Лекция №2

Опр. Случайный процесс — случайная ф-ция времени $\in \mathbb{R}$

Случ. величины должны включать и постоянные величины

Плотность вероятн. константы — δ-ф-ция (обобщённая ф-ция)

Финитные ∞ дифф. ф-ции: $D(\mathbb{R}) = C_{00}^{\infty}(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists \varphi \in D$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx \overset{def}{=} \varphi(0)$ — функционал

Должен быть линейный непр. (нужна сх-ть $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\to} \varphi_0$)

Носитель $\overset{def}{=}$ замыкание мн-ва, где $\varphi \neq 0$

$\operatorname{supp} \varphi = \underset{\text{замыкание}}{Cl}\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}$

Сх-ть $\varphi_n \to \varphi \overset{def}{=} \begin{cases} 1)\ (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp}\varphi_n) \text{ — огр. подмн-во } \mathbb{R} \\ 2)\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi_n^{(k)} \underset{n\to\infty}{\overset{x\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} \varphi^{(k)} \end{cases}$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx$ — в сумме Римана брали отрезки, dx - длина по мере Жордана

Опр. Теоретико-множественная мера $\overset{def}{=}$ {Ф-ция, опр. на системе мн-в}

Опр. χ^d — d-мерная мера Жордана

$\operatorname{Dom} \chi^d = K^d = \{A \subset \mathbb{R}^d \mid A \text{ измеримо по } \chi^d\}$ (будет кольцо)

Опр. Мера Дирака $\overset{def}{=} \varphi(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\delta_0(dx) = // \delta_0(A): \operatorname{Dom}\chi^d \to \begin{cases}1, 0\in A\\ 0, 0\notin A\end{cases} // =$

$= \int\limits_{\{0\}} \varphi(0)\,\delta_0(dx) + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \varphi(x)\,\delta_0(dx) = // \exists N_\varphi = \sup\{|x| \mid x \in \operatorname{supp}\varphi\}$ — чтобы остаться в рамках измеримых мн-в по Жордану $// =$

$= \int\limits_{\{0\}} \varphi(0)\delta_0(dx) + \int\limits_{[-N_\varphi; N_\varphi]} \varphi(x)\,\delta_0(dx)$

Если определена мера, то $\int\limits_A 1\,\mu(dx) \overset{def}{=} \mu(A)$

По аналогии с инт. Римана разбиваем на измеримые по Жордану подмн-ва, не пересекающиеся между собой, диаметры $\to 0$ (т.е. не на малые отрезки, а на малые в смысле меры подмн-ва)

$\Sigma\, \varphi(x_k)\,\mu(\Delta x_k)$ непересекающиеся

С плотностью распр-я плохо, с мерой распр-я — хорошо

Опр. Теоретико-множественное кольцо $\overset{def}{=} \begin{cases} \text{система мн-в } S: \\ 1)\ \emptyset \in S \\ 2)\ \forall A \in S, B \in S \Rightarrow A\cup B \in S, A\setminus B \in S \end{cases}$

Опр. 1) Система мн-в дизъюнктивна $\overset{def}{=} \forall A, B \in S, A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

2) Индекс. система $(A_i)_{i\in I}$ — дизъюнктивна $\overset{def}{=} \forall i,j \in I, i\neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

Опр. P — аддитивная полугруппа отн. "+" $\overset{def}{=}$ 1) "+" : $P\times P \to P$

2) "+" — ассоциативна

Примеры 1) $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

2) $[0; +\infty]_{\mathbb{R}}$

3) веществ. векторные пр-ва

Абелева $\overset{def}{=}$ коммутативность

Опр. Абелев аддитивный моноид $\overset{def}{=}$ 1) аддитивная полугруппа

2) $\exists 0$ — двусторонний нейтральный элемент: $a+0 = 0+a = a$

Опр.

$\exists A \subset B$ Индикатор $\mathbb{1}_{A\subset B} \overset{def}{=} B \ni x \mapsto \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \in B \setminus A \end{cases}$

Опр. (опр-е интеграла индикаторной ф-ции)

$\exists S$ – кольцо мн-в, $\mu : S \to (P, +)$, μ – аддитивна

$\exists E_S \overset{def}{=} \bigcup S \ (= \bigcup_{A\in S} A)$ – единица кольца S (E_S не обязана $\in S$)

$\exists \forall A \in S$, $\mu(A) \neq \infty$ (μ – конечное мн-во)

$$\int_A 1 \mu(dx) = \int_{E_S} 1_{A\subset E_S}(x)\, \mu(dx) = I_\mu(\mathbb{1}_{A\subset E_S}) = \mu(A)$$

Теор. (о линейности интеграла)

$\exists I_\mu : \underbrace{\{\mathbb{1}_{A\subset E_S} \mid A \in S, \mu(A) \neq +\infty\}}_{\mathrm{Dom}\, I_\mu} \subset \mathbb{R}^{E_S} \mapsto P \setminus \{+\infty\}$

I_μ продолжается до линейного оператора на $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Dom}\, I_\mu)$

// $\mathbb{1}_{A\subset E_S} \mapsto \mathbb{R}$, $\mu(A) \mapsto$ векторное $\Rightarrow$ $I_\mu \mapsto$ векторное

// $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Dom}\, I_\mu)$ – простые

// для сложных нужна сходимость

Понятие вариации меры:

Опр. Пусть аддит. мера $\mu : S \to (N, \|\cdot\|)$,
кольцо ↑ нормированное пр-во

она наз-ся "ограниченной вариации", если

$$\|\mu\|_{var} = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} \|\mu(A_j)\| \;\middle|\; \begin{matrix} n\in\mathbb{N} \\ : (A_1, \dots, A_n) \in S^n \end{matrix} \right\} < \infty$$

летние, непересек. мн-ва дизъюнкторы

Пример:

$\forall A \in K_d$ $\quad K_A = \{B \subset A \mid B \in K_d\}$

$\lambda^d|_{K_A} \quad \|\lambda|_{K_A}\| = \lambda^d(A)$

Неравенство (обобщение стандартных) для $\forall$ простой ф-ции

$$\left\|\int_{E_S} f(x)\, \mu(dx)\right\| \leq \left(\sup_{x\in E_S} |f(x)|\right) \|\mu\|_{var} \quad (*)$$

Пример: $c_1 1_{A_1\subset E_S} + c_2 1_{A_2\subset E_S} = \sum \tilde{c}_j 1_{B_j}$

индикаторы попарно непересек. мн-в,

тогда $\hat{c}_j$ – значение ф-ции.

$\square$ $\left\|\int_{E_S} f(x)\mu(dx)\right\| = \left\|\int_{E_S} c_k \cdot 1_{A_j}\, \mu(dx)\right\| = \left\|\sum c_k \mu(A_k)\right\|_N \leq \sum |c_k| \|\mu(A_k)\| \leq$

$\leq \|f\| \sum_{j=1}^{n} \|\mu(A_j)\| \leq \underbrace{\sup_{x\in E_S} |f(x)|}_{\|f\|_\infty} \cdot \|\mu\|_{var}$

← потом объясним $\blacksquare$

Следствие

$\forall$ простых $f, g : E_S \to \mathbb{R}$

$\| I_\mu(f) - I_\mu(g) \| = \| I_\mu(f-g) \| \le \|f-g\|_\infty \cdot \|\mu\|_{var}$

– св-во Липшицевости

Следствие если $f_n \underset{E_S}{\rightrightarrows} g$ (простые) $\Rightarrow \| I_\mu(f_n) - I_\mu(g) \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Опр. Нормированное пр-во N с нормой $\|\cdot\|$ наз-ся полным (банаховым) ("N полно относительно $\|\cdot\|$", "$\|\cdot\|$ полна на N"), если $\forall$ посл-ти $(\bar{x}_{(k)}) \in N^{\mathbb{N}}$ $\operatorname{diam}(\bar{x}_{(k+n)})_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(отсюда следует, что $\exists \bar{x}_{(\infty)} \in N : \|\bar{x}_{(k)} - \bar{x}_\infty\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$)

Теорема: Пусть μ аддит. на кольце (теоретико-множественном) S, со значением в $(N, \|\cdot\|)$ банаховом. Тогда I_μ с простых ф-ций продолжается однозначно со св-вом (*) на пр-во равномерных пределов пос-тей простых ф-ций.

Факт Каждое нормированное пр-во – подпр-во в полном нормированном $N^{\text{нормир.}} \subset$ полному нормированному

Св-во (счётной аддитивности)

Опр. Аддитивная мера $\mu : \underset{\text{кольца}}{S} \to B^{\|\cdot\|}_{\text{банах.}}$ наз-ся σ-аддитивной, если $\forall$ дизъюнктной счётной $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ выполняется, что

если $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in S$], то $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_k)$ сх-ся и равен $\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k)$

Хотим, чтобы система была замкнутой отн. счётного пересечения

Пример: S_0 – огранич. промежутки

$\left\{ \begin{matrix} \cup A_k \\ \cap A_k \end{matrix} \;\middle|\; A_k \in S_0 \right\} = S_1$ $\qquad \left\{ \text{—//—} \right\} = S_2$

Получаем новую систему

Вспомним ординалы:

$S_0, S_1 \subset \ldots \subset S_n \ldots$ $\quad S_{\omega_0} \bigcup_{k\in\omega_0} S_k$ $\quad S_{\omega_0+1}$ – система увеличится

Когда рассмотрим все счётные ординалы

$\bigcup \{S_\alpha\}_{\alpha < c = 2^{\omega_0}} = B(\mathbb{R})$

борелевские подмн-ва прямой

Опр. Кольцо мн-в S наз-ся алгеброй, если $\bigcup S = E_S \in S$.

E_S – единица кольца

Опр. Сигма алгеброй наз-ся $\forall$ алгебра мн-в A:

$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in A \ni \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Опр. Борелевское подмн-во прямой – миним. среди таких σ-алгебр с единицей $\mathbb{R}$, кот-ые содержат промежутки

Δ – теор. вер. разность

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ – миним. σ-алгебра с единицей $\mathbb{R}^d$ такие, что:

она содержит — все открытые подмн-ва
все открытые клетки
все клетки

(любят в теор. вере т.к. все эксперим. вероятности дают меры промежутков)

σ-аддитив.

<u>Теорема</u>. Пусть A-алгебра мн-в, $\mu : A \to [0, \infty)$ $[0, \mu(E_A)]$. Тогда

$\exists$ σ-аддитив. на $\sigma(A)$ $\left[= \bigcap \{ \mathcal{B} \} : \mathcal{B} - \sigma\text{-алгебра с единицей } E_A, A \subset \mathcal{B} \right\}$

мера $\tilde{\mu} : \sigma(A) \to [0, \mu(E_A)]$ σ-аддитив. (счётно-аддитивн.) $\tilde{\mu}\restriction_A = \mu$

сужение