Лекция №1

Множества

$M' \overset{def}{=} M \cup \{M\}$

Аксиома бесконечности (A.I.)

$\exists x (\varnothing \in x \ \& (\forall y: (y \in x \to y' \in x))$

Опр-я теории мн-в:

$x \subset y \overset{def}{=} \forall z (z \in X \to z \in y)$

$x = y \overset{def}{=} (x \subset y \subset x)$

$x \cap y \overset{def}{=} \{z \mid z \in x \ \& \ z \in y\}$

$\varnothing \overset{def}{=} \{x \mid \neg(x = x)\}$

Аксиома регулярности (A. R.)

$\forall (x \neq \varnothing \to \exists y (y \cap x = \varnothing))$

$0 = \varnothing$

$1 = \{\varnothing\}$

$2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

Теорема $x \notin x$

□

От противного: $\exists x \in x$. $X = \{x\}$

По A.R. $\begin{cases} y \cap X = \varnothing \\ y = x \ni X \end{cases} \Rightarrow$ противоречие ⊠

Упорядоченные пары

$\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{2\} \cup \{1\}$ - не упорядоченное

$\forall a, b \quad \{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$

Мн-во всех мн-в $x \overset{def}{=} \{x \mid x = x\}$ - противоречит аксиоме регуляр

Опр. $(a, b) \overset{def}{=} \{\{a, b\}, \{b\}\}$

Теорема $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow ((a = c) \& (b = d))$

Следствие $(a, b) \neq (b, a)$

Опр. (объединение/пересечение мн-в)

$z \in (\cup x) \overset{def}{=} \exists M (M \in x \ \& \ z \in M)$

$\cup \varnothing = \varnothing$

$\cap x \neq 0$ (иначе мн-во всех мн-в)

$z \in (\cap x) \overset{def}{=} \forall M (M \in x \Rightarrow z \in M)$

Опр. (декартово произведение)

$M_1 \times \ldots M_n \overset{def}{=} \{(((x_1, x_2), x_3) \ldots x_n) \mid x_1 \in M_1, \ldots x_n \in M_n\}$

1	...	n
x	...	x_n

Опр. (индекс семейств мн-в)

$(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ - ф-ция $\alpha \to M_\alpha$

$\prod_{\alpha \in A} M_\alpha \overset{def}{=} \{f : A \to \cup M_\alpha \mid \forall \alpha \in A \to f(\alpha) \in M_\alpha\}$

$(z \in \cup M_\alpha \Leftrightarrow \exists \alpha \in A : z \in M_\alpha)$

$\prod x \overset{def}{=} \prod_{y \in x} y = \{f : x \to \cup x \mid \forall y \in x \to f(y) \in y\}$

Аксиома выбора (AC)

$\forall x \neq \emptyset \quad ((\forall y \in x, y \neq \emptyset) \Rightarrow \prod x = \emptyset)$

Опр (канонические натуральные числа)

кан. нат. числа $\overset{def}{=}$ эл-ты $\omega_0 = \bigcup \omega_0$:

(AI $\Rightarrow$ берём M: $\begin{cases} 0 \in M \\ \forall x \in M \hookrightarrow x' \in M \end{cases}$

$\omega_0 = \bigcap \{ N \subset M \mid \emptyset \in N \ \&\ (\forall x \in N \hookrightarrow x' \in N) \}$

$N_0 = N \cup \{0\}$

Аксиоматизация частично упорядоч. мн-ва

Опр. бинарное отн-е R

$R \subset A \times B$ — R на $A \overset{def}{=} R \subset A \times A$

Опр. система подмн-в

$P(M) \overset{def}{=} \{ A \mid A \subset M \}$

$|P(M)| = 2^{|M|}$ — мощность

Опр. индикаторная ф-ция подмн-ва B в мн-ве M

$1_{B \subset M} \overset{def}{=} M \to \{0;1\} : \forall x \in M \quad 1_{B\subset M}(x) = \begin{cases} 1, x \in B \\ 0, x \in M \setminus B \end{cases}$

$2^M \overset{def}{=}$ мн-во индикаторных ф-ций

Обозначение: $(a,b) \in R \to aRb$

$\subseteq_{P(M)} \overset{def}{=} \{ (B_1, B_2) \mid B_1 \subset B_2 \subset M \}$

отношение

Опр. частичный порядок

$\exists R$ — бинарное отн-е на A

R — частичный порядок $\overset{def}{=}$

1) Рефлексивно $\forall a \in A \hookrightarrow aRa$

2) Антисимм. $\forall (a,b) \in A \times A \ (aRb \ \&\ bRa) \Rightarrow a = b$

3) Транзитивно $\forall (a,b,c) \in A^3 \ (aRb \ \&\ bRc) \Rightarrow aRc$

Опр. точное копирование

$\exists A_1$ — частично упорядоченное мн-во с порядком R_1

$\exists A_2$ — ЧУМ с порядком R_2

Изоморфизм между A_1 и A_2 $\overset{def}{=}$

$\exists \varphi : A_1 \xrightarrow{\text{на}} A_2 : \forall (a_1, b_1) \in A_1 \times A_1 \ (a_1 R_1 b_1 \Leftrightarrow \varphi(a_1) R_2 \varphi(b_1))$

(сюръекция)

Опр. луч с вершиной a

$\{ b \in A \mid aRb \} \overset{def}{=} L_{aR\circ}$ — правый луч

$\{ b \in A \mid bRa \} \overset{def}{=} L_{\circ Ra}$ — левый луч

Опр. $\exists R$ — частичный порядок на A

R — вполне упорядоченный (ординал) $\overset{def}{=} \forall X \in P(A) \setminus \{\emptyset\}$ $\exists$ общая миноранта (наименьший эл-т)

$x_R \in X$ для всех эл-тов X

Опр.

$\exists A$ — мн-во с вполне упорядоченным R

Начальный отрезок $\overset{def}{=} \forall$ подмн-во B: $b_1 \in B$, $b_0 \in A$, $b_0 R b_1 \Rightarrow b_0 \in B$

(вполне упорядочено => линейный порядок)

Теор (ЭТФФА Колмогоров, Фомин)
$\forall$ двух вполне упорядоченных (A_1, R_1), (A_2, R_2) верно одно из:
1) они изоморфны
2) (A_1, R_1) строго изоморфно начальному отрезку

Опр упорядоченное подмн-во
$\exists A$ – ЧУМ с порядком R
Упорядоченное подмн-во $\stackrel{def}{=}$ $\forall$ подмн-во $A_0 \subset A_1$, кот-ое частично
упорядочено с порядком $R_0 = R \wedge (A_0 \times A_0)$
(аналог подпространства)

Теор. AC $\Leftrightarrow$ на $\forall$ мн-ве A существует вполне упорядоченное м
(любое мн-во можно вполне упорядочить)

Теор $\forall A$ $\exists$ вполне упорядоч. мн-во канонических ординалов,
кот-ое 1) изоморфно нек-ым вполне упорядоченным на A
2) является каноническим ординалом

Опр (кардинал, представитель мощности)
Кардиналы $\stackrel{def}{=}$ первые из мн-ва первых равномощных
канонических ординалов