

Сравнение вращаемой и сдвиговой множественных развёрток по количеству вычислений целевой функции в задачах без ограничений

1 Реализация алгоритма с множественными развёртками

Алгоритм реализован на языке C++ с использованием линейных структур данных для хранения поисковой информации. Сложность выполнения каждой итерации алгоритма $O(k)$, где k — номер итерации.

Реализация поддерживает полноценную индексную схему, ε -резервирование и локальную адаптацию (схема Маркина-Стронгина). Поддержки параллельных вычислений нет.

Данная реализация не использует код системы Globalizer.

2 Классы тестовых задач и методика проведения экспериментов

Операционные характеристики метода с различными множественными развёртками строились на следующих классах задач: функции Гришагина (F_{GR}), GKLS 2d Simple (gklsS2d), GKLS 2d Hard (gklsH2d), GKLS 3d Simple (gklsS3d).

Для каждого класса задач и каждого типа развёртки были предприняты попытки провести следующие эксперименты:

1. решить все задачи при одинаковом для всех развёрток значении r с остановкой по попаданию в окрестность известного оптимума;
2. решить все задачи при одинаковом для всех развёрток значении r с остановкой по точности;
3. решить все задачи при минимальном допустимом для каждой конфигурации развёртки в отдельности значении параметра r с остановкой по попаданию в окрестность известного оптимума;
4. решить все задачи при минимальном допустимом для каждой конфигурации развёртки в отдельности значении параметра r с остановкой по точности;

В последних двух случаях подбор минимального значения r такого, что решаются все задачи класса, осуществлялся с точностью 0.1 для каждого типа развёртки в отдельности и для каждого значения L (количество развёрток).

В связи с тем, что в представленной реализации АГП используются только линейные структуры данных, не для всех классов указанные 4 типа экспериментов были проведены. Решение некоторых задач из сложных классов требует порядка 10^6 испытаний и занимает несколько часов на одну задачу. В этом случае подобрать минимальное значение r для каждой развёртки очень затратно.

В таблицах 1, 2, 3, 4 указаны эксперименты, которые были проведены. Каждый эксперимент включает в себя решение всех задач класса при $l = 1, 2, 3$ для вращаемой развёртки и $l = 1, 2, 3, 4$ для сдвиговой.

Таблица 1: Эксперименты, проведённые при минимальном значении r с остановкой по попаданию в окрестность оптимума

Тип развёртки	F_{GR}	gklsS2d	gklsH2d	gklsS3d
вращаемая, $L = 1$	+	+	+	+
вращаемая, $L = 2$	+	+	+	+
вращаемая, $L = 3$	+	+	+	+
сдвиговая, $L = 1$	+	+	+	+
сдвиговая, $L = 2$	+	+	+	+
сдвиговая, $L = 3$	+	+	+	+
сдвиговая, $L = 4$	+	+	-	-

Таблица 2: Эксперименты, проведённые при минимальном значении r с остановкой по точности

Тип развёртки	F_{GR}	gklsS2d	gklsH2d	gklsS3d
вращаемая, $L = 1$	+	+	+	-
вращаемая, $L = 2$	+	+	+	-
вращаемая, $L = 3$	+	+	-	-
сдвиговая, $L = 1$	+	+	+	-
сдвиговая, $L = 2$	+	+	-	-
сдвиговая, $L = 3$	+	+	-	-
сдвиговая, $L = 4$	+	+	-	-

Таблица 3: Эксперименты, проведённые при одинаковом значении r с остановкой по попаданию в окрестность оптимума

Тип развёртки	F_{GR}	gklsS2d	gklsH2d	gklsS3d
вращаемая, $L = 1$	+	+	+	+
вращаемая, $L = 2$	+	+	+	+
вращаемая, $L = 3$	+	+	+	+
сдвиговая, $L = 1$	+	+	+	+
сдвиговая, $L = 2$	+	+	+	+
сдвиговая, $L = 3$	+	+	+	+
сдвиговая, $L = 4$	+	+	-	-

Таблица 4: Эксперименты, проведённые при одинаковом значении r с остановкой по точности

Тип развёртки	F_{GR}	gklsS2d	gklsH2d	gklsS3d
вращаемая, $L = 1$	+	+	+	+
вращаемая, $L = 2$	+	+	+	+
вращаемая, $L = 3$	+	+	-	-
сдвиговая, $L = 1$	+	+	+	+
сдвиговая, $L = 2$	+	+	-	-
сдвиговая, $L = 3$	+	+	-	-
сдвиговая, $L = 4$	+	+	-	-

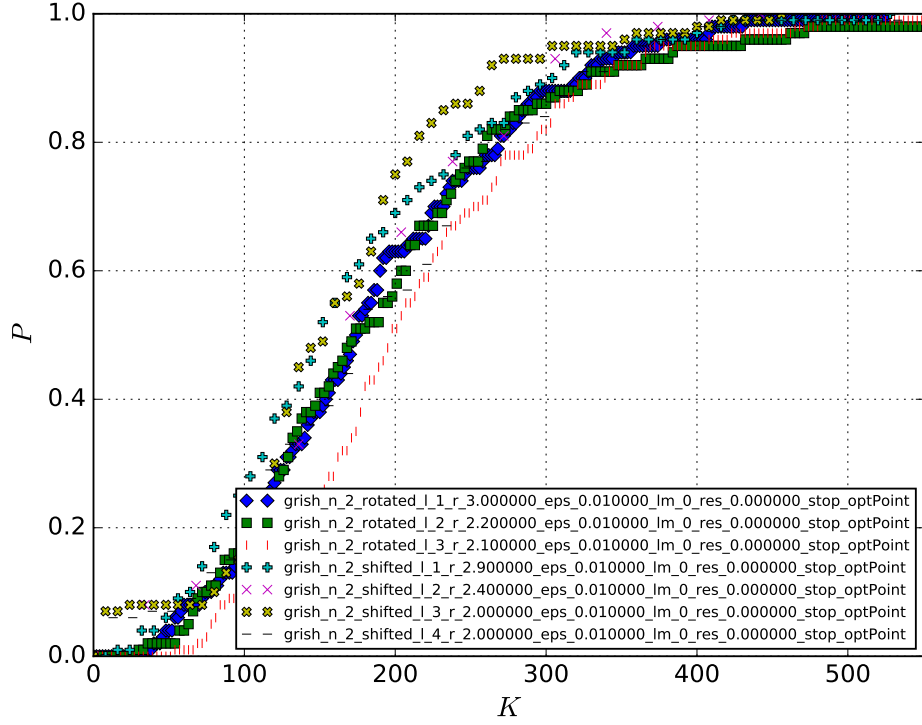


Рис. 1: F_{GR} , остановка по попаданию в окрестность, минимальное значение r

Во всех экспериментах с остановкой по попаданию в окрестность глобального минимума использовалось значение $\varepsilon = 10^{-2}$. При остановке по точности $\varepsilon \in [10^{-3}; 5 \cdot 10^{-3}]$ в зависимости от класса задач. Также в некоторых случаях для ограничения, порождаемого сдвиговой развёрткой, использовалось ε -резервирование величиной 0.05. Для сложных классов был задействован смешанный локально-глобальный алгоритм с параметром смешивания $q = 4$.

2.1 Операционные характеристики

Операционные характеристики были построены практически для всех столбцов таблиц из предыдущего раздела. В случае сдвиговой развёртки наличие дополнительного ограничения не учитывались при построении операционных характеристик. При проведении экспериментов было замечено, что включение ε -резервирования практически не влияет на среднее количество вычислений целевой функции и на вид операционной характеристики.

2.1.1 Класс F_{GR}

Преимущество сдвиговой развёртки над стандартным методом наблюдается только при минимальном значении r , причём в случае остановки по точности, ускорение сходимости более заметно. Ускорения от использования вращаемой развёртки нет.

В случае остановки по попаданию в окрестность, сдвиговая развёртка теряет преимущество, но наблюдается интересный эффект ускорения от её использования при $L = 1$, когда метод работает с одной развёрткой и "нулевым" ограничением.

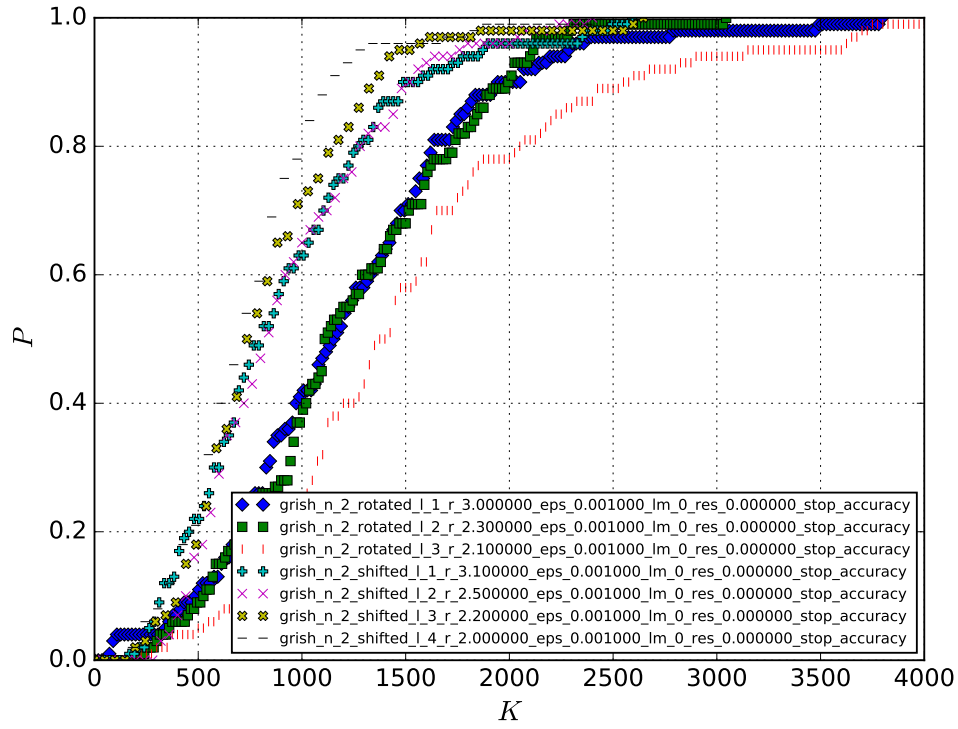


Рис. 2: F_{GR} , остановка по точности, минимальное значение r

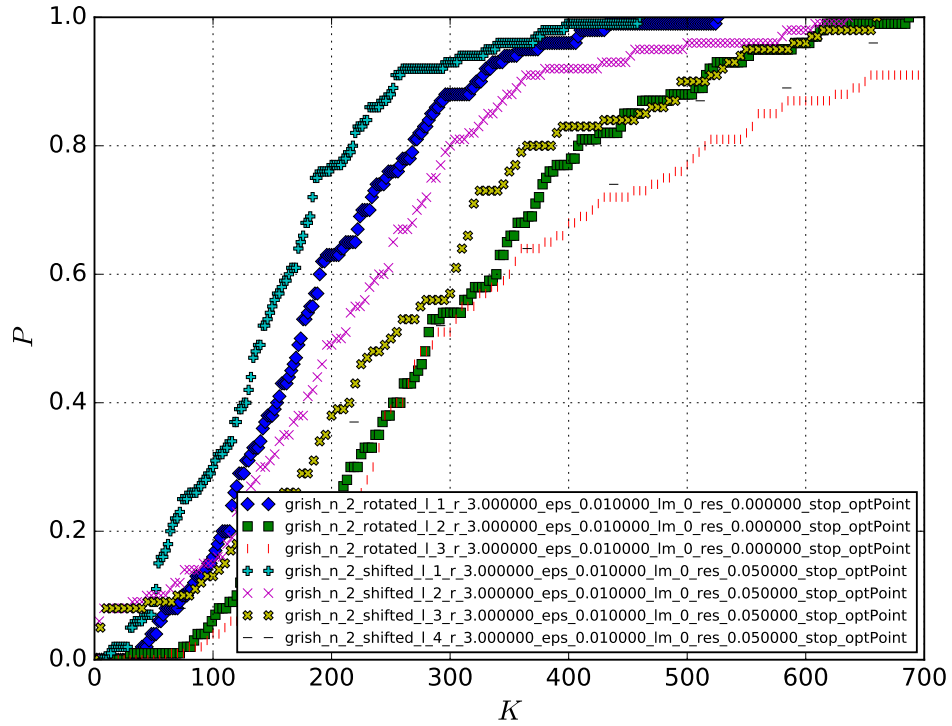


Рис. 3: F_{GR} , остановка по попаданию в окрестность, $r = 3.0$

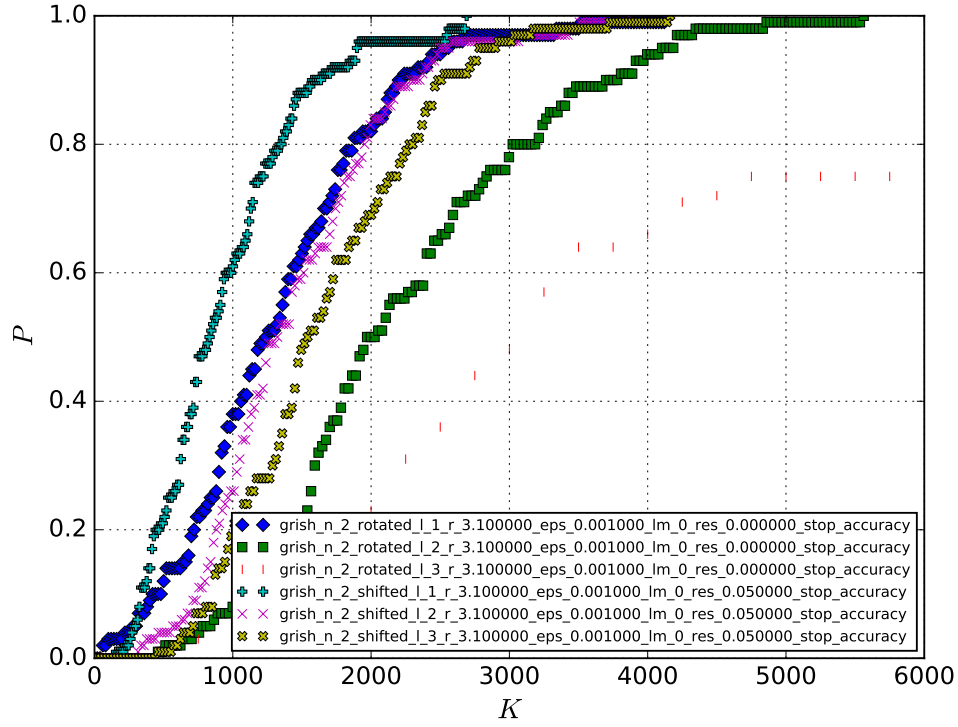


Рис. 4: F_{GR} , остановка по точности, $r = 3.1$

2.1.2 Класс gklsS2d

В случае остановки по попаданию в окрестность оптимума, преимуществ от использования множественных развёрток нет.

При остановке по точности ускорение от сдвиговой развёртки относительно других есть как с минимальным подобранным r , так и при одинаковом значении надёжности для всех экспериментов.

Эффект ускорения при использовании одной сдвиговой развёртки так же проявляется в некоторых экспериментах.

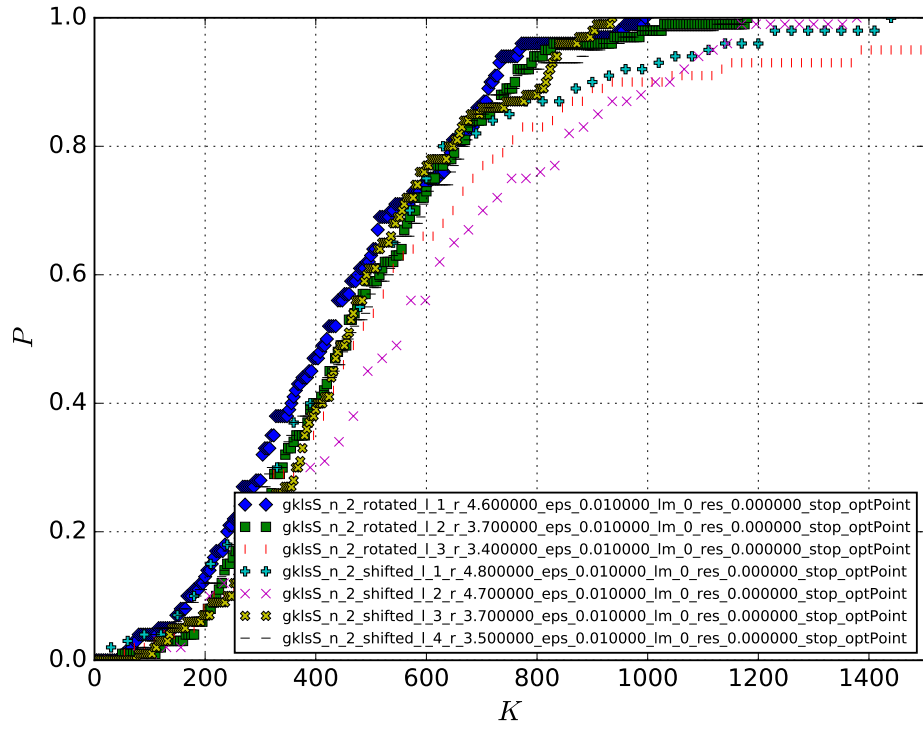


Рис. 5: gklS2d, остановка по попаданию в окрестность, минимальное значение r

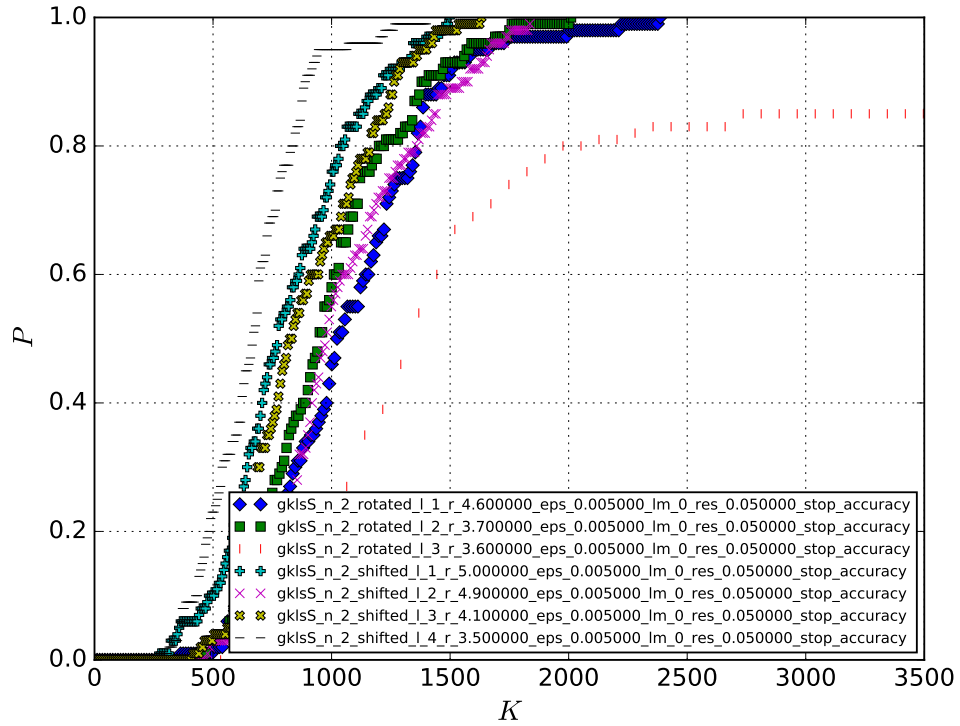


Рис. 6: gklS2d, остановка по точности, минимальное значение r

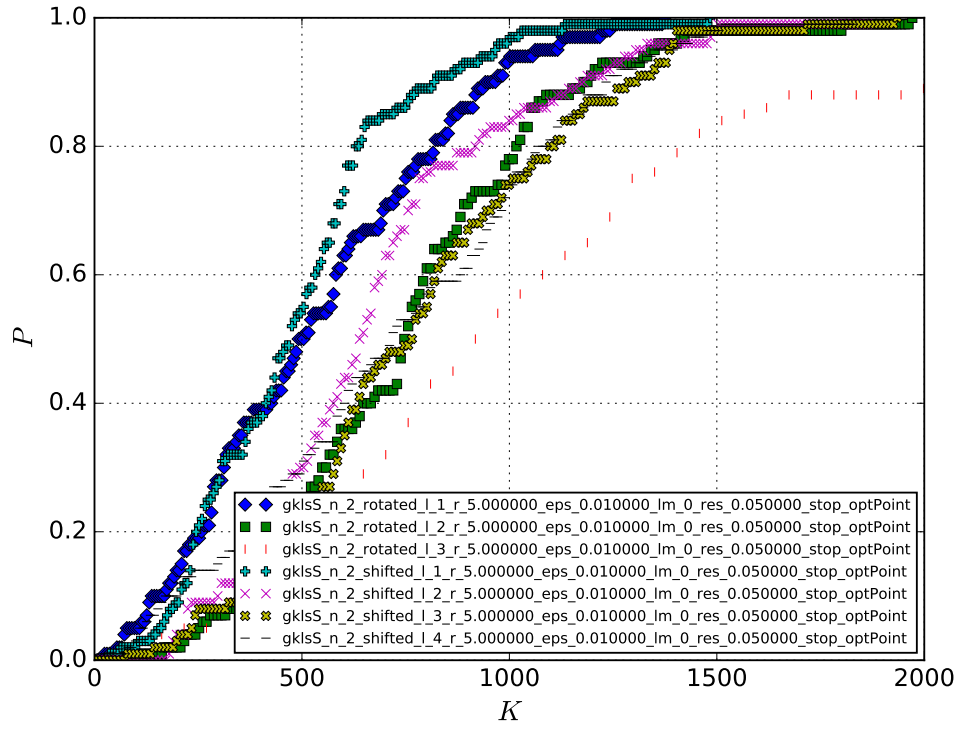


Рис. 7: gklS2d, остановка по попаданию в окрестность, $r = 5.0$

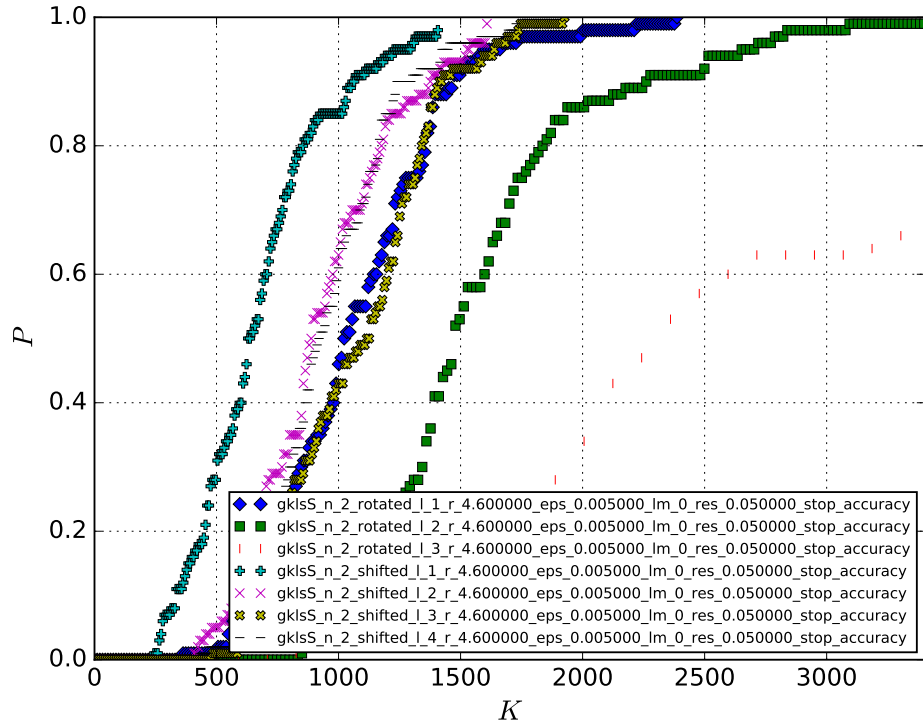


Рис. 8: gklS2d, остановка по точности, $r = 4.6$

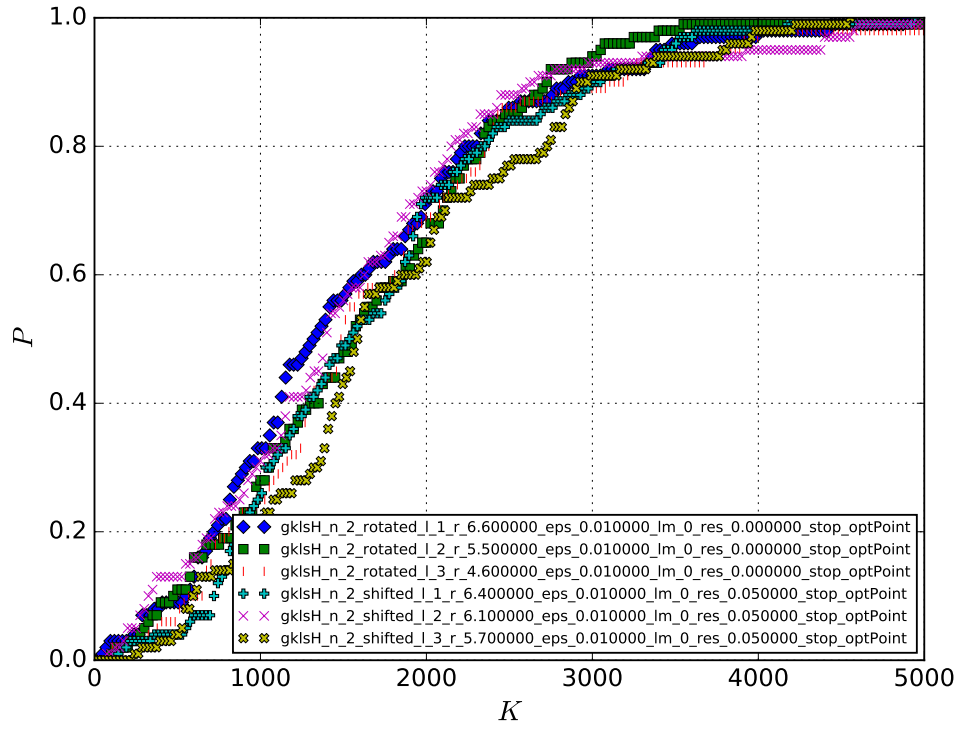


Рис. 9: gklsH2d, остановка по попаданию в окрестность, минимальное значение r

2.1.3 Класс gklsH2d

Для этого класса удалось провести только эксперименты с одинаковым r для всех вариантов метода. Преимуществ от использования множественных развёрток не выявлено.

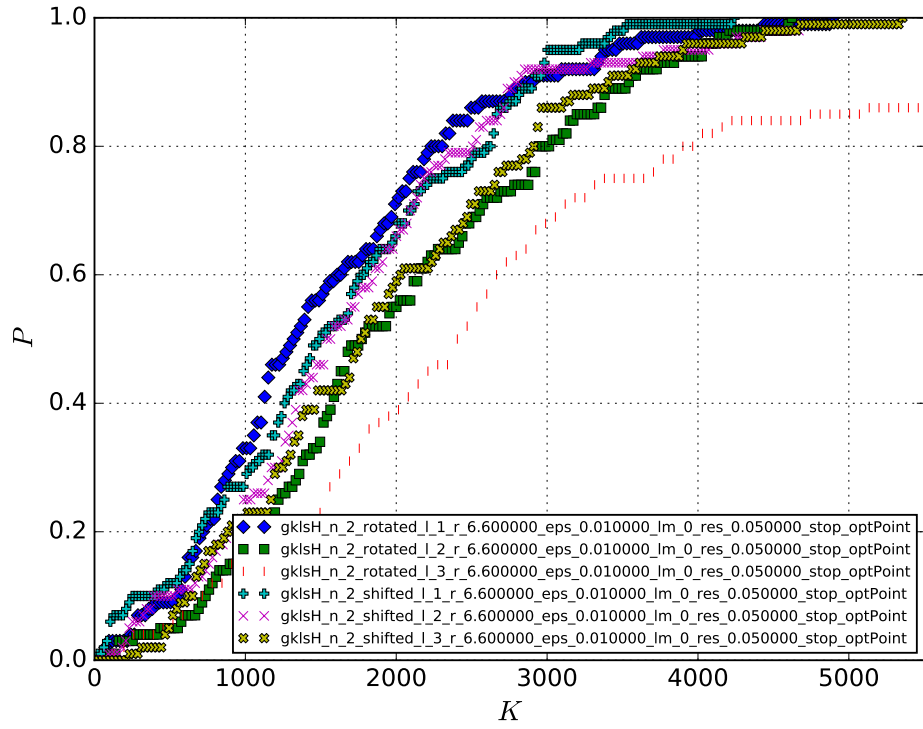


Рис. 10: gklsH2d, остановка по попаданию в окрестность, $r = 6.6$

2.1.4 Класс gklsS3d

Для этого класса удалось провести только эксперименты с одинаковым для всех вариантов метода значением r . При подборе минимального r сдвиговая развёртка демонстрирует преимущество.

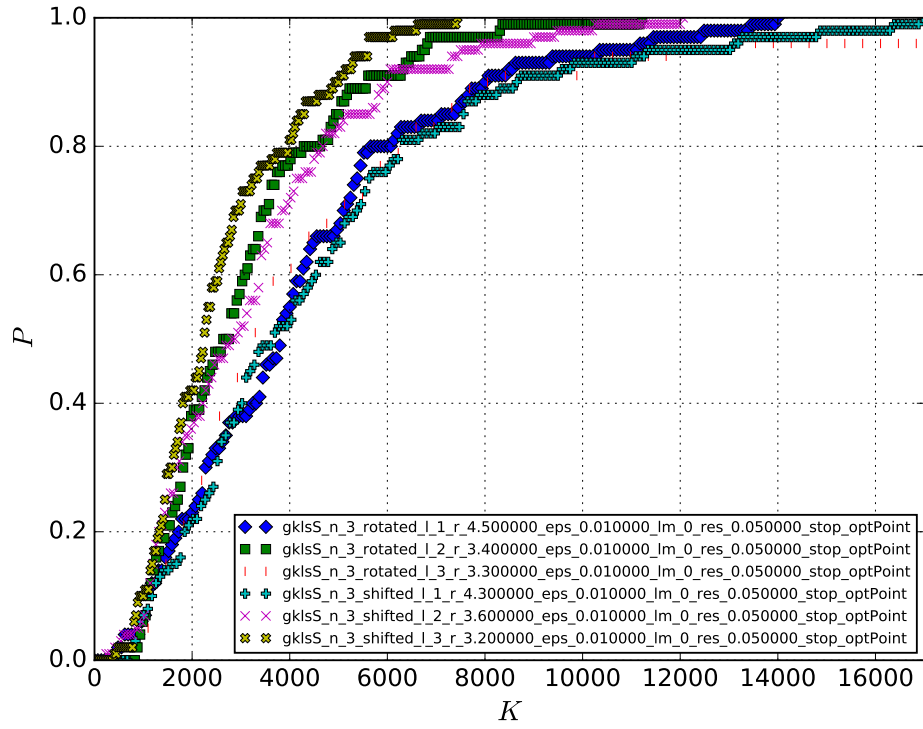


Рис. 11: gklS3d, остановка по попаданию в окрестность, минимальное значение r

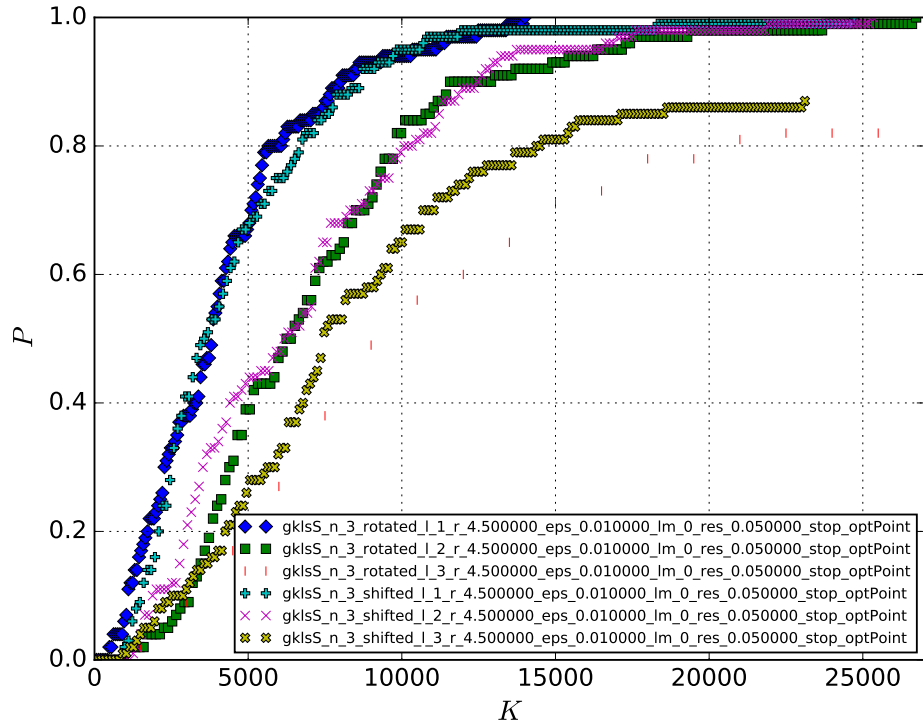


Рис. 12: gklS3d, остановка по попаданию в окрестность, $r = 5.0$

2.2 Среднее количество вычислений целевой функции

В этом разделе приведено среднее значение количества обращений к целевой функции и к дополнительному ограничению в случае вращаемой развёртки для каждого эксперимента. Также в каждом эксперименте вычислены отношение количества обращений к нулевому ограничению к количеству обращений к целевой функции ($\frac{\text{constraint}}{\text{objective}}$ ratio) и ускорение по обращениям к целевой функции от использования сдвиговой развёртки сравнению с методом с одной развёрткой ($\frac{\text{single_objective}}{\text{shifted_objective}}$).

Таблица 5: Класс F_{GR} , остановка по точности, минимальное значение r , $\varepsilon_r = 0$

L	Constraint	Objective (shifted)	$\frac{\text{constraint}}{\text{objective}}$ ratio	Objective (rotated)	$\frac{\text{single_objective}}{\text{shifted_objective}}$ ratio
1	1529.98	941.89	1.64	1216.72	1.29
2	1835.45	928.93	1.97	1215.93	1.31
3	1893.67	840.6	2.25	1532.94	1.45
4	2690.71	737.18	3.65	-	1.65

Таблица 6: Класс F_{GR} , остановка по попаданию в окрестность, минимальное значение r , $\varepsilon_r = 0$

L	Constraint	Objective (shifted)	$\frac{\text{constraint}}{\text{objective}}$ ratio	Objective (rotated)	$\frac{\text{single_objective}}{\text{shifted_objective}}$ ratio
1	356.15	169.52	2.10	189.16	1.12
2	555.52	172.94	3.21	193.65	1.09
3	476.61	162.34	2.93	216.94	1.17
4	931.61	188.43	4.94	-	1.00

Таблица 7: Класс gklsS2d, остановка по точности, $r = 4.6$, $\varepsilon_r = 0.05$

L	Constraint	Objective (shifted)	$\frac{\text{constraint}}{\text{objective}}$ ratio	Objective (rotated)	$\frac{\text{single_objective}}{\text{shifted_objective}}$ ratio
1	1026.79	652.1	1.57	1073.25	1.65
2	2051.62	920.39	2.23	1579.11	1.17
3	2965.2	1081.43	2.74	6124.31	0.99
4	43085.8	952.31	45.24	-	1.13

Таблица 8: Класс gklsS3d, остановка по попаданию в окрестность, минимальное значение r , $\varepsilon_r = 0.05$

L	Constraint	Objective (shifted)	$\frac{\text{constraint}}{\text{objective}}$ ratio	Objective (rotated)	$\frac{\text{single_objective}}{\text{shifted_objective}}$ ratio
1	20570.7	4547.26	4.52	4231.64	0.93
2	42721.7	3249.85	13.15	3048.15	1.30
3	55622.7	2573.00	21.62	5814.08	1.64

Таблица 9: Класс gklsS3d, остановка по попаданию в окрестность, $r = 5.0$, $\varepsilon_r = 0.05$

L	Constraint	Objective (shifted)	$\frac{\text{constraint}}{\text{objective}}$ ratio	Objective (rotated)	$\frac{\text{single_objective}}{\text{shifted_objective}}$ ratio
1	23120.5	4587.49	5.04	4231.64	0.92
2	96247.9	6840.14	14.07	7272.07	0.62
3	153131.0	7702.82	19.88	26050.4	0.55

3 Предварительные выводы

- Вращаемая развёртка в лучшем случае не приносит увеличения количества вычислений целевой функции по сравнению с одной развёрткой, а чаще всего оно увеличивается. Это лучше всего видно в таблицах (столбец Objective (rotated)).
- При использовании сдвиговой развёртки количество обращений к дополнительному ограничению может на порядок превышать количество обращений к целевой функции, а это значит, что объем поисковой информации значительно превосходит таковой при использовании сдвиговых развёрток. Это продемонстрировано в столбце $\frac{\text{constraint}}{\text{objective}}$ ratio таблиц из предыдущего раздела.
- Использование множественных развёрток ведёт к более качественной оценке константы Гёльдера, а значит, можно использовать меньшее значение r , чем для метода с одной развёрткой. Завышение r чаще всего ведёт к более медленной сходимости метода с множественными развёртками, чем метода с одной развёрткой и тем же значением r . Это зависит от задач и критерия остановки.
- Сдвиговая развёртка обеспечивает преимущество над вращаемой при остановке по точности даже без подбора r (но только если задачи достаточно сложные с точки зрения метода). Если работает критерий остановки по попаданию в окрестность оптимума, то ускорения от сдвиговой развёртки обнаружено не было.