Лекция № 8

узлы \ элем. экспер-та	ансамбль	$N-1$	$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N}\delta_{x_{t,j}}$
t_1			$\to \mathbb{P}_{\ni, \xi(t_1)}$
t_2			$\to \mathbb{P}_{\ni, \xi(t_2)}$
t_{k_0}			$\dots$
$\dots$ $t_{k_{M-1}}$			
$\ni t$	$x_{t,j}$		

$P_{\ni, \xi(t_{k_0}), \dots, \xi(t_{k_{M-1}})}(B) =$

$B \in \mathbb{R}^M \qquad \forall t \in T \hookrightarrow \xi(t) : N \ni j \mapsto x_{t,j}$

$= \frac{1}{N} \operatorname{Card}\left\{ j \in N \,/ : \begin{pmatrix} x_{t_{k_0},j} \\ x_{t_{k_1},j} \\ x_{t_{k_{M-1}},j} \end{pmatrix} \in B \right\} =$

$= \left(g_N \circ \begin{pmatrix} \xi(t_{k_0}) \\ \dots \\ \xi(t_{k_{M-1}}) \end{pmatrix}^{\ominus} \right)(B)$

$\boxed{\text{вероятностная мера на ансамбле}}$ $\boxed{\text{вектор ф-ция на ансамбле}}$

$\mathbb{P}$	$\Omega = \mathbb{R}^T \ni$	ω
$T \ni t$		$\omega(t)$

случайное поле как вероятностное распредел.

$\equiv$ мера на пр-ве. ф-ций

$\forall t \in T \quad \xi(t) : N \ni j \mapsto x_{t,j} \in \mathbb{R}$ случ. величина

$\forall \underline{t} \in \mathcal{P}_{fin}(T) \setminus \{\emptyset\} \quad \xi\restriction_{\underline{t}}$ — вектор ф-ция со случ. значениями

$\xi\restriction_{\underline{t}} \overset{Tr}{\mapsto} \{ j \mapsto \{ \underline{t} \ni t \mapsto x_{t,j} \} \}$

$\mathbb{P}_{\ni, \xi\restriction_{\underline{t}}}(B) = g_N \circ (\xi\restriction_{\underline{t}}^{Tr})^{\ominus}(B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\underline{t}}) \qquad \xi\restriction_{\underline{t}} : \underline{t} \mapsto \mathbb{R}^N$

— мера совместного распр-я случ. величин $\xi(t), t \in \underline{t}$

Согласование конечномерных совместных распределений:

$\sigma = \operatorname{Card} \underline{s} \qquad \forall \underline{t} \in \mathcal{P}(\underline{t}) \setminus \{\emptyset\}$

$\forall \underline{s} \in \mathcal{P}(\underline{t}) \setminus \{\emptyset\} \quad \circledast = \mathbb{P}_{\ni, \xi\restriction_{\underline{s}}} = (\mathbb{P}_{\ni, \xi\restriction_{\underline{t}}}) \circ (\Lambda^{\underline{t}}_{\underline{s}})^{\ominus} =$

$t \mapsto x_{t,0}$

$= g_N \circ ((\xi\restriction_{\underline{t}}^{Tr})^{\ominus} \circ (\Lambda^{\underline{t}}_{\underline{s}})^{\ominus}) = g_N \circ (\Lambda^{\underline{t}}_{\underline{s}} \circ (\xi\restriction_{\underline{t}}^{Tr}))^{\ominus}$

$\circledast = g_N \circ (\xi\restriction_{\underline{s}}^{Tr})^{\ominus}$

$\xi\restriction_{\underline{s}}^{Tr} \underset{?}{=} (\Lambda^{\underline{t}}_{\underline{s}} \circ \xi\restriction_{\underline{s}}^{Tr}) \qquad \forall j \in N$

Переходим $N \to \infty$ (непр. ф-ции распр-я столбцы узлы)

$\mathbb{P}_{\ni_N, \xi\restriction_{\underline{s}}} \to \mathbb{P}_{\ni, \xi\restriction_{\underline{s}}}$

Опр. $\forall T \neq \emptyset$ вещественным случайным полем с аргументом $t \in$ широком смысле называется ф-ция

$\mathcal{P}_{fin}(T) \setminus \{\emptyset\} \ni \underline{t} \mapsto \mathbb{P}_{\underline{t}}$, где $\mathbb{P}_{\underline{t}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\underline{t}}) \to [0,1]_{\mathbb{R}}$
(конечные)

σ-адд. мера. Такая,

что $\forall \underline{t} \in \mathcal{P}_{fin}(T) \setminus \{\emptyset\} \ \forall \underline{s} \in \mathcal{P}(\underline{t}) \setminus \{\emptyset\}$

$\mathbb{P}_{\underline{s}} = \mathbb{P}_{\underline{t}} \circ (\Lambda^{\underline{t}}_{\underline{s}})^{\ominus}$
проектор

(случайное поле в широком смысле — согласованный набор совместных конечномерных распределений)

Опр. Колмогоровской реализацией вещеcтв. случ. поля
$\mathcal{P}_{fin}(T) \setminus \{\emptyset\} \ni \underline{t} \mapsto \mathbb{P}_{\underline{t}}$ в широком смысле с аргументом $t \in$
называется набор колмогоровских реализаций случайных величин

($\forall t\ \Omega \ni \omega \mapsto \xi_t(\omega) \in \mathbb{R}$) таких, что на общем $\forall t \in T$ мн-ве Ω задана σ-алгебра $\mathcal{F}$ и вероятн. счётно-адд. мера $\mathbb{P}$: $\mathcal{F} \to [0;1]_{\mathbb{R}}$, причём ($\forall t \in T, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow (\xi_t)^{\ominus}(B) \in \mathcal{F}$) и для случайного поля в узком смысле $\mathbb{P}_\xi := \underset{\Omega \to \mathbb{R}^T}{\xi^{T\vee}}(\mathbb{P}) \equiv \mathbb{P} \circ (\xi^{T\vee})^{\ominus}$, ;

$\xi^{T\vee}: \Omega \ni \omega \mapsto$ ф-ция $\{T \ni t \mapsto \xi_t(\omega) \in \mathbb{R}\}$ справедлива система равенств: $\forall \underline{t} \in \mathcal{P}_{fin}(T) \setminus \{\varnothing\}$ $\mathbb{P}_{\underline{t}} = \mathbb{P}_\xi \circ (\Lambda^T_{\underline{t}})^{\ominus}$.

(Равенство мер на системе $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\underline{t}})$)

<u>амечание</u> Это опр-е корректно (цилиндры перейдут куда нод

<u>Теор (Колмогорова-2)</u> (О сущ-ии колмогоровской реализации для случайного поля в широком смысле)

$\forall$ веществ. случ. поля в широком смысле обладает колмогоровской реализацией.

- нет Ω Возьмём $\Omega := \mathbb{R}^T$
- $\mathcal{F}$ – σ-алгебра: борелевская относительно топологии пото ной сходимости (из 7 лекции, натянутая на цилиндры)
- $\mathbb{P}$ каждому цилиндру $C_{\underline{t},B} = \{f: T \to \mathbb{R} \mid f|_{\underline{t}} \in B\}$ сопоставля
$\forall \underline{t} \in \mathcal{P}_{fin}(T) \setminus \{\varnothing\}$

число $\mathbb{P}_{\underline{t}}(B)$.

$C_{\underline{t},B} = \{f: \underset{(\mathbb{R}^T)}{T \to \mathbb{R}} \mid f|_{\underline{t}} \in B\} = C_{\underline{t} \cup \{t_n\}, B_n}$ $\forall t_n \in (T \setminus \underline{t})$, где

$B_0 = \{\varphi \in \mathbb{R}^{\underline{t} \cup \{t_0\}} \mid \varphi|_{\underline{t}} \in B\}$

- $\xi_t(\omega) := \omega(t)$ ☒

Разница: в широком смысле нет Ω, ближе к опыту

случайное поле
- узкие: мера на пр-ве $\mathbb{R}^T =: \Omega$
- широкие: согласов. конечном. распр-й $\{\mathbb{P}_\xi|_{\underline{t}}\}_{\underline{t} \in \mathcal{P}_{fin}(T) \setminus \{\varnothing\}}$

узкие: случайная мера на пр-ве различных реализаций

широкие: набор случайных значений при разных t, т.е. ф-ция аргумента t со значениями во мн-ве случайных величин ξ_t

случайные величины ξ_t взяты из общего эксперимента, поэтому могут быть интерпретированы как ф-ции на общем пр-ве элементарных событий