Лекция №9

$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{t}}$ $x_0=0$ // $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}) \ni \omega$ – канонич. тройка

$\xi_t^{Br}(\omega) = \omega(t)$

$\mathbb{P} = W: \underbrace{\sigma(\mathcal{C}\,\mathbb{R}^{[0;\infty)})}_{\mathfrak{F}} \to [0;1]$

$W\{f:[0;\infty)\to\mathbb{R} \mid f(0=t_0)\in(\alpha_0,\beta_0), f(t_1)\in(\alpha_1,\beta_1) \dots f(t_{n-1})\in(\alpha_{n-1},\beta_{n-1})\} =$

$= I_{(\alpha_0,\beta_0)}(0)\int_{\alpha_1}^{\beta_1} p_{t_1-t_0}(x_1-x_0)\int_{\alpha_2}^{\beta_2} p_{t_2-t_1}(x_2-x_1)\dots\int_{\alpha_{n-1}}^{\beta_{n-1}} p_{t_{n-1}-t_{n-2}}\,dx_1\dots dx_{n-1} \ominus$

$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}=W)$

броуновское броуновское дискретное

Процесс $\{T=\{0,1,2\dots\}\ni t \mapsto \xi_t^{Br}\} = \xi_t^{Br,discr}$

$\mathbb{P}_{\xi_0^{Br,discr}, \xi_1^{-''-}\dots\xi_{n-1}^{-''-}}(B_0\times B_1\dots\times B_{n-1})$

$(\forall B_j\in\mathcal{B}(\mathbb{R}), j\in\overline{0..n-1}, n\in\mathbb{N})$

$\mathbb{P}\{\omega\in\Omega \mid \&_{j=n}(\xi_j(\omega)\in B_j)\} = W\{f:[0;\infty)\to\mathbb{R} \mid \&_{j<n}(f(j)\in B_j)\}$

$\ominus\ \delta_0(B_0)\iint_{B_1\times\dots\times B_{n-1}}\prod p_1(x_j-x_{j-1})dx_1\dots dx_{n-1}$

Опр Случайное поле $(\xi_t)_{t\in T}$ называется полем с независимыми значениями :=
:= $\forall \mathfrak{t}\in\mathcal{P}_{fin}(T)\setminus\{\emptyset\} \hookrightarrow \{\xi_t : t\in\mathfrak{t}\}$ – независимо в совокупности

А есть ли такое бесконечное мн-во? (в теорвере было конечное)

Независим в совокупности отн. данного распределения $\iff$

$\iff \mathbb{P}_{\mathfrak{t}} = \bigotimes_{t\in\mathfrak{t}}\mathbb{P}_{\{t\}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathfrak{t}}) \to [0;1]$ $\forall (B_{t_0},\dots,B_{t_{n-1}})\in\mathcal{B}(\mathbb{R})^n$

тензорное

продукт. мера

$\mathbb{P}_{\mathfrak{t}}(\{\omega \mid \xi_{\mathfrak{t}}(\omega)\in\prod_{t\in\mathfrak{t}} B_t\}) = \prod_{t\in\mathfrak{t}}\mathbb{P}_{\xi_t}(B)$

декартово тензорное

$\forall \mathfrak{s}\neq\emptyset, \mathfrak{s}\subset\mathfrak{t}\in\mathcal{P}_{fin}(T)$ $\mathbb{P}_{\mathfrak{s}} \overset{?}{=} \underline{\mathbb{P}_{\mathfrak{t}}\circ(\Lambda_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{t}})^{\ominus}}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathfrak{s}}) \to [0;1]$

$\sigma(\prod_{t\in\mathfrak{s}} B_t \mid \&_{t\in\mathfrak{s}} B_t\in\mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$\prod_{t\in\mathfrak{s}} B_t \to \mathbb{P}_{\mathfrak{t}}\{\bar{x}:\mathfrak{t}\to\mathbb{R} \mid \bar{x}|_{\mathfrak{s}}\in\prod_{t\in\mathfrak{s}} B_t\} =$

$= \mathbb{P}_{\mathfrak{t}}\{\bar{x}:\mathfrak{t}\to\mathbb{R} \mid \&_{t\in\mathfrak{s}}\ \bar{x}(t)\in B_t\} =$

$= \mathbb{P}_{\mathfrak{t}}\{\bar{x}:\mathfrak{t}\to\mathbb{R} \mid \&_{t\in\mathfrak{t}}\ \bar{x}(t)\in B_t\} =$

$= \prod_{t\in\mathfrak{t}}\mathbb{P}_t(B_t) = \prod_{t\in\mathfrak{s}}\mathbb{P}_t(B_t)$

т.к. $t\in\mathfrak{t}\setminus\mathfrak{s} \hookrightarrow B_t=\Omega, \mathbb{P}(\Omega)=1$

„Дискретный белый шум" на $\mathbb{N}=T$ – процесс с независимыми значениями, кот-ые распределены с плотностью p_1

$N = (N_t)_{t\in\mathbb{N}}$ – обозначение процесса ДБШ

$\forall t\in\mathbb{N} \hookrightarrow \xi_t^{Brdiscr} \overset{?}{=} \sum_{j=1}^{t} N_j$

$\mathbb{P}^{Br\,discr}_{0,1,\dots,n-1} \overset{?}{=} \mathbb{P}^{\Sigma N}_{0,1\dots n-1} : \prod_{j=0}^{n-1} B_j \mapsto \mathbb{P}^N\{0\in B_0, N_1\in B_1, N_1+N_2\in B_2\dots, N_1+\dots+N_{n-1}\in B_{n-1}\} = \circledcirc$

$\parallel$

$1_{B_0}(0)\int_{B_1}\dots\int_{B_{n-1}}\prod_{j=1}^{n-1} p_1(x_j-x_{j-1})dx_1\dots dx_{n-1}$

$(\circledcirc = 1_{B_0}(0)\,\mathbb{P}^N(N_1\in B_1,\dots, N_1+\dots+N_{n-1}\in B_{n-1}\}$

одно и то же $\Rightarrow \int_{B_1}\dots\int_{B_n}\prod_{j}^{n-1} p_1(x_j-x_{j-1})dx_1\dots dx_{n-1} \overset{?}{=} \mathbb{P}^N(N_1\in B_1,\dots)$ (1)

$\mathbb{P}^N(N_1\in B_1,\dots N_1+\dots+N_{n-1}\in B_{n-1}) = \circledcirc$

$\mathbb{R}^{n-1}\ni\begin{bmatrix}x_1\\ \dots\\ x_{n-1}\end{bmatrix} \overset{L}{\mapsto} \begin{bmatrix}x_1\\ \dots\\ x_1+x_2+\dots+x_{n-1}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n-1}$

$\begin{bmatrix}y_1\\ \dots\\ y_{n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & & 0\\ 1 & 1 & \\ 1 & \dots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ \dots\\ x_{n-1}\end{bmatrix}$

линейное преобр-е

$|\dots| = 1$ $x_j = y_j - y_{j-1}$

$$\otimes = \mathbb{P}^N \left\{ w \in \Omega_N \,\middle|\, \begin{bmatrix} N_1(w) \\ \cdots \\ N_{n-1}(w) \end{bmatrix} \in L^{-1}\left(\bigwedge_{j=1}^{n-1} B_j\right) \right\} = \mathbb{P}^N_{1\ldots n-1}\left[L^{-1} \bigwedge_{j=1}^{n-1} B_j \right] =$$

$$= \underbrace{\int_{L^{-1}\left(\bigwedge_{j=1}^{n-1} B_j\right)} \!\!\cdots\! \int p_1(x_1)\, p_1(x_2) \ldots p_1(x_{n-1})\, dx_1 \ldots dx_{n-1}}_{\int_{-\shortparallel-} \left(\bigotimes_{j=1}^{n-1} p_1\right) Leb \text{ без переменных } \bar{y} = L(\bar{x}) \quad x \in L^{-1}\left(\bigwedge_{j=1}^{n-1} B_j\right)} =$$

$$= \int_{\bigwedge_{j=1}^{n} B_j} \!\!\cdots\! \int p_1(y_1 - y_0) \ldots p_1(y_{n-1} - y_{n-2})\, J\, dy_1 \ldots dy_{n-1} \quad (2)$$

(1) ≡ (2) ⇒ процессы одинаковы по конечномерному распр-ю

(причём параметрические мн-ва - время - одинаковы ⇒) эквивалентные процессы

Обобщаем. Марковские процессы с переходными плотностями

(Броуновское дв-е - частный случай)

Всего 2 случая: 1) непр. время 2) дискретное время

Опр (в узком смысле) $\exists B$ — банахово (полное, нормированное), сепарабельное, вещественное векторное пр-во.

Переходная мера (ф-ция вероятн.) в $B :=$ ∀ отобр-е $P: B \times \mathcal{B}(B) \mapsto [0;1]$

1) $\forall \bar{x} \in B \quad \mathcal{B}(B) \ni A \mapsto p(\bar{x}, A)$ — это отобр-е есть вероятностная мера (σ-адд.)

2) $\forall A \in \mathcal{B}(B)$, $B \ni \bar{x} \mapsto p(\bar{x}, A)$ — измерима отн. $(\mathcal{B}(B), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Опр Для $\varnothing \neq T \subset [0; +\infty)$ $0 \in T$

$\exists$: $\forall (t_1, t_2) \in T \times T$, $t_1 < t_2$ заданы переходные меры:

$p_{t_1,t_2}: B \times \mathcal{B}(B)$, $\forall\, t_1, t_2, t_3 \in T \times T \times T: t_1 < t_2 < t_3 \hookrightarrow p_{t_1,t_2}(\bar{x}, A) =$

$= \int p_{t_1,t_2}(\bar{x}, dy)\, p_{t_1,t_2}(\bar{y}, A)$

$\exists\, \mathbb{P}_0$ — вероятн. мера σ-адд. на $\mathcal{B}(B)$

Тогда марковский процесс в узком смысле с мн-вом моментов времени T, с начальным распр-ем $\mathbb{P}_0$, с переходными вероятн.

$\{p_{t_1,t_2} \mid T \ni t_1 < t_2 \in T\}$:= ∀ процесс $\xi \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (B_0, \ldots, B_n) \in \mathcal{B}(B)^{n+1}$

$$\mathbb{P}(\xi_{t_0} \in B_0, \ldots, \xi_{t_n} \in B_n) = \int \mathbb{P}_0(dx_0) \cdot \left(\int_{x_0 \in B_0} p_{t_0,t_1}(x_0, dx_1) \left(\int_{x_2 \in B_2} p_{t_1,t_2}(x_1, dx_2) \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot \left(\int_{B_n} p_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) \ldots \right) \right) \right)$$

<u>Следствие</u> Процесс броуновского дв-я (с непр. и с дискр. временем) явл-ся марковским.

$P_{t_1,t_2}(x, dy) \equiv p_{t_2-t_1}(y-x)\,dy$ — дифф. запись

$\Updownarrow$

$P_{t_1,t_2}(x, A) \equiv \int_A p_{t_2-t_1}(y-x)\,dy$ — интегр. запись

Опр 1) Если в марковском процессе $T = \{n \cdot \Delta \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ или $T = [0; \infty)$, причём $P_{t_1,t_2}(x, A)$ зависит только через $t_1 - t_2$, то этот марковский процесс — однородный по времени

2) Марковский процесс однороден по пр-ву := $p_{t_1,t_2}(x, A)$ зависит только через $A - x$

<u>Следствие</u> Броуновское дв-е — однородный и по времени, и по пр-ву марковский процесс

Опр Марковский процесс в широком смысле с набором $\mathbb{P}$ переходных вер-тей это набор марковских процессов (в узком смысле) с этим набором $\mathbb{P}$ переходных вер-тей и с сосредоточенными в точках B начал. распр-й

$$\mathbb{P}_{0,b_0} : \mathcal{B}(B) \ni A \mapsto \mathbb{1}_{A \subset B}(b_0) \equiv \delta(A) = \begin{cases} 1, & b_0 \in A \\ 0, & b_0 \in B \setminus A \end{cases}$$

<u>Упр</u> Стандартное броуновское дв-е как марковский процесс в широком смысле $\mathbb{P}((\xi_{t_0=0}, \xi_{t_1} \dots \xi_{t_n}) \in A) =$

$$= \int \dots \int_{(y_0 \dots y_n) \in A} \prod_{k=1}^{n} p_{t_k - t_{k-1}}(y_k - y_{k-1})\, dy_1 \dots dy_n\, \delta_{b_0}(dy_0) .$$

$\forall (0, t_1 \dots t_n) \in [0; +\infty)^{n+1}$, $0 < t_1 \dots < t_n$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\forall b_0 \in \mathbb{R}$

<u>Опр</u> Если марковский процесс ξ (в обоих смыслах) со знач-ями в банаховом пр-ве B и полугруппе параметров $T = \begin{cases} [0; +\infty) \\ \Delta \cdot \mathbb{N}_0, \ \Delta > 0 \end{cases}$, то соответствующей марковской операторной полугруппой назыв-ся мн-во операторов $\{L_t \mid t \in T\}$, где $\forall t \in T$ L_t — лин. оператор в банаховом пр-ве $B_{borel}(B, \mathbb{R})$: $(L_t(f))(x) =$
$= \int_B f(x)\, p_{0,t}(x, dy)$. Соотв. полугруппа в пр-ве σ-адд. мер на $\mathcal{B}(B)$ с вещ. знач-ями : $(L_t^* \mu)(A) = \int_B p(x, A)\, \mu(dx)$

(непр. от норма вариации)