

Elementos de probabilidad y estadística. Ayudantía 2.

9 de febrero de 2024

1. (El problema del cumpleaños) Una clase tiene n estudiantes. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos tengan el mismo cumpleaños? (ignora los gemelos y los años bisiestos). Calcula la probabilidad para $n = 10, 15, 22, 30$ y 40.
2. Un 14 de febrero en un lugar de Guanajuato, hay cinco parejas celebrando. Un operativo policiaco llega al lugar e inspecciona a cuatro personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que entre los inspeccionados haya al menos una pareja?
3. P. R. de Montmort, escribió en 1708 un problema sobre el juego francés Jeu de Boules. El objetivo del juego es tirar pelotas de metal hacia una pelota objetivo. La pelota más cercana gana. Supón que dos jugadores Irving y Samuel son igual de buenos en este juego. Irving lanza una pelota, y Samuel lanza dos. ¿Cuál es la probabilidad de que Irving gane?
4. La NASA está desarrollando dos transbordadores espaciales ultra secretos, uno tiene dos motores y el otro tiene cuatro. Todos los motores son idénticos y tienen la misma probabilidad de fallar. Cada uno está diseñado para volar si al menos la mitad de sus motores funcionan. José Luis, un científico visitante pregunta, “El transbordador de cuatro motores es más confiable, ¿verdad?” El técnico de la NASA responde que la probabilidad de fallo es secreta, pero que, de hecho, ambos tienen la misma probabilidad de volar. El visitante dice entonces “Entonces ahora sé cuál es la probabilidad de que un cohete falle y la probabilidad de que el transbordador vuele”. ¿Cómo lo descubrió y cuáles son estas probabilidades?
5. Cinco cartas son extraídas de una baraja inglesa. ¿Cuál es la probabilidad de que formen una escalera? Por ejemplo, A, 2, 3, 4, 5, o 7, 8, 9, J, Q. Supongan que el color y el palo no son importantes. En este ejercicio se supone que el as puede ser la carta más baja o la más alta, de manera que 10, J, Q, K, A es una posibilidad.
6. N personas, incluyendo Barbie y Ken, están sentadas en una mesa redonda con N asientos. ¿Cuál es la probabilidad de que Barbie y Ken no se sienten juntos? ¿Cuál es la probabilidad de que los dos se sienten forzosamente juntos?
7. **(La biblioteca de Babel):** Jorge Luis Borges a través de este libro nos cuenta una historia en donde el lector se da cuenta eventualmente que la biblioteca en cuestión contiene todo posible libro. Literalmente, todo posible libro. Así, por ejemplo, la librería debería tener un libro que consistiera en solamente la letra ‘A’. Otro podría tener solamente ‘abcbabc...’ en todas sus páginas, y así sucesivamente.

Cada uno de los libros tiene 410 páginas, cada página tiene 40 líneas y cada línea tiene 80 caracteres. Hay exactamente 25 símbolos, incluyendo el espacio y los símbolos de puntuación.

Suponiendo que todo posible libro está incluido en la biblioteca y que no hay duplicados, ¿cuántos libros distintos tiene la librería?

Algunos astrónomos estiman que hay alrededor de 10^{87} partículas sub-atómicas en el universo. ¿Hay más o menos libros en la biblioteca de Babel que partículas en el universo? ¿Cómo se compara el número de libros con un googol (10^{100})? ¿Y con un googolplex ($10^{10^{100}}$)?

8. **(El Problema de las cajas de cerillos de Banach¹):** Un cierto profesor fumador y de mirada perdida carga dos cajitas de cerillos, una en el lado izquierdo de su abrigo y la otra en el derecho. Cada vez que él enciende su pipa elige una de las dos cajitas al azar y toma un cerillo de ella. Eventualmente, se da cuenta que la cajita de cerillos que ha elegido está vacía. Si ambas cajitas tienen inicialmente el mismo número de cerillos, digamos n , ¿cuál es la probabilidad de que queden exactamente k cerillos en la otra caja cuando la primera se ha vaciado?

¹Stefan Banach fue un matemático polaco. En los años previos a la Segunda Guerra Mundial, él y sus colegas solían reunirse en el Scottish Coffee Shop en Lvov, Polonia (hoy Leopólis, Ucrania), a platicar sobre matemáticas. Tenían entre todos un libro al que solían llamar el Scottish Book, en el cual escribían ejercicios retadores. Este fue el último problema del libro.