

Elementos de probabilidad y estadística. Ayudantía 10.

Abril de 2024

1. Una función de probabilidad conjunta está dada por $p_{0,0} = a, p_{0,1} = b, p_{1,0} = c, p_{1,1} = d$, donde necesariamente $a + b + c + d = 1$. Demuestre que una condición necesaria para que haya independencia es que $ad = bc$.
2. Considere dos eventos A y B tales que $P(A) = 1/4, P(B|A) = 1/2$ y $P(A|B) = 1/4$. Definimos las variables X y Y por $X = \mathbb{1}_A, Y = \mathbb{1}_B$, donde $\mathbb{1}_E(x)$ vale 1 si $x \in E$ y vale 0 si $x \notin E$. Diga si las siguientes proposiciones son ciertas o falsas.
 - a) Las variables aleatorias X y Y son independientes.
 - b) $P(X^2 + Y^2 = 1) = 1/4$.
 - c) $P(XY = X^2Y^2) = 1$.
 - d) La variable aleatoria X tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$.
 - e) Las variables X y Y tienen la misma distribución.
3. Sean X, Y variables aleatorias con valores en $\{1, 2, \dots, n\}$ y función de probabilidad conjunta $p_{ij} = 1/n^2$. Halle las funciones de probabilidad marginales y determine si las variables son independientes. Calcule $P(X > Y)$ y $P(X = Y)$.
4. Lanzamos una moneda tres veces y definimos las siguientes variables aleatorias: X es el número de águilas, Y es la longitud de la mayor sucesión de águilas en la muestra. Por ejemplo $Y(A, S, A) = 1, Y(A, A, S) = 2$. Halle la distribución conjunta, las distribuciones marginales y determine si estas variables son independientes.
5. Sean X, Y variables aleatorias discreto con función de probabilidad conjunta como indica la tabla de abajo. Encuentre y grafique la correspondiente función de distribución conjunta.
6. Sean X y Y dos variables aleatorias, y sean x y y cualesquiera números reales. Diga falso o verdadero. Demuestre en cada caso.
 - a) $P(X > x, Y > y) = 1 - P(X \leq x, Y \leq y)$.
 - b) $P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x)$.
 - c) $P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \leq x) + P(X \leq x, Y > x)$.
 - d) $P(X + Y \leq x) \leq P(X \leq x)$.
 - e) $P(XY < 0) \leq P(X < 0)$.