Лекция №11

$0 = t_0 \in t_0 = \{t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$ $\quad \overline{n=0}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad\Big|\quad$ $t_t := \{t_1 < t_2 < \dots < t_n\}$

было $\quad\Big|\quad$ $T \subset [0; +\infty)$ сегодня

$$\forall\, e^{i\sum_{j=0}^{n} y_j \xi_{t_j}} = \chi_{\xi_{t_0}\xi_{t_1}\dots\xi_{t_n}}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\sum_{k=0}^{n} x_k y_k} P_{t_0}(d\bar{x}) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_{x_0}} \delta_0(x_0) \int_{\mathbb{R}_{x_1}} P_{t_1-t_0}(x_1-x_0)\,dx_1 \int P_{t_2-t_1}(x_2-x_1)\,dx_2 \dots \int P_{t_n-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1})\, e^{i\sum_{k=0}^{n} x_k y_k}$$

$$= \int_{C([0,\infty),\mathbb{R})} e^{i\sum_{k=0}^{n} y_k w(t_k)} \cdot W(dw)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_{x_1\dots x_n}} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2(t_k-t_{k-1})}}}{\sqrt{2\pi(t_k-t_{k-1})}} \right) e^{i\sum_{k=0}^{n} y_k x_k}\, d\bar{x}_{1\dots n} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} y_k z_j = \sum z_j \Big(\sum_{k=j}^{n} y_k\Big)$$

$$= \int\dots\int_{\mathbb{R}_{x_1\dots x_n}} \prod_{j=1}^{n} P_{t_j-t_{j-1}}(z_j)\, e^{i\sum z_j \sum_{k=j} y_k} dz_1\dots dz_n = e^{-\sum_{j=1}^{n} \frac{(t_j-t_{j-1})\left(\sum_{k=j}^{n} y_k\right)^2}{2}}$$

$z_0 = x_0$, $z_1 = x_1 - x_0$, $z_2 = x_2 - x_1$, $z_k = x_k - x_{k-1}$

$x_0 = z_0$, $x_1 = z_1 + z_0$, $x_2 = z_2 + z_1 + z_0$, $x_k = \sum_{j=0}^{k} z_j$

$\bar{x}_{(0)} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad$ $\bar{x}_{(+)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$P_{t_+} = P_{t_0} \circ \left(\Lambda^{\{0\dots n\}}_{\{1\dots n\}}\right)^{\ominus}$$

$$\chi_{\xi_{t_1}\dots\xi_{t_n}}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^{\{1\dots n\}}} e^{i\sum_{k=1}^{n} x_k y_k} P_{t_+}(d\bar{x}_{(+)}) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{\{1\dots n\}}} e^{i\bar{x}_{(+)}\cdot\bar{y}_{(+)}} \Big(P_{t_0} \circ \underbrace{\left(\Lambda^{\{0\dots n\}}_{\{1\dots n\}}\right)^{\ominus}\Big)(d\bar{x}_{(+)})}_{d\bar{x}_{(0)}} = \int_{\mathbb{R}^{n+1} \ni \bar{x}_{(0)} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_n \end{pmatrix}} e^{i\sum_{k=1}^{n} x_k y_k} P_{t_0}(d\bar{x}_{(0)}) =$$

$y_0 := 0$

$$= e^{-\sum_{j=1}^{n} \frac{(t_j-t_{j-1})\left(\sum_{k=j}^{n} y_k\right)^2}{2}}$$

Замечание: Поля (процессы) с независимыми гауссовыми значениями — гауссовы поля (соответственно, процессы)

$\varnothing \neq T$ $\quad t \in \mathcal{P}_{fin}(T) \setminus \{\varnothing\}$

$\bigotimes_{t\in t} P_{\{t\}} = P_t : \mathcal{B}(\mathbb{R}^t) \to [0,1]$; $\quad \boxed{x(t) \equiv x_t}$

$$\chi_{P_t}(y \in \mathbb{R}^t) := \int_{\mathbb{R}^t_{\bar{x}}} \underbrace{e^{i\sum_{t\in t} x(t)y(t)}}_{\prod_{t\in t} e^{ix(t)y(t)}} P_t(d\bar{x}) = \int\dots\int_{\mathbb{R}^t} \prod_{t\in t} e^{ix_t y_t} \bigotimes_{t\in t} P_{\{t\}}$$

$$= \{\text{по теор. Фубини}\} = \prod_{t\in t} \int_{\mathbb{R}\ni x_t} e^{ix_t y_t} P_{\{t\}}(dx_t) = \prod_{t\in t} \chi_{P_{\{t\}}}(y_t)$$

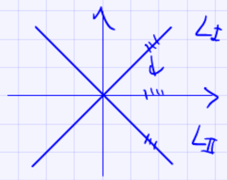
$$e^{-\sum_{t\in t} Q(y_t) + i\sum_{t\in t} y_t a_t} = \prod_{t\in t} e^{-Q(y_t) + i y_t a_t}$$

Следствие: Белый шум — гауссов процесс

Контрпример: $\exists P_{1,2}$ вер. : $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2_{x_1,x_2}) \to [0;1]$ σ-адд. — негауссова мера, такая, что $Pr_1(P_{1,2})$ и $Pr_2(P_{1,2})$ гауссовские

$\quad\quad P_{1,2} \circ (Pr_1)^{\ominus} \quad P_{1,2} \circ (Pr_2)^{\ominus}$

Проектирование:



Pr_1 — проектор

$(x,x) \to (x)$

$(x,-x) \xrightarrow{Pr_1} (x)$

$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi}$ $\quad f(x) = e^{-\pi x^2}$

$\mathbb{P}_I, \mathbb{P}_{II} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2_{1,2}) \to [0;1]$

$\forall J \in \{I, II\}$ $\quad \mathbb{P}_J(B) = \int\limits_{Pr_1\restriction(B\cap L_J)} e^{-\pi x^2} Leb(dx)$ $\quad$ (1)

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ $\quad \mathbb{P}_{1,2}(B) = \frac12 P_I(B) + \frac12 P_{II}(B)$

$\chi_{\mathbb{P}}\binom{y_1}{y_2} := \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i\sum_{k=1}^{2} x_k y_k}\, \mathbb{P}_{1,2}(d\bar x) =$ {линейность интеграла по мере интегр-
ования} $= \frac12 \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{ix_1y_1+ix_2y_2}\, \mathbb{P}_I(d\bar x)}_{\int\limits_{L_I\ni\binom{x_1}{x_2}} e^{ix_1y_1+ix_2y_2}\,\mathbb{P}_I(d\bar x) = \int\limits_{\mathbb{R}\ni x} e^{ix(y_1+y_2)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = e^{-\frac{(y_1+y_2)^2}{4\pi}}} + \frac12 \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{ix_1y_1+ix_2y_2}\, \mathbb{P}_{II}(d\bar x) = \{\mathbb{R}^2 = L_I \sqcup \mathbb{R}^2\setminus L$

Напоминание: $\boxed{M: U_u \to V_x}$ — биекция

$\int\limits_{M(U)\ni x} \varphi(x)\,\mu_V(dx) = \int\limits_U \varphi(M(u))\,(\mu_V\circ M)(du)$

$x = Mu$
$dx = du$
$dx = M du$

Упр. $\forall b \in CB(\mathbb{R}^2)$ $\quad$ (1) $\Longleftrightarrow$ (2)

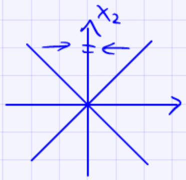
$\int\limits_{\mathbb{R}^2} b(\bar x)\, P_J(d\bar x) = \int\limits_{\mathbb{R}\ni x} b\binom{x}{\pm x} e^{-\pi x^2} Leb_{\mathbb{R}}(dx)$ $\quad$ (2)

$\mathcal{X} = \frac12\left(e^{-\frac{(y_1+y_2)^2}{4\pi}} + e^{-\frac{(y_1-y_2)^2}{4\pi}}\right)$ — сумма квадр. экспонент не есть квадр. экспонента

$\chi_{Pr_1(\mathbb{P}_{1,2})}(\underset{2}{y_1}) = \int\limits_{\mathbb{R}\ni x_1} e^{i\underset{2}{x_1}\underset{2}{y_1}}\, \mathbb{P}_{1,2}\circ \underbrace{(\underset{2}{Pr_1})^{(-1)}(d\underset{2}{x_1})}_{d\bar z \quad x_1 = Pr\,\bar z} = \int\limits_{\mathbb{R}^2\ni\bar z} e^{i\underset{2}{y_1}\underset{2}{Pr_1}(\bar z)}\, P_{1,2}(d$

$= \left(\frac12 \int\limits_{\mathbb{R}^2\ni\bar z} e^{i\underset{2}{y_1}\underset{2}{Pr_1}(\bar z)}\, \mathbb{P}_I(d\bar z)\right) + \left(\frac12 \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i\underset{2}{y_1}\underset{2}{Pr_1}(\bar z)}\, \mathbb{P}_{II}(d\bar z)\right) =$

$= \left(\frac12 \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\underset{2}{y_1}x} e^{-\pi x^2} dx\right) + \left(\frac12 \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-iy_1x} e^{-\pi x^2} dx\right) = e^{-\frac{y_1^2}{4\pi}}$
$e^{-\frac{(\pm y_2)^2}{4\pi}}$



обе проекции — гауссовы.

? $\quad z_1 = \frac{y_1+y_2}{\sqrt2} \quad z_2 = \frac{y_1-y_2}{\sqrt2}$

Тогда

$\mathbb{P}_{1,2} = \overset{\text{ЛЧ}}{\frac{e^{-\frac{z_1^2}{4\pi}} + e^{-\frac{z_2^2}{4\pi}}}{2}} \neq \overset{\text{ПЧ}}{e^{i(\alpha_1z_1+\alpha_2z_2) - \frac12(C\bar z,\bar z)_{\mathbb{R}^2}}}$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ т.к. слева $\in \mathbb{R}$

Рассмотрим Тейлоровские разложения второй дифф-и в нул

$d^2(\text{Л.Ч.})|_0 = \frac12\left(-\frac{dz_1^2}{4\pi} - \frac{dz_2^2}{4\pi}\right) = -\frac{1}{8\pi}(dz_1^2 + dz_2^2)$

$f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} a^k$

$d^2(\text{П.Ч.})|_0 = -\frac12(C\,d\bar z, d\bar z) \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\pi} \end{pmatrix}$

$d^4(\text{Л.Ч.})|_0 = \frac12\left(\frac12\left(-\frac{(dz_1)^2}{4\pi}\right)^2 + \frac12\left(-\frac{(dz_2)^2}{4\pi}\right)^2\right)$ — слагаемые только 4-й степ

$d^4(\text{П.Ч.})|_0 =$ (есть перекрестные слагаемые) $= \frac12\left(-\frac{1}{8\pi}(dz_1^2 + dz_2^2)\right)^2$

Стационарные процессы

Группа по сложению: $(\mathbb{R}_{\geq},+)$ $(T,+)$ $0\in T$, $T+T\subset T$

подмоноид — полугруппа. $\exists$ нейтральный эл-т

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}_0$ — два наиболее встречающихся подмн-ва

Опр 1 Пусть T — подмоноид в $(\mathbb{R},+)$. Тогда процесс с мн-вом моментов времени T со значениями в $\mathbb{R}^d$ наз-ся стационарным в узком смысле $\Leftrightarrow$ $\forall \{t_1<t_2<\ldots<t_n\}\subset T$ $\forall \tau\in T$ $\hookrightarrow$

$\hookrightarrow$ $\mathbb{P}_{\{t_1,\ldots,t_n\}} = \mathbb{P}_{\{t_1+\tau,\ldots,t_n+\tau\}}$

Пример Белый шум (стандартный гаусс)

Опр 2 Пусть $T=\mathbb{Z}$. Тогда процессом с мн-вом моментов времени T со значением в $\mathbb{C}$ наз-ся стационарным в широком смысле $\Leftrightarrow$ $\forall t\in\mathbb{Z}$ $\mathbb{M}\xi_t = \mathbb{M}\xi_0 = m \in \mathbb{C}$ $\forall s\in\mathbb{Z}$

$\mathbb{M}|\xi_t|^2<\infty$ $\mathbb{M}((\xi_t-m)(\xi_s-m)^+) = \mathbb{M}((\xi_{t-s}-m)(\xi_0-m))$

Упр Процесс, стац. в широком смысле, но не стационарный в узком.

$\boxed{n=0}$ $\mathbb{R}^2 \triangleq \mathbb{C}$ $Pr_1(\mathbb{P}_{1,2}) \otimes Pr_2(\mathbb{P}_{1,2})$

$\xi_0 \overset{\text{распред.}}{\sim} \mathbb{P}_{1,2}$ $\xi_j \overset{\text{распред.}}{\sim} G$

$\mathbb{M}(\xi_0,\xi_0^+) = \mathbb{M}((\mathrm{Re}\,\xi_0)^2+(\mathrm{Im}\,\xi_0)^2) = \mathbb{M}(\mathrm{Re}\,\xi_0)^2+\mathbb{M}(\mathrm{Im}\,\xi_0)^2 = \frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{\pi}$

$\forall j=\{1,2\}$ $e^{-\frac{y_j^2}{4\pi}} = \chi_{\mathbb{P}_{1,2}}\mathrm{Re}(y_j)$