Cómputo científico para probabilidad y estadística. Tarea 3. Estabilidad.

Juan Esaul González Rangel

Septiembre 2023

1. Sea Q una matriz unitaria aleatoria de 20×20 (eg. con A una matriz de tamaño 20×20 aleatoria calculen su descomposición QR). Sean $\lambda_1 > \lambda_2 > ... \geq \lambda_{20} = 1 > 0$ y

$$B = Q^* diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{20})Q, \text{ y } B_\varepsilon = Q^* diag(\lambda_1 + \varepsilon_1, \lambda_2 + \varepsilon_2, ..., \lambda_{20} + \varepsilon_{20})Q,$$

   con $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$, con $\sigma = 0.02\lambda_{20} = 0.01$.

   a) Comparar la descomposición de Cholesky de B y de B_ε usando el algoritmo de la tarea 1. Considerar los casos cuando B tiene un buen número de condición y un mal número de condición.

   b) Con el caso mal condicionado, comparar el resultado de su algoritmo con el del algoritmo de Cholesky de scipy.

   c) Medir el tiempo de ejecución de su algoritmo de Cholesky con el de scipy.

2. Resolver el problema de mínimos cuadrados,

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$$

   usando su implementación de la descomposición QR; β es de tamaño $n \times 1$ y X de tamaño $n \times d$.

   Sean $d = 5, n = 20, \beta = (5, 4, 3, 2, 1)'$ y $\sigma = 0.13$

   a) Hacer X con entradas aleatorias U (0, 1) y simular y. Encontrar $\hat{\beta}$ y compararlo con el obtenido $\hat{\beta}_p$ haciendo $X + \Delta X$, donde las entradas de ΔX son $N(0, \sigma = 0.01)$. Comparar a su vez con $\hat{\beta}_c = ((X + \Delta X)'(X + \Delta X))^{-1}(X + \Delta X)'y$ usando el algoritmo genérico para invertir matrices `scipy.linalg.inv`.

   b) Lo mismo que el anterior pero con X mal condicionada (ie. con casi colinealidad).