15기 현승원

1-1 WLLN

정의: $E(X_i)=\mu$, $Var(X_i)=\sigma^2<\infty$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$: iid 확률변수 , $\bar{X}_n = \frac{\sum X_i}{n}$

임의의 양수 ε에 대해 $\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n-\mu|>\varepsilon)=0$ 이다. (확률수렴)

증명: $E(\bar{X}_n)=\mu$, $Var(\bar{X}_n)=\frac{\sigma^2}{n}$

$$P(|\bar{X}_n-\mu|>\varepsilon) = \overbrace{P\left(|\bar{X}_n-\mu|>\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \le \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}\varepsilon}\right)^2}^{\text{체비셰프 부등식}} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0$$

$\therefore$ $P(|\bar{X}_n-\mu|>\varepsilon)\to 0$ 즉, $\bar{X}_n$는 μ로 확률수렴 한다.

2-1 CLT

정의: iid 확률변수 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 표본크기 $n\to\infty$일때, 표본평균 $\bar{X}_n$의 분포가 정규분포에 분포수렴한다.

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0,1) \quad , \quad \bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

2-2 CLT 활용

CLT에 의해 $\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$ 이 성립한다.

따라서 $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$ 이고

이를 정리하면 모평균 μ의 $(1-\alpha)$ 신뢰구간은 $\left(\bar{X}_n-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_n+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ 임을 알수있다.

3-1

(a) $H_0: \sigma^2=1.5^2$ $\quad H_1: \sigma^2>1.5^2$

(b) $n=10$, 자유도 $=9$

검정 통계량 $\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{46.4}{2.25}=20.62$ $\quad \chi^2_{0.05,9}=16.92$

$\chi^2>\chi^2_{0.05,9}$ 이므로 H_0기각 즉, $\sigma^2>1.5^2$ ⇒ 공정 상에 이상이 있다.

$P\left(\chi^2_{0.95,9} \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{0.05,9}\right)=0.9$ 이므로

σ^2에대한 90% 신뢰구간은 $\left(\frac{46.4}{16.92}, \frac{46.4}{3.33}\right)$ 이다.

4-1 (a) $H_0 : \overset{\text{DSL}}{\mu_1} = \overset{\text{Not DSL}}{\mu_2}$ $\quad$ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$

(b) $n_1 = n_2 = 125$ $\quad$ $\bar{x}_1 = 173.5$ $\quad$ $S_1 = 7.05$ $\quad$ $S_p^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = 7.05$

$\bar{x}_2 = 171.4$ $\quad$ $S_2 = 7.05$

검정통계량 $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \dfrac{2.1}{7.05\sqrt{0.016}} = 2.355$

자유도 : $n_1+n_2-2 = 248$ 이므로 $\quad$ $t_{0.05,248} = 1.65$

$t > t_{0.05,248}$ 이므로 H_0 기각 즉, DSL 평균키가 아닌사람의 평균 키보다 크다.

4-2 (a) $H_0 : \overset{\text{DSL}}{\mu_1} = \overset{\text{ESC}}{\mu_2} = \overset{\text{else}}{\mu_3}$ $\quad$ H_1 : not H_0 (적어도 하나의 학과의 평균키는 다름)