

Cómputo científico para probabilidad y estadística. Tarea 7.

MCMC: Metropolis-Hastings II

Juan Esaul González Rangel

Octubre 2023

Con el algoritmo Metropolis-Hastings (MH), simular lo siguiente:

- Sean $x_i \sim Ga(\alpha, \beta); i = 1, 2, \dots, n$. Simular datos x_i con $\alpha = 3$ y $\beta = 100$ considerando los casos $n = 4$ y 30 .
Con $\alpha \sim U(1, 4), \beta \sim exp(1)$ distribuciones a priori, se tiene la posterior

$$f(\alpha, \beta | \bar{x}) \propto \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha)^n} r_1^{\alpha-1} e^{-\beta(r_2+1)} \mathbb{1}_{1 \leq \alpha \leq 4} \mathbb{1}_{\beta > 0},$$

con $r_2 = \sum_{i=1}^n x_i$ y $r_1 = \prod_{i=1}^n x_i$.

En ambos casos, grafica los contornos para visualizar dónde está concentrada la posterior.

Utilizar la propuesta

$$q\left(\begin{pmatrix} \alpha_p \\ \beta_p \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right).$$

- Simular de la distribución $\text{Gamma}(\alpha, 1)$ con la propuesta $\text{Gamma}([\alpha], 1)$, donde $[\alpha]$ denota la parte entera de α .
Además, realizar el siguiente experimento: poner como punto inicial $x_0 = 900$ y graficar la evolución de la cadena, es decir, $f(X_t)$ vs t .
- Implementar Random Walk Metropolis Hasting (RWMH) donde la distribución objetivo es $\mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$, con

$$\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizar como propuesta $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \sigma I)$. ¿Cómo elegir σ para que la cadena sea eficiente? ¿Qué consecuencias tiene la elección de σ ?

Como experimento, elige como punto inicial $x_o = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1 \end{pmatrix}$ y comenta los resultados.

Para todos los incisos del ejercicio anterior:

- Establece cual es tu distribución inicial.
- Grafica la evolución de la cadena.
- Indica cuál es el Burn-in.
- Comenta qué tan eficiente es la cadena.
- Implementa el algoritmo MH considerando una propuesta diferente.