Elementos de probabilidad y estadística. Ayudantía 5.

14 de marzo de 2024

1. Sea X una variable aleatoria constante y $X \equiv 3/2$. Encuentra su función de masas de probabilidad función de distribución.
2. Sea U una variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$. Sea $X = U^2$. Encuentra la función de distribución de X.
3. Sea X una variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

   Encuentra $P\left(1/4 < X < 5\right)$, $P\left(.2 < X < .8\right)$ y $P\left(X = 1/2\right)$.
4. Se lanza una moneda justa tres veces. Sea X la variable aleatoria dada por el número de soles menos el número de águilas. Encuentra la función de distribución de X.
5. ¿Cuáles de las siguientes son funciones de distribución?
   a) $F(x) = \mathbb{1}_{(2,\infty)}(x)$.
   b) $F(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.
6. Cinco hombres y cinco mujeres llegan aleatoriamente a un concierto y se forman en la taquilla, luego se les asignan números del 1 al 10 de acuerdo con su lugar en la fila. Sea X la posición de la primera mujer en la fila. Encuentra la distribución de X.
7. Sean A y B conjuntos y f una función. Muestra que la imagen inversa f^{-1} conserva operaciones de conjuntos, es decir $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
8. Una función de distribución se llama puramente discontinua si es igual a la suma de sus saltos, es decir $F(x) = \sum_{y \leq x}(F(y) - F(y-))$ para todo x.
   Muestra que cualquier función de distribución puede ser escrita como $F = aF_c + (1-a)F_d$, donde F_c y F_d son funciones de distribución continua y puramente discontinua, respectivamente, y $0 \leq a \leq 1$.
9. Demuestra lo siguiente.
   a) Una función de distribución F es puramente discontinua si y sólo si $\sum_y (F(y) - F(y-)) = 1$.
   b) La función de distribución de una variable aleatoria discreta es puramente discontinua.
10. Sea $\{X_j\}_{j \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias.
    a) Muestra que $\sup_n X_n$ e $\inf_n X_n$ son variables aleatorias.
    b) Muestra que $\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n \text{ existe } \} \in \mathscr{F}$.