

Yoneda

El encaje de Yoneda

De entre los objetos de Sets^C hay unos especiales, los funtores (covariantes) representables,

$$\text{Hom}_C(C, -) : C \rightarrow \text{Sets}.$$

Donde C es localmente pequeña. Notemos que para cada $h : C \rightarrow D$ en C , tenemos una transformación natural

$$\text{Hom}_C(h, -) : \text{Hom}_C(D, -) \rightarrow \text{Hom}_C(C, -).$$

Donde el componente en X se define por la precomposición

$$(f : D \rightarrow X) \mapsto (f \circ h : C \rightarrow X).$$

Así, tenemos un functor contravariante

$$K : C^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}^C$$

definido por $K(C) = \text{Hom}_C(C, -)$. Este functor es la transposición exponencial del bifunctor

$$\text{Hom}_C : C^{\text{op}} \times C \rightarrow \text{Sets}.$$

Si transponemos Hom_C con respecto a su otro argumento, obtenemos un functor covariante

$$y : C \rightarrow \text{Sets}^{C^{\text{op}}}$$

De C al conjunto de funtores contravariantes conjunto-valuados a veces llamados "pre-gavillas".

Definición El encaje de Yoneda es el functor $y : C \rightarrow \text{Sets}^{C^{\text{op}}}$ que lleva a C al functor

$$y_C = \text{Hom}_C(-, C) : C^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$$

y lleva a $f : C \rightarrow D$ a la transformación natural

$$y_f = \text{Hom}_C(-, f) : \text{Hom}_C(-, C) \rightarrow \text{Hom}_C(-, D).$$

El lema de Yoneda

Lema Sea C localmente pequeña. Para cada objeto $C \in C$ y cada functor $F \in \text{Sets}^{C^{\text{op}}}$, hay un isomorfismo

$$\text{Hom}(y_C, F) \cong FC.$$

que es natural en C y en F .

Aquí:

1) Hom es $\text{Hom}_{\text{Sets}^{C^{\text{op}}}}$

2) La naturalidad en F significa que, dada $\theta : F \rightarrow G$, el siguiente diagrama commuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(y_C, F) & \xrightarrow{\cong} & FC \\ \text{Hom}(y_C, \theta) \downarrow & & \downarrow \theta_C \\ \text{Hom}(y_C, G) & \xrightarrow{\cong} & GC \end{array}$$

3) La naturalidad en C significa que, dada $h : C \rightarrow D$, el siguiente diagrama commuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(yC, F) & \xrightarrow{\cong} & FC \\ \text{Hom}(yh, F) \downarrow & & \downarrow Fh \\ \text{Hom}(yD, F) & \xrightarrow{\cong} & FD \end{array}$$

Teorema El encaje de Yoneda es fiel y pleno.

Aplicaciones del lema de Yoneda

Corolario Dados objetos A y B en una categoría localmente pequeña C , $yA \cong yB$ implica $A \cong B$.

Si C es cartesiana cerrada y si $X \in C$,

$$\begin{aligned} \text{Hom}(X, (A^B)^C) &\cong \text{Hom}(X \times C, A^B) \\ &\cong \text{Hom}((X \times C) \times B, A) \\ &\cong \text{Hom}(X \times (C \times B), A) \\ &\cong \text{Hom}(X \times (B \times C), A) \\ &\cong \text{Hom}(X, A^{B \times C}) \end{aligned}$$

Entonces

$$(A^B)^C \cong A^{(B \times C)}$$

Proposición Si una categoría C es cartesiana cerrada y tiene coproductos entonces

$$(A \times B) + (A \times C) \cong A \times (B + C)$$

Demostración

$$\begin{aligned} \text{Hom}(A \times (B + C), X) &\cong \text{Hom}(B + C, X^A) \\ &\cong \text{Hom}(B, X^A) \times \text{Hom}(C, X^A) \\ &\cong \text{Hom}(A \times B, X) \times \text{Hom}(A \times C, X) \\ &\cong \text{Hom}((A \times B) + (A \times C), X). \end{aligned}$$