Лекция №4

Пусть V – векторное пр-во над полем $\mathbb{K}$ (в курсе $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ $\mathbb{Q}$)
не надо

Пр-ва: классических сост-й – вещественно
квантовых сост-й
значения наблюдаемых величин } – комплексные

$p: V$ ~ ф-ция над векторным пр-вом

$p: V \to [0; \infty)_{\mathbb{R}}$ наз-ся полунормой, если

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\forall \bar{x} \in V$ $\forall y \in V$

1) $p(\lambda \bar{x}) = |\lambda| p(\bar{x})$

2) $p(\bar{x} + \bar{y}) \leq p(\bar{x}) + p(\bar{y})$

Полунорма наз-ся нормой, если

$p(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$ (невырожденность)

Полуметрика ρ_p, порождённая полунормой p:

$\rho_p(\bar{x}, \bar{y}) = p(\bar{y} - \bar{x}) \geq \rho_p(\bar{y}, \bar{x})$

$\rho(\bar{x}, \bar{x}) = 0$

$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = p((\bar{y} - \bar{z}) + (\bar{z} - \bar{x})) \leq \rho_p(\bar{x}, \bar{z}) + \rho_p(\bar{z}, \bar{y})$

Полуметрикой на мн-ве M наз-ся $\forall$ ф-ция

$\rho: M \times M \to [0; +\infty)$ такая, что:

1) $\forall x \in M \hookrightarrow \rho(x, x) = 0$

2) $\forall y \in M \hookrightarrow \rho(x, y) = \rho(y, x)$

3) $\forall z \in M \hookrightarrow \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Полуметрику назовём метрикой, если

0) $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

Дискретная метрика:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Полуметрика:

$\rho(x, y) = 0$

Примеры нормы на $\forall$ лин. пр-ве:

$\|x\| = \sum |k - T|$

$\max |k - T|$

Следствие: Если p – норма $\Rightarrow \rho_p$ – метрика, порождённая нормой

Опр. Если ρ – полуметрика на M, то говорят, что на M введена структура полуметрического пр-ва.

$B_r^{\rho}(x_0) = \{x \in M \mid \rho(x, x_0) < r\}$ $(x_0 \in M, r \in \mathbb{R}, r > 0)$ – шар

„открытый шар", открытое мн-во

Опр. Система $\{U \subset M \mid U$ явл-ся ρ-открытым$\} = \tau_\rho$ – топология

Из опр-я шара возникает понятие предела пос-ти, ρ замыкание мн-ва

Теорема: $\bar{S} = \bigcap \{F\ \rho\text{-замкнуто} \supset S\}$
(subset)

Опр. ρ замкнутые мн-ва $F = M \setminus U$

Опр. Посл-ть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ т-к полуметрическое пр-во (M,ρ) наз-ся ρ-фундаментальной (Коши), если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall n \in \mathbb{N}, \ \underbrace{\forall m \in \mathbb{N}, m \geq N_\varepsilon \leq n \Rightarrow \rho(x_m, x_n) \leq \varepsilon}_{-\varepsilon \leq \mathrm{diam}_\rho (x_n)_{n \geq N_\varepsilon} \leq \varepsilon}$

$\{\mathrm{diam}_\rho \{x_n \mid n \geq N\}\}_{N\in\mathbb{N}}$ – бесконечно малая $\quad (\rho(x_n, x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0)$

В полуметрическом пр-ве м.б. несколько пределов

Утв Как из полуметрического пр-ва получить метрическое?

$x \underset{\rho}{\sim} y \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0$

Фактор M: $\forall x \quad \tilde{x} = \{ y \in M \mid x \underset{\rho}{\sim} y \}$

симметричность: $\rho(x,y) = 0 = \rho(y,x)$

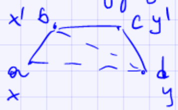
рефлексивность: $x \underset{\rho}{\sim} x \Leftarrow \rho(x,x) = 0$

транзитивность: $x \underset{\rho}{\sim} z \underset{\rho}{\sim} y \quad 0 \leq \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

Тогда: $\hat{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho(x,y)$

$x' \in \tilde{x}, \ y' \in \tilde{y}$. Верно ли $\rho(x,y) = \rho(x', y')$

☐ По индукции



$\rho(a,d) \leq \rho(a,b) + \underbrace{\rho(b,d)}_{} \leq \underline{\rho(a,b)} + \rho(b,c) + \underline{\rho(c,d)}$

$\rho(b,c) \leq \underline{\rho(a,b)} + \rho(a,d) + \underline{\rho(c,d)}$

$\left| \begin{matrix} \rho(a,d) - \rho(b,c) \\ \rho(b,c) - \rho(a,d) \end{matrix} \right| \begin{matrix} \leq \rho(a,b) + \rho(c,d) \\ \leq \text{— // —} \end{matrix}$

$|\rho(x,y) - \rho(x',y')| \leq \overbrace{\rho(x,x')}^{0} + \overbrace{\rho(y,y')}^{0}$ ☒

Утв. Пополнение метрического пр-ва из полуметрического

Пусть $\begin{matrix} x_n \in \tilde{x} \\ \downarrow \\ x_\infty \in \hat{x} \end{matrix}$. Хотим док-ть $\rho(x_\infty, x) = 0$.

☐

$\rho(x,y)$ – непрерывна по совокупности переменных.

$\rho(x_\infty, x) = \lim \rho(x_n, x) = 0$

$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_\infty, y_\infty)| \leq \rho(x_n, x_\infty) + \rho(y_n, y_\infty)$ ☒

Опр. (M,ρ) полно $\Leftrightarrow$ $\forall$ посл-ть ρ-Коши имеет ρ предел в M.

Пусть $\underset{\text{алгебра мн-в}}{\mathfrak{a}}$ с единицей $E_\mathfrak{a}$ $\underset{\text{аддитивна}}{\xrightarrow{\mu}}$ (N полунормирована над $\mathbb{K}, \rho$)

Напоминание: $\|\mu\|_{var(\rho)} := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} \rho(\mu(A_k)) \ \middle| \ \begin{matrix} \forall k \in \{1, \dots, n\} \\ A_k \in \mathfrak{a} \\ A_k \cap A_\ell = \emptyset, k \neq \ell \end{matrix} \right\}$

(норма вариации)

$I_\mu(\overset{\text{простейшие}}{1_{A \subset E_\mathfrak{a}}}) = \mu(A) \in N$

Теорема на (линейной оболочке) $\mathrm{span}_{\mathbb{K}} \{1_{A\subset E_\mathfrak{a}} \mid A \in \mathfrak{a}\}$ $\overset{\text{простые } S}{}$ оператор I_μ единственным образом продолжается до линейного оператора (I_μ)

$S(E_\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ – простые интегрируемые (простые $\mathfrak{a}$-измеримые) $\boxed{\mathfrak{a} \ni A \text{ наз-ся } \mathfrak{a}\text{-изм.}}$

Замечание если $\|\mu\|_{var} < \infty$, μ аддитивна на алгебре $\mathfrak{a}$ с единицей $E_\mathfrak{a}$,

$I_\mu(f) = \int_{E_\mathfrak{a}} f(x)\mu(dx) = \sum c_k \mu(A_k)$, $\quad f = \sum c_k 1_{A_k \subset E_\mathfrak{a}}$

$\rho(I_\mu(f)) \leq \left(\sup_{x\in E_\mathfrak{a}} |f(x)|\right) \|\mu\|_{var}$

если p — норма, то и $\|\cdot\|_{var(p)}$ тоже норма

Опр. $B.V.(a, N)$ (bounded variation) $= \{\mu : a \to N \mid \|\mu\|_{var(p)} < \infty\}$ μ-адд.

Замечание на $BV(a, (N, p)) \ni \mu \mapsto \|\mu\|_{var(p)} \geq 0$ (отображение) явл-ся полунормой

Опр. $B(E, \mathbb{K})$ — пр-во ограниченных ф-ций на мн-ве E

$S(E_a, a) \subset B(E, \mathbb{K}) \ni f_{\text{норма}} \mapsto \sup\limits_{x \in E_a} |f(x)| = \|f\|_\infty$

$f_{\text{норма}} \mapsto \sup\limits_{x \in E_a} |f(x)| = \|f\|_\infty$ (равномерная сх-ть)

Опр. Подмн-во $S \subset M$ обладает структурой полуметрического подпр-ва в (M, ρ), если S снабжено полуметрикой $\rho\restriction_{S \times S}$

$(S, \rho\restriction_{S \times S})$ — полуметрическое подпр-во в (M, ρ)

Опр. Пусть (M_1, ρ_1) и (M_2, ρ_2) — полуметрические пр-ва, $\varphi : M_1 \xrightarrow{\text{на}} M_2$ биекция, $\forall x_1 \in M_1, \forall y_1 \in M_1$ $\rho_1(x_1, y_1) = \rho_2(\varphi(x_1), \varphi(y_1))$. Тогда φ наз-ся изометрией (M_1, ρ_1) на (M_2, ρ_2)

Теорема (об универсальности метрики, порождённой нормой $\rho_{\|\cdot\|_\infty}$ в классе всех метрических пр-в). $\forall$ метрические пр-ва (M, ρ).

$\exists x^* \in M \Rightarrow M \ni m \mapsto \underset{B(M, \mathbb{R})}{\underset{\Uparrow}{f_m}} \equiv \{M \ni x \mapsto \rho(x, m) - \rho(x, x^*)\}$.

$(\varphi(m) = f_m)$

Тогда φ — изометрия (M, ρ) на метрическое подпр-во $\varphi(M)$ в $(B(M, \mathbb{R}), \rho_{\|\cdot\|_\infty})$

D $|f_m(x)| \leq \rho(m, x^*)$ — фикс.

инъективность: Пусть $f_{m_1} \equiv f_{m_2}$. $\underset{\rho(m_1, m_1) - \rho(m_1, x^*)}{\underset{\|}{f_{m_1}(m_1)}} = f_{m_2}(m_1) = \rho(m_1, m_2) - \rho(m_1, x^*)$

изометричность: $\rho(m_1, m_2) = \|f_{m_1} - f_{m_2}\|_\infty = \sup\limits_{x \in M} |\rho(x, m_1) - \rho(x, m_2)|$

$\geq$ — достаточно т.к. справа sup — напи. верхняя грань

$\leq$ — тоже достаточно ⊠

Полно ли $(B(M, \mathbb{R}), \rho_{\|\cdot\|_\infty})$?

Теорема $B(M, \mathbb{K})$ полно отн. $\rho_{\|\cdot\|_\infty}$

D f_n — фунд. посл.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall m, n \geq N$ $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ — св-во фундаментальности

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n \geq N$ $\forall x_0$

$\|f_n - f_\infty\| < \varepsilon$

$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup |f_n(x) - f_m(x)| \geq |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$

$\varepsilon \geq \|f_n - f_m\| \geq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \Rightarrow \varepsilon > |f_n(x_0) - f_\infty(x_0)|$

$\{f_n\}$ $\sup\limits_{x_0 \in M} |f_n(x_0) - f_\infty(x_0)| < \varepsilon$ $\{f_n(x_0)\} \to f_\infty(x_0)$ ⊠

Следствие $\varepsilon = 1, n = N_1$

$1 \geq \sup\limits_{x} \|f_{N_1}(x) - f_\infty(x)\|_{\mathbb{K}}$

Лемма Пусть (M,ρ) полно, $S\subset M$. Тогда (S явл-ся ρ-замкнуто)

$\Leftrightarrow$ (($S, \rho|_{S\times S}$) полно)

$\triangleright$

$\Rightarrow$ Пусть $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – посл-ть $\rho|_{S\times S}$-Коши

$\rho|_{S\times S}(s_n, s_m) = \rho(s_m, s_n)$ (расстояния те же) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, s_\infty \in M:\ \rho(s_n, s_\infty) \to 0$ (S замкнуто $\Rightarrow$ полно)

$\Leftarrow$ $M \in s_\infty \xleftarrow[n\to\infty]{\rho} s_n \in S$

$\rho(s_n, s_\infty) \to 0$

$\underset{\substack{\parallel \\ \rho|_{S\times S}}}{\rho(s_n, s_m)} \le \underset{<\frac{\varepsilon}{2}}{\rho(s_n, s_\infty)} + \underset{<\frac{\varepsilon}{2}}{\rho(s_m, s_\infty)}$

– получим фунд. посл-ть в этом же пр-ве $\Rightarrow \exists\, \bar{\bar{s}} \in S = \lim_{\rho|_{S\times S}} \bar{\bar{s}}_n$

$\rho|_{S\times S}(s_n, s) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$M \ni \underset{\substack{\parallel \\ s\in S}}{s_\infty} \xleftarrow[n\to\infty]{\rho} s_n \in S \quad 0 \le \rho(s_\infty, s) \le \rho(s_\infty, s_n) + \rho(s_n, s)$ $\blacksquare$

Теорема (о пополнении метрич. пр-в)

$\forall$ метрич. пр-во (M,ρ) явл.-ся метрич. подпр-вом нек-го полного метрического пр-ва $(\overline{M}, \bar\rho)$

$\triangleright$ $(M,\rho) \rightleftarrows \varphi(M) \subset B(M, \rho_{\|\cdot\|_\infty})$

изометрия $\quad \overline{\varphi(M)}$ – замкнутое в полном

$\rho_{\|\cdot\|_\infty}|_{\overline{\varphi(M)}\times\overline{\varphi(M)}} = \rho_\infty$

$M \ni m \mapsto \varphi(m) \in \varphi(M) \subset \overline{\varphi(M)}$

$\overline{M} = (\overline{\varphi(M)} \setminus \varphi(M)) \cup M$

$$\bar\rho(m_1, m_2) = \begin{cases} \rho(\overline{m_1}, \overline{m_2}), & \overline{m_1}, \overline{m_2} \in M \\ \rho_\infty(\overline{m_1}, \overline{m_2}), & \overline{m_1}, \overline{m_2} \in \overline{\varphi(M)} \setminus \varphi(M) \\ \rho_\infty(\overline{m_1}, \varphi(\overline{m_2})), & \overline{m_1} \in \overline{\varphi(M)} \setminus \varphi(M),\ \overline{m_2} \in M \end{cases}$$

далее очевидно $\blacksquare$

(пр-во простых ограниченных интегр. ф-ций

$S(E_\alpha, \alpha) \to (N, p)$

$\rho_\infty \qquad p$ – норма

$\rho_p(I_\alpha(f), I_\alpha(g)) = p(I_\alpha(f) - I_\alpha(g)) = p(I_\alpha(f-g)) \le \|f-g\| \cdot \|\alpha\|_{Var(p)} =$

$= \underbrace{\|\alpha\|_{Var(p)}}_{L\text{ – постоянная Липшица}} \cdot \rho_\infty$

Опр. Отобр-е $\varphi: \overset{\text{полуметр.}}{(M_1, \rho_1)} \to \overset{\text{полуметр.}}{(M_2, \rho_2)}$ наз-ся липшицевым с конст. Липшица L, если $\forall (x,y) \in M_1\times M_1 \hookrightarrow \rho_2(\varphi(x_1), \varphi(y_1)) \le L\rho_1(x_1, y_1)$

φ наз-ся равн. непр., если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall (x_1, y_1) \in M_1 \times M_1 \hookrightarrow$

$\hookrightarrow \rho_1(x_1, y_1) \le \delta \Rightarrow \rho_2(\varphi(x_1), \varphi(y_1)) \le \varepsilon \qquad \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{1+L}$

Теорема (Липшицев лин. оператор между нормир. пр-вами продолжается до липшицевого с такой же константой линейного оператора между пополнениями)