Elementos de probabilidad y estadística. Ayudantía 5.

01 de marzo de 2024

Resuelve individualmente cada uno de los ejercicios usando los temas revisados en clase y argumentando cada paso. Al terminar, entrega tus soluciones al ayudante.

1. Irving, Samuel y Esaul lanzan una moneda, si el resultado de una de las personas es distinto del de las otras dos, el juego termina y esta persona gana. Si los tres obtienen lo mismo, cada quien vuelve a lanzar su moneda. Suponiendo que la moneda es justa, ¿cuál es la probabilidad de que el juego termine con la primera ronda de lanzamientos? Si las tres monedas están sesgadas y tienen $1/4$ de probabilidad de resultar en cara, ¿cuál es la probabilidad de que el juego termine con la primera ronda?

   Solución. El juego termina en la primera ronda si el lanzamiento de una de las personas es distinto de los de las otras dos. En este caso es más sencillo encontrar la probabilidad del complemento. Sea F el evento "El juego termina en la primera ronda de lanzamientos", y los eventos C_3, S_3 "Los lanzamientos de las tres personas son cara" y "Los lanzamientos de las tres personas son sol". Suponiendo que la moneda es justa,

$$\begin{aligned} P(F) &= 1 - P(F^c) = 1 - (P(C_3) + P(S_3)), \\ &= 1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

   Si suponemos la moneda sesgada,

$$\begin{aligned} P(F) &= 1 - P(F^c) = 1 - (P(C_3) + P(S_3)), \\ &= 1 - \left[\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^3\right] = 1 - \frac{28}{64} = \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

   □

2. Supón que hay n personas en una fiesta, todos usando sombrero. En un momento dado, todos tiran su sombrero al centro del salón y cada quien toma un sombrero al azar. Muestra que la probabilidad de que nadie se quede con su propio sombrero es

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

   Bonus: ¿A dónde converge esta probabilidad cuando $n \to \infty$?

   Solución. Definamos a E_i como el evento en que la i-ésima persona toma su propio sombrero y N el evento en que nadie toma su propio sombrero, entonces

$$P(N) = 1 - P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n),$$

   por el principio de inclusión-exclusión,

$$\begin{aligned} &= 1 - \left[\sum_{i_1} P(E_{i_1}) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \cdots + (-1)^{n+1} P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n)\right], \\ &= 1 - \sum_{i_1} P(E_{i_1}) + \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) - \cdots + (-1)^n P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n). \end{aligned}$$

Sea k tal que $1 \leq k \leq n$, entonces

$$P\left(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}\right),$$

es la probabilidad de que k personas en específico hayan elegido su propio sombrero ($(n-k)!$), dividido entre la cantidad total de maneras de asignar los sombreros ($n!$). La cantidad de términos en la suma sobre los índices $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ es la manera de elegir k índices de un total de n posibles, es decir $\binom{n}{k}$. De aquí se sigue

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} P\left(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}\right) = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{n!(n-k)!}{(n-k)!k!n!} = \frac{1}{k!}.$$

Al sustitutir este resultado en la expresión obtenida anteriormente para $P(N)$ tenemos,

$$\begin{aligned} P(N) &= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}, \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Bonus: El desarrollo en serie de potencias para la función e^x es,

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}.$$

Al hacer $n \to \infty$ en la expresión que tenemos para $P(N)$, encontramos que

$$\lim_{n\to\infty} P(N) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} = e^{-1}.$$

$\square$

3. Consideremos el juego del cubilete, i.e. 5 dados cuyas caras tienen las etiquetas 9,10,J,Q,K,A. Calcule las probabilidades (sólo deje las expresiones en términos de factoriales)

   a) de obtener un par
   b) de obtener dos pares
   c) una tercia
   d) un full
   e) un poker
   f) una quintilla.

Solución. Vamos a entender a la jugada de cada inciso como la de obtener esa mano como mejor jugada, i.e., la probabilidad de obtener un par será la de obtener ese par y nada mejor.

El espacio muestral se puede abstraer de la siguiente forma

$$\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_5) \ : \ \omega_i \in \{9, 10, J, Q, K, A\}, i = 1, 2, \ldots, 5\}$$

Aquí ω_i representa el resultado del dado i por lo que consideramos las realizaciones del experimento de forma ordenada. Es claro que para el fin de formar las manos no importa el orden. Como cada realización la consideramos equiprobable, para calcular las probabilidad de un evento $A \subset \Omega$ tenemos que dividir su cardinalidad por el número de elementos en Ω, en cuyo cociente se quitarían las manos de póker repetidas.

La cardinalidad del espacio muestral es $|\Omega| = 6^5$.

Con esto en mente calcularemos las probabilidades solicitadas *a*) Sea $A_1 = \{\text{un par y no mejor}\}$. Observamos que hay 6 posibilidades para nombrar al par, i.e. par de 9 por ejemplo. Además, hay $\binom{5}{2}$ formas de elegir los dados en los que salió el par. Para los resultados de los dados restantes, como buscamos que la mano sea un par y no mejor se tienen $5 \cdot 4 \cdot 3$ posibilidades para los dados restantes.

Por lo tanto

$$P(A_1) = \frac{10 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^5} = \frac{25}{54}.$$

b) Sea $A_2 = \{\text{dos pares y no mejor}\}$. Notamos se tienen $\binom{6}{2} = 15$ posibilidades para nombrar los dos pares. Además, se tienen $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 30$ formas de colocar los resultados de los dos pares en los dados. Para el dado restante, como debe ser nada mejor se tienen 4 posibles resultados, por lo que

$$P(A_2) = \frac{15 \cdot 30 \cdot 4}{6^5} = \frac{25}{108}.$$

c) Sea $A_3 = \{\text{una tercia y no mejor}\}$. De manera similar, tenemos 6 posibilidades para nombrar a la tercia y hay $\binom{5}{3}$ formas de colocar la tercia en los dados correspondientes. Finalmente, como no podemos tener nada mejor, se tienen $5 \cdot 4$ posibilidades para los dados restantes, tenemos así

$$P(A_3) = \frac{10 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} = \frac{25}{162}.$$

d) Ahora, sea $A_4 = \{\text{un full y nada mejor}\}$. Notamos que tenemos $6 \cdot 5 = 30$ formas de nombrar el full, es decir, el palo correspondiente a la tercia y luego el correspondiente al par. Por otro lado, hay $\binom{5}{3} = 10$ formas de que hay salido la tercia en los cinco dados, y como los otros dados conforman al par su posición queda determinada de la posición de los dados que conforman a la tercia, así

$$P(A_4) = \frac{30 \cdot 10}{6^5} = \frac{25}{648}.$$

e) Sea $A_5 = \{\text{póker y nada mejor}\}$. Aquí hay 6 posibilidades para nombrar al póker, es decir, el palo del dado que se repite cuatro veces. Además, hay $\binom{5}{4} = 5$ formas de distribuir esos cuatro dados que se repiten en los dados. Notamos que para el dado restante hay 5 posibles palos, por lo que

$$P(A_5) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 5}{6^5} = \frac{25}{1296}.$$

f) Finalmente, sea $A_6 = \{\text{quintilla y nada mejor}\}$. Observamos que hay 6 posibilidades para nombrar la quintilla, el palo que se repetirá cinco veces. Sólo hay una posibilidad para la configuración de los dados en la quintilla, por lo cual

$$P(A_6) = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{1296}.$$

□

4. En una clase de 10 alumnos van a distribuirse 3 premios. Averiguar de cuántos modos puede hacerse si:

   a) los premios son diferentes.

   b) los premios son iguales.

   (Notar que existen dos casos; que una persona pueda recibir más de un premio o que no pueda)

   La solución de este problema se había compartido en una ayudantía pasada.

5. **Falsos positivos en un test de VIH**: Cierta prueba de anticuerpos para la infección de VIH se cree que es precisa por arriba del 99 %. Esto significa que una prueba realizada será correcta con probabilidad de al menos 0.99, y estará equivocada con probabilidad no mayor a 0.01.

   Hay dos tipos de error que pueden ocurrir en la prueba: puede indicar que una persona no infectada tiene VIH (falso positivo), o puede indicar que una persona infectada no tiene VIH (falso negativo). Supongamos que el error es de exactamente 1 % tanto para falsos positivos como para falsos negativos.

   La prevalencia del VIH en Canadá en 2005 fue de aproximadamente 2 infectados por cada 1000 personas en la población[1]. Una persona es elegida de manera aleatoria de la población. Dicha persona es analizada con la prueba y esta resulta positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona en realidad NO esté infectada?

[1]Screening for HIV: A Review of the Evidence for the U.S. Preventive Services Tsk Force, Chou et al., Annals of Internal Medicine, July 5, 2005, col. 143, no. 1, 55-73

Solución. Sean I el evento "la persona está infectada" y N el evento "la prueba es negativa". Notemos que I^C es el evento "la persona no está infectada" y N^C el evento "la prueba es positiva". De los datos del problema tenemos que

$$P(I) = \frac{2}{1000}, \qquad P\left(N^C|I^C\right) = \frac{1}{100}, \qquad P(N|I) = \frac{1}{100}.$$

Así, $P\left(I^C\right) = \frac{998}{1000}$.

Ahora, puesto que $N \cap I$ y $N^C \cap I$ son eventos disjuntos, tenemos que

$$P(N|I) + P\left(N^C|I\right) = \frac{P(N \cap I) + P\left(N^C \cap I\right)}{P(I)} = \frac{P(I)}{P(I)} = 1.$$

Así, $P\left(N^C|I\right) = 1 - P(N|I) = \frac{99}{100}$.

Luego, por la ley de probabilidad total, encontramos que

$$P\left(N^C\right) = P\left(N^C|I\right)P(I) + P\left(N^C|I^C\right)P\left(I^C\right) = \frac{99}{100} \cdot \frac{2}{1000} + \frac{1}{100} \cdot \frac{998}{1000} = \frac{1196}{100000}.$$

Por lo tanto, por el Teorema de Bayes,

$$P\left(I^C|N^C\right) = \frac{P\left(I^C\right)P\left(N^C|I^C\right)}{P\left(N^C\right)} = \frac{\frac{998}{1000} \cdot \frac{1}{100}}{\frac{1196}{100000}} = \frac{998}{1196}.$$

Esto es, la probabilidad de que la persona no esté infectada dada que la prueba es positiva es de $\frac{998}{1196}$ que es aproximadamente 0.834.

□