Лекция №2

$(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \xi$

L_2 – теория стационарных в широком смысле двусторонних последовательностей с нулевым средним.

$T=\mathbb{Z}$; ξ_n – $\mathbb{C}$-значная случайная величина

$\forall n\in\mathbb{Z}$ $\quad M\xi_n=0$, $\forall m\in\mathbb{Z}$

$$\int_\Omega \xi_n(\omega)\,\xi_m(\omega)^T\,\mathbb{P}(d\omega) = Cov(\xi_n,\xi_m) = M(\xi_n\cdot\xi_m^T) =$$

$$= Cov(\xi_{n-m},\xi_0) = \int \mathbb{P}_{n,m}(dz\times dw)(z\cdot w^+)$$

$\mathbb{P}_{\xi_n} = \mathbb{P}_n : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to [0;1]$

1) $m\ne n$

$$\mathbb{P}_{\{n,m\}} : \mathcal{B}(\underbrace{\underset{z}{\mathbb{C}}\times\underset{w}{\mathbb{C}}}_{\mathbb{R}^4}) \xrightarrow[\sigma\text{-адд.}]{} [0;1]_\mathbb{R}$$

$\mathbb{P}_{\{n,m\}} = \mathbb{P}_{\xi_n,\xi_m}$

2) $m=n$

$$D\xi_n = M|\xi_n|^2 = \int_{\mathbb{C}_z} \mathbb{P}_n(dz)\,|z|^2$$

Класс эквивалентности:

$L_2(\mathbb{P},\mathbb{C})\ni\xi_n$

$$\|\xi\|^2_{L_2} = D\xi = \int_\Omega |\xi(\omega)|^2\,\mathbb{P}(d\omega) < \infty \quad (1)$$

(отождествление φ-ций с точки зрения эксперимента)

$$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \xrightarrow{\xi_n} \mathbb{C}$$

класс эквивалентности почти всюду совпадающих φ-ций

$$H = \{\xi\text{-класс экв. } \underset{\mathbb{P}}{\Omega} \to \mathbb{C} \mid (1),(2)\}$$ ($\mathcal{F}$-измерим)

$$0 = M\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \quad (2)$$

Будем $\xi_n\in H$

Предложение 1 $\quad \xi,\eta\in H \Rightarrow \exists \int_\Omega \xi(\omega)\cdot\eta(\omega)\,P(d\omega) = M(\xi\eta)$

$$\int_\Omega|\xi(\omega)\eta(\omega)|\,P(d\omega) = \int_\Omega|\xi(\omega)|\cdot|\eta(\omega)|\,P(d\omega) = \int_\Omega \sqrt{|\xi(\omega)|^2}\cdot\sqrt{|\eta(\omega)|^2} \le$$

$$\le \int \frac{|\xi|^2+|\eta(\omega)|^2}{2}\,P(d\omega) \qquad L_2(\mathbb{P},\mathbb{C})\ni\xi_n$$

Опр-е скалярного произведения:

$$H\times H \ni(\xi,\eta)\mapsto M(\xi,\eta^+) := \int_\Omega \xi(\omega)\,\eta(\omega)^+\,\mathbb{P}(d\omega)\in\mathbb{C}, \text{ неотрицат.}$$

$\int|\xi(\omega)|^2P(d\omega)=0 \Rightarrow \xi(\omega)=0$ почти наверное $\Leftrightarrow \mathbb{P}\{\omega\mid\xi(\omega)\ne0\}=0$

$$\sum_{J\in\mathbb{Z}} \int|\xi(\omega)|^2\,\mathbb{P}(d\omega) \qquad 2^J\le|\xi(\omega)|^2<2^{J+1}$$

$$\ge 2^J\int 2^J P(d\omega)\ge0$$

$$2^J\le|\xi(\omega)|^2<2^{J+1}$$

$\forall J$ $\quad \mathbb{P}\{\omega\mid 2^{\frac{J}{2}}\le|\xi(\omega)|<2^{\frac{J+1}{2}}\}$

$$(M(\xi\eta^+))^+ = M(\eta\cdot\xi^+)$$

Полнота H:

$H\subset L_2(\mathbb{P},\mathbb{C})\ni\xi_n$

Нер-во Коши – Буняковского:

$|(\xi,\eta)_H| \le \|\xi\|_H \cdot \|\eta\|_H$

Опр-е нормы:

$\|\xi_n\| = \sqrt{(\xi_n,\xi_n)} = \sqrt{M(\xi_n \cdot \xi_n^+)} = \sqrt{Cov(\xi_n,\xi_n)}$

Св-во стационарности:

$\{\xi : \mathbb{Z} \to H$ стац. в широком смысле с нулевым средним $\} = \mathcal{S}$

$(\xi_{m-n}, \xi_0)_H = Cov(\xi_m, \xi_n) = Cov(\xi_n,\xi_m)^+$

$(\xi_k, \xi_0)_H = R_k^{\xi} = R^{\xi}(k)$ – опр-е $R^{\xi}(k)$

$R^{\xi} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ – ковариационная ф-ция, $\xi \in \mathcal{S}$

$|R^{\xi}_k| = |(\xi_k,\xi_0)_H| \le \|\xi_k\| \cdot \|\xi_0\| = \|\xi_0\|^2 = D\xi_0 = (\xi_0,\xi_0)_H = R^{\xi}(0) \ge 0$

$R^{\xi}(0) = 0 \iff (\forall n \ \xi_n = 0)$

Далее $R(0) = D\xi_0 = D\xi_n > 0$

Корреляционная ф-ция

$\rho^{\xi}(k) = \frac{R(k)}{R(0)} = \frac{(\xi_k,\xi_0)_H}{\|\xi_k\| \cdot \|\xi_0\|_H} \in \mathbb{C}$

$|\rho^{\xi}(k)| \le 1$

Опр Ф-ция $f : (A,+) \to \mathbb{C}$ наз-ся неотр. опр., если $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ $\forall (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in A^n$ $\hookrightarrow \sum_{j,k=0}^{n-1} f(a_k \hat{-} a_j) z_k z_j^+ \ge 0$

разница в A.

$\| \sum_{j,k=0}^{n-1} (\xi_{a_k - a_j}, \xi_0)_H z_k z_j^+ = \sum_{j,k} (\xi_{a_k} z_k, \xi_{a_j} z_j)_H =$

$= \sum_j \left(\sum_k \xi_{a_k} z_k, \sum_j \xi_{a_j} z_j \right) \ge 0$

Спектральная теория ковариантной ф-ции стац. $\xi \in \mathcal{S}$

Теорема Герглотца. $\forall$ неотр. опр. на $(\mathbb{Z},+)$ ф-ции $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ $\exists!$ σ-адд. мера $\mathcal{B}((-\pi;\pi]) \to [0, f(0)]$ такая, что $\forall n \in \mathbb{Z}$

$\varphi(n) = \int_{(-\pi;\pi]} e^{-in\lambda} \cdot m(d\lambda)$

Следствие $\forall \xi \in \mathcal{S}$ $\exists$ σ-адд. боррелев. мера m_{ξ} на $(-\pi;\pi]$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $R^{\xi}(n) = \int_{(-\pi;\pi]} e^{-in\lambda} m_{\xi}(d\lambda)$

Опр m_{ξ} наз-ся структурной спектральной мерой ξ процесса ξ.

$\mathrm{Spec}\,\xi = \{\lambda \in (-\pi;\pi] \mid (\forall \varepsilon > 0 \ \ m((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \cap (-\pi;\pi]) > 0 \ \ \& \ \lambda \ne \pi),$
$(\forall \varepsilon > 0 \ \ m((\pi-\varepsilon,\pi] \cup (-\pi;\pi+\varepsilon]) > 0 \ \& \ \lambda = \pi)\}$

Если ξ – стандартный (гаусов) „белый шум", т.е. $\xi_n \sim N_{0,1}$ с независимыми значениями.

$R^{\xi}(n) = (\xi_n, \xi_0)_H = \begin{cases} 0, & n \ne 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} = \delta_{n,0}$

$m_{\xi}(d\lambda) = \frac{1}{2\pi} Leb(d\lambda)$

мера Лебега

Опр. Если $\exists f_{\xi} \in L_1(m)$ такая, что $\forall A \in \mathcal{B}((-\pi;\pi])$ $\hookrightarrow$

$\hookrightarrow m(A) = \int_{(-\pi;\pi]} f(\lambda) Leb(d\lambda)$, то f_{ξ} наз-ся спектральной плотностью стац. процесса $\xi \in \mathcal{S}$

$m_\xi(-\pi;\pi] = \int e^{i0\lambda} m_\xi(d\lambda) = R^{\xi}(0) \quad (-\pi;\pi]$

Пусть $\forall n \quad \xi_n = \xi_0, \quad M\xi_0 = 0, \quad D\xi_0 = D\xi_n = R \in (0;+\infty)$

$Cov(\xi_n, \xi_0) = D\xi_0 = Cov(\xi_n, \xi_m) = Cov(\xi_{n-m}, \xi_0)$

$R^{\xi}(n) = (\xi_n, \xi_0) = D\xi_0 = \underbrace{R^{\xi}(0)}_{\text{max знач-е меры}} > 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow m(d\lambda) = \delta_0(d\lambda) \cdot R^{\xi}(0)$

$R^{\xi}(0) \int\limits_{(-\pi;\pi]} e^{-in\lambda} \delta_0(d\lambda) = R^{\xi}(0) \underbrace{\int\limits_{\{0\}} e^{0} \delta_0(d\lambda)}_{1} = R^{\xi}(n)$

Обобщение.

Пусть $\xi \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ такое, что $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \exists g_n \in \mathbb{C}$:

$\xi_n = g_n \cdot \xi_0, \quad \|\xi_n\| = \|g_n \xi_0\|_H = |g_n| \cdot \|\xi_0\|_H = \|\xi_0\| \neq 0$

$|g_n| = 1, \quad g_0 = 1$

$\nu_n := \|\xi_n\|^{-1} \cdot \xi_n \equiv \frac{1}{\|\xi_n\|} \xi_n$

$\boxed{(\nu_n, \nu_0)_H = g_n (\nu_0, \nu_0)_H} = R^{\nu}(n)$

$g_{-n} = (\nu_{-n}, \nu_0)_H = (\nu_0, \nu_n)_H = (\nu_n, \nu_0)_H^+ = g_n^+$

$g_n g_{-n} = g_n^+ g_n = |g_n|^2 = 1 \Rightarrow g_{-n} = \frac{1}{g_n}$

$g_{m-n} = (\nu_{m-n}, \nu_0)_H = (\nu_m, \nu_n)_H = (g_m \nu_0, g_n \nu_0)_H = g_m g_n^+ \underbrace{(\nu_0, \nu_0)_H}_{1} = g_m g_n^{-1}$

$m - n = k$

$g_k g_n = g_{k+n}$ – гомоморфизм для $\forall (k,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Опр $(G_1, \circ_1) \xrightarrow{h} (G_2, \circ_2)$

группа с операцией

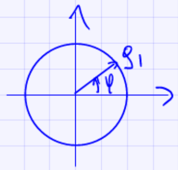
h – гомоморфизм (представление) $:= \forall x, y \in G_1 \hookrightarrow$

$h(x \circ_1 y) = h(x) \circ_2 h(y)$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n = (g_1)^n$

$\triangleright$ База: $g_1 = g_1$. Предположим $g_n = (g_1)^n$

Шаг: $g_{n+1} = g_1 \cdot g_n = g_1 (g_1)^n = (g_1)^{n+1} \Rightarrow$ Верно $\boxtimes$



Пусть φ – угол

$\exists! \varphi \in (-\pi;\pi] \quad g_1 = e^{-i\varphi} \Rightarrow g_n = e^{-in\varphi}$ – вращение

Тогда $\xi_n = g_1 \xi_0 = e^{-in\varphi} \xi_0$

$R^{\xi}(n) = e^{-in\varphi} D\xi_0 = \int\limits_{(-\pi;\pi]} e^{-in\lambda} m_\xi(d\lambda)$

$m_\xi(d\lambda) = D\xi_n \, \delta_{\{\varphi\}}(d\lambda)$

$m_\nu(d\lambda) = \{D\nu = 1\} = \delta_{\{\varphi\}}(d\lambda)$

<u>Других одномерных стационарных процессов нет</u>

Пусть $\mathcal{S}$ – линейное пр-во.

1) $\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \forall \xi \in \mathcal{S} \hookrightarrow \alpha\xi = (\alpha \xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$:

а) $M\alpha\xi_n = 0$ – сохранилось

б) $(\alpha\xi_n, \alpha\xi_n)_H = \alpha\alpha^+ (\xi_n, \xi_m)_H = \alpha\alpha^+ (\xi_{n-m}, \xi_0)_H = (\alpha\xi_{n-m}, \alpha\xi_0)_H$

– стационарность (сохранилась)

2) Пусть $\xi, \eta \in \mathcal{S}, \quad \xi_n^{(k)} \perp \xi_m^{(\ell)} \quad k \neq \ell, \ k, \ell \in \{1, \ldots K\}$

а) $M(\xi_n + \eta_n) = M\xi_n + M\eta_n = 0$

б) $\left(\sum\limits_{k=1}^{K} \xi_n^{(k)}, \sum\limits_{\ell=1}^{K} \xi_n^{(\ell)}\right) = \sum\limits_{k=1}^{K} (\xi_n^{(k)}, \xi_m^{(k)}) = \sum\limits_{k=1}^{K} (\xi_{n-m}^{(k)}, \xi_0^{(k)}) = \left(\sum\limits_{k=1}^{K} \xi_{n-m}^{(k)}, \sum\limits_{\ell=1}^{K} \xi_0^{(k)}\right)$

$\exists\ \xi_{0,1}\ \xi_{0,2} \dots \xi_{0,k} \in H$ — попарно ортогональны

$\exists\ \varphi_1 \dots \varphi_n \in [-\pi; \pi]$

$\xi_n := \sum\limits_{j=1}^{k} e^{-in\varphi_j} \cdot \xi_{0,j}$ — стационарн. со структурной мерой

$m_{\bar{\xi}}(d\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{k} \delta_{\{\varphi_j\}}(d\lambda) \cdot \|\xi_{0,j}\|^2$

Тогда спектр $\operatorname{Spec} \bar{\xi} = \{\varphi_1 \dots \varphi_k\}$