УНИВЕРСИТЕТ ЛОБАЧЕВСКОГО

Исследование схем ускорения сходимости алгоритмов глобальной оптимизации

В.В. Соврасов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

23 июня 2017 г.
Нижний Новгород

Постановка задачи

$D = \{y \in \mathbf{R}^N : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, 1 \leqslant i \leqslant N\}$ — некоторый гиперинтервал, на котором определены функции задачи.

$$Q = \{y \in D : g_j(y) \leqslant 0, 1 \leqslant j \leqslant m\}$$
$$\varphi(y^*) = \min\{\varphi(y) : y \in Q\}$$

Предполагается, что целевая функция $\varphi(y)$ и ограничения $g_j(y)$ удовлетворяет условию Липшица в области D:

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| \leqslant L\|y_1 - y_2\|, y_1, y_2 \in D, 0 < L < \infty$$

Численное решение задачи означает построение оценки $\tilde{y}$, близкой по какой-либо норме к точке y^* на основе конечного числа значений целевой функции задачи, вычисленных в точках области D.

Редукция размерности

Основные подходы:

- Использование развёрток:
  $\{y \in \mathbf{R}^N : -2^{-1} \leqslant y_i \leqslant 2^{-1}, 1 \leqslant i \leqslant N\} = \{y(x) : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$,
  $\varphi(y(x^*)) = \min\{\varphi(y(x)) : x \in [0; 1]\}$

Редукция размерности

Основные подходы:

- Использование развёрток:
  $\{y \in \mathbf{R}^N : -2^{-1} \leqslant y_i \leqslant 2^{-1}, 1 \leqslant i \leqslant N\} = \{y(x) : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$,
  $\varphi(y(x^*)) = \min\{\varphi(y(x)) : x \in [0; 1]\}$
- Многошаговая схема:
  $$\min_{(x_1,\ldots,x_n)\in D} f(x_1, .., x_n) = \min_{a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1} \min_{a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2} \ldots \min_{a_n \leqslant x_n \leqslant b_n} f(x_1, ..., x_n)$$

Редукция размерности

Основные подходы:

- Использование развёрток:
  $\{y \in \mathbf{R}^N : -2^{-1} \leqslant y_i \leqslant 2^{-1}, 1 \leqslant i \leqslant N\} = \{y(x) : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$,
  $\varphi(y(x^*)) = \min\{\varphi(y(x)) : x \in [0;1]\}$
- Многошаговая схема:
  $$\min_{(x_1,..,x_n) \in D} f(x_1,..,x_n) = \min_{a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1} \min_{a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2} ... \min_{a_n \leqslant x_n \leqslant b_n} f(x_1,...,x_n)$$
- Блочная многошаговая схема:
  $u_1 = (y_1, y_2, \dots, y_{N_1}), u_2 = (y_{N_1+1}, y_{N_1+2}, \dots, y_{N_1+N_2}), \dots, u_M = (y_{N-N_M+1}, y_{N-N_M+2}, \dots, y_N)$
  $$\min_{y \in D} \varphi(y) = \min_{u_1 \in D_1} \min_{u_2 \in D_2} \dots \min_{u_M \in D_M} \varphi(y)$$

Метод глобальной оптимизации

Общая схема характеристического метода: пусть имеется k результатов испытаний, далее:

Шаг 1. Упорядочить поисковую информацию по возрастанию координат точек испытаний

Шаг 2. Вычислить для каждого интервала величину $R(i)$, называемую характеристикой.

Шаг 3. Выбрать интервал номер t с наибольшей характеристикой и провести в нем испытание:

$$x^{k+1} = d(t) \in (x_{t-1}, x_t)$$

Критерий остановки:

$$x_t - x_{t-1} < \varepsilon$$

Метод глобальной оптимизации

Формулы дял вычисления характеристик:

$$R(1) = 2\Delta_1 - 4\frac{z_1}{M}, R(k+1) = 2\Delta_{k+1} - 4\frac{z_k}{M}$$

$$R(i) = \Delta_i + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{M^2\Delta_i} - 2\frac{z_i + z_{i-1}}{M}, 1 < i < k+1$$

Правила выбора следующей точки:

$$x_{k+1} = \frac{x_t + x_{t-1}}{2}, t = 1, t = k+1$$

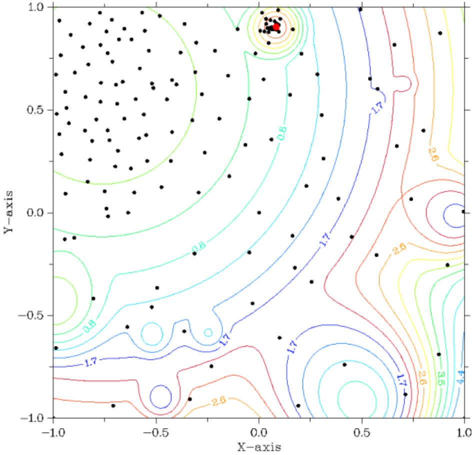
$$x_{k+j} = \frac{x_t + x_{t-1}}{2} - \operatorname{sign}(z_t - z_{t-1})\frac{1}{2r}\left[\frac{|z_t - z_{t-1}|}{\mu}\right]^N, 1 < t < k+1$$

Класс тестовых задач

Генератор GKLS:

$$f(x) = \begin{cases} C_i(x), x \in S_i, i \in 2, \ldots, m \\ \|x - T\|^2 + t, x \notin S_2, \ldots, S_m \end{cases}$$

- варьируемое число локальных минимумов;
- варьируемый размер области притяжения глобального минимума;
- размерность функции также задаётся.



Использование методов локальной оптимизации

Способы использования локального поиска (метод Хука-Дживса):

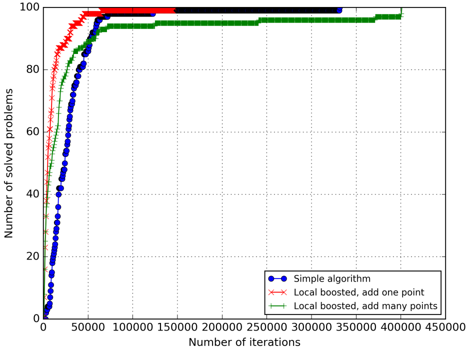
1. Запуск из лучшей найденной точки после окончания работы АГП;
2. Запуски из текущих лучших точек в процессе работы АГП.

Стратегии сохранения информации (для п. 2):

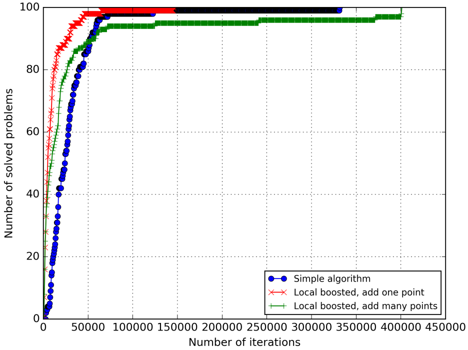
- добавлять только лучшие точки;
- добавлять в поисковую информацию все точки.

Использование методов локальной оптимизации

Результаты применения различных стратегий сохранения информации:



GKLS 4d Simple



GKLS 5d Simple

Смешанный алгоритм

Метод является модификацией АГП. Каждый интервал имеет две характеристики $R(i)$ и $R^*(i)$.

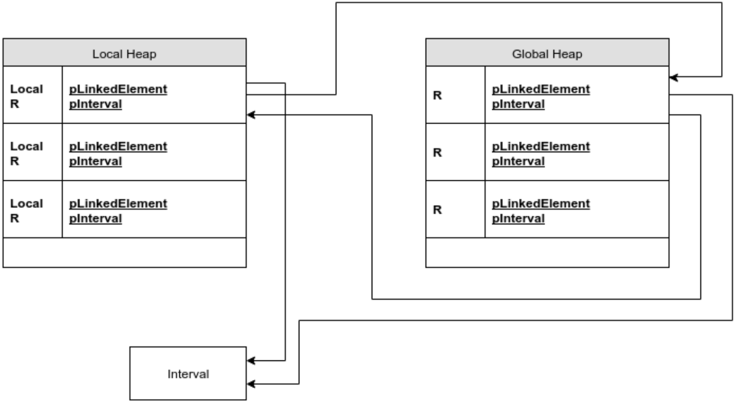
$$R^*(i) = \frac{R(i)}{\sqrt{(z_i - z^*)(z_{i-1} - z^*)}/\mu + 1.5^{-\alpha}}$$

Для эффективной реализации АГП используется приоритетная очередь интрервалов. Ключ – $R(i)$. Для смешанного АГП – две связанные очереди. Операции с очередями:

- Синхронная вставка
- Синхронное удаление
- Обновление перекрестных ссылок при восстановлении кучеобразности

Смешанный алгоритм

Схема перекрёстных ссылок на элементы очередей:

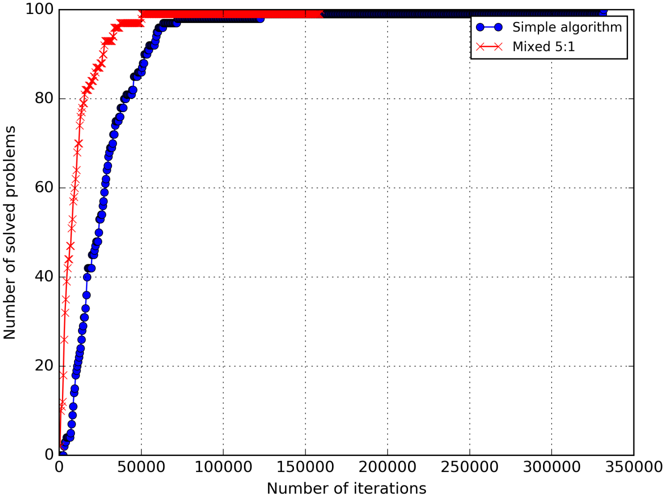


Смешанный алгоритм

Алгоритм обмена элементов при погружении/всплытии:

```
inline void swapElems(T& arg1, T& arg2)
{
  if (arg1.pLinkedElement != NULL &&
      arg2.pLinkedElement != NULL)
    std::swap(arg1.pLinkedElement->pLinkedElement,
      arg2.pLinkedElement->pLinkedElement);
  else if (arg1.pLinkedElement != NULL)
    arg1.pLinkedElement->pLinkedElement = &arg2;
  else if(arg2.pLinkedElement != NULL)
    arg2.pLinkedElement->pLinkedElement = &arg1;
  std::swap(arg1, arg2);
}
```

Смешанный алгоритм



Операционные характеристики обычного и смешанного АГП на классе GKLS 4d Simple

Адаптивная оценка константы Гёльдера

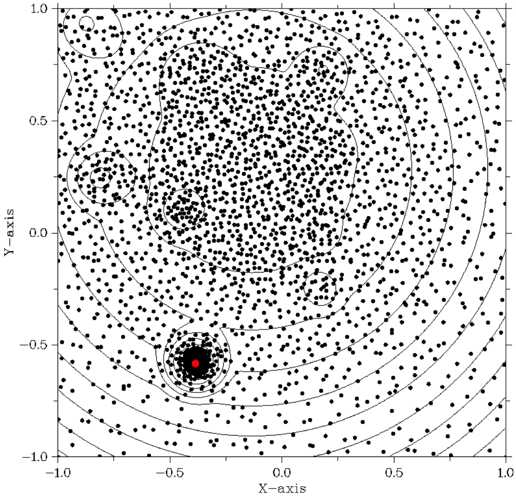
Вместо общей оценки M для каждого интервала вычисляется своя оценка M_i:

$$
\begin{aligned}
&H_i = \tfrac{|z_i - z_{i-1}|}{\Delta_i}\\
&\lambda_i = \max\{H_{i-1}, H_i, H_{i+1}\}\\
&H^k = \max\{H_i : i = 2, \dots, k\}\\
&\gamma_i = H^k \tfrac{\Delta_i}{\Delta^{max}}\\
&\Delta^{max} = \max\{\Delta_i : i = 2, \dots, k\}
\end{aligned}
$$

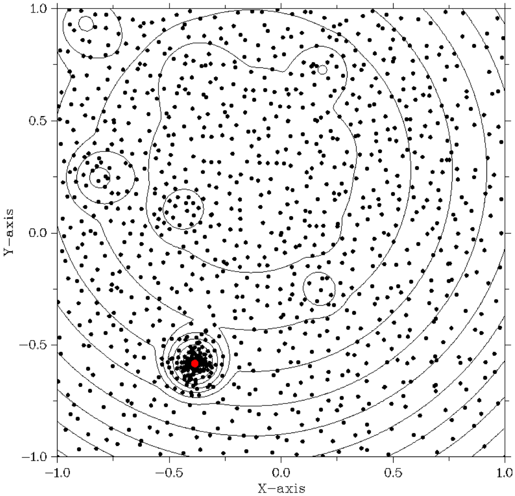
$$M_i = r \cdot \max\{H_i, \frac{1}{2}(\lambda_i + \gamma_i), \xi\}$$

$$M_i = r \cdot \max\{H_i, \frac{\lambda_i}{r} + \frac{r-1}{r}\gamma_i, \xi\}$$

Адаптивная оценка константы Гёльдера

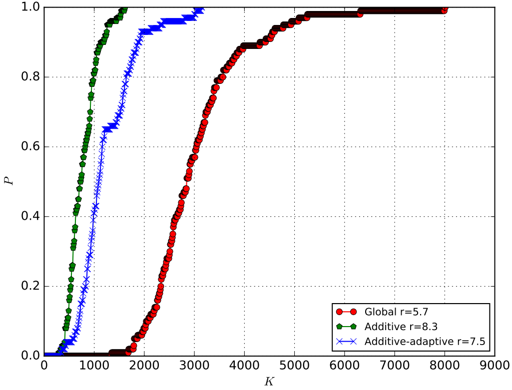


Неадаптивная оценка

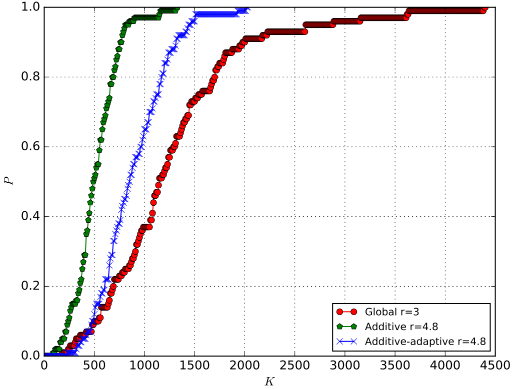


Адаптивная оценка

Адаптивная оценка константы Гёльдера



GKLS Simple 2d



F_{GR}

Пример прикладной задачи

$$\dot{x} = (A + B_u\Theta)x + B_v v, x(0) = 0$$

Выходы системы описываются выражениями:

$$z_k = (C_k + D_k\Theta)x, k = \overline{1, N}$$

Критерии оптимальности:

$$J_k(\Theta) = \sup_{v \in L_2} \frac{\max_{1 \leqslant i \leqslant n_k} \sup_{t \geqslant 0} |z_k^{(i)}(\Theta, t)|}{||v||_2} \to \min_{\Theta}$$

Ограничение на устойчивость системы:

$$g_0(\Theta) = \min_j \mathrm{Re}(\lambda_j(A + B_u\Theta)) < 0$$

Многокритериальная задача сводится к скалярной методом главного критерия или с помощью свёртки Гермейера.

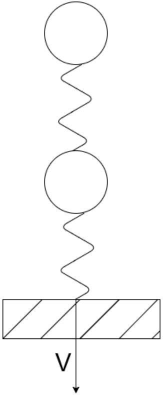
Пример прикладной задачи

Рассматривется система из n материальных точек, связанных упруго-диссипативными элементами. Например, при $n = 2$:

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 = -\beta(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) - \xi_1 + \xi_2 + u + v \\ \ddot{\xi}_2 = -\beta(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1) - \xi_2 + \xi_1 + v \end{cases}$$

$$\xi_1(0) = \xi_2(0),\ \dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_2(0) = 0$$

В реальной задаче $n = 10$, состояние не полностью наблюдаемо.



Пример прикладной задачи (результаты)

Постановка задачи в методе главного критерия:

$$J_2(\Theta^*) = \min\{\Theta : J_1(\Theta) < \varepsilon, g_0(\Theta) \leqslant 0\}$$

Решается серия задач при различных значениях ε. Глобально-оптимальное решение при каждом ε — Слейтерова точка в исходной задаче.