Лекция № 6

$\xi_э$	n	1	2	$\dots$	N
	x_n	x_1	x_2		x_N

$$F^{\wedge}_{\xi_э}(x) = \frac{\#\{n \mid : x_n < x\}}{N} = \frac{\#\{n \mid : x_n \in (-\infty; x)\}}{N}$$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}_{\xi_э}(B) = \frac{\#\{n \mid : x_n \in B\}}{N}$$

„введём соответствующую терминологию"

Q Если S – система мн-в, $\mu_1 : S_1 \to P$ – нефр. мн-венная мера

$S_1 \subset \mathcal{P}(E_1)$, $E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2$, $S_2 \subset \mathcal{P}(E_2)$

$\forall B_2 \in S_2 \quad \varphi^{-1}(B_2) \in S_1$,

то $\boxed{\mu_2 : S_2 \ni B_2 \mapsto \mu_1(\varphi^{-1}(B_2)) \in P}$

μ_2 – "образ меры" μ_1 отн. отобр-я φ.

Обозн.: $\mu_2 = \varphi(\mu_1) = \mu\varphi^{-1} = \mu \circ \varphi^{-1}$

Вычисление мощности конечного мн-ва – считающая мера.

$$\mathbb{P}_{\xi_э}(B) = \frac{\#(\xi_э^{-1}(B))}{N} \qquad A \subset \{1, \dots, N\},\ \mu_N(A) = \frac{\# A}{\#\{1 \dots N\}} \in [0; 1]$$

μ_N – счётно-аддитивная мера $\qquad \underset{\sigma\text{-алгебра}}{\mathcal{P}(\{0, \dots, N\})} \to A \mapsto \mu_N(A)$

$\overline{\xi}^{(0)}_э$	n	0	1	$\dots$	$N-1$
	$x^{(0)}_n$	$x^{(0)}_0$	$x^{(0)}_1$		$x^{(0)}_{N-1}$
	$x^{(1)}_n$	$x^{(1)}_0$	$x^{(1)}_1$		$x^{(1)}_{N-1}$
	$x^{(M-1)}_n$	$x^{(M-1)}_0$	$x^{(M-1)}_2$		$x^{(M-1)}_{N-1}$

$\mathrm{Dom}\, \xi_э = N$

снизу номер эксперимента

сверху номер прибора

$$\mathbb{P}_{\xi_э} = \xi_э^{(0)}(\mu_{\mathrm{Dom}(\xi_э^{(0)})})$$

$$\overline{x_n} = \overline{\xi_э}(n)$$

$$\mathbb{P}_{\overline{\xi_э}}(B) = \frac{\#\{n \mid : \overline{\xi_э}(n) \in B\}}{N} = \overline{\xi_э}(\mu_{\mathrm{Dom}(\overline{\xi_э})}) \equiv \mu_{\mathrm{Dom}\,\overline{\xi_э}} \circ \overline{\xi_э}^{-1}) \text{ – доля экс.}$$

$$F^{\wedge}_{\xi_э}(\overline{x}) = \mathbb{P}_{\overline{\xi_э}}\left(\prod_{k=0}^{M-1}(-\infty, x^{(k)})\right) = P_{\overline{\xi}}\left\{\begin{pmatrix} t^{(0)} \\ \vdots \\ t^{(M-1)} \end{pmatrix} \Bigg| : \forall k \in M \Rightarrow t^{(k)} < x^{(k)}\right\} =$$

$$= \frac{\#\{n \in N \mid : \overline{\xi}_n \in \prod_{k \in M}(-\infty; x^{(k)})\}}{N} = \frac{1}{N}\#\{n \in N \mid : \underset{k \in M}{\overset{n}{\&}} (x_n^{(k)} < x^{(k)})\}$$

„логическое и"

Введём дираковскую меру:

Опр. $\boxed{\delta^{(M)}_{X}(B) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & X \in B \\ 0, & X \in \mathbb{R}^M \setminus B \end{cases}} \qquad \delta^{(M)}_{X}(B) \equiv \mathbb{1}_{B \subset \mathbb{R}^M}(X) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$

– счётно-аддитивная ф-ция от переменной B

Опр. $\mathbb{1}_{B \subset E}(x) \overset{\text{def}}{\equiv} \delta_{x,E}(B)$ – при фикс. $x \in E$, счётно-адд. по $B \in \mathcal{P}(E)$

$$\mu_N = \frac{1}{N}\sum_{k \in N} \delta_{k,N}$$

Упр.

$$\frac{1}{N}\sum_{k \in N}(\delta_{k,N} \circ \xi_э^{-1}(B)) = \left(\left(\frac{1}{N}\sum_{k \in N}\delta_{k,N}\right) \circ \xi_э^{-1}\right)(B)$$

$$\Big\|$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k \in N}\delta^{N}_{\overline{\xi_э}(k)}(B) = \frac{1}{N}\sum_{k \in N}\delta^{M}_{\overline{x}_k}(B) = \mathbb{P}_{\overline{\xi_э}}(B)$$

Опр. Экспериментальная ф-ция совместного распределения строк в таблице $F^{\wedge}_{\xi_э}(x) = \mathbb{P}_{\overline{\xi_э}}\left(\prod_{k=0}^{M-1}(-\infty; x^{(k)})\right)$

$$\boxed{\mathbb{P}_{\bar{\xi}_\ni} = \frac{1}{\mathrm{Dom}(\xi_\ni)} \sum_{k \in \mathrm{Dom}\,\xi} \delta^M_{\bar{x}_k}}$$

Опр. $F^\wedge(x) \overset{?}{=} \mathbb{P}(-\infty; x)$ — всегда ли $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists$ такая $\hat{F}$?

Ответ: да.

Теорема. Для $\forall$ абстрактной слева ф-ции распр-я $\hat{F}$
$\exists!$ σ-аддитивная $\mathbb{P}: \mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \to [0;1]_{\mathbb{R}}$: $\forall x \in \mathbb{R} \mapsto \hat{F}(x) = \mathbb{P}(-\infty; x)$

$$\mathbb{P} = \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \delta^1_{x_k}\Big) + \underbrace{\overset{\geq 0}{\rho} \cdot \mathrm{Leb}_{\mathbb{R}}} + \text{д. син.}$$, где

одномерные δ-ф-ции

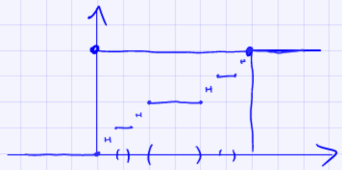
абс. непр. Интегрирование по мере Лебега

$$\exists \Big(\int_{\mathbb{R}} \rho(x) \,\mathrm{Leb}_{\mathbb{R},\text{борелевская}}(dx) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Big) = 1 - \text{д. сингул.}(\mathbb{R})$$, причём

если $F_{\text{д}}(x) = \text{д}(-\infty; x) \geq 0$, $\uparrow$, $F'_{\text{д}}(x+) = 0$ почти всюду по мере Лебега

непр.

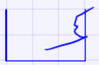
Пример (лестница Кантора)

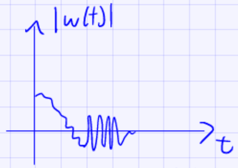


— рост произойдёт на мн-ве нуля
(сингулярная компонента)

(её отбросить нельзя в броуновском движении)

понятие „время Леви"

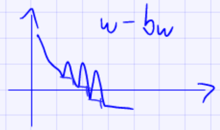




по теореме Скорохода

$$\mathbb{P}^{w} \xrightarrow[w \to |w|]{} \mathbb{P}^{|w|} = \mathbb{P}^{w - b_w}$$

можем положительные ф-ции получить другим способом:



$$b_w(t) = \min_{0 \leq \tau \leq t} w(\tau)$$

$b_w(0) - b_w(t)$

Фундаментальные характеристики конечномерных распределений.

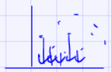
Опр. M-мерная вероятностная мера или мера вероятностного распределения M-мерного случайного вектора — это любая σ-аддитивная $\mathbb{P}: \mathcal{B}(\mathbb{R}^M) \to [0;1]$ такое, что $\mathbb{P}(\mathbb{R}^M) = 1$

Опр. Запас открытых мн-в — топология

Опр. В $\forall$ вещественном конечномерном линейном пр-ве L, вероятностным распр-ем в L наз-ся σ-адд. $\mathbb{P}: \mathcal{B}(L) \to [0,1]$ и $\mathbb{P}(L) = 1$

$\mathbb{R}^T$

$\forall T \subset M$ (кол-во времён) $\quad \underbrace{\mathbb{P}_{\xi} \circ \overset{-1}{\Gamma_T}} \leftarrow$ маргинальное распределение



(потерялась инфа о 1-ом поле)

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^T) = \mathrm{Card}\, T$

$$x: M \to \mathbb{R}$$
$$x\restriction_T$$

__Теорема__ при непрерывных отображениях евклидовых, нормированных, метрических, топологических прообраз $\forall$ борелевского мн-ва — борелевский в области определения.

Важные формулы!

1) $$\boxed{\mathbb{P}_{\bar\xi} = \frac{1}{\mathrm{Dom}\,\bar\xi_э} \sum_{k \in \mathrm{Dom}\,\bar\xi} \delta_{\bar x_k}^{M} = \mu_{\mathrm{Dom}\,\bar\xi_э} \circ \bar\xi_э^{\ominus} \equiv \bar\xi_э\left(\mu_{\mathrm{Dom}\,\bar\xi_э}\right)}$$

2) $$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \qquad f^{\ominus} \circ g^{\ominus} = (g \circ f)^{\ominus}$$

$$\mathbb{P}_{\bar\xi} \circ \Gamma_T^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Dom}\,\bar\xi_э} \sum_{k \in \mathrm{Dom}\,\bar\xi_э} \left(\delta_{\bar x_k}^{M} \circ \Gamma_T^{\ominus}\right) = \left(\mu_{\mathrm{Dom}\,\bar\xi_э} \circ \bar\xi_э^{\ominus}\right) \circ \Gamma_T^{\ominus} = \mu_{\mathrm{Dom}\,\bar\xi_э} \circ \left(\Pi_{\mathbb{R}^T}^{\mathbb{R}^M} \circ \bar\xi_э\right)^{-1}$$

$\delta_{\bar x_k \mid_T, \mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)}$

__Напоминание__:

$S_1 \subset \mathcal{P}(E_1) \qquad S_2 \subset \mathcal{P}(E_2)$

$\forall B_2 \in S_2 \hookrightarrow \varphi^{\ominus}(B) \in S_1)$

$x_1 \in E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2$

$S_1 \xrightarrow{\delta_{x_1, E_1, S_1}} \{0, 1\} = 2 \qquad \varphi(\delta_{x_1, E_1, S_1}) = \delta_{\varphi(x_1), E_2, S_2} = \delta_{x_1, E_1, S_1} \circ \varphi^{\ominus}$

$$\frac{1}{\mathrm{Dom}\,\bar\xi_э} \sum_{k \in \mathrm{Dom}\,\bar\xi_э} \delta_{\bar x_k \mid_T, \mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)}$$

Можем взять подмн-во T': $T' \subset T$.

$$\mathbb{P}_{\bar\xi_э} \circ \Gamma_{T'}^{M\,\ominus} \stackrel{?}{=} \left(\mathbb{P}_{\bar\xi_э} \circ \left(\Gamma_T^{M}\right)^{\ominus} \circ \left(\Gamma_{T'}^{T}\right)^{\ominus}\right) = \mathbb{P}_{\bar\xi_э} \circ \left(\Gamma_{T'}^{T} \circ \Gamma_T^{M}\right)^{\ominus}$$

$\forall T \quad \underbrace{(\mathbb{R}^T)^N \ni \bar\xi_э : N \to \mathbb{R}^T}$

$\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{k \in N} \left(\delta_{k,N} = \delta_{k,N,\mathcal{P}(N)}\right)$

$(\bar\Psi_э(k)) : T \to \mathbb{R}$ (ω) — процесс зависит от номера эксперимента

При фиксации номера k эксперимента — ф-ция (ω) наз-ся реализацией процесса

$$\mathbb{P}_{\bar\Psi_э} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^T) \ni B = \mu_{\mathrm{Dom}\,\bar\Psi_э} \circ (\bar\Psi_э^{\ominus}) \equiv \frac{1}{\mathrm{Dom}\,\bar\Psi_э} \sum_{k \in \mathrm{Dom}\,\bar\Psi_э} \delta_{\bar\Psi(k), \mathbb{R}^T, \mathcal{P}(\mathbb{R}^T)}$$