Tarea 3.- Elementos de Probabilidad y Estadística.

Resuelva los problemas 1,2,3,8,10 y entregarlos en el Classroom el lunes 5 de febrero.

1. Una mano de POKER consiste en 5 cartas tomadas de un juego de baraja. De cuentas maneras se puede obtener

   a. una escalera (cinco cartas en orden, sin importar el color; el as puede terminar en escalera pero no comenzarla)?
   b. una tercia?
   c. un par?
   d. dos pares?
   e. un full (un par y una tercia)?
   f. poker (Cuatro cartas iguales en su valor.)
   g. escalera de color (cinco cartas consecutivas del mismo palo)?
   h. flor imperial (cinco cartas seguidas del mismo palo del 10 al as)?
   i. Halle la probabilidad de los eventos anteriores.

2. Se disponen en fila 2 bolas blancas y 6 bolas negras de modo que no haya dos bolas blancas consecutivas (ver figura). Cuántas maneras hay de hacerlo?

   ● ● ○ ● ○ ● ●●

3. En una mesa rectángular los antriones se sientan en los extremos. De cuántas maneras se pueden sentar

   a. seis invitados, tres a cada lado?
   b. cuatro mujeres y cuatro hombres, sentados cuatro a cada lado de modo que no haya dos personas del mismo sexo juntas?
   c. ocho invitados, cuatro a cada lado de la mesa, de modo que dos invitados específicos se sienten juntos?

4. Cuantas biyecciones hay de A a B, si ambos conjuntos tienen n elementos?

5. En un grupo de 12 personas hay dos de apellido Pérez. Si no importa el orden, de cuántas maneras se pueden escoger siete personas a) sin restricciones? b) si se deben incluir los dos Pérez? c) sin incluir ningún Pérez? d) si sólo un Pérez se incluye? e) si al menos un Pérez se incluye? f) si a lo sumo un Pérez se incluye?

6. a) Se colocan 3 bolas numeradas en 3 cajas numeradas. Hallar el número de maneras de hacerlo de modo que: (i) Al menos una caja quede vacía. (ii) Exactamente una caja quede vacía. b) Repetir el cálculo hecho en a) cuando hay n bolas y n cajas.

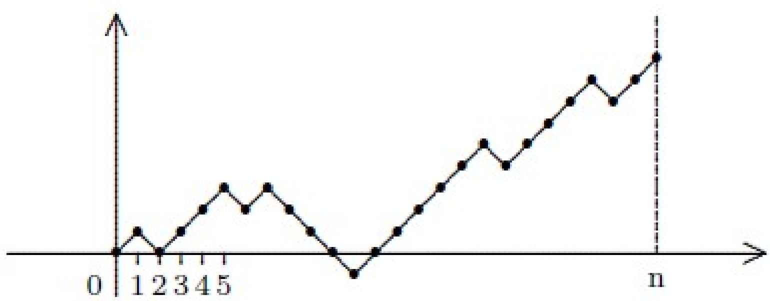
7. Una caja contiene ocho bolas, dos rojas, dos azules, dos blancas y dos negras. Las bolas se separan al azar en dos grupos de cuatro bolas cada uno. Cuál es la probabilidad de que cada conjunto tenga una bola de cada color?

8. Demuestre que para m, n enteros y $r \leq m \wedge n$,

$$\sum_k \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

9. Demuestre que $\binom{n}{k} = \sum_{r=k}^{n} \binom{r-1}{k-1}$.

10. Considere todas las poligonales $(n, S_n)_{n\geq 0}$, que parten del origen (i.e. $S_0 = 0$) y que, en cada paso, saltan un unidad hacia arriba o haccia abajao. Dicho de otra manera, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ donde cada X_i toma valores en $\{1, -1\}$.



a. Cuántas poligonales podemos construir en el intervalo de tiempo $[0, n]$?

b. Cuántas poligonales satisfacen $S_n = 0$?

c. Usamos la notación $N_{n,h} = \#\{\text{poligonales tales que } S_n = h\}$. Sea k un entero positivo y l un entero no negativo. Probar que

$$N_{n,k+l} = \#\{\text{poligonales tales que } S_n = k-l, \text{ y para algún } m \leq n \text{ se tiene que } S_m = k\}.$$

d. Sea k un entero positivo, probar que

$$\#\{\text{poligonales tales que } S_n = 0, \max_{1\leq m\leq n} S_n \geq k\} = N_{n,2k}.$$

(ver Figura 1.)

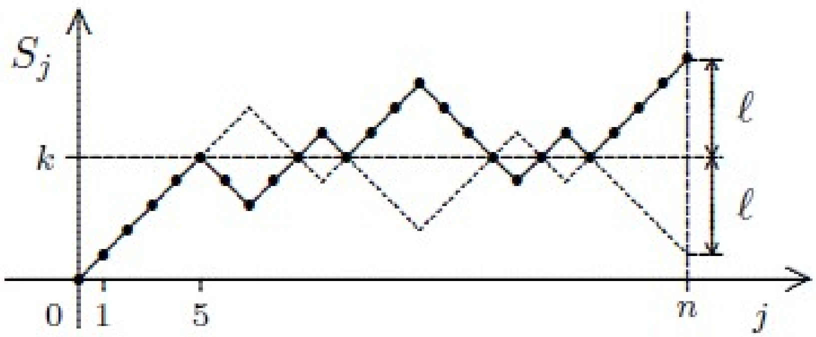


Figure 1: