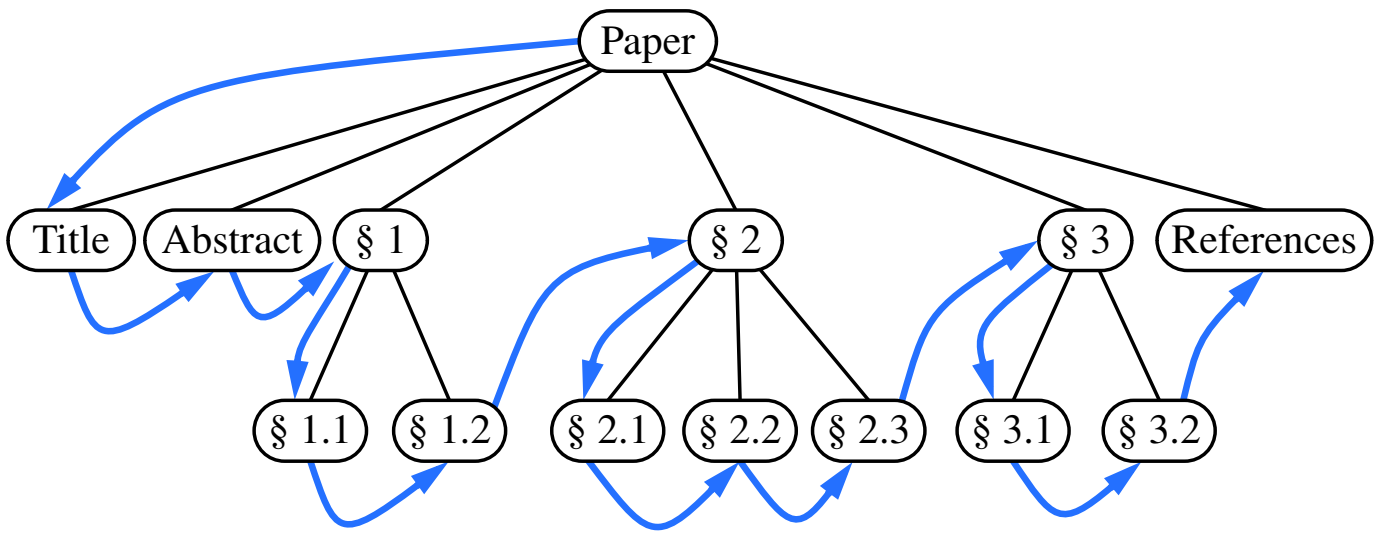
**Algorithm:** `preorder(Node<E> n)`

Visit node $n$
**foreach** *child* $c$ *in children(n)* **do**
    `preorder(c)`

# Percurso em pré-ordem

Estratégia de profundidade:

- Acessa os filhos até chegar no final da árvore.
- Volta e continua a busca pelos demais filhos.



# Percurso em pós-ordem

- Dada uma árvore $T$, o percurso de pós-ordem:
  1. visita recursivamente os filhos da raiz $T$.
  2. visita a raiz de $T$.
- Pode ser vista como o oposto da pré-ordem.

---

**Algorithm:** `postorder(Node<E> n)`

---

**foreach** *child* $c$ *in children(n)* **do**

    `postorder(c)`

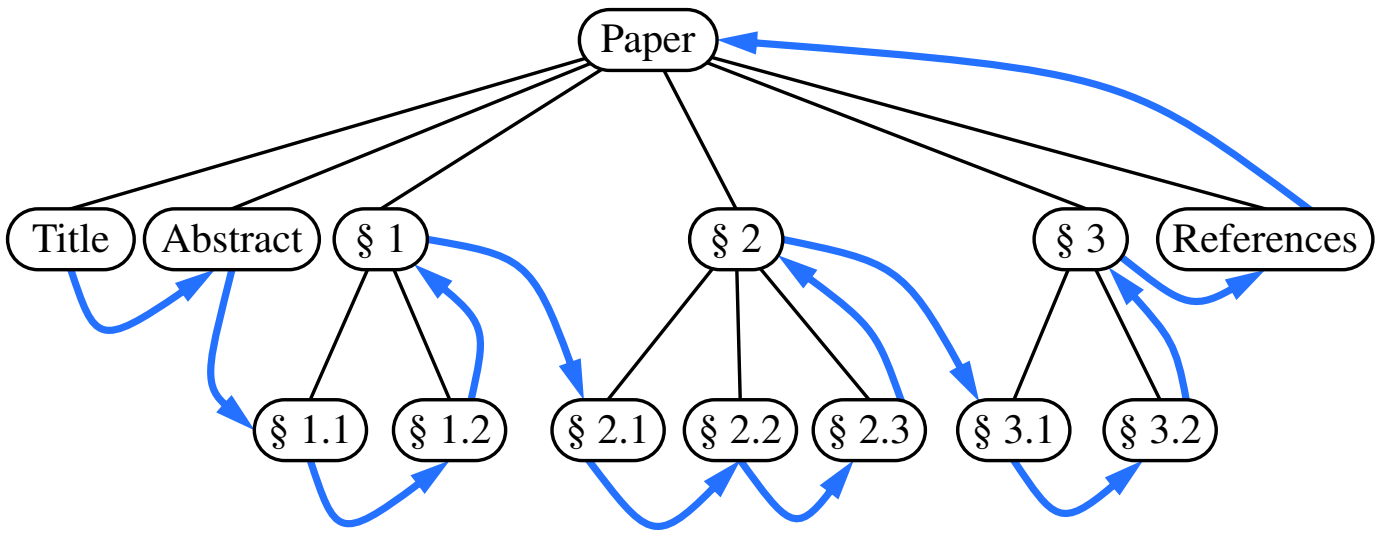
Visit node $n$

---

# Percurso em pós-ordem

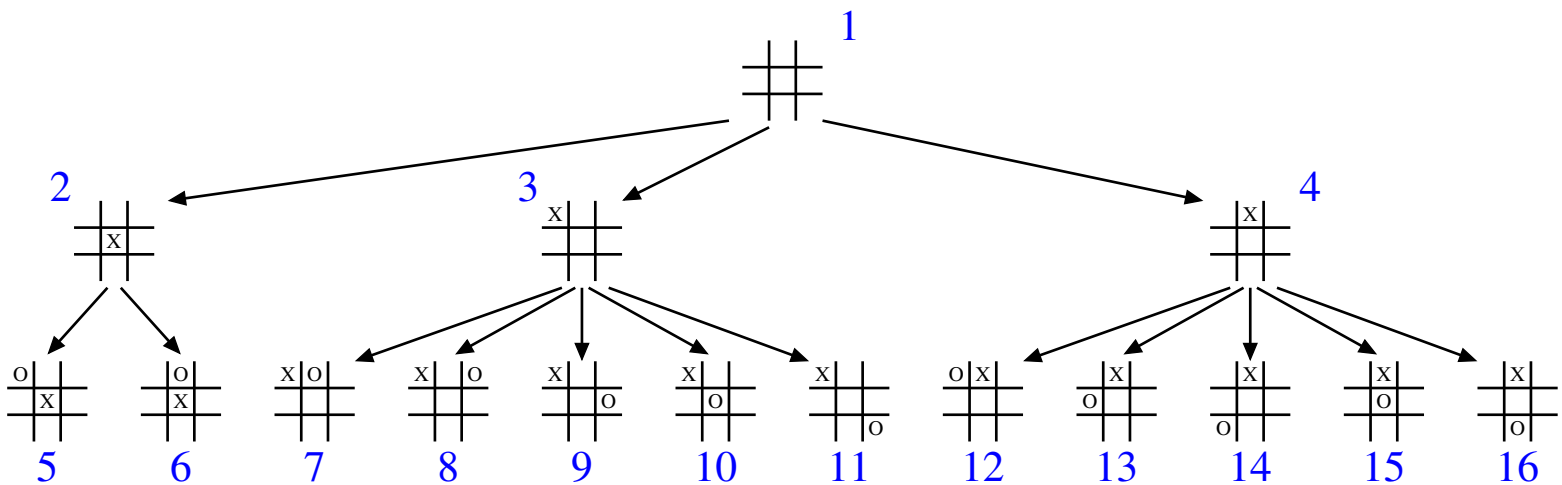
Estratégia das folhas até a raiz:

- Visitação começa pelas folhas.
- Último elemento visitado é a raiz da árvore.



# Percurso em largura

- Percorre os nodos por níveis.
  1. explora todos os nodos de uma profundidade.
  2. depois passa para a próxima.
- Também chamado *breadth-first traversal*.
- Exemplo: encontrar a solução de jogos.



# Percurso em largura

- Pode-se usar uma fila para implementar a estratégia (*FIFO*).
- Procedimento não é recursivo, pois não se aplica igualmente a sub-árvores.

**Algorithm:** `breadthfirst()`

Initialize queue $Q$ to contain root
**while** $Q$ *is not empty* **do**
    $n \leftarrow Q$.dequeue()
    Visit node $n$
    **for** *each child* $c$ *in children(n)* **do**
        $Q$.enqueue($n$)

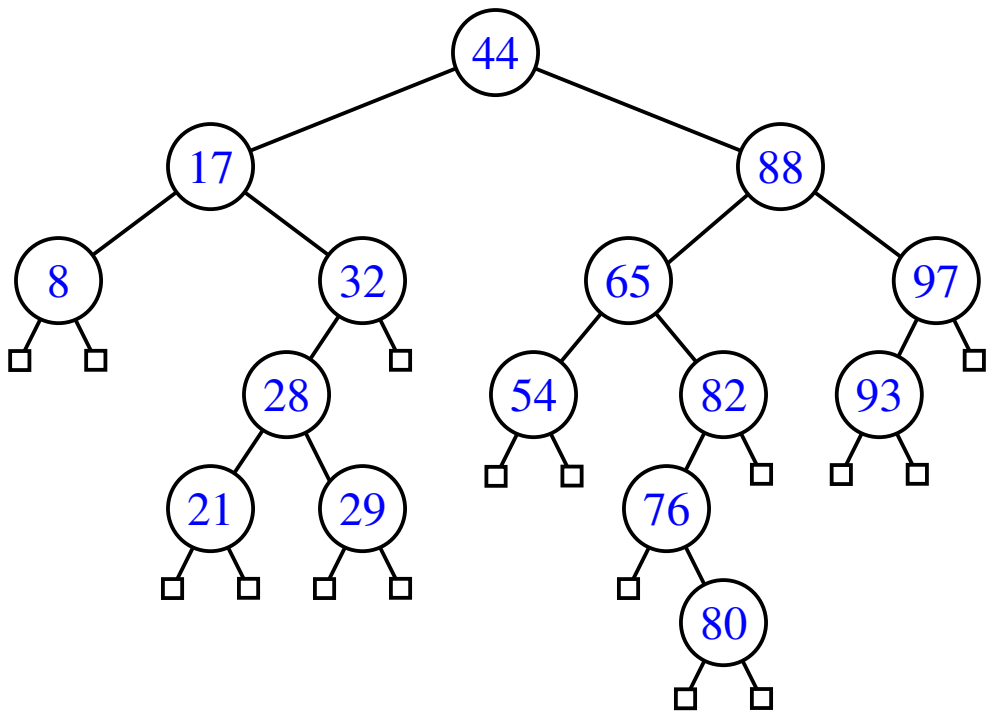
# Exercício

## Implementação dos métodos de percurso

1. Implemente os métodos de percurso de pré-ordem, pós-ordem e em largura na sua árvore binária usando encadeamento. Utilize esses métodos para implementar algumas tarefas:
   - imprimir todos os elementos da árvore.
   - fazer um somatório dos elementos numéricos armazenados na árvore.
   - buscar um elemento na árvore.

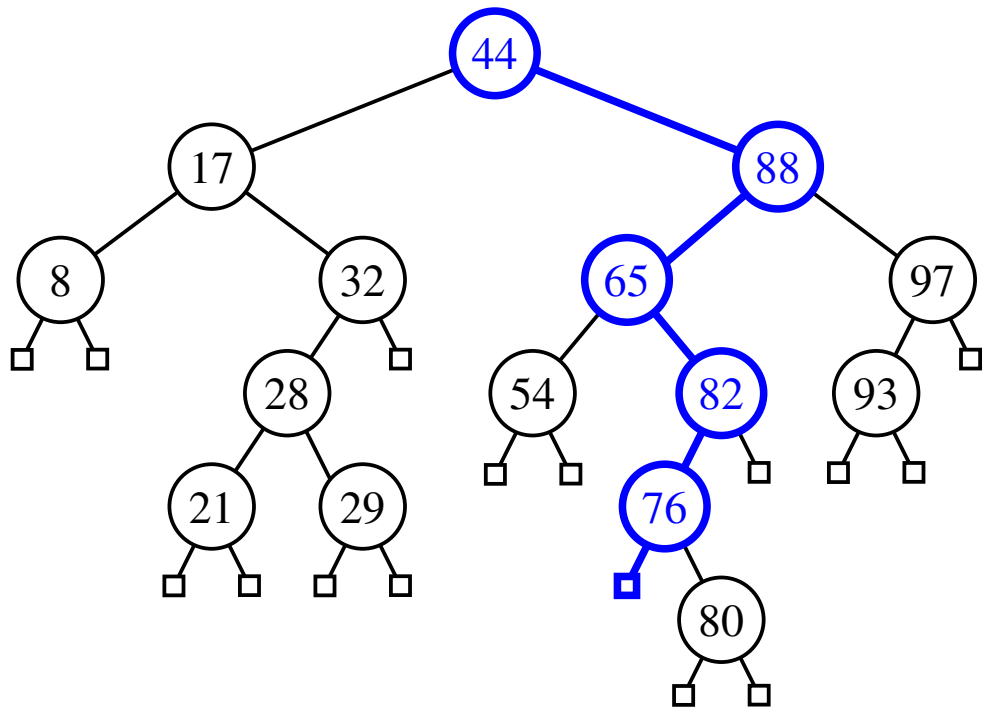
# Árvores binárias de busca

- Trata-se de uma **árvore binária ordenada**.
- Isso permite a busca eficiente de elementos.
- Propriedades:
  - Nodo $n$ armazena um elemento $e(n)$.
  - Elementos na sub-árvore **esquerda** de $n$ são **menores** que $e(n)$.
  - Elementos na sub-árvore **direita** de $n$ são **maiores** que $e(n)$.



# Árvores binárias de busca

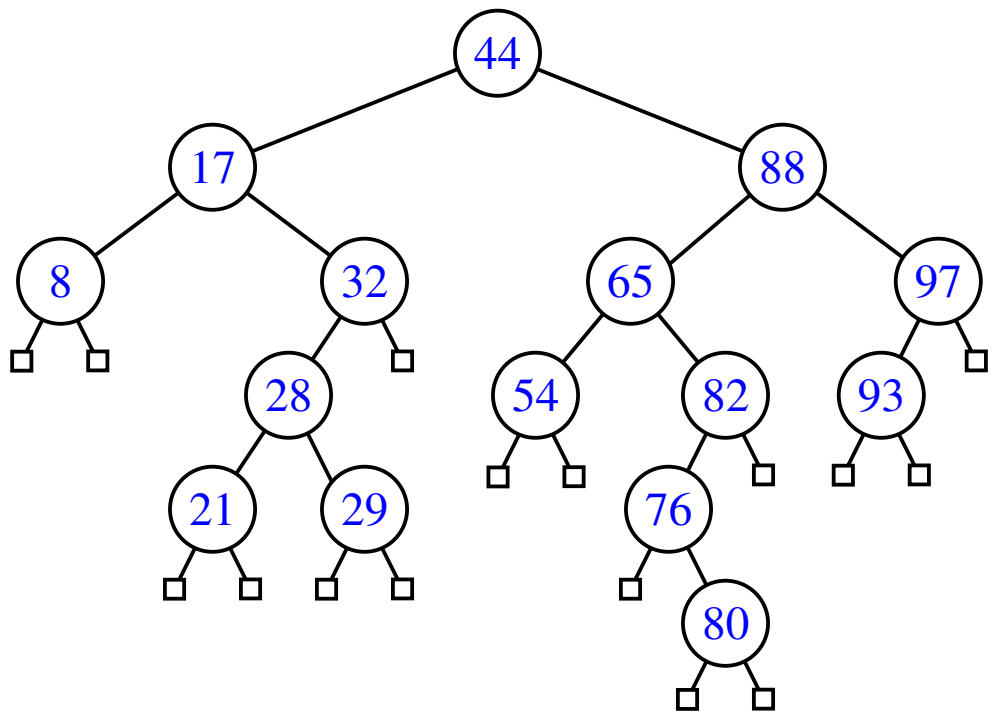
- Buscar um elemento em uma árvore binária de busca é similar a fazer uma busca binária (pois a árvore está ordenada).
  1. Se o elemento buscado for o da raiz, retorna sucesso.
  2. Se for menor, repete a busca na sub-árvore da esquerda.
  3. Se for maior, repete a busca na sub-árvore da direita.
  4. Se chegar a alguma folha sem encontrar, elemento não existe.
- A cada iteração, metade da árvore é descartada – complexidade $O(\log n)$.



# Árvores binárias de busca

## Inserção de elementos

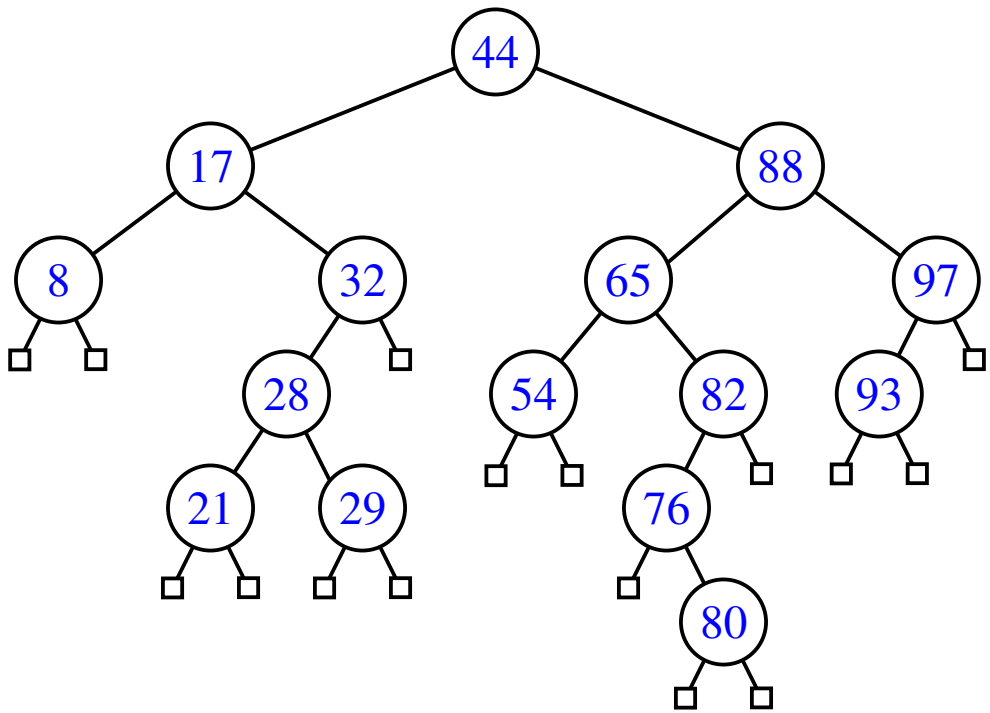
- A inserção deve respeitar a ordem dos elementos.
  1. Busca a posição correta de inserção.
  2. Insere o novo elemento.
- **Exemplo:**
  - o elemento $50$ seria inserido como filho à esquerda do elemento $54$.
  - o elemento $15$ seria inserido como filho à direita do elemento $8$.



# Árvores binárias de busca

## Remoção de elementos

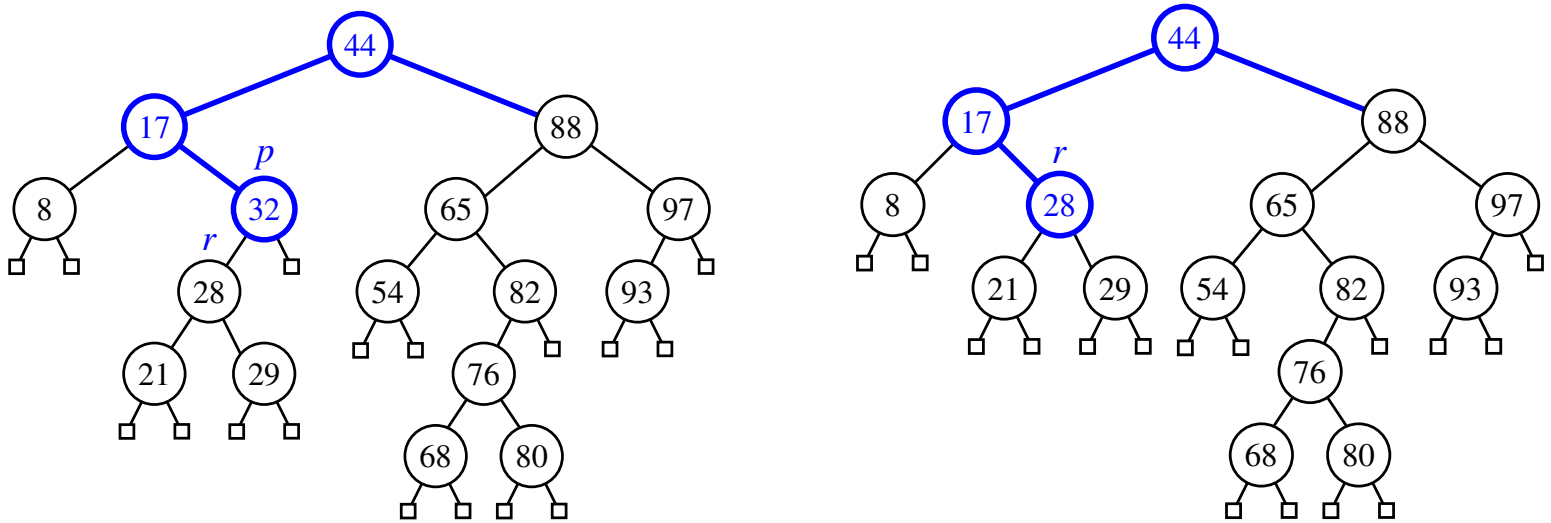
- A remoção deve manter a ordem dos elementos.
  1. Remove elemento.
  2. Se nodo removido é uma folha, termina.
  3. Se nodo removido possui um filho, filho toma sua posição.
  4. Se nodo removido possui dois filhos, rearranja.



# Árvores binárias de busca

## Remoção de elementos

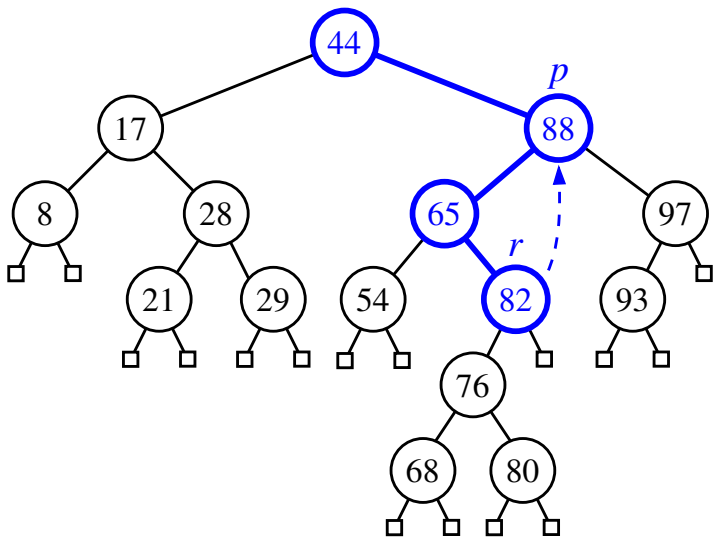
- Caso 1 – promover filho:
  1. $p$ é o elemento a remover.
  2. seu único filho $r$ toma seu lugar.

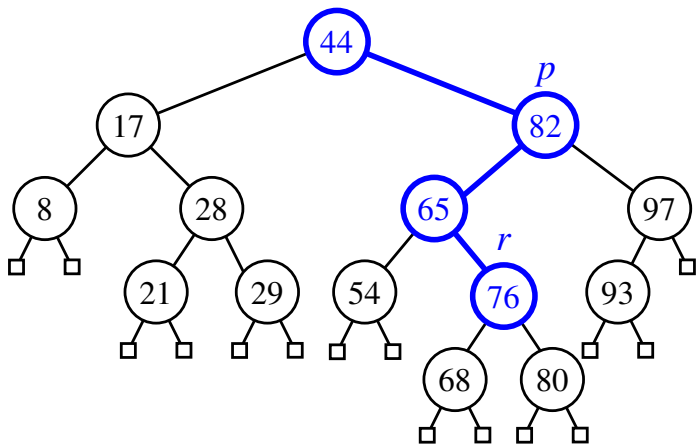


# Árvores binárias de busca

## Remoção de elementos

- Caso 2 – rearranjar:
  1. $p$ é o elemento a remover.
  2. $r$ é o maior elemento estritamente menor que $p$.
  3. $r$ toma o lugar de $p$.
  4. $r$ não terá filho à direita, portanto seu filho à esquerda toma seu lugar.



# Árvores binárias de busca

## Percurso em ordem

- Aplicável a árvores binárias **ordenadas**.
- Dada uma árvore $T$, o percurso em ordem:
  1. visita recursivamente a sub-árvore à esquerda da raiz $T$.
  2. visita a raiz de $T$.
  3. visita recursivamente a sub-árvore à direita da raiz $T$.

**Algorithm:** `inorder(Node<E> n)`

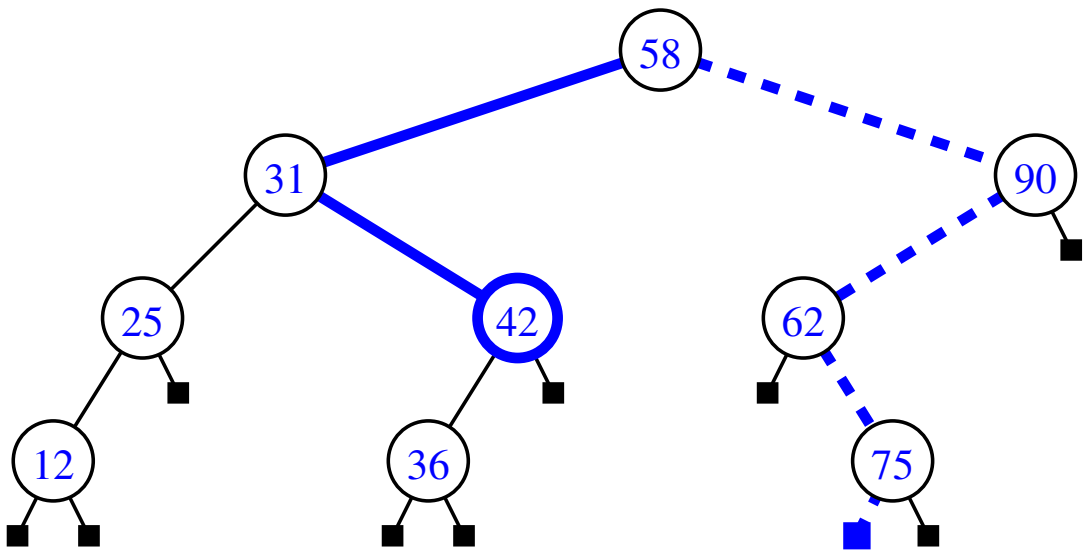
```
inorder(left(n))
```
Visit node $n$
```
inorder(right(n))
```

# Árvores binárias de busca

## Percurso em ordem

- Um percurso em ordem da árvore abaixo imprimirá:

$$12 - 25 - 31 - 36 - 42 - 58 - 62 - 75 - 90$$



# Árvores binárias de busca

## Complexidade das operações

- No pior caso, uma busca vai da raiz até uma das folhas.
- Sendo $h$ a altura da árvore, a operação possui $O(h)$.
- Logo, inserção, substituição, remoção e busca em uma árvore binária de busca executam em $O(h)$.
- Melhor caso: $h = O(\log n)$.
- Pior caso: $h = O(n)$.
- Caso médio: $h = O(\log n)$.
- Variações da ABB garantem complexidade $O(\log n)$ no pior caso.
  - Exemplo: arvores balanceadas.

# Árvores binárias de busca

## Algumas aplicações

- Mapas:
  - Armazenam elementos $\langle$chave, valor$\rangle$ de forma ordenada.
  - Eficiente para as operações.
  - Veja a implementação em Goodrich et al. (2014).

- Filas de prioridade:
  - Armazenam elementos $\langle$chave, valor$\rangle$ onde a chave é a prioridade.
  - Eficiente para as operações.
  - São chamadas de *heaps*.
  - Veja a implementação em Goodrich et al. (2014).

# Exercício

## Implementação com encadeamento

1. Implemente uma árvore binária de busca usando encadeamento. Implemente todas as operações referentes a árvores e os algoritmos de percurso estudados.
    - Utilize a estrutura criada para armazenar elementos na estrutura $\langle$chave, valor$\rangle$. A chave pode ser um campo numérico, e o valor armazena objetos de uma classe qualquer.

# Referências


Edelweiss, N. and Galante, R. (2009). *Estruturas de Dados: Volume 18*. Bookman Editora.

Goodrich, M. T., Tamassia, R., and Goldwasser, M. H. (2014). *Data structures and algorithms in Java*. John Wiley & Sons, 6th edition.

Pereira, S. d. L. (2008). Estruturas de dados fundamentais: Conceitos e aplicações.