Yoneda

El encaje de Yoneda

De entre los objetos de $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}}$ hay unos especiales, los functores (covariantes) representables,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C,-):\mathbf{C}\longrightarrow \mathbf{Sets}.$$

Donde $\mathbf{C}$ es localmente pequeña. Notemos que para cada $h:C\to D$ en $\mathbf{C}$, tenemos una transformación natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(h,-):\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(D,-)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C,-).$$

Donde el componente en X se define por la precomposición

$$(f:D\to X)\mapsto (f\circ h:C\to X).$$

Así, tenemos un functor contravariante

$$K:\mathbf{C}^{op}\longrightarrow \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}}$$

definido por $K(C)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C,-)$. Este functor es la transposición exponencial del bifunctor

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}:\mathbf{C}^{op}\times\mathbf{C}\longrightarrow \mathbf{Sets}.$$

Si transponemos $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}$ con respecto a su otro argumento, obtenemos un functor covariante

$$y:\mathbf{C}\longrightarrow \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$$

De $\mathbf{C}$ al conjunto de functores contravariantes conjunto-valuados a veces llamados "pre-gavillas".

Definición El encaje de Yoneda es el functor $y:\mathbf{C}\to\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ que lleva a C al functor

$$yC=\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,C):\mathbf{C}^{op}\longrightarrow\mathbf{Sets}$$

Y lleva a $f:C\to D$ a la transformación natural

$$yf=\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,f):\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,C)\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,D).$$

El lema de Yoneda

Lema Sea $\mathbf{C}$ localmente pequeña. Para cada objeto $C\in\mathbf{C}$ y cada functor $F\in\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$, hay un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}(yC,F)\cong FC.$$

que es natural en C y en F.

Aquí:

1) Hom es $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}}$
2) La naturalidad en F significa que, dada $\theta:F\to G$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(yC,FC) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(yC,\theta)"'] & FC \arrow[d, "\theta_C"] \\
\mathrm{Hom}(yC,GC) \arrow[r, "\cong"'] & GC
\end{tikzcd}$$

3) La naturalidad en C significa que, dada $h:C\to D$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(yC, F) & \xrightarrow{\cong} & FC \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}(yh,F)} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle Fh} \\ \mathrm{Hom}(yD, F) & \xrightarrow[\cong]{} & FD \end{array}$$

Teorema El encaje de Yoneda es fiel y pleno.

Aplicaciones del lema de Yoneda

Corolario Dados objetos A y B en una categoría localmente pequeña C, $yA \cong yB$ implica $A \cong B$.

Si C es cartesiana cerrada y si $X \in C$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(X, (A^B)^C) &\cong \mathrm{Hom}(X \times C, A^B) \\ &\cong \mathrm{Hom}((X \times C) \times B, A) \\ &\cong \mathrm{Hom}(X \times (C \times B), A) \\ &\cong \mathrm{Hom}(X \times (B \times C), A) \\ &\cong \mathrm{Hom}(X, A^{B \times C}) \end{aligned}$$

Entonces

$$(A^B)^C \cong A^{(B \times C)}$$

Proposición Si una categoría C es cartesiana cerrada y tiene coproductos, entonces

$$(A \times B) + (A \times C) \cong A \times (B + C)$$

Demostración

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(A \times (B+C), X) &\cong \mathrm{Hom}(B + C, X^A) \\ &\cong \mathrm{Hom}(B, X^A) \times \mathrm{Hom}(C, X^A) \\ &\cong \mathrm{Hom}(A \times B, X) \times \mathrm{Hom}(A \times C, X) \\ &\cong \mathrm{Hom}((A \times B) + (A \times C), X). \end{aligned}$$