УНИВЕРСИТЕТ ЛОБАЧЕВСКОГО

# Исследование схем ускорения сходимости алгоритмов глобальной оптимизации

**Владислав Соврасов**

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

13 сентября 2017 г.
Нижний Новгород

# Постановка задачи

$D = \{y \in \mathbf{R}^N : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, 1 \leqslant i \leqslant N\}$ — некоторый гиперинтервал, на котором определены функции задачи.

$$Q = \{y \in D : g_j(y) \leqslant 0, 1 \leqslant j \leqslant m\}$$
$$\varphi(y^*) = \min\{\varphi(y) : y \in Q\}$$

Предполагается, что целевая функция $\varphi(y)$ и ограничения $g_j(y)$ удовлетворяет условию Липшица в области $D$:

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| \leqslant L\|y_1 - y_2\|, y_1, y_2 \in D, 0 < L < \infty$$

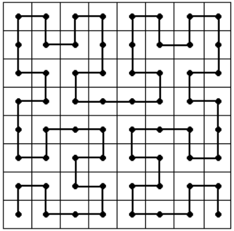
Численное решение задачи означает построение оценки $\tilde{y}$, близкой по какой-либо норме к точке $y^*$ на основе конечного числа значений целевой функции задачи, вычисленных в точках области $D$.

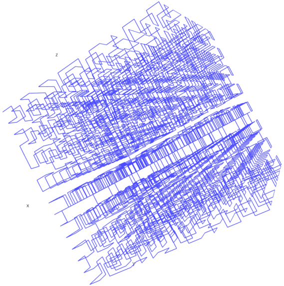
# Редукция размерности

Использование развёрток:

$\{y \in \mathbf{R}^N : -2^{-1} \leqslant y_i \leqslant 2^{-1}, 1 \leqslant i \leqslant N\} = \{y(x) : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$,

$\varphi(y(x^*)) = \min\{\varphi(y(x)) : x \in [0; 1]\}$





Многошаговая схема:

$$\min_{(x_1,..,x_n)\in D} f(x_1, .., x_n) = \min_{a_1\leqslant x_1\leqslant b_1} \min_{a_2\leqslant x_2\leqslant b_2} \dots \min_{a_n\leqslant x_n\leqslant b_n} f(x_1, ..., x_n)$$

# Метод глобальной оптимизации

Общая схема характеристического метода: пусть имеется $k$ результатов испытаний, далее:

Шаг 1. Упорядочить поисковую информацию по возрастанию координат точек испытаний

Шаг 2. Вычислить для каждого интервала величину $R(i)$, называемую характеристикой.

Шаг 3. Выбрать интервал номер $t$ с наибольшей характеристикой и провести в нем испытание:

$$x^{k+1} = d(t) \in (x_{t-1}, x_t)$$

Критерий остановки:

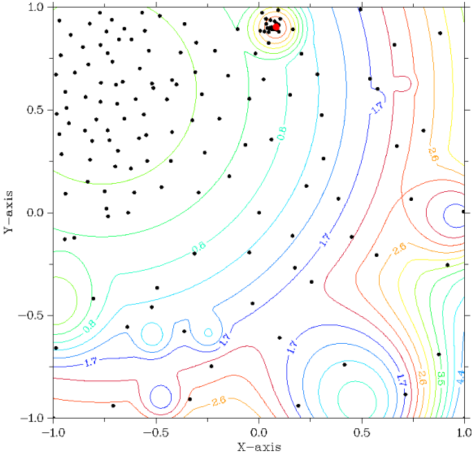
$$x_t - x_{t-1} < \varepsilon$$

# Класс тестовых задач

Генератор GKLS:

$$f(x) = \begin{cases} C_i(x), x \in S_i, i \in 2, \dots, m \\ \|x - T\|^2 + t, x \notin S_2, \dots, S_m \end{cases}$$

- варьируемое число локальных минимумов;
- варьируемый размер области притяжения глобального минимума;
- размерность функции также задаётся.



# Использование методов локальной оптимизации

Способы использования локального поиска (метод Хука-Дживса):

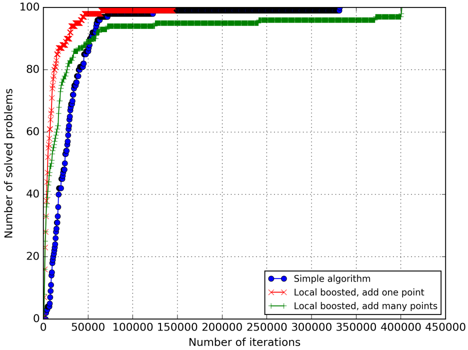
1. Запуск из лучшей найденной точки после окончания работы АГП;
2. Запуски из текущих лучших точек в процессе работы АГП.

Стратегии сохранения информации (для п. 2):

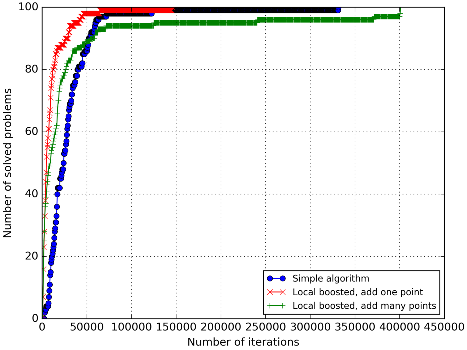
- добавлять только лучшие точки;
- добавлять в поисковую информацию все точки.

# Использование методов локальной оптимизации

Результаты применения различных стратегий сохранения информации:




GKLS 4d Simple




GKLS 5d Simple

# Смешанный алгоритм

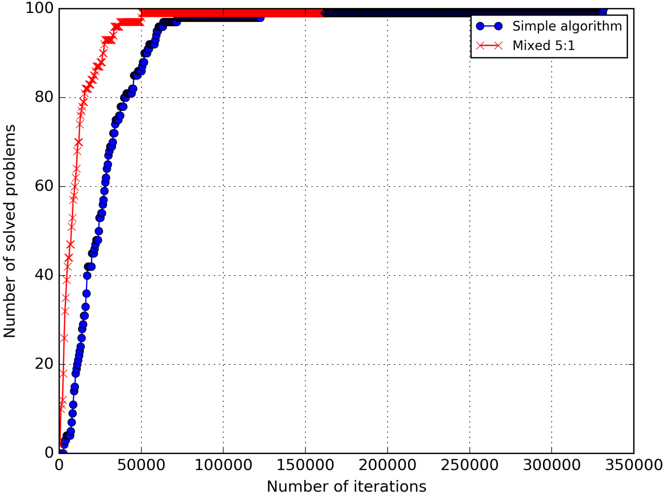
Метод является модификацией АГП. Каждый интервал имеет две характеристики $R(i)$ и $R^*(i)$.

$$R^*(i) = \frac{R(i)}{\sqrt{(z_i - z^*)(z_{i-1} - z^*)}/\mu + 1.5^{-\alpha}}$$

Для эффективной реализации АГП используется приоритетная очередь интрервалов. Ключ – $R(i)$. Для смешанного АГП – две связанные очереди. Операции с очередями:

- Синхронная вставка
- Синхронное удаление
- Обновление перекрестных ссылок при восстановлении кучеобразности

# Смешанный алгоритм



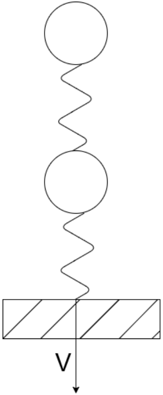

Операционные характеристики обычного и смешанного АГП на классе GKLS 4d Simple

# Пример прикладной задачи

Рассматривется система из $n$ материальных точек, связанных упруго-диссипативными элементами.
Например, при $n = 2$:

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 = -\beta(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) - \xi_1 + \xi_2 + u + v \\ \ddot{\xi}_2 = -\beta(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1) - \xi_2 + \xi_1 + v \end{cases}$$
$$\xi_1(0) = \xi_2(0),\ \dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_2(0) = 0$$

В реальной задаче $n = 10$, состояние не полностью наблюдаемо.

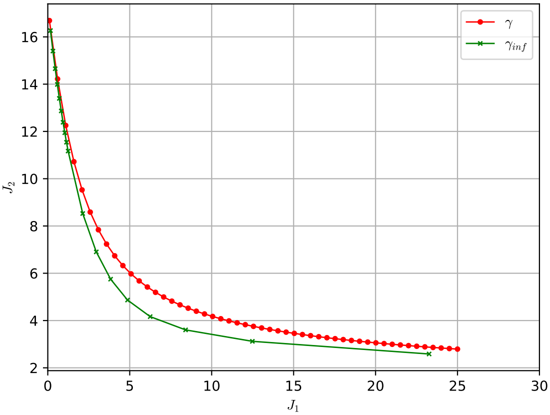


# Пример прикладной задачи (результаты)

Постановка задачи в методе главного критерия:

$$J_2(\Theta^*) = \min\{J_2(\Theta) : J_1(\Theta) < \varepsilon, \\ g_0(\Theta) \leqslant 0\}$$

Решается серия задач трёхмерных при различных значениях $\varepsilon$.
Глобально-оптимальное решение при каждом $\varepsilon$ — Слейтерова точка в исходной задаче.



Спасибо за внимание!

Владислав Соврасов
sovrasov.vlad@gmail.com