

Cómputo científico para probabilidad y estadística. Tarea 8.

MCMC: MH con Kerneles Híbridos y Gibbs Sampler

Juan Esaul González Rangel

Noviembre 2023

1. Aplique el algoritmo de Metropolis-Hastings considerando como función objetivo la distribución normal bivariada

$$f_{X_1, X_2}(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\bar{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu) \right\}$$

donde,

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Así, se tienen las siguientes distribuciones condicionales:

$$X_1|X_2 = x_2 \sim N \left(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x_2 - \mu_2), \sigma_1^2 (1 - \rho^2) \right)$$

$$X_2|X_1 = x_1 \sim N \left(\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - \mu_1), \sigma_2^2 (1 - \rho^2) \right)$$

Considere las siguientes propuestas:

$$q_1((x'_1, x'_2)|(x_1, x_2)) = f_{X_1|X_2}(x'_1|x_2) \mathbb{1}_{(x'_2=x_2)}$$

$$q_2((x'_1, x'_2)|(x_1, x_2)) = f_{X_2|X_1}(x'_2|x_1) \mathbb{1}_{(x'_1=x_1)}$$

A partir del algoritmo MH usando Kerneles híbridos simule valores de la distribución normal bivariada, fijando $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, considere los casos $\rho = 0.8$ y $\rho = 0.95$ ¹.

2. Considere los tiempos de falla t_1, \dots, t_n con distribución $Weibull(\alpha, \lambda)$:

$$f(t_i|\alpha, \lambda) = \alpha \lambda t_i^{\alpha-1} e^{-t_i^\alpha \lambda}$$

Se asumen como a priori $\alpha \sim \exp(c)$ y $\lambda|\alpha \sim \text{Gama}(\alpha, b)$, por lo tanto, $f(\alpha, \lambda) = f(\lambda|\alpha)f(\alpha)$ ². Así, para la distribución posterior se tiene:

$$f(\alpha, \lambda|\bar{t}) \propto f(\bar{t}|\alpha, \lambda)f(\alpha, \lambda)$$

¹Ver la tesis de Cricelio Montesinos para una explicación más extensa del Gibbs, Montesinos, C (2016) "Distribución de Direcciones en el Gibbs Sampler Generalizad", MSc Dissertation, CIMAT. https://www.cimat.mx/es/Tesis_digitales/. También vean la Enciclopedia de Estadística de Wiley, la entrada de *Gibbs Sampler*: https://www.cimat.mx/~jac/2016WileyStatsRef_GibbsSampling.pdf.

²Este ejemplo aparece en Kundu, D. (2008), "Bayesian Inference and Life Testing Plan for the Weibull Distribution in Presence of Progressive Censoring", *Technometrics*, 50(2), 144–154.

A partir del algoritmo MH usando Kerneles híbridos simule valores de la distribución posterior $f(\alpha, \lambda | \bar{t})$, considerando las siguientes propuestas:

Propuesta 1:

$$\lambda_p | \alpha, \bar{t} \sim Gama \left(\alpha + n, b + \sum_{i=1}^n t_i^\alpha \right) \quad \text{y dejando } \alpha \text{ fijo.}$$

Propuesta 2:

$$\alpha_p | \lambda, \bar{t} \sim Gama(n + 1, -\log(b) - \log(r_1) + c), \text{ con } r_1 = \prod_{i=1}^n t_i \text{ y dejando } \lambda \text{ fijo.}$$

Propuesta 3:

$$\alpha_p \sim \exp(c) \text{ y } \lambda_p | \alpha_p \sim Gama(\alpha_p, b).$$

Propuesta 4 (RWMH):

$$\alpha_p = \alpha + \varepsilon, \text{ con } \varepsilon \sim N(0, \sigma) \text{ y dejando } \lambda \text{ fijo.}$$

Simular datos usando $\alpha = 1$ y $\lambda = 1$ con $n = 20$. Para la a priori usar $c = 1$ y $b = 1$.

3. Considere el ejemplo referente al número de fallas de bombas de agua en una central nuclear³, donde p_i representa el número de fallas en el tiempo de operación t_i , con $i = 1, \dots, n$.

Se considera el modelo $p_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i t_i)$, (las λ_i son independientes entre si), con distribuciones a priori $\lambda_i | \beta \sim Gama(\alpha, \beta)$ y $\beta \sim Gama(\gamma, \delta)$, por lo tanto:

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta) = f(\lambda_1 | \beta) f(\lambda_2 | \beta) \dots f(\lambda_n | \beta) f(\beta)$$

Para la distribución posterior se tiene:

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta | \bar{p}) \propto L(\bar{p}, \bar{\lambda}, \beta) f(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta)$$

Simule valores de la distribución posterior $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta | \bar{p})$, usando un kernel híbrido, considerando las propuestas:

$$\lambda_i | \bar{\lambda}_{-i}, \beta, \bar{t} \sim Gama(p_i + \alpha, \beta + t_i)$$

Bomba (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T. de uso (t_i)	94.32	15.72	62.88	125.76	5.24	31.44	1.05	1.05	2.1	10.48
# de fallas (p_i)	5	1	5	14	3	17	1	1	4	22

Tabla 1: Datos de bombas de agua en centrales nucleares (Robert y Casella, p. 385) para el ejemplo 8.3.

$$\beta | \bar{\lambda}, \bar{t} \sim Gama \left(n\alpha + \gamma, \delta + \sum_{i=1}^n \lambda_i \right).$$

Verifique que estas son propuestas Gibbs.

Use los datos del Cuadro 1 con los parámetros a priori $\alpha = 1.8, \gamma = 0.01$ y $\delta = 1$.

³Este ejemplo fue usado en el artículo original del Gibbs sampler del Gelfand y Smith (1990). Vea también Norton, R.A., Christen, J.A. y Fox, C. (2017), "Sampling hyperparameters in hierarchical models: improving on Gibbs for high-dimensional latent fields and large data set" Communications in Statistics - Simulation and Computation, <http://dx.doi.org/10.1080/03610918.2017.1353618>