# Guia para os exercícios

Importante: as informações apresentadas neste documento visam conduzir o estudante na resolução dos exercícios da disciplina. Na maioria dos casos, são apresentados apenas os direcionamentos da solução esperada. Cabe ao estudante o desenvolvimento completo da solução.

## 1 Introdução

Exercício 1: O jogo deve ser implementado utilizando a estrutura de dados baseada em matriz. Para medir a memória utilizada, os métodos utilitários de Runtime podem ser aplicados. Para medir o tempo de processamento, deve-se medir a diferença dos timestamps antes e depois da execução.

Exercício 2: Uma primeira tentativa consiste em armazenar apenas as posições onde existem elementos. Para isso, crie uma classe com o tipo de elemento e a coordenada que representa sua posição. Todas as operações podem ser realizadas utilizando essa nova estrutura, com menor consumo de memória e tempo de processamento.

# 2 Complexidade de algoritmos

Exercício 1: Exercício de leitura.

Exercício 2: Exercício de leitura.

Exercício 3: Leia a Seção 3.5.2 de Goodrich and Tamassia (2013).

**Exercício R-4.1:** Uma dica é utilizar potências de dois como seu valor para n.

**Exercício R-4.2:** Ao igualar as duas equações e simplificá-las, vemos que o cruzamento ocorre em  $n = 4 \log n$ . Agora, podemos confirmar que o cruzamento ocorre em  $n = 2^4 = 16$ .

**Exercício R-4.3:** Ao igualar as duas equações e simplificá-las temos a confirmação de que o cruzamento ocorre em n=20. Ou seja,  $40n^2 \le 2n^3$  para  $n \ge 20$ .

**Exercício R-4.8:** Simplifique as expressões e então use o ordenamento das funções estudadas em sala de aula para ordenar o conjunto. Resultado:  $2^{10}$ ,  $2^{\log n}$ ,  $3n+100\log n$ , 4n,  $n\log n$ ,  $4n\log n+2n$ ,  $n^2+10n$ ,  $n^3$ ,  $2^n$ .

**Exercício R-4.9:** Considere o número de vezes que o laço é executado e quantas operações primitivas ocorrem em cada iteração. O algoritmo executa em tempo O(n).

**Exercício R-4.10:** Considere o número de vezes que o laço é executado e quantas operações primitivas ocorrem em cada iteração. O algoritmo executa em tempo O(n).

Exercício R-4.11: Considere o número de vezes que o laço interno é executado e quantas operações primitivas ocorrem em cada iteração, e então faça o mesmo para o laço externo. O algoritmo executa em tempo  $O(n^2)$ .

Exercício R-4.12: Considere o número de vezes que o laço interno é executado e quantas operações primitivas ocorrem em cada iteração, e então faça o mesmo para o laço externo. O algoritmo executa em tempo O(n).

Exercício R-4.13: Considere o número de vezes que o laço interno é executado e quantas operações primitivas ocorrem em cada iteração, e então faça o mesmo para os dois laços externos. O algoritmo executa em tempo  $O(n^3)$ .

Exercício R-4.28: Os números na primeira linha são bastante grandes. A tabela abaixo calcula os valores de maneira aproximada em potência de 10. Valores aproximados são suficientes para verificar a ordem de grandeza em termos de complexidade.

	1 Second	1 Hour	1 Month	1 Century
$\log n$	$2^{10^6} \approx 10^{300000}$	$2^{3.6 \times 10^9} \approx 10^{10^9}$	$2^{2.6 \times 10^{12}} \approx 10^{0.8 \times 10^{12}}$	$2^{3.1\times10^{15}}\approx10^{10^{15}}$
n	10 <sup>6</sup>	$3.6 \times 10^{9}$	$\approx 2.6 \times 10^{12}$	$\approx 3.12 \times 10^{15}$
$n \log n$	$\approx 10^5$	$\approx 10^9$	$\approx 10^1 1$	$\approx 10^{14}$
$n^2$	1000	$6 \times 10^4$	$\approx 1.6 \times 10^6$	$\approx 5.6 \times 10^7$
$n^3$	100	≈ 1500	≈ 14000	≈ 1500000
2 <sup>n</sup>	19	31	41	51

Exercício R-4.29:  $O(n \log n)$ .

Exercício R-4.30:  $O(n \log n)$ .

**Exercício R-4.31:**  $O(n^2)$  (quando todos os elementos são pares).

**Exercício R-4.32:** Tempo de execução é proporcional a  $\sum_{i=1}^{n} i = O(n^2)$ .

Exercício R-4.34: Veja a discussão sobre número Harmônico em Goodrich et al. (2014).

**Exercício P-4.60:** Exercício de implementação (escolha valores representativos da entrada do tamanho n e faça pelo menos 5 testes para cada valor de tamanho n).

Exercício P-4.61: Exercício de implementação.

Exercício P-4.62: Exercício de implementação (você deverá tentar executar a operação várias vezes para muitos problemas de tamanhos diferentes).

Exercício P-4.63: Exercício de implementação.

### 3 Estruturas de dados fundamentais

Exercício 1: Exercício de leitura.

Exercício R-3.5: Modifique o código e teste as alterações. Não há consequências negativas em remover aquelas linhas (na verdade deverá ter um leve aumento na eficiência). Enquanto o estado interno parece estar inconsistente com o tail referenciando um nó "inexistente", a referência tail nunca é acessada em uma lista vazia, então a inconsistência não tem efeito.

#### Exercício R-3.6: Uma possível solução consiste em um algoritmo linear simples.

#### Exercício R-3.7: Existe uma solução de linha única.

```
tail.setNext(new Node<>(e, tail.getNext()))
```

Exercício R-3.8: Considere uma busca combinada de ambas extremidades. Também, lembrar que um  $link\ hop$  é uma atribuição do formato p = p.getNext(); ou p = p.getPrev();. O método a seguir roda no tempo O(n).

```
private Node < E > middle() {
   if (size == 0)
        throw new IllegalStateException("list must be nonempty");
   Node < E > moddle = header -> next
   Node < E > partner = trailer -> prev;
   while (middle != partner && middle -> next != partner) {
        middle = middle.getNext();
        partner = partner.getPrev();
   }
   return middle;
}
```

#### Exercício R-3.9: Use um laço para percorrer a lista enquanto conta.

```
public int size(){
   int count = 0;
   Node<E> walk = head;
   while(walk != null){
      count++;
      walk = walk.getNext();
   }
   return count;
}
```

### Exercício R-3.10: Você precisa acompanhar onde você começou ou seu método fará um laço infinito.

```
public int size(){
   if(tail == null)
      return 0;
   Node<E> wal = tail->next;
   int count = 1;
   while(walk != tail){
      count++;
      walk = walk.getNext();
   }
   return count;
```

```
}
```

Exercício R-3.11: Não inclua o sentinela na contagem.

```
public int size(){
   int count = 0;
   Node<E> walk = header->next;
   while(walk != trailer){
      count++;
      walk = walk.getNext();
   }
   return count;
}
```

Exercício R-3.15: Como sugestão, você pode contar com a variável tamanho para correr o número de passos corretos quando percorrer a lista.

Exercício R-3.16: Como sugestão, considere que os sentinelas são irrelevantes à equivalência de duas listas.

Exercício C-3.25: A operação de concatenação não precisa procurar tudo em L e M. Use um nodo temporário para caminhar até o final da lista L. Então, faça o último elemento de L apontar para o primeiro elemento de M como seu próximo nodo. O número de passos é proporcional ao tamanho de L.

```
Concatenate(L,M)
   Create a node v
   v = L.getHead()
   while v.getNext() != null do
      v = v.getNext()
   v.setNext(M.getHead())
   return L
```

Exercício C-3.26: Junte o final de L no começo de M. Use dois nodos temporários, temp1 e temp2. Inicialize temp1 como o trailer de L e temp2 como o header de M. Atribua temp2 como o próximo elemento de temp1 e temp1 como o elemento anterior de temp2. Faça  $L' \leftarrow L$  e atribua o trailer de M como trailer de L'.

Exercício C-3.27: Realizar uma troca (swap) em uma lista simplesmente encadeada levará mais tempo do que em uma lista duplamente encadeada. Essa implementação requer muito cuidado, especialmente quando x e y são vizinhos um do outro. Entretanto, a dificuldade na eficiência ocorre porque para trocar x e y em uma lista simplesmente encadeada devemos localizar os nodos imediatamente anteriores a x e y, e não tem uma maneira rápida de fazer isso.

Exercício C-3.28: Dica: Considere mudar a orientação das ligações enquanto faz uma única passagem pela lista. Tal método da classe SinglyLinkedList poderá ser implementado da seguinte forma. Observe que esta implementação funciona mesmo para listas triviais.

```
public void reverse(){
   Node <E> prev = null;
   Node <E> walk = head;
   while(walk != null) {
      Node <E> adv = walk.getNext();
      walk.setNext(prev);
      prev = walk;
```

```
walk = adv;
}
head = prev;
}
```

Exercício C-3.31: Uma sugestão é ajustar o construtor para inicializar o sentinela adequadamente.

## 4 Pilhas, filas e deques

**Exercício R-6.1:** Se a pilha está vazia quando pop é chamado, seu tamanho não muda. Logo, o tamanho da pilha é 25 - 10 + 3 = 18.

**Exercício R-6.2:** É uma posição menor que o tamanho. Logo, t = 17.

**Exercício R-6.3:** Desenhe a estrutura para simular as operações e mudanças realizadas. Resultado: 3, 8, 2, 1, 6, 7, 4, 9.

Exercício R-6.4: Você deve transferir um item de cada vez.

```
static <E> void transfer(Stack <E> S, Stack <E> T) {
   while (!S.isEmpty( )) {
      T.push(S.pop( ));
   }
}
```

**Exercício R-6.5:** Se a pilha está vazia, retorne "pilha vazia". Caso contrário, remove o elemento do topo da pilha e chame a operação recursivamente com a pilha atualizada.

**Exercício R-6.7:** Se a pilha está vazia quando dequeue é chamado, seu tamanho não é modificado. Logo, o tamanho da fila é 32-15+5=22.

**Exercício R-6.8:** Cada operação dequeue de sucesso implica em mover o índice para a direita de maneira circular. Logo, f = 10.

**Exercício R-6.9:** Desenhe a estrutura para simular as operações e mudanças realizadas. Resultado: 5, 3, 2, 8, 9, 1, 7, 6.

Exercício R-6.10: Use as operações apropriadas nas extremidades do deque.

Exercício R-6.11: Use as operações apropriadas nas extremidades do deque.

**Exercício R-6.12:** Desenhe a estrutura para simular as operações e mudanças realizadas. Resultado: 9, false, 9, 2, 7, 6, 2, 1.

**Exercício R-6.13:** A solução consiste em usar o resultado dos métodos de remoção como argumentos para os métodos de inserção. Solução:

- D.addLast(D.removeFirst())
- D.addLast(D.removeFirst())
- D.addLast(D.removeFirst())

- Q.enqueue(D.removeFirst())
- Q.enqueue(D.removeFirst())
- D.addFirst(Q.dequeue())
- D.addFirst(Q.dequeue())
- D.addFirst(D.removeLast())
- D.addFirst(D.removeLast())
- D.addFirst(D.removeLast())

Exercício R-6.14: A solução consiste em usar o resultado dos métodos de remoção como argumentos para os métodos de inserção. Adicionalmente, você precisará usar mais de uma pilha para armazenamento temporário. Solução:

- D.addLast(D.removeFirst())
- D.addLast(D.removeFirst())
- D.addLast(D.removeFirst())
- S.push(D.removeFirst())
- D.addLast(D.removeFirst())
- D.addFirst(S.pop())
- D.addFirst(D.removeLast())
- D.addFirst(D.removeLast())
- D.addFirst(D.removeLast())
- D.addFirst(D.removeLast())

#### 5 Listas dinâmicas

Exercício 1: Basta fornecer um método add(e) que internamente insere o elemento na última posição da lista, isto é, na posição size.

Exercício 2: Caso a posição buscada seja 0 ou size - 1, retorna o elemento correspondente. É necessário verificar se a lista está vazia.

**Exercício 3:** Basta verificar se o índice buscado é menor ou maior que  $\mathtt{size/2}$ , para saber em qual metade da estrutura o índice se encontra. Caso se trate da primeira metade, a busca deve ser realizada a partir do primeiro elemento. Caso contrário, a busca inicia pelo último elemento. Com isso, apenas metade dos elementos precisará ser varrido no pior caso. Logo, a complexidade cai para n/2.

**Exercício 4:** Os métodos devem criar as listas alternativas, atribuir os elementos a elas e retornar a estrutura criada. Diferentes implementações podem devolver uma lista com as mesmas referências ou com cópias dos elementos.

**Exercício 5:** Da mesma forma, é preciso criar uma interface para controlar a posição dos elementos, pois operações de inserção e remoção modificam sua posição original.

Exercício 6: Exercício de leitura.

- Exercício R-7.1: Desenhe a lista, mostrando os estados antes e depois de cada operação.
- Exercício R-7.2: Use o método size para ajudar a manter um controle do topo da pilha.
- Exercício R-7.3: Utilize as operações disponíveis para fazer a correspondência.

Deque Method	Realization with Array List Methods
size()	size()
isEmpty()	isEmpty()
first()	get(0)
last()	get(size()-1)
addFirst(e)	add(0,e)
addLast(e)	add(size(),e)
removeFirst()	remove(0)
removeLast()	remove(size()-1)

Exercício R-7.5: O método resize pode ser utilizado para diminuir o vetor.

```
public void trimToSize() {
   if (data.length != size)
     resize(size);
}
```

**Exercício R-7.7:** Esta afirmação pode ser verificada experimentalmente. Implemente a estratégia proposta e compare o tempo de execução da versão original e da nova versão. Plote os tempos para verificar o comportamento da curva de resposta.

Exercício R-7.8: O tempo de execução para inserir um novo elemento é n. Como n elementos são incluídos, o tempo de execução total é  $n^2$ .

Exercício R-7.9: O método resize não pode ser utilizado.

```
public void add(int i, E e) {
   checkIndex(i, size + 1);
   if (size == data.length) {
      E[] temp = (E[]) new Object[2*data.length];
      for (int k=0; k < i; k++)</pre>
         temp[k] = data[k];
      temp[i] = e;
      for (int k=i+1; k < size+1; k++)</pre>
         temp[k] = data[k1];
      data=temp;
   } else {
      for (int k=size-1; k >= i; k--)
         data[k+1] = data[k];
      data[i] = i;
   }
   size++;
```

Exercício R-7.10: Modifique o método push de tal forma que ele modifique o tamanho quando necessário.

#### Exercício R-7.12: Conte os passos enquanto percorre a lista até encontrar a posição p.

```
public int indexOf(Position < E > p) {
   int count;
   Position <E > walk = first();
   while (walk != p) {
      count++;
      walk = after(walk);
   return count;
}
```

#### Exercício R-7.13: Lembre-se de usar o método equals para testar a igualdade.

```
public Position <E> findPosition(E e) {
   Position < E > walk = first();
   while (walk != null && !e.equals(walk.getElement()))
      walk = after(walk);
   return walk;
}
```

Exercício R-7.14: Isso causa uma inconsistência interna para ambas as listas, tanto a lista sob a qual a operação é invocada, quanto aquela a que p pertence. Um nodo contendo o novo elemento será ligado na lista à qual p pertence, mas é atualizado o tamanho da lista sob a qual a operação é invocada.

Exercício R-7.15: Mapeie cuidadosamente os métodos públicos da interface Queue aos comportamentos concretos da classe LinkedPositionalList.

#### Exercício R-7.18: Lembre-se de utilizar o método equals para testar a igualdade.

```
public boolean contains(Object o) {
   for (int k=0; k < size; k++)
      if (data[k].equals(o))
         return true;
   return false;
}
```

#### Exercício R-7.19: Uma boa estratégia consiste em atualizar todas as referências para null.

```
public void clear( ) {
   for (int k=0; k < size; k++)</pre>
      data[k] = null;
   size = 0;
```

Exercício C-7.25: Assim como implementado na classe ArrayQueue, é recomendável manter o índice f para a frente da lista e uma variável size para o seu tamanho, que corresponde ao número atual de elementos. O elemento do índice k da lista será encontrado no índice (f + k) % data.length do vetor de dados. Inserções e remoções podem ser processados tanto no início quanto no fim da estrutura em tempo constante.

Exercício C-7.26: Recomenda-se o realinhamento da frente da lista durante a operação resize.

Exercício C-7.35: Recomenda-se o realinhamento da frente da fila durante a operação resize.

Exercício P-7.58: Exercício de implementação.

Exercício P-7.60: Mantenha todas as cartas em uma única lista, e quatro posições para demarcar o inicio dos naipes.

## 6 Filas de prioridade

Exercício 1: O primeiro passo consiste em implementar uma classe para a chave. Esta classe armazena os atributos necessários para a ordenação dos passageiros (plano, prioritário e idade). Esta classe deve implementar a interface Comparable, de modo a utilizar o comparador padrão da fila de prioridades. Uma alternativa é criar uma classe comparadora de passageiros e utilizar como comparador da fila de prioridades. Para testar a aplicação, crie uma coleção de passageiros e insira na fila de prioridades. Chame um a um, observando a ordem com a qual os elementos são removidos da estrutura. Imprima a fila em etapas intermediárias, para verificar as diferenças entre utilizar uma estrutura ordenada e uma não ordenada.

**Exercício R-9.3:** (1, D), (3, J), (4, B), (5, A), (2, H), (6, L).

Exercício R-9.4: A melhor estrutura de dados para uma simulação de controle de tráfego aéreo é uma fila de prioridades. Esta estrutura permite manipular os instantes de tempo e manter os eventos em ordem, de tal forma que o evento com menor instante de tempo seja facilmente extraído.

Exercício R-9.5: Mantenha uma variável adicional que referencie a entrada mínima atual. Isso permite executar a operação min em tempo constante O(1). Note que a operação removeMin continua necessitando tempo linear O(n). Apesar do min atual ser facilmente encontrado e removido, tal método precisa percorrer todos os elementos restantes para identificar o novo mínimo.

Exercício R-9.6: Veja a solução anterior.

Exercício R-9.12: A resposta está na Seção 9.2.2 de Goodrich et al. (2014).

Exercício C-9.25: A solução é manter os time stamps nas entradas da fila de prioridades. Mantenha uma variável m inicializada com 0. Quando executar a operação push com um elemento e, chame insert(m, e) e decremente m. Na operação pop, chame remove e incremente m.

Exercício C-9.26: A estratégia é similar ao exercício anterior. Mantenha uma variável maxKey inicializada com 0. Na operação de enfileirar um elemento e, chame insert(maxKey, e) e incremente maxKey. Na operação de desenfileirar, chame removeMin.

Exercício C-9.27: É sempre possível que um novo elemento receba uma chave estritamente menor que a atribuída ao elemento previamente inserido?

Exercício C-9.28: Gerencie a estrutura de forma circular.

# 7 Mapas

Exercício 1: Exercício de leitura.

Exercício 2: Primeiro, você deve criar uma classe para modelar a chave, composta pela nota e pelo preço médio. Crie também uma classe para modelar um restaurante, contendo seu nome, horário de funcionamento e endereço. Crie um mapa para cada uma das quatro categorias. Crie as rotinas de criação de novos restaurantes e exclusão de restaurantes dos mapas. Crie também um método de consulta, dada uma nota e um valor de referência. Questões a serem resolvidas: o que acontece quando dois restaurantes possuem a mesma nota e o mesmo preço médio? Quais alterações precisam ser feitas para as operações de consulta? Como implementar o sistema considerando que um restaurante pode ter mais de uma categoria simultaneamente?

**Exercício R-10.1:** A primeira inserção consome O(1), a segunda consome O(2), e assim por diante. A execução completa dessa operação consome  $O(n^2)$ .

Exercício R-10.2: Basta substituir a lista baseada em vetor pela lista posicional. Para a remoção, pode ser utilizado o método remove da PositionalList.

Exercício R-10.3: Para isso, utilize o método findIndex.

```
public boolean containsKey(K key) {
  return (findIndex(key) != -1);
}
```

**Exercício R-10.18:** Dado que o mapa seguirá contendo n entradas no final do procedimento, você pode assumir que cada operação **remove** consome o mesmo tempo assintótico  $O(\log n)$ . Logo, a complexidade total no pior caso é  $O(n \log n)$ .

Exercício R-10.19: Novamente, podemos utilizar o método findIndex.

```
public boolean containsKey(K key) {
  int j = findIndex(key);
  return (j < table.size() && compare(key, table.get(j)) == 0);
}</pre>
```

Exercício R-10.20: Você deve descrever como os métodos get e put devem ser utilizados/adaptados para realizar tal tarefa.

Exercício R-10.21: No novo código, o que acontece quando uma chave buscada é igual a table.get(mid)? A nova versão está incorreta. Isso pode ser verificado considerando como exemplo uma chamada de findIndex(20, 0, 2) para uma tabela contendo 10, 20, 30. Essa chamada deveria retornar o índice 1, mas o código apresentado retornará o índice 3. A nova versão computará o índice corretamente alterando a linha 4 por if (compare(key, table.get(mid).getKey()) <= 0).

Exercício C-10.33: A solução deve fazer uma única chamada ao método findIndex.

```
public V pullAbsent(K key, V value) {
   int j = findIndex(key);
   if (j == -1) {
      table.add(new MapEntry <> (key, value));
      return null;
   } else {
      return table.get(j).getValue();
   }
}
```

Exercício C-10.45: Para a solução, cada entrada do mapa deve armazenar seu índice corrente na tabela.

### 8 Outras estruturas de dados lineares

Exercício 1: Exercício de implementação.

Exercício de implementação.

Exercício de implementação.

#### 9 Busca em estruturas lineares

Exercício 1: Você deverá implementar uma classe Conta com os atributos da mesma (agência, número, saldo). Para permitir a busca, essa classe deve implementar a interface Comparable, ou um Comparator deve ser implementado. Uma vez que a coleção de contas esteja armazenada na estrutura, basta utilizar os algoritmos de busca. No caso de uma estrutura ordenada, a inserção deverá ser feita na posição correta, o que possibilita o uso da busca binária. Calcule o tempo de execução de cada operação para diferentes tamanhos das coleções. Plote os resultados para a comparação.

Exercício 2: Veja uma possível implementação na Seção 5.1.3 de Goodrich et al. (2014).

Exercício 3: Com uma caneta, marque as referências para início e fim da sub-estrutura considerada em cada iteração da busca. Caso essas referências se cruzem, o elemento não foi encontrado. Caso a referência para o meio da lista aponte para o elemento buscado, seu índice é encontrado.

Exercício 4: Para implementar essa modificação, você deve parar a busca com sucesso quando o elemento buscado é igual ao elemento analisado. A busca continua se o elemento buscado for menor que o elemento analisado, e pára sem sucesso, caso contrário. No pior caso, o elemento buscado não está na lista e é maior que qualquer elemento dela. Logo, a lista precisa ser totalmente percorrida e a complexidade continua sendo O(n).

Exercício 5: Exercício de implementação. Como exemplo, veja a implementação da busca binária na classe SortedTableMap.

Exercício 6: Exercício de consulta.

# 10 Ordenação de estruturas lineares

Exercício 1: Exercício de pesquisa/leitura.

**Exercício 2:** Crie uma variável para controlar as trocas feitas no vetor.

```
}
}
```

**Exercício 3:** Com essa alteração, cada iteração executa uma busca interna em  $O(\log n)$ . Logo, o algoritmo pode ser implementado com complexidade  $O(n \log n)$ .

**Exercício 4:** Resultado: a primeira ordenação não é perdida, pois as relações de grandezas se mantém. Teste este comportamento no papel para pequenas matrizes  $(2 \times 2)$  a fim de verificar seu comportamento. Implemente esta operação.

**Exercício 5:** Para cada aluno, o sistema deverá fazer a leitura das três notas correspondentes, armazenando a média em um vetor de números reais. Após isso, basta aplicar algum algoritmo de ordenação e retornar os últimos 10 elementos da estrutura.

Exercício 6: Ao invés de uma estrutura contendo números reais, deverá ser utilizada uma estrutura para armazenar objetos da classe Redacao. Além disso, alguma estratégia de comparação de nota deverá ser implementada para que a ordenação opere adequadamente.

### Referências

Goodrich, M. T. and Tamassia, R. (2013). Estruturas de Dados & Algoritmos em Java. Bookman Editora, 5th edition.

Goodrich, M. T., Tamassia, R., and Goldwasser, M. H. (2014). Data structures and algorithms in Java. John Wiley & Sons, 6th edition.