# Лекция №7

**Опр** Случайная ф-ция времени – случ. процесс. Случайная ф-ция – случайное поле.

**Замечание** $\forall$ векторное пр-во $V$ над $\mathbb{R}$ линейно изоморфно пр-ву вещественной ф-ции (линейный $\equiv$ алгебраический $\equiv$ гамелев базис)

$$V \ni \bar{v} \mapsto \sum_{b\in B} c_b \bar{b} \qquad ZF \mid ZFC \text{ – аксиома выбора}$$

$\forall \bar{v}$ $\{b\in B : c_b \neq 0\}$ конечно

$$\bar{F} \in V^X \to (\mathbb{R}^B)^X \leftrightarrow \mathbb{R}^{B\times X} \qquad X \text{ – мн-во приборов}$$

| | 1 2 … N |
|---|---|
| $\mathbb{R}^X$ | $f_1\, f_2 \ldots f_N$ |

элементарная реализация эксперимента

$$\mu_N : \mathcal{P}(N) \to [0;1] \qquad \mu_N(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{N = \operatorname{Card} N}$$

$$N \to \mathbb{R}^X$$

$x$ – весь эксперимент $\quad x \in (\mathbb{R}^X)^N \rightleftarrows \mathbb{R}^{X\times N}$

$\mu_N \circ \overset{(-1)}{x}$ – мера распределения

**Опр** Мера распределения случайного $\mathbb{R}^X$ поля – вероятностная мера на подходящей алгебре подмн-в в пр-ве $\mathbb{R}^X$.

$$N \xrightarrow{x} \mathbb{R}^X \xrightarrow{\Gamma_x} \mathbb{R}^x$$

$$x(\mu_N) \circ \overset{(-1)}{\Gamma_x} = \mu_N (\Gamma_x \circ X)^{(-1)} = (\Gamma_{x_0} \circ X)(\mu_N)$$

**Опр** Ансамбль $\overset{\text{def}}{=}$ мн-во элементарных реализаций

$$x_N(\mu_N) \xrightarrow[N\to\infty]{} \text{идеальная (абстрактная) мера на } \mathbb{R}^X$$

## Модель меры распределения одномерного броуновского движения

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall (t_0, t_1, \ldots, t_n): 0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ $\forall [\alpha_0;\beta_0) \times \ldots \times [\alpha_n;\beta_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$(*) \quad \underset{\text{цилиндр}}{W\{f \in \mathbb{R}^{[0;+\infty)} \mid \forall j \in n+1 \ \ f(t_j) \in [\alpha_j;\beta_j)\}} = \mathbb{1}_{[\alpha_0;\beta_0)}(0) \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dx_1\, p_{t_1-t_0}(x_1 - x_0) \cdot \quad \boxed{x_0 = 0}$$

$$\cdot \int_{\alpha_2}^{\beta_2} dx_2\, p_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \int_{\alpha_3}^{\beta_3} \ldots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} dx_n\, p_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})$$

$$F_{x_w}(x) = F_{W\circ \overset{(-1)}{\Gamma}_{\{1\}}}(x) = (\Gamma_{\{1\}}(W))(-\infty;x)_{\mathbb{R}} = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx} \text{ – Мера Винера}$$

$$F_{\overrightarrow{x_w(t_1), x_w(t_2) \ldots x_w(t_n)}}(x_1, \ldots, x_n) = \left(W \circ \overset{(-1)}{\Gamma}_{\{t_1 \ldots t_n\}}\right)\left(\prod_{k=1}^n (-\infty; x_k)\right) =$$

$$= \left(W \circ \overset{(-1)}{\Gamma}_{\{0\le t_0 < t_1 \ldots < t_n\}}\right)\left(\mathbb{R} \times \prod_{k=1}^n (-\infty; x_k)\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} \underbrace{\left(\prod_{k=1}^n p_{t_k - t_{k-1}}(x_k - x_{k-1})\right)}_{\text{плотность } n\text{-мерного совместного распределения } (x_w(t_1) \ldots x_w(t_n))} dx_1 \ldots dx_n$$

**Теорема.** $\sigma$-кольцо подмножеств в $\mathbb{R}^{[0;\infty)}$, порождённое всеми цилиндрами вида $W\{f \in \mathbb{R}^{[0;+\infty)} \mid \forall j \in n+1 \ \ f(t_j) \in [\alpha_j; \beta_j)\}$, является борелевской $\sigma$-алгеброй топологии поточечной сходимости, т.е. топологии на $\mathbb{R}^{[0;+\infty)}$ с базисными окрестностями функций

$$U_{n,\, t_0=0<t_1<\ldots<t_n,\, \varepsilon}(f) = \left\{ g \in \mathbb{R}^{[0;+\infty)} \,\middle|\, \forall j \in n+1 \to |g(t_j) - f(t_j)| < \varepsilon \right\}$$

$n \in \mathbb{N}$

$\varepsilon > 0$

$t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n$

$\circ$ $w \in \Omega$ $\qquad$ $\sigma$-кольцо – $A \setminus B$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$

$\left(\mathbb{R}^{[0;\infty)}, \Sigma_{pw}, W\right)$ – колмогоровское вероятностное пр-во

$(X_w(t))(w) = w(t)$ – случайные величины $\boxtimes$

$\Omega = \mathcal{F} = \mathbb{R}^X$ $(\Omega)$

$\mathbb{R}^X \ni \omega$

<u>Теорема (Колмогорова)</u>

Предположим, что 1) $\mathbb{P}$ определена на $C_{\mathbb{R}^X} = \{C_{n,x_0,\dots,x_{n-1},B}\} \equiv$

$\equiv \left\{ \{f : X \to \mathbb{R} \,|:\, \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \dots \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix} \in B\} \,|:\, n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in X^n, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \right\}$

$C_{\mathbb{R}^X}$ – алгебра (борелевская) цилиндров в $\mathbb{R}^X$ или цил. алгебра

2) $\mathbb{P}(\mathbb{R}^X) = 1$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall (x_0,\dots,x_{n-1}) \in X^n$ мера $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \ni B \mapsto \mathbb{P}(C_{n,x_0,\dots,x_n,B})$ σ аддитивна неотрицательна (вероятностная борелевская мера на $\mathbb{R}$)

Тогда $\mathbb{P}$ счетн.адд. на $C_{\mathbb{R}^X}$.

<u>Следствие 1</u> $\mathbb{P}$ с сохранением σ-адд. единственным образом может быть продолжена на $\sigma_{\mathbb{R}^X}(C_{\mathbb{R}^X})$

<u>Следствие 2</u> $(\mathbb{R}^X, \sigma_{\mathbb{R}^X}(C_{\mathbb{R}^X}), \mathbb{P})$ явл-ся колмогоровской моделью пр-ва элементарных событий для поля $\xi(x,\omega) \overset{(2)}{=} \omega(x)$ мера конечномерных распределений кот-ых задана формулой $\mu_{\xi(x_0),\dots,\xi(x_{n-1})}(B) = \mathbb{P}(C_{n,x_0,\dots,x_{n-1},B})$

$$\delta_{\{\bar{a}\}}^{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}(B) = \mathbb{1}_{B \in \mathbb{R}^d}(\bar{a}) = \begin{cases} 1, & \bar{a} \in B \\ 0, & \bar{a} \in \mathbb{R}^d \setminus B \end{cases}$$

<u>Теорема</u> $\forall d \in \mathbb{N}$ (dimension) $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k \in n} \delta_{\bar{a}_k}^{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} \,|:\, n \in \mathbb{N}, (\bar{a}_0,\dots,\bar{a}_{n-1}) \in (\mathbb{R}^d)^n \right\}$ плотно в пр-ве всех $M_d$ вероятностных σ-адд. мер $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0;1]_{\mathbb{R}}$ отн. "стандартной слабой топологии в $M_d$", базисными окрестностями мер $\nu \in M_d$ в которой служат:

$$U_{m,f_0,\dots,f_{m-1},\varepsilon}(\nu) = \left\{ \mu \in M_d \,|:\, \forall j \in m \hookrightarrow \left| \int_{\mathbb{R}^d} f_j(\bar{x})\nu(d\bar{x}) - \int_{\mathbb{R}^d} f_j(\bar{x})\mu(d\bar{x}) \right| < \varepsilon \right\},$$

где $m \in \mathbb{N}$, $\forall j \in m \hookrightarrow f_j \in BC(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R})$.

$$\underbrace{(\mathbb{R}^X, \sigma_{\mathbb{R}^X}(C_{\mathbb{R}^X}), \mathbb{P})}$$

«Измеримое стандартное пр-во» $\mathbb{R}^X$ σ-адд. со значениями $[0,1]$

можно рассматривать в $\mathbb{R}^X$ только такие именные подпр-ва

$\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^X$, что отобр-е $\{C_{\mathbb{R}^X} \ni C \mapsto C \cap \mathcal{F}\}$ инъективно, тогда $\{C \cap \mathcal{F} \,|:\, C \in C_{\mathbb{R}^X}\} = C_{\mathcal{F}}$ становится областью определения меры $\boxed{\mathbb{P}|_{\mathcal{F}} : C_{\mathcal{F}} \ni C \cap \mathcal{F} \mapsto \mathbb{P}(C)}$