

Cómputo científico para probabilidad y estadística. Tarea 3.

Estabilidad.

Juan Esaul González Rangel

Septiembre 2023

1. Sea Q una matriz unitaria aleatoria de 20×20 (eg. con A una matriz de tamaño 20×20 aleatoria calculen su descomposición QR). Sean $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots \geq \lambda_{20} = 1 > 0$ y

$$B = Q^* \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{20}) Q, \text{ y } B_\varepsilon = Q^* \text{diag}(\lambda_1 + \varepsilon_1, \lambda_2 + \varepsilon_2, \dots, \lambda_{20} + \varepsilon_{20}) Q,$$

con $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$, con $\sigma = 0.02\lambda_{20} = 0.01$.

- a) Comparar la descomposición de Cholesky de B y de B_ε usando el algoritmo de la tarea 1. Considerar los casos cuando B tiene un buen número de condición y un mal número de condición.
 - b) Con el caso mal condicionado, comparar el resultado de su algoritmo con el del algoritmo de Cholesky de `scipy`.
 - c) Medir el tiempo de ejecución de su algoritmo de Cholesky con el de `scipy`.
2. Resolver el problema de mínimos cuadrados,

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$$

usando su implementación de la descomposición QR ; β es de tamaño $n \times 1$ y X de tamaño $n \times d$.

Sean $d = 5, n = 20, \beta = (5, 4, 3, 2, 1)' y \sigma = 0.13$

- a) Hacer X con entradas aleatorias $U(0, 1)$ y simular y . Encontrar $\hat{\beta}$ y compararlo con el obtenido $\hat{\beta}_p$ haciendo $X + \Delta X$, donde las entradas de ΔX son $N(0, \sigma = 0.01)$. Comparar a su vez con $\hat{\beta}_c = ((X + \Delta X)'(X + \Delta X))^{-1}(X + \Delta X)'y$ usando el algoritmo genérico para invertir matrices `scipy.linalg.inv`.
- b) Lo mismo que el anterior pero con X mal condicionada (ie. con casi colinealidad).