Лекция № 3

§6 – Интеграл Лебега. Мат. ожидание.

Опр. Случайная величина $\overset{def}{=}$ действ. ф-ция $\xi(w)$ на $(\Omega, \mathcal{F})$: $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \{w : \xi(w) \in B\} \in \mathcal{F}$. При этом прообраз $\xi^{-1}(B)$ измерим в Ω

дискретная $\xi(w) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{\infty} x_i 1_{A_i}(w)$

простая $\overset{def}{=} \xi(w)$

Опр. (матожидание простой случ. величины)

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – произвольное (не обязательно конечное) вероятностное пр-во, $\xi(w)$ – простая случ. величина: $\xi(w) = \sum_{k=1}^{n} x_k 1_{A_k}(w)$. Тогда $M\xi \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k P(A_k)$.

Опр. ($M\xi$ для произвольной случ. величины)

Пусть $\xi(w)$ – неотрицательная случ. величина

Пусть $\xi_n(w)$ – посл-ть простых случ. величин: $\xi_n(w) \uparrow \xi(w)$ $\forall w \in \Omega$

$M(\xi_n) \le M(\xi_{n+1}) \Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} M(\xi_n)$ (возможно, $+\infty$)

$M(\xi) \overset{def}{=} \lim\limits_{n \to \infty} M(\xi_n)$. Это же – интеграл Лебега: $\int_{\Omega} \xi(w) P(dw)$.

Здесь $P(\Omega) = 1$ – вероятность. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$

Опр. Пусть $\xi(w)$ – случ. величина $\xi^+ = \max(\xi, 0)$ $\xi^- = -\min(\xi, 0)$, пусть $M(\xi^+)$ или $M(\xi^-)$ – конечно. Тогда $M(\xi) \overset{def}{=} M(\xi^+) - M(\xi^-)$

Аналогично введём для μ-произвольной меры на $(\Omega, \mathcal{F})$, $\xi(w)$ – случ. величины $\Omega \to \mathbb{R}$ $\int \xi(x) \mu(dx)$

Теорема 1 (о монотонной сходимости)

Пусть $\eta, \xi, \xi_1, \xi_2 \ldots$ – случ. величины. Тогда

а) Если $\xi_n \ge \eta$ $\forall n \ge 1$, $M(\eta) > -\infty$, $\xi_n \uparrow \xi$, то $M(\xi_n) \uparrow M(\xi)$

б) Если $\xi_n \le \eta$ $\forall n \ge 1$, $M(\eta) < \infty$, $\xi_n \downarrow \xi$, то $M(\xi_n) \downarrow M(\xi$

Теорема 3 (Лебега о мажорируемости ф-ции)

Пусть $\eta, \xi, \xi_1, \xi_n \ldots$ – случ. величины: $|\xi_n| \le \eta$, $M(\eta) < \infty$, $\xi_n \to \xi$ (п.н.) – (почти наверное). Тогда 1) $M(\xi) < \infty$ 2) $M(\xi_n) \to M(\xi)$

3) $M(|\xi_n - \xi|) \to 0$

Теорема 7 (о замене переменной под знаком интеграла Лебега (ИЛ))

Пусть 1) $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$ – измеримые пр-ва

2) $X(w)$ – $\mathcal{F}, \mathcal{E}$ измеримая ф-ция со значениями в E

3) P – вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$

4) P_x – вероятностная мера на $(E, \mathcal{E})$:

$P_x(A) = P(\{w : X(w) \in A\})$, $A \in \mathcal{E}$.

Тогда: $\forall$ $\mathcal{E}$-измеримой ф-ции $g = g(x)$, $x \in E$ $\hookrightarrow$

$$\int_A g(x) P_x(dx) = \int_{x^{-1}(A)} g(X(w)) P dw, \quad A \in \mathcal{E}$$

(если $\exists$ один интеграл, то $\exists$ и второй и они совпадают)

Лекция №4

Пусть V – Векторное пр-во над полем $\mathbb{K}$ (в курсе $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ $\overset{\uparrow}{\mathbb{Q}}$)
не надо

Пр-ва: классических сост-й – Вещественно
квантовых сост-й
значения наблюдаемых величин } – комплексные

$p: V$ ~ ф-ция над векторным пр-вом

$p: V \to [0; \infty)_{\mathbb{R}}$ наз-ся полунормой, если

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\forall \bar{x} \in V$ $\forall y \in V$

1) $p(\lambda \bar{x}) = |\lambda| p(\bar{x})$

2) $p(\bar{x} + \bar{y}) \leq p(\bar{x}) + p(\bar{y})$

Полунорма наз-ся нормой, если

$p(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$ (невырожденность)

Полуметрика ρ_p, порождённая полунормой p:

$\rho_p(\bar{x}, \bar{y}) = p(\bar{y} - \bar{x}) \geq \rho_p(\bar{y}, \bar{x})$

$\rho(\bar{x}, \bar{x}) = 0$

$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = p((\bar{y} - \bar{z}) + (\bar{z} - \bar{x})) \leq \rho_p(\bar{x}, \bar{z}) + \rho_p(\bar{z}, \bar{y})$

Полуметрикой на мн-ве M наз-ся ∀ ф-ция

$\rho: M \times M \to [0; +\infty)$ такая, что:

1) $\forall x \in M \hookrightarrow \rho(x, x) = 0$

2) $\forall y \in M \hookrightarrow \rho(x, y) = \rho(y, x)$

3) $\forall z \in M \hookrightarrow \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Полуметрику назовём метрикой, если

0) $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

Дискретная метрика:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Полуметрика:

$\rho(x, y) = 0$

Примеры нормы на ∀ лин. пр-ве:

$\|x\| = \Sigma |k - T|$
$\max |k - T|$

Следствие: Если p – норма $\Rightarrow \rho_p$ – метрика, порождённая нормой

Опр. Если ρ – полуметрика на M, то говорят, что на M введена структура полуметрического пр-ва.

$B^{\rho}_r(x_0) = \{x \in M | : \rho(x, x_0) < r\}$ $(x_0 \in M, r \in \mathbb{R}, r > 0)$ – шар

„открытый шар", открытое мн-во

Опр. Система $\{U \subset M | : U$ явл-ся ρ-открытой$\} = \tau_\rho$ – топология

Из опр-я шара возникает понятие ρ-предела пос-ти, ρ-замкнутые мн-ва

Теорема: $S = \bigwedge\limits_{(subset)} \{F\ \rho\text{-замкнуто} \supset S\}$

Опр. ρ-замкнутые мн-ва $F = M \setminus U$

Опр. Посл-ть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ т-к полуметрическое пр-во (M,ρ) наз-ся ρ-фундаментальной (Коши), если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists \overset{N}{N_\varepsilon}:\ \forall n\in\mathbb{N},\ \underbrace{\forall m\in\mathbb{N},\ m\geq \overset{N}{N_\varepsilon}\leq n \Rightarrow \rho(x_m,x_n)\leq\varepsilon}_{-\varepsilon\leq \operatorname{diam}_\rho(x_n)_{n\geq N_\varepsilon}\leq\varepsilon}$$

$\{\operatorname{diam}_\rho\{x_n \mid n\geq N\}\}_{N\in\mathbb{N}}$ – бесконечно малая $\left(\rho(x_n,x_0)\xrightarrow[n\to\infty]{}0\right)$

В полуметрическом пр-ве м.б. несколько пределов

Утв Как из полуметрического пр-ва получить метрическое?

$x \underset{\rho}{\sim} y \Leftrightarrow \rho(x,y)=0$

Фактор M: $\forall x\quad \tilde{x}=\{y\in M \mid x\underset{\rho}{\sim}y\}$

симметричность: $\rho(x,y)=0=\rho(y,x)$

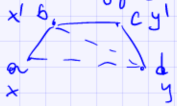
рефлексивность: $x\underset{\rho}{\sim}x \Leftarrow \rho(x,x)=0$

транзитивность: $x\underset{\rho}{\sim}z\underset{\rho}{\sim}y\quad 0\leq\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$

Тогда: $\hat{\rho}(\tilde{x},\tilde{y})=\rho(x,y)$

$x'\in\tilde{x}$, $y'\in\tilde{y}$. Верно ли $\rho(x,y)=\rho(x',y')$

☐ По индукции



$$\rho(a,d)\leq\rho(a,b)+\underbrace{\rho(b,d)}\leq\underline{\rho(a,b)}+\rho(b,c)+\underline{\rho(c,d)}$$

$$\rho(b,c)\leq\underline{\rho(a,b)}+\rho(a,d)+\underline{\rho(c,d)}$$

$$\left|\begin{matrix}\rho(a,d)-\rho(b,c)\\ \rho(b,c)-\rho(a,d)\end{matrix}\right|\begin{matrix}\leq\rho(a,b)+\rho(c,d)\\ \leq\ —//—\end{matrix}$$

$$|\rho(x,y)-\rho(x',y')|\leq\overbrace{\rho(x,x')}^{0}+\overbrace{\rho(y,y')}^{0}$$ ☒