# Лекция №10

Случ. величина с вещ. знач-ями в широком смысле — вер. распр-е на $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathbb{P}_\xi} [0;1]$

$$F_\xi^\wedge(x) = \mathbb{P}_\xi((-\infty;x)_\mathbb{R})$$

интеграл Стилтьеса

$$\varkappa_\xi \equiv h_\xi(y) = \int_\mathbb{R} e^{ixy}\,\mathbb{P}_\xi(dy) =: \int_\mathbb{R} e^{ixy}\,dF_\xi(x)$$

$$= \lim_{\max_k \Delta_k F \to 0} \sum e^{i\xi_k y}\Delta_k F$$

скачок — не проблема

$\max|\Delta x_k| < \delta$

$$E\xi = M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathbb{P}_\xi(dx) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF_\xi(x) \quad (\text{центр. момент})$$

$$D\xi = M((\xi - M\xi)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2\,\mathbb{P}_\xi(dx) = \otimes$$

требует $\exists$ 1-ого момента

$\forall$ борелевской $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi(\mathbb{P}_\xi) =: \mathbb{P}_\xi \cdot \varphi^{-1} =: \mathbb{P}_{\varphi(\xi)}$

$$E\varphi(\xi) = \int_\mathbb{R} x\,\mathbb{P}_{\varphi(\xi)}(dx) = \int_\mathbb{R} x\,\mathbb{P}_\xi \cdot \underbrace{\varphi^{-1}(dx)}_{dz} = \int_\mathbb{R} \varphi(z)\,\mathbb{P}_\xi\,dz$$

$$\otimes = M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2$$

$$D\xi < \infty \Leftrightarrow \underset{\int x^2 \mathbb{P}_\xi(dx)}{M(\xi^2)} < \infty$$

Упр

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad \mathbb{P}_\xi(dx) = \rho(x)\,dx$$

$M\xi = \int x\rho(x)\,dx$ — $\nexists$ $\Rightarrow$ нет матожидания!

$(\pm\infty \Rightarrow \int \frac{1}{x}$ — $\nexists)$

<u>Опр</u> $\xi$ — гауссова случ. величина $:= \exists\, a \in \mathbb{R}$, $\exists\, \sigma \geq 0$ (среднекв. откл-е)

$$\boxed{\varkappa_\xi(y) = e^{iay - \frac{y^2\sigma^2}{2}}}$$

$\sigma = 0$ — постоянная велич. $\xi$:

Одномерная гаусс. вел. при $\sigma = 0$ $\quad \mathbb{P}_{\xi a,\sigma^2} = \delta_a : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \begin{cases} 1, & a \in B \\ 0, & a \in \mathbb{R} \setminus B \end{cases}$

<u>Опр</u> Если $\mu \geq 0$ $\sigma$-адд. на $\sigma$-алгебре вещ. знач-е $\rho \in L_1(\mu)$, то лебеговым произв-ем $\rho \cdot \mu$ наз-ся мера на той же $\sigma$-алгебре такая, что: $(\rho\mu)(B) \underset{(1)}{=} \boxed{\int_B \rho(x)\,\mu(dx)}$

(1) в диф. форме $(\rho \cdot \mu)(dx) = \rho(x) \cdot \mu(dx)$

<u>Опр</u> $\exists\, \nu = \rho \cdot \mu$ — мера. $\rho$ наз-ся плотностью $\nu$ отн. $\mu$, а также производной Радона-Никодима:

$\frac{d\nu}{d\mu}(x) := \rho(x)$ (для „почти всех" $x$) $\quad (\nu(dx) = \rho(x)\,\mu(dx))$

$$\exists\, \underset{F_\nu(\nu)}{\nu(-\infty;x)} \text{ и } \underset{F_\mu(x)}{\mu(-\infty;x)} \in C^1(\mathbb{R}_x)$$

$$\rho(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\nu(U_\varepsilon(x))}{\mu(U_\varepsilon(x))} = \frac{F_\nu(x+\varepsilon) - F_\nu(x-\varepsilon)}{F_\mu(x+\varepsilon) - F_\mu(x-\varepsilon)} = \frac{F_\nu'(x)}{F_\mu'(x)}$$

<u>Опр</u> $\exists\, \nu = \rho\mu$ $\quad \nu$ — абс. непр. отн. $\mu$

<u>Опр</u> Ф-ция $f$ — абс. непр. на $[a;b]$ или $[a;+\infty) :=$

$$:= \begin{cases} 1)\ \exists\, \rho \in L_1[a;b] : \forall x \in [a;b] \mapsto f(x) - f(a) = \int_a^x \rho(t)\,Leb_\mathbb{R}(dt) \\ 2)\ \forall t \in (a;+\infty)\ f \text{ — абс. непр. на } [a;t] \end{cases}$$

В случае 1) на полуалгебре промежутков с концами $\alpha < \beta$

в $[a;b]$ $\nu_f((\alpha,\beta)) = \nu_f([\alpha;\beta]) = \nu_f([\alpha;\beta)) = \nu_f((\alpha;\beta]) = f(\beta) - F(\alpha)$

$\nu_f$ имеет плотн. $\rho$ отн. меры Лебега $\Leftrightarrow \left( \begin{matrix} \nu_f \ll Leb_{\mathcal{B}([a;b])} \\ \text{абс. непр.} \end{matrix} \right) \Leftrightarrow$

$f$-абс. непр.

$\Leftrightarrow \Big( \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall ([\alpha_j;\beta_j])_{j=1}^{\infty},\ \alpha_j \le \beta_j :$ 1) $\bigcup_{j=1}^{\infty} [\alpha_j, \beta_j] \subset [\alpha;\beta]$

2) $\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j - \alpha_j| < \delta \ \hookrightarrow\ \sum_{j=1}^{\infty} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$

1) $f \in C[a;b]$

2) Для Leb – почти всех $x \in [a;b]$ $\exists f'(x)$ $f' \in L_1[a;b]$

3) $\forall t \in [a;b]$ $f(t) - f(a) = \int_a^t f'(x)\,dx$

! Не абс. непр: канторовская лестница 1) производная $\wedge B = 0$

2) на концах разные значения

Одномерная гаусс. велич. при $\sigma > 0$ $\mathbb{P}_{\xi_{a,\sigma^2}}(dx) = \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} Leb(dx)$

$M\xi = a$ $D\xi = \sigma^2$

<u>Опр.</u> Случ. величина $\bar{\xi}$ из $\mathbb{R}^d$ в широком смысле := сущность с вер ($\sigma$-адд.) мерой $\mathbb{P}_{\xi} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mapsto [0;1]$

мультииндекс

$M\bar{\xi}^{\bar{J}} = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{x}^{\bar{J}}\, \mathbb{P}_{\xi}(d\bar{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} x_1^{J_1} x_2^{J_2} \cdots x_d^{J_d}\, \mathbb{P}_{\xi}(d\bar{x})$ $\quad \forall \bar{J} = (J_1 \cdots J_d)$

$M|\bar{\xi}^{\bar{J}}| = \int_{\mathbb{R}^d} |\bar{x}^{\bar{J}}|\, \mathbb{P}_{\xi}(d\bar{x})$

$h_{\xi}(\bar{y}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\bar{x}\cdot\bar{y}}\, \mathbb{P}_{\xi}(d\bar{x})$ – характ-ая ф-ция (преобр-е Фурье)

$F_{\xi}^{\wedge}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \mathbb{P}_{\xi}\left( \bigotimes_{j=1}^{d} (-\infty; x_j) \right)$

<u>Утв</u> $\mathbb{R}^d$-значная случ. величина $\bar{\xi}$ – гауссова :=

$$\left\{ \begin{matrix} \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \quad \underbrace{Pr^{\mathbb{R}^d}_{\mathbb{R}\cdot\bar{v}}}_{\text{проекция из } \mathbb{R}^d \text{ на прямую}} (\mathbb{P}_{\xi}) = \mathbb{P}_{\xi} \circ \underbrace{\left( Pr^{\mathbb{R}^d}_{\mathbb{R}\cdot\bar{v}} \right)^{\ominus}}_{\text{прообраз}} \quad \text{как} \\ \text{мера на мн-ве } \mathbb{R} \text{ с базисным вектором } \bar{v} \text{ явл-ся гауссовской} \end{matrix} \right\}$$

<u>Теор</u> Пред. утв. $\Leftrightarrow \exists \bar{a} \in \mathbb{R}^d$, $\bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{bmatrix}$, $\exists$ симм. неотр. опр. матрица (наз-ся ковариационной)

$C \in Matr(d \times d)$ :

$$\boxed{h_{\bar{\xi}_{a,C}}(\bar{y}) = e^{i(\bar{a}\cdot\bar{y}) - \frac{(C\bar{y},\bar{y})_{\mathbb{R}^d}}{2}}}$$

$a_j = M_{\xi} \cdot x_j = \int_{\mathbb{R}^d} x_j\, \mathbb{P}_{\xi}(d\bar{x})$

$C_{jk} = C_{kj} = M((\xi_k - a_k)(\xi_j - a_j))$. $C = 0 \Rightarrow$ константа

<u>Теор</u> $C > 0 \Rightarrow \exists\, \mathbb{P}_{\bar{\xi}_{\bar{a},C}}(d\bar{x}) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} (\det C)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(C^{-1}(\bar{x}-\bar{a}),(\bar{x}-\bar{a}))_{\mathbb{R}^d}}{2}} \underset{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}{Leb}(d\bar{x})$

Для $\underset{\dim E_{\xi}}{\underset{\|}{rk\, C_{\xi}}} \in \{1, \dots, d-1\}$, $\underset{\text{span}\left\{ \begin{matrix} \text{собств. вект. } C_{\xi} \\ \text{со строго полож. С.З.} \end{matrix} \right\}}{\underset{\|}{E_{\xi}}} = C_{\xi}\mathbb{R}^d$, $A_{\xi} = \bar{a} + E_{\xi}$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$\mathbb{P}_{\xi}(B) := \int_{B \cap A_{\xi}} (2\pi)^{-\frac{rk\,C}{2}} \left( \det(C_{\xi}|_{E_{\xi}}) \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left[ \left( (C_{\xi}^{-1}|_{E_{\xi}})^{-1} (\bar{x}-\bar{a}), (\bar{x}-\bar{a}) \right) \right]} \underset{\mathcal{B}(A_{\xi})}{Leb}(dx)$

<u>Опр</u> Случ. поле (процесс) в широком смысле – гауссовский :=

:= $\forall$ определяющие это поле конечномерные распр-я (маргинальные)

$\{\mathbb{P}_t\}_{t \in \mathcal{P}_{fin}(T) \setminus \{\emptyset\}}$ – гауссовские

Покажем, что Винеровский процесс – гауссовский

$T=[0;\infty)\quad \forall t\in \mathcal{P}_{fin}(T)\setminus\{\varnothing\}=\{t_0<\ldots<t_n\}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\bar{x}\bar{y}}\,\mathbb{P}_t(d\bar{x})=h(\bar{y})=I$$

$I\quad t_0=0,\ n\in\mathbb{N}$

1.1) $I=I_0,\ n=1\quad \int_{\mathbb{R}} e^{ix_0y}\,\mathbb{P}_t(dx_0)=h(\bar{y})=\int_{\mathbb{R}} e^{ix_0y}\,\delta(dx_0)=1$ – Ok

1.2) $I,\ n\neq 1\quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\bar{x}\cdot\bar{y}}\,\mathbb{P}_t(d\bar{x})=h(\bar{y})=$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum_{j=1}^{n}x_jy_j}\cdot\delta_0(dx_0)\,p_{t_1-t_0}(x_1-\overset{0}{\overset{\|}{x_0}})\ldots p_{t_{n-2}-t_{n-1}}(x_{n-1}-x_{n-2})\,dx_1\ldots dx_{n-1}=$$

$$=\int_{\mathbb{R}x_1\ldots x_{n-1}} e^{\left(i\sum_{k=1}^{n-1}x_ky_k-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2(t_k-t_{k-1})}\right)}(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\prod_{k=1}^{n-1}(t_k-t_{k-1})^{-\frac{1}{2}}\,dx_1\ldots dx_{n-1}=Q$$

$\exists\ u_k=x_k-x_{k-1}$ замена $\qquad u_1=x_1,\ u_2=x_2-x_0,\ u_{n-1}=x_{n-1}-x_{n-2}\qquad x_1=u_1,\ x_2=u_1+u_2,\ x_{n-1}=u_1+\ldots+u_{n-1}\qquad J=\det=1$

$$Q=\int e^{i\sum_{k=1}^{n-1}y_k\left(\sum_{j=1}^{k}u_j\right)}\cdot e^{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{2(t_k-t_{k-1})}}\prod_{k=1}^{n}(2\pi(t_k-t_{k-1}))^{-\frac{1}{2}}\,du_1\ldots du_{n-1}=Q$$

$y_1\cdot u_1,\ y_2(u_1+u_2),\ y_{n-1}(u_1+\ldots+u_{n-1})\implies \sum_{j=1}^{n-1}u_j\sum_{k=j}^{n-1}y_k$

распадается на произв-е

$$Q=\prod_{j=1}^{n-1}\int_{\mathbb{R}\ni u_j} e^{\left(iu_j\sum_{k=j}^{n-1}y_k-\frac{u_j}{2(t_j-t_{j-1})}\right)}(2\pi(t_j-t_{j-1}))^{-\frac{1}{2}}\,du_j=e^{-\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{k=j}^{n-1}y_k\right)^2\frac{t_j-t_{j-1}}{2}}$$

2) $t_0>0\quad t=\{\overset{>0}{t_0}<\ldots<t_{n-1}\}\neq\varnothing\qquad \exists\ \tau=t\cup\{0\}$

$\mathbb{P}_t=\Lambda_t(\mathbb{P}_\tau)=\mathbb{P}_\tau\circ(\Lambda_\tau)^{-1}\qquad$ тут уже умеем (пункт 1)