## Лекция № 5

Мн-ва из алгебры: $A_k \in \mathcal{a}$ алгебрам мн-в с единицей $E_a$

$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k 1_{A_k \subset E_a}(x)$ $A_k$ попарно не пересекаются, $c_k \in \mathbb{R}$

Опр. Если $S \subset \mathcal{P}(E)$ — все подмн-ва $E$, то

$\alpha_E(S) = \cap \{ \mathcal{a} \text{-алгебр с единицей } E \mid \mathcal{a} \supset S \}$ — наименьшее среди тех алгебр с единицей $E$, кот-ые содержат $S$ как часть себя.

$\forall c \in \mathbb{R}$ $f^{-1}((-\infty; c]) \in \mathcal{a}$ (1)

$\alpha(\{(-\infty; c] \mid c \in \mathbb{R}\}) = \{ \bigcup_{j=1}^{n} (\alpha_k, \beta_k] \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, -\infty \le \alpha_k \le \beta_k \le +\infty \}$

Опр. Пусть $E_1$ и $E_2$ — единицы алгебр $\mathcal{a}_1$ и $\mathcal{a}_2$ соответственно. $\varphi: E_1 \to E_2$. Назовём $\varphi$ $(\mathcal{a}_1, \mathcal{a}_2)$-измеримой, если $\forall A_2 \in \mathcal{a}_2 \hookrightarrow \varphi^{-1}(A_2) \in \mathcal{a}_1$. Если при этом $\mu_1$ — неотрицательно-значная мера (т-нн. мера) на $\mathcal{a}_1$, то мера

$\mathcal{a}_2 \ni A_2 \mapsto \mu_1(\varphi^{-1}(A_2)) \equiv (\mu_1 \varphi^{-1})(A_2) = (\mu_1 \circ \varphi^{-1})(A_2) = (\varphi(\mu_1))(A_2)$ называется образом меры $\mu_1$ относительно $\varphi$.

Лемма: Если $\mu_1$ аддитивна (со значениями в абелевой полугруппе), то и $\mu_2 = \varphi(\mu_1)$ тоже аддитивна:

□ $\mu_2(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j) = \mu_1(\varphi^{-1}(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j)) \equiv \{\text{полный прообраз не пересекается}\} \equiv \circledast$

$\sqcup$ — попарно непересекающиеся

$\circledast = \mu_1(\bigsqcup_{j=1}^{n} (\varphi^{-1}(A_j))) = \sum_{j=1}^{n} \mu_1(\varphi^{-1}(A_j)) = \sum_{j=1}^{n} \mu_2(A_j)$ ⊗

В банаховом (потом нормированном) пр-ве $\mu_2$ тоже аддитивно.

Пусть тогда $\mathcal{a}$ — σ-алгебра.

Опр. Если $S \subset \mathcal{P}(E)$

$\sigma_E(S) = \cap \{ \mathcal{a} \text{-алгебр с единицей } E \mid \mathcal{a} \supset S \}$ — наименьшее среди тех алгебр с единицей $E$, кот-ые содержат $S$ как часть себя.

Пусть тогда $\mathcal{a}$ — σ-алгебра; $\sigma\{(-\infty; c]\} \; \forall B \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ и пусть $f: E_a \mapsto \mathbb{R}$ удовл. (1), тогда $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $f^{-1}(B) \in \mathcal{a}$

Пусть $\beta$ — σ-алгебра с единицей $\mathbb{R}$ такая, что: $\beta \supset \{(-\infty; c] \mid c \in \mathbb{R}\}$ $\forall G \in \beta \hookrightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{a}$ (2), например,

$\bar{\beta} = \{ G \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(G) \in \mathcal{a} \} \supset \{(-\infty; c] \mid c \in \mathbb{R}\}$

Проверка:

1) Пусть $G \in \bar{\beta}$.

$f^{-1}(\mathbb{R} \setminus G) = \{ x \in E_a \mid f(x) \in \mathbb{R} \setminus G \} = (E_a \setminus f^{-1}(G)) \in \mathcal{a} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus G \in \bar{\beta}$

2) $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(G_n) \in \mathcal{a}$

$\mathbb{B} = \{\beta \mid (2)\}$, $\beta$ — σ алгебра с единицей $\mathbb{R} \in \mathbb{B} := \cap \mathbb{B}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \in \mathbb{B}$

$S_0 = \{(-\infty; c] \mid c\in\mathbb{R}\} = S_0$

$S_\beta = \left(\left(\bigcup_{\alpha<\beta} S_\alpha\right)\cup\{\mathbb{R}\setminus G \mid G\in\bigcup_{\alpha<\beta}S_\alpha\}\right)_{\sigma,\delta}$

$\forall$ семейства множеств $S$:

$S_{\sigma,\delta} = \{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid (A_n)\in S^{\mathbb{N}}\}\cup\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \mid (A_n)\in S^{\mathbb{N}}\}$ отн. ч

Пересечение открытых лучей — замкнуто:

$\bigcap_n (r-\frac{1}{n}; +\infty) = [r;+\infty)$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty; c-\frac{1}{n}] = (-\infty; c)$

$\bigcup_{|\beta|<\aleph_0} S_\beta = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

алеф (конечная мощность)

$\beta_n \le \bigcup\beta_n = \sup\beta_n \quad \forall A_n\in S_{\cup\beta_n+1}$

$\aleph_1 = \mathfrak{c}$ — континуум

Теорема $\tau_{\mathbb{R}}$ (стандартная топология) $\overset{?}{=} \{\bigcup_{j=1,2,\dots} I_j \mid \forall j\ I_j=(\alpha_j,\beta_j), -\infty\le\alpha_j<\beta_j\le+\infty\}$ — отношение всех открытых мн-в на прямой

□

$u=\varnothing$ — понятно

$u=\tau_{\mathbb{R}}\setminus\{\varnothing\}$

Введём отн-е эквивалентности:

$u_1 \sim_u u_2 \Leftrightarrow [u_1;u_2]\subset u$

эквивалентн. отн. $u$

Тогда само мн-во разбивается на непересекающиеся подмн-ва

Непересекающихся классов не более счётного числа.

$\underset{u}{(\cdot)}$ ⇒ классы эквивалентности открыты, i.e. содержат рациональные точки ⇒ нет дырок ☒

$S_0 \rightleftarrows \tau \subset S_2$

$I_\mu(\mathbb{1}_{A\subset E}) = \mu(A)$ ($A\in D$ определения $\mu$)

$\mu$-аддитивна ⇒ $I_\mu$ — линейный!

измеримые индикаторы

$S_a = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbb{1}_{A\subset E_a} \mid A\in a\}$

простые измеримые

$|I_\mu(f)| \le \|f\|_\infty \cdot \|\mu\|_{var}$


$S_a \subset B(E_a,\mathbb{R})$

$f(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k\subset E_a}(x) \Rightarrow I_\mu(f)=\sum_{k=1}^{n} c_k\,\mu(A_k)$ Cl — замыкание

Dom $I_\mu$ $(Cl(I_\mu)) = Cl_{\|\cdot\|_\infty}(S_a) = \{$ все ограниченные $(a,\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ — измеримые ф-ции $\}$

Теорема. Если все $f_n$ огр-ся $(a,\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ измеримы и $\forall x\in E_a\ \exists\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f_\infty(x)$, то $f_\infty(x)$ тоже $(a,\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ измерима

Опр. $\mathcal{B}(N) \overset{def}{=} \sigma_N(\tau_N)$ — порождение борелевских σ-алгебр.

**Опр.** Сепарабельное пр-во – если базис конечный

□

$$\mathfrak{a} \underset{?}{\ni} f_\infty^{-1}((-\infty;c)) = \{x\in E_\mathfrak{a} \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) < c\} \iff$$

$$\iff \{x\in E_\mathfrak{a} \mid \exists r<c,\ r\in\mathbb{Q}\ \exists k\in\mathbb{N}\ \forall n\geq k \hookrightarrow f_n(x)<r$$

Превращаем кванторы в операции над множествами:

$$\bigcup_{r\in(-\infty;c)\cap\mathbb{Q}} \{x\in E_\mathfrak{a} \mid \exists k\in\mathbb{N}: \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq k \Rightarrow f_n(x)\leq r\} =$$

$$=\bigcup_{r\dots}\bigcup_{k} \{x\in E_\mathfrak{a} \mid \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq k \Rightarrow f_n(x)\leq r\} =$$

$$=\underbrace{\bigcup_{r\dots}\bigcup_{k}\bigcap_{n\geq k}}_{\text{разрешённые операции}} \underbrace{\{x\in E_\mathfrak{a}: f_n(x)\leq r\}}_{\text{мн-во из } \sigma \text{ алгебры } \mathfrak{a}} \in \mathfrak{a} \quad ■$$

$\mathfrak{a}$ – $\sigma$-алгебра с единицей $E_\mathfrak{a}$

$\mu: \mathfrak{a} \to [0;\infty)$ $\sigma$-аддитивна

**Опр.** $f$ наз-ся неотрицательно интегрируемой по $\mu$ ($\mu$-инт.) $\iff$ $\exists\{f_n\}$ измеримая неотрицательная ограниченная, такая, что: 1) $\forall x\in E_\mathfrak{a}$ $f_n(x)\nearrow f(x)$ $(n\to\infty)$

2) $\sup_n I_\mu(f_n)<\infty$

При этом $I_\mu(f) \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} I_\mu(f_n)$

**Лемма** Если $f,g$ – изм. $(\mathfrak{a}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \Rightarrow f\pm g$ тоже измеримы

□

$$((f\pm g) = + \circ \underbrace{\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}}_{\text{измеримо в смысле } (\mathfrak{a},\ \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))}{}^{-1} = ($$