Busca de caminhos em grafos

Algoritmos de Dijkstra e A*

Prof. Marcelo de Souza
marcelo.desouza@udesc.br

Algoritmos e Estruturas de Dados
Bacharelado em Engenharia de Software
Universidade do Estado de Santa Catarina

Material de consulta

Leitura obrigatória:

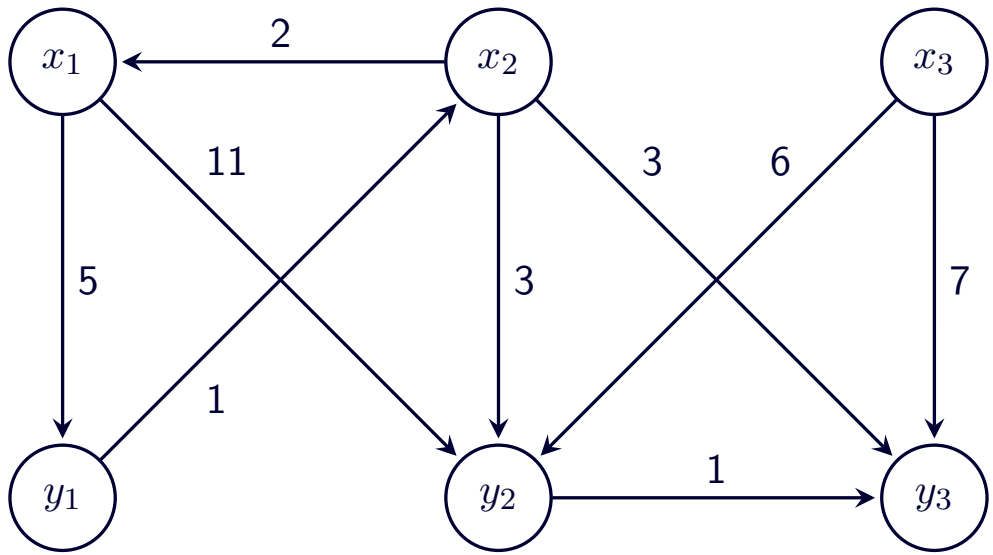
- Capítulo 4 de Goldbarg and Goldbarg (2012) – Caminhos.
- Capítulo 4 de Kleinberg and Tardos (2006) – Algoritmos gulosos.

Leitura complementar:

- Capítulo 14 de Goodrich et al. (2014) – Algoritmos em grafos.
- Capítulo 15 de Preiss (2001) – Grafos e algoritmos em grafos.

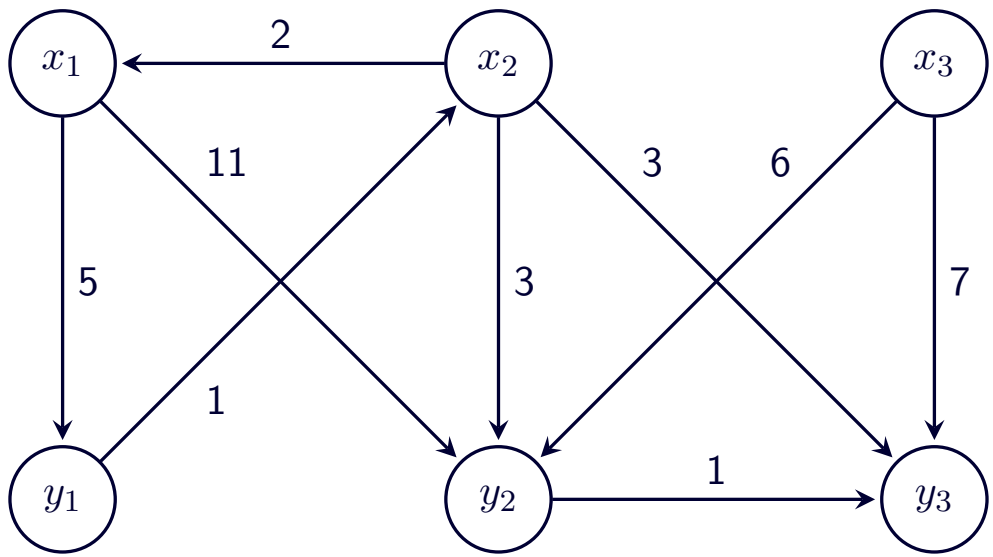
Grafos ponderados

- Um grafo ponderado possui valores numéricos associados às arestas.
- Em muitas aplicações, o peso de uma aresta denota o custo da mesma.
- **Aplicações:**
  - Tráfego: arestas são vias cujo peso é a distância ou o tempo de viagem.
  - Comunicação de dados: arestas são links entre computadores com o respectivo tempo de transmissão.



Caminhos mínimos

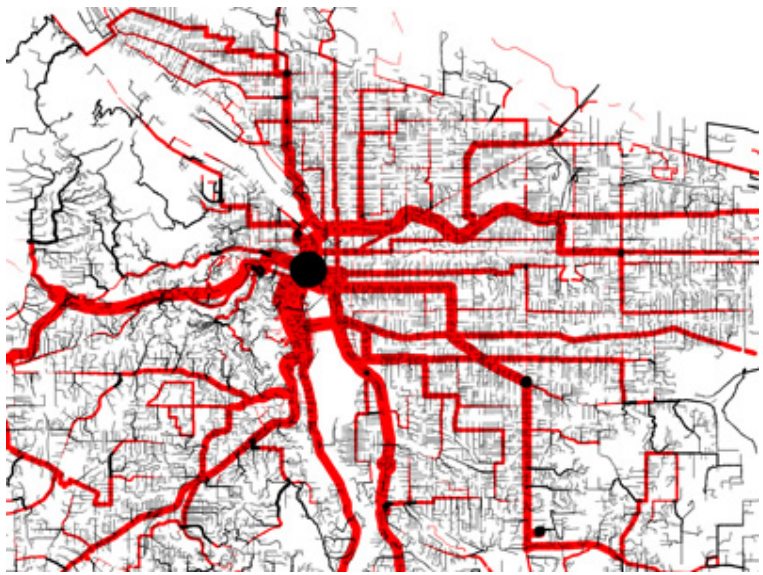
- **Problema:** descobrir o menor caminho entre os vértices s e t.
  - Um grafo não ponderado é aquele com todos os pesos iguais a 1. Neste caso, o menor caminho é o que passa pelo menor número de arestas.
  - **Exemplo:** para chegar de x_1 a y_3 no grafo abaixo existem dois caminhos $[(x_1, y_2, y_3)$ e $(x_1, y_1, x_2, y_3)]$. Apesar de passar por mais arestas, o segundo caminho é menor (custo total menor).
- **Variante:** descobrir o menor caminho entre os vértices s e t.
  - Essa variante é chamada de árvore de caminhos mínimos.



Algoritmo de Dijkstra

Conceitos

- Proposto por Edsger Dijkstra (veja Dijkstra (1959)), o algoritmo calcula a árvore de caminhos mínimos a partir de um vértice de origem s.
  - $d(u)$ é a menor distância encontrada para chegar em u a partir de s.
  - $p(u)$ é o vértice predecessor de u no menor caminho encontrado para chegar em u a partir de s.
  - Q é uma fila de prioridades com os vértices do grafo e $d(u)$ como prioridade.



Algoritmo de Dijkstra

Pseudocódigo

Algorithm: `Dijkstra(Vertex s)`

$Q \leftarrow V$
Set $d(v) = \infty$ and $p(v) = -1$ for each $v \in V$
$d(s) = 0$
while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $u \leftarrow$ extract-min(Q)
    for *each* v *adjacent to* u **do**
        if $d(v) > d(u) + w(u, v)$ **then**
            $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$
            $p(v) \leftarrow u$

Algoritmo de Dijkstra

Pseudocódigo

Algorithm: `Dijkstra(Vertex s)`

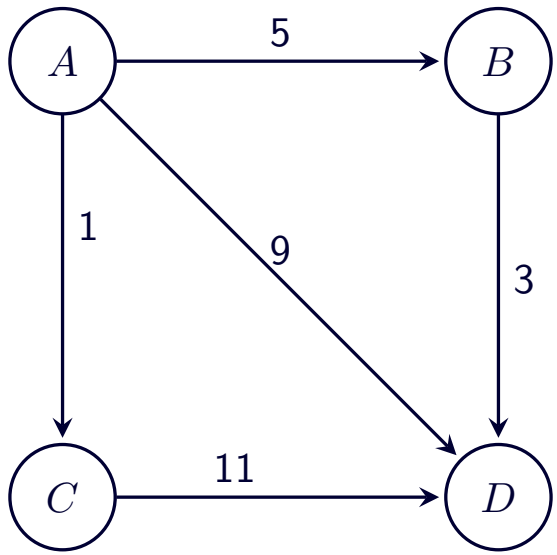
$Q \leftarrow V$
Set $d(v) = \infty$ and $p(v) = -1$ for each $v \in V$
$d(s) = 0$
while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $u \leftarrow$ extract-min(Q)
    for *each* v *adjacent to* u **do**
        if $d(v) > d(u) + w(u, v)$ **then**
            $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$
            $p(v) \leftarrow u$

- Sempre que um elemento é extraído de Q, foi descoberto o menor caminho até ele (predecessor e custo).
- Quando todos os elementos foram removidos, todos os caminhos mínimos de s a todos os demais vértices foram determinados.

Algoritmo de Dijkstra

Exercício de aplicação

- Considere o grafo apresentado abaixo. Simule a execução do algoritmo de Dijkstra para encontrar os caminhos mínimos de A para todos os demais vértices.



Algoritmo de Dijkstra

Detalhes

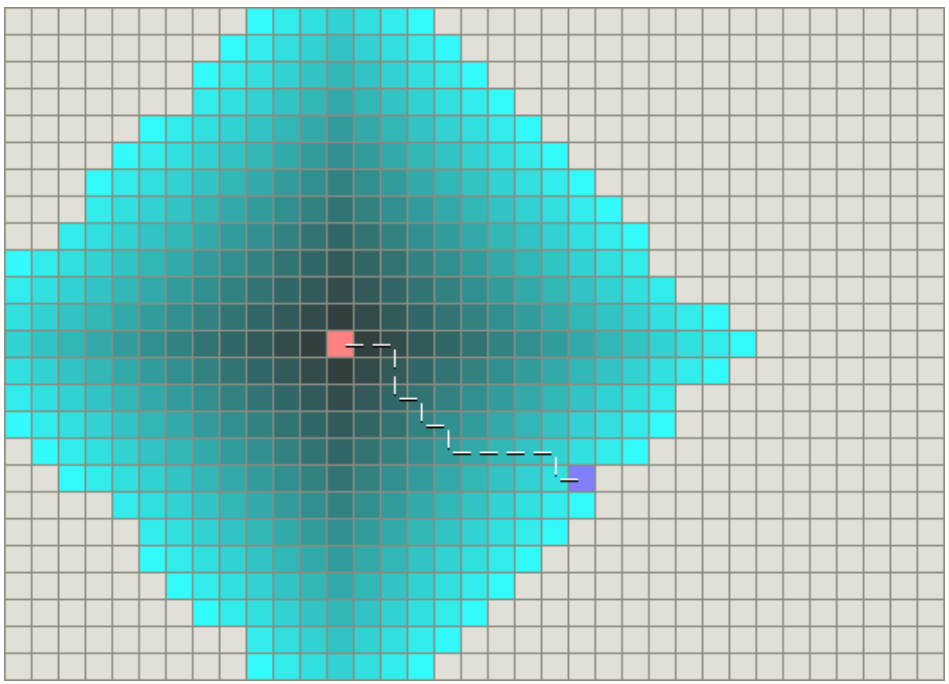
- **Complexidade:**
  - O pré-processamento é executado em $O(n)$.
  - O laço externo executa para cada vértice do grafo – $O(n)$.
  - A extração de Q custa $O(\log n)$ usando um heap binário.
  - O laço interno executa exatamente m vezes (todos os arcos).
  - Cada atualização de vértices implica em atualizar Q, o que custa $O(\log n)$.
  - Complexidade total: $O(m \log n)$.
- **Limitações:**
  - O algoritmo não funciona com pesos negativos.
  - Ineficiente para calcular o caminho simples entre um par de vértices.

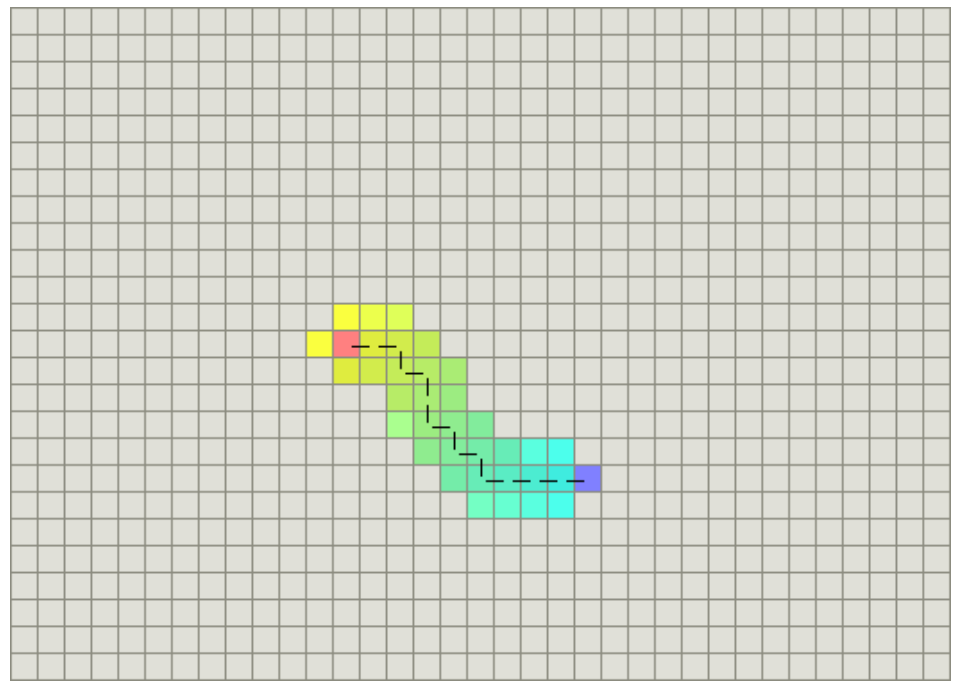
Busca de caminho entre um par de vértices

- Algoritmo de Dijkstra gasta processamento para determinar todos os caminhos mínimos a partir de s.
- Caso apenas o caminho de s a t seja de interesse, podemos parar o algoritmo quando t é removido de Q e retornar o caminho encontrado.
- Existe forma mais eficiente?
  - Sim, podemos guiar a busca em direção ao vértice de destino.
  - **Algoritmo A***!
- O A* é o algoritmo mais utilizado para busca de caminhos em grafos.
- Veremos a aplicação do A* para grafos **não-ponderados**.
  - A aplicação para grafos ponderados pode ser feita com ajustes simples.
- Aplicações populares: jogos, inteligência artificial, roteamento.

Busca de caminho entre um par de vértices

Dijkstra *versus* A*





Busca A*

Ideia geral

- A fila de prioridades usa uma função $f(v)$ para determinar a prioridade do vértice v.
- A função é composta por dois componentes: $f(v) = g(v) + h(v)$.
  - $g(v)$ é a função de custo, dada pela distância s a v.
  - $h(v)$ é a função heurística, dada pela **estimativa de distância** de v a t.
- A busca é guiada pelo custo em se chegar ao vértice selecionado ($g(v)$), mas também o quão próximo ele está do objetivo ($h(v)$).

Busca A*

Pseudocódigo

- Dado um grafo não-ponderado, podemos escrever o algoritmo A* como:

Algorithm: `A*(Vertex s, Vertex t)`

$Q \leftarrow \{s\}$
Set $p(v) = -1$ and v not marked for each $v \in V$
while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $u \leftarrow$ extract-min(Q)
    if $u = t$ **then**
        return *path from* s *to* t
    for *each* v *adjacent to* u **do**
        if v *is not marked* **then**
            Set v marked
            $p(v) \leftarrow u$
            Add v to Q

Busca A*

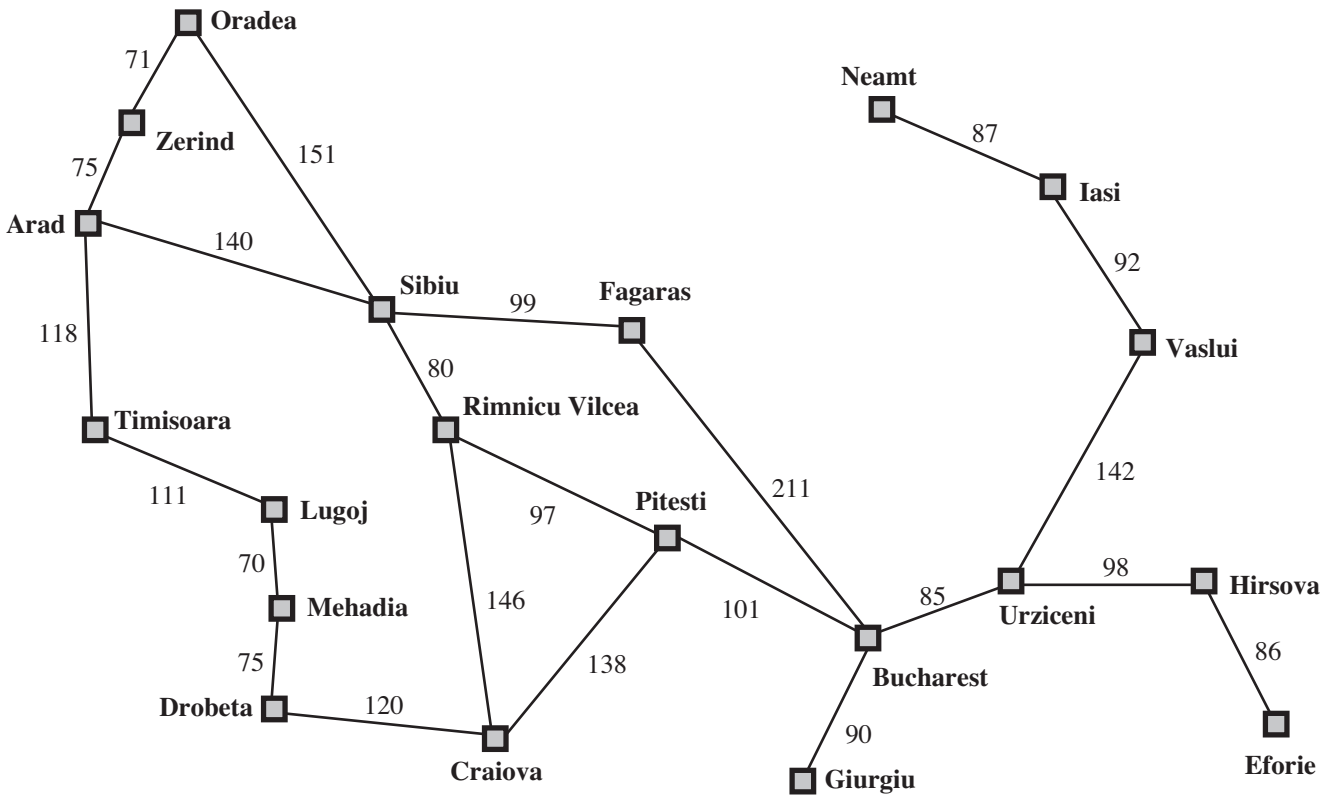
Função heurística

- Esta função estima a distância de um vértice até o vértice de destino.
- É sensível ao contexto, isto é, ao problema que está sendo resolvido.

Busca A*

Função heurística

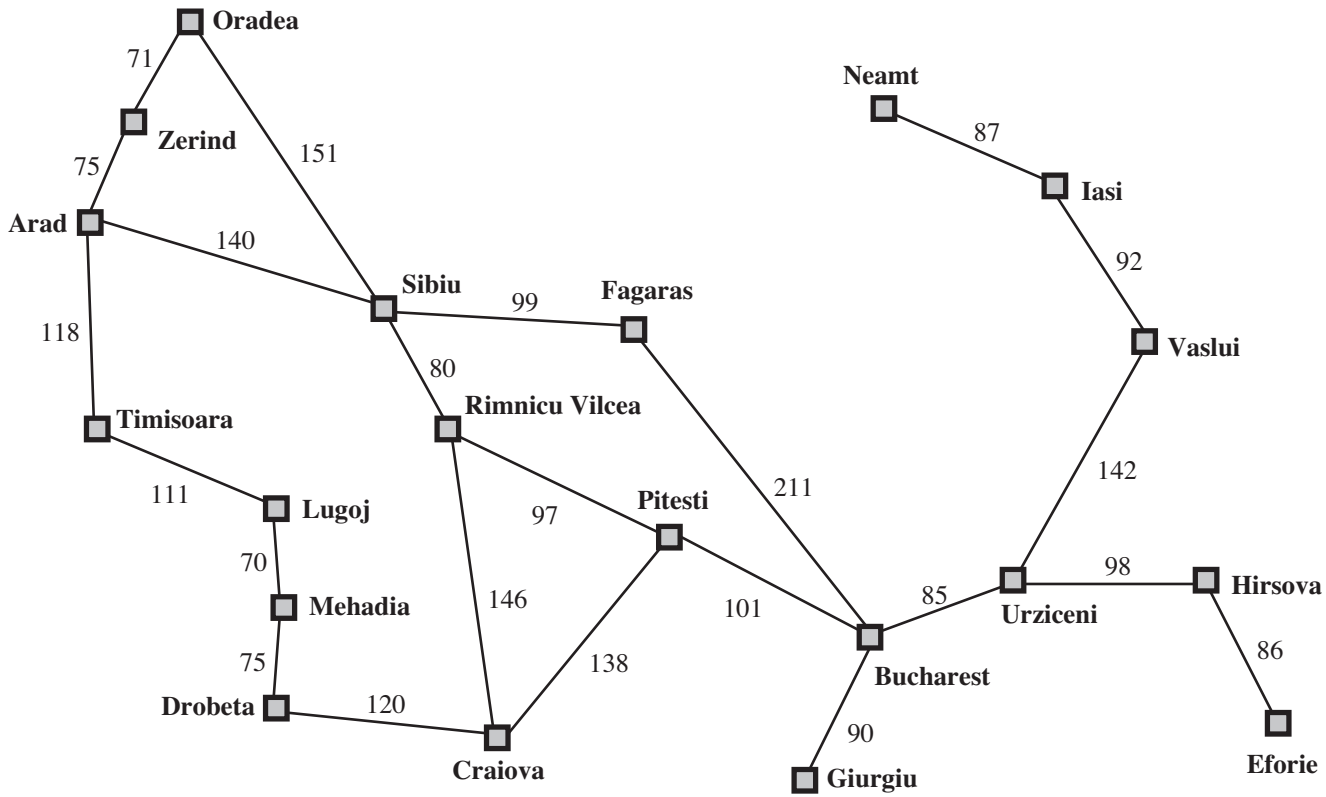
- Esta função estima a distância de um vértice até o vértice de destino.
- É sensível ao contexto, isto é, ao problema que está sendo resolvido.
- **Exemplo:** dado um grafo que representa as cidades de um país, encontra o menor caminho desde uma cidade até outra.



Busca A*

Função heurística

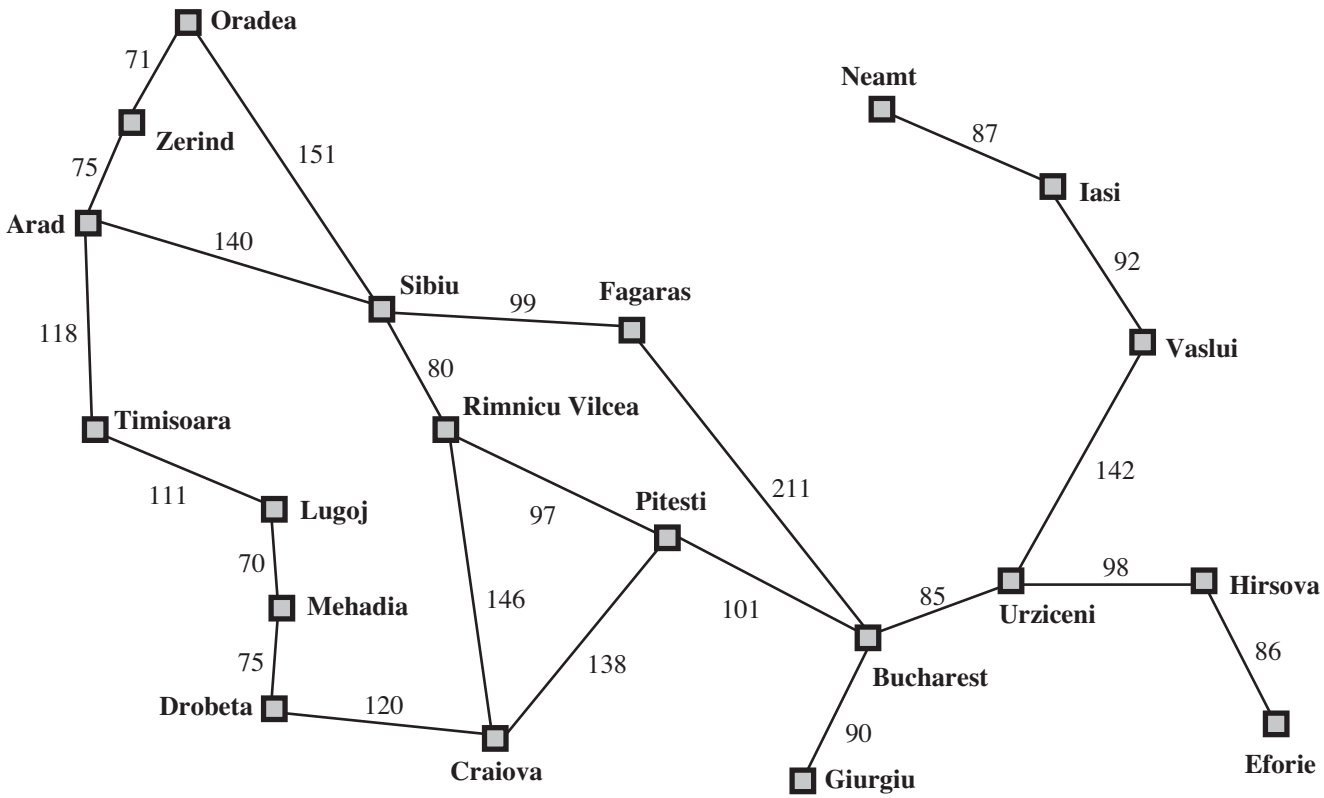
- Consideremos a cidade de origem *Sibiu*, com destino a *Bucharest*.
- $g(v)$ é o custo de sair de *Sibiu* até v.
- $h(v)$ é uma estimativa de distância de v até *Bucharest*.



Busca A*

Função heurística

- Neste caso, $h(v)$ pode ser a distância em linha reta de v até *Bucharest*.



Busca A*

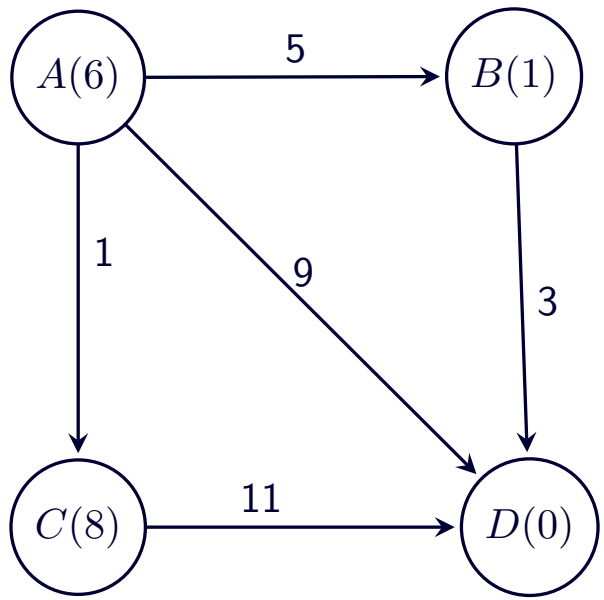
Otimalidade do algoritmo

- O algoritmo A* é ótimo, desde que a função heurística seja **admissível**.
- Uma função admissível é aquela que **nunca superestima** o custo para alcançar o objetivo.
  - Ou seja, o custo estimado nunca é superior ao custo real.

Busca A*

Exercício de aplicação

- Considere o grafo apresentado abaixo. O valor numérico nos vértices representa a função heurística para o mesmo. Simule a execução do algoritmo A* para encontrar o caminho mínimo de A a D.



Outros algoritmos para caminhos

- Para árvores de caminhos mínimos em grafos não-ponderados:
  - Busca em largura.
- Para pesos negativos:
  - Bellman-Ford.
- Para caminhos entre todo par de vértices:
  - Floyd-Warshall.
  - Algoritmo de Johnson.

Exercício

Busca de caminhos

1. Crie um programa que receba a descrição de um grafo dirigido e ponderado (vértices, arcos, pesos) e permita a busca de caminhos no grafo. O usuário poderá selecionar um vértice de origem s e verificar o caminho mínimo de s até todos os demais vértices. O usuário também poderá informar um par de vértices e checar o menor caminho entre eles. Para isso, implemente os algoritmos de busca de Dijkstra e A*.

Referências

Dijkstra, E. W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische mathematik*, 1(1):269–271.

Goldbarg, M. and Goldbarg, E. (2012). *Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.

Goodrich, M. T., Tamassia, R., and Goldwasser, M. H. (2014). *Data structures and algorithms in Java*. John Wiley & Sons, 6th edition.

Kleinberg, J. and Tardos, É. (2006). *Algorithm Design*. Pearson Education India.

Preiss, B. R. (2001). *Estruturas de dados e algoritmos: padrões de projetos orientados a objetos com Java*. Campus.