Tarea 1.- Elementos de Probabilidad y Estadística.

Resuelva los problemas 3,4,5,6,7 y entregarlos en el Classroom el lunes 5 de febrero.

1. Sean A, B y C tres eventos. Demuestre las siguientes propiedades:

   a. $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}((A \backslash B) \cup (B \backslash A)) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1$.
   b. $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) + \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = 1$.
   c. $\mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C^c) + \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C) = 1$.
   d. $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c \cap B^c) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$.

2. Demuestre que si $A \cap B \cap C = \emptyset$, entonces

$$\mathbb{P}((A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap C).$$

3. Sea D el evento "exactamente uno de los eventos A, B y C ocurre". Exprese $\mathbb{P}(D)$ en términos de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cap C)$, $\mathbb{P}(C \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

4. Demuestre que

   a. $\min\{1, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\} \geq \mathbb{P}(A \cup B) \geq \max\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$.
   b. $\min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} \geq \mathbb{P}(A \cap B) \geq \max\{0, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1\}$.
   c. $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - (n-1)$.

5. Pruebe que a condición de σ-aditividad (i.e. $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i)$ si $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ es equivalente a las siguientes proposiciones $a.$ y $b.$:

   a. Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ es una sucesión creciente de eventos y $A = \cup_{i=1}^\infty A_i$ entonces $\mathbb{P}(A) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$.
   b. Si $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ es una sucesión creciente de eventos y $A = \cap_{i=1}^\infty A_i$ entonces $\mathbb{P}(A) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

6. Un experimento consiste de tomar al azar tres focos de la producción de una fábrica y probarlos, con resultados posibles defectuoso (1) o bueno (0). Sea A el evento 'El primer foco es defectuoso', B el evento 'el segundo foco es defectuoso' y C el evento 'el tercer foco es defectuoso'.

   a. Describa el espacio muestral Ω para este experimento.

b. Liste los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos: A, B, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A^c \cap B \cap C^c$, $A \cap B^c \cap C$, $(A \cup B^c) \cap C$, $(A^c \cap C) \cup (B \cap C)$.

7. Describa en detalle un espacio muestral para los siguientes experimentos: (a) Tres lanzamientos de un dado. (b) Calificaciones de una clase de 20 estudiantes en un examen. (c) Medición de la temperatura a mediodía en una estación meteorológica. (d) Medición de las velocidades de carros pasando por un punto dado. (e) Una sucesión infinita de lanzamientos de una moneda.

8. Una caja contiene n bolas rojas y n bolas blancas. Se extraen dos bolas al azar. ¿Cuál es el espacio muestral para este experimento? ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas tengan colores distintos. Halle la probabilidad p_n de que las bolas sean del mismo color y evalúe $\lim_{n\to\infty} p_n$.

9. En una bolsa hay tres cartas numeradas 1, 2 y 3. Sacamos las cartas al azar sucesivamente y sin reposición. El resultado es una permutación de los números 1, 2 y 3. Describa el espacio muestral de este experimento. Para cada una de las siguientes descripciones, liste los elementos correspondientes y calcule la probabilidad del evento.

   (a) El 2 sale en primer lugar. (b) El 3 sale en segundo lugar. (c) El 2 sale en primer lugar y el 1 en tercer lugar. (d) O bien el 2 sale en primer lugar o bien el 1 sale en tercer lugar (o ambos). (e) Ningún número ocupa su lugar.

10. Se extraen dos cartas sucesivamente de un juego de 52 cartas. Halle la probabilidad de que la segunda carta sea mayor que la primera.