

Elementos de probabilidad y estadística. Ayudantía 5.

01 de marzo de 2024

Resuelve individualmente cada uno de los ejercicios usando los temas revisados en clase y argumentando cada paso. Al terminar, entrega tus soluciones al ayudante.

1. Irving, Samuel y Esaul lanzan una moneda, si el resultado de una de las personas es distinto del de las otras dos, el juego termina y esta persona gana. Si los tres obtienen lo mismo, cada quien vuelve a lanzar su moneda. Suponiendo que la moneda es justa, ¿cuál es la probabilidad de que el juego termine con la primera ronda de lanzamientos? Si las tres monedas están sesgadas y tienen $1/4$ de probabilidad de resultar en cara, ¿cuál es la probabilidad de que el juego termine con la primera ronda?
2. Supón que hay n personas en una fiesta, todos usando sombrero. En un momento dado, todos tiran su sombrero al centro del salón y cada quien toma un sombrero al azar. Muestra que la probabilidad de que nadie se quede con su propio sombrero es

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Bonus: ¿A dónde converge esta probabilidad cuando $n \rightarrow \infty$?

3. Consideremos el juego del cubilete, i.e. 5 dados cuyas caras tienen las etiquetas 9,10,J,Q,K,A. Calcule las probabilidades (sólo deje las expresiones en términos de factoriales)
 - a) de obtener un par
 - b) de obtener dos pares
 - c) una tercia
 - d) un full
 - e) un poker
 - f) una quintilla.
4. En una clase de 10 alumnos van a distribuirse 3 premios. Averiguar de cuántos modos puede hacerse si:
 - a) los premios son diferentes.
 - b) los premios son iguales.

(Notar que existen dos casos; que una persona pueda recibir más de un premio o que no pueda)

5. **Falsos positivos en un test de VIH:** Cierta prueba de anticuerpos para la infección de VIH se cree que es precisa por arriba del 99 %. Esto significa que una prueba realizada será correcta con probabilidad de al menos 0.99, y estará equivocada con probabilidad no mayor a 0.01.

Hay dos tipos de error que pueden ocurrir en la prueba: puede indicar que una persona no infectada tiene VIH (falso positivo), o puede indicar que una persona infectada no tiene VIH (falso negativo). Supongamos que el error es de exactamente 1 % tanto para falsos positivos como para falsos negativos.

La prevalencia del VIH en Canadá en 2005 fue de aproximadamente 2 infectados por cada 1000 personas en la población¹. Una persona es elegida de manera aleatoria de la población. Dicha persona es analizada con la prueba y esta resulta positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona en realidad NO esté infectada?

¹Screening for HIV: A Review of the Evidence for the U.S. Preventive Services Task Force, Chou et al., Annals of Internal Medicine, July 5, 2005, col. 143, no. 1, 55-73