Лабораторная работа 6 по курсу «Нелинейная динамика и её приложения». Отчёт.

Владислав Соврасов
381503м4

1 Построение бифуркационной диаграммы логистичеко-го отображения

Отображение $x_{n+1} = (r - x_n)x_n$ называется логистическим. Известно, что при $r \in [0; 3)$ оно имеет единственную устойчивую неподвижную точку, а при $r \in [3; r_\infty), r_\infty < 4$ претерпевает бесконечно монго бифуркаций удвоения периода.

Для построения бифуркационной диаграммы необходимо найти неподвижние точки не только самого отображения, но и его кратных композиций $f \circ f, f \circ f \circ f, \ldots$. При нахождении неподвижных точек устойчвых циклов небольшой длины были с равномерным распределением сгенерированы 120 начальных точек из отрезка $[0; 1]$, для каждой из которых вычислялись 1500 итераций логистического отображения.

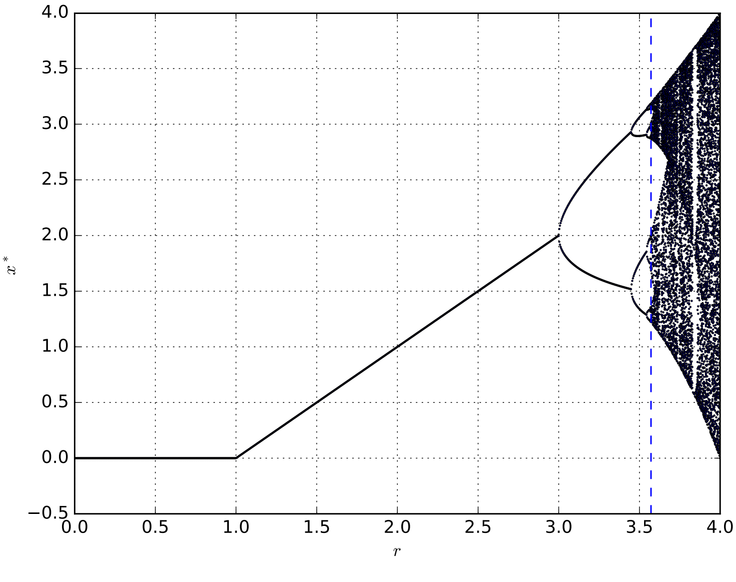

Рис. 1: Бифуркационная диаграмма логистическко отображения

На рис. 1 представлена бифуркационная диаграмма при $r \in [0; 4]$. На диаграмме чётко видны первые три бифуркации удвоения периода. Вертикальной пунктирной линией обозначена оценка границы r_∞, после которой начинается хаос (циклы конечного периода отсутствуют), но существует некоторых аттрактор. При $r > 4$ аттрактор исчезает и продолжать диаграмму нет смысла.

2 Исследование устойчивости логистичекого отображения на аттракторе

Устойчивость какой-либо траектории отображения характеризуется Ляпуновским показателем

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln |f'(x_k)|$$

Этот показатель зависит от начальной точки. Взяв достаточно много начальных точек, можно рассматривать усреднённый показатель, который будет характеризовать устойчивость траекторий аттрактора. Если параметр $r \in [3; r_\infty)$, то средний показатель должен быть неположительным, поскольку все траектории сходятся к неподвижной точке какоголибо цикла, а значит устойчивы. На рис. 2 показан график зависимости средней по траекториям численной оценки λ от параметра r. Видно, что в моменты бифуркаций график подходит к 0, поскольку ассимптотическая устойчивость неподвижных точек кратных отображений теряется. Также можно заметить, что при r, близких к 4, наблюдаются положительные значения оценки средней Ляпуновской величины, что говорит о наличии хаоса.

В качестве грубой оценки положения точки r_∞ можно рассматривать первое, найденное при построении графика значение r, для которого средняя оценка Ляпуновской величины положительна. Указанным способом было получено, что $r_\infty \approx 3.57$.

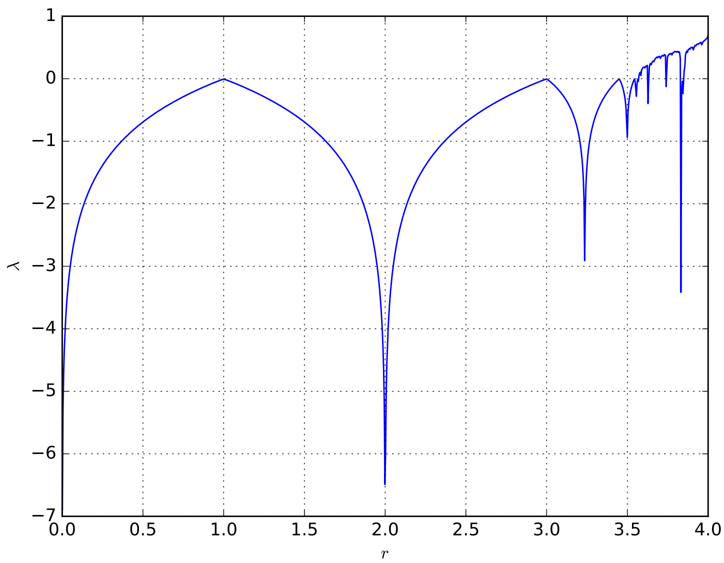

Рис. 2: Зависимость среднего показателя Ляпунова от параметра отображения

3 Исходный код

```python
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

from lab1 import deleteSimilar

def computeImage(x_0, r, n):
    x = x_0
    lyapunov_characteristic = 0.
    for i in range(n):
        x = (r - x)*x
        logFx = np.log(abs(r - 2.*x))
        lyapunov_characteristic += logFx
    return x, lyapunov_characteristic / n

def filterArray(array, eps):
    filteredArray = array
    for i in range(len(array) / 2 + 1):
        filteredArray = deleteSimilar(filteredArray, array[i], eps)
        filteredArray.append(array[i])
    return filteredArray

def main():

    np.random.seed(100)
    nIterations = 1500
    nImpls = 120
    rValues = np.linspace(1e-3, 4, 1000)
    xStartValues = np.random.rand(nImpls)
    lConsts = np.zeros((len(rValues), 1))

    xFinishPoints = np.zeros((len(rValues), nImpls))
    for j in range(nImpls):
        for i, r in enumerate(rValues):
            xFinal, characteristic = computeImage(xStartValues[j], r, nIterations)
            xFinishPoints[i][j] = xFinal
            lConsts[i] += characteristic

    lConsts /= nImpls
    rChaos = rValues[np.argmax(lConsts >= 0.)]
    print('Edge of the chaos: r = {}'.format(rChaos))

    plt.xlabel('$r$')
    plt.ylabel('$x^*$')
    plt.ylim([-.5, np.amax(xFinishPoints)])
```

```

    for i, r in enumerate(rValues):
        valuesToPlot = np.array(filterArray(xFinishPoints[i], 1e-2))
        plt.plot([r], valuesToPlot.reshape((1, len(valuesToPlot))), \
            'b o', markersize = 1)

    plt.axvline(x=rChaos, color='b', linestyle='--')
    plt.grid()
    plt.savefig('../pictures/lab6_bifurcation_diagram.pdf', format = 'pdf')
    plt.clf()

    plt.xlabel('$r$')
    plt.ylabel(r'$\lambda$')
    plt.plot(rValues, lConsts, 'b-')
    plt.grid()
    plt.savefig('../pictures/lab6_lyapunov_characteristic.pdf', format = 'pdf')

if __name__ == '__main__':
    main()
```