

LIA Aerospace

Gimballed EDF propelled VTVL vehicle design and control

Patricio Whittingslow
Luis Cretton

7 de abril de 2021

Resumen

En este documento se encuentran descriptas las secuencias del diseño, simulación, pruebas, y puesta en marcha de un vehículo autónomo VTVL (Vertical Take-off Vertical Landing). Se desarrolla la elección de un método de propulsión que lograra ensayar el sistema de control a baja escala para luego ser puesto en marcha en un sistema de mayor escala de uso sub-orbital o incluso orbital.

Índice

Glosario	2
Siglas	2
1. Introducción	3
2. Estudios	3
2.1. Agua como propelente	4
2.2. Turbina	4
2.3. Propulsión eléctrica	4
3. Diseño	5
3.1. Selección de propulsador	6
3.2. Diseño de la mecánica	6
3.3. Posición de baterías	7
3.4. Selección de servos	7
3.5. Contexto de pandemia	7
4. Modelo 2D simplificado	7
4.1. Modelado matemático	8
4.2. Armado de sistema lineal	8
4.3. Representación en espacio de estados	9
5. Ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido	10
5.1. Notación	10
5.2. Notación del álgebra a utilizar	11
5.3. Variables de estado	12
5.4. Ecuaciones diferenciales	13
5.5. Dinámica angular del vehículo	14
6. Simulación	15
6.1. Sistema no-lineal	15
6.2. Sistema de control	15
6.3. Resultados de simulación	16
7. Desarrollo de software	18
7.1. Elección de arquitectura	18
7.2. Flujo de control	19
7.3. Interfaz con hardware	19
7.4. Implementación	19

Glosario

Corrutina Una unidad de procesamiento que puede ejecutarse en simultaneo con otras corrutinas.

Electronic ducted fan Turbina impulsada por un motor eléctrico brushless. Es eficiente a altas velocidades.

Linear Quadratic Regulator Regulador basado en control óptimo que busca reducir error cuadrático de una función costo.

System on a chip Integración de módulos conectados a un controlador en un único circuito impreso.

LIA Laboratorio de Investigaciones Aeroespaciales. Empresa para la cual se efectuó el desarrollo del vehículo.

Siglas

I²C Protocolo de comunicación de dos hilos que permite comunicar varios circuitos integrados en un bus.

GPIO Salida digital de uso genérico. Pueden estar en *high* (tensión de fuente) o *low* (puesto a tierra).

SPI Serial peripheral interface. Un protocolo de comunicación full-duplex de Motorola.

UART Protocolo de comunicación universal asíncrono.

Nota del autor

Si el documento es abierto desde un lector PDF moderno (Chrome, Adobe Acrobat Reader, entre otros), se podrá navegar el mismo mediante las referencias (haciendo click derecho).

1. Introducción

El diseño, desarrollo, fabricación, armado, simulación y lanzamiento de cohetes, no es una tarea sencilla ni repetida en intervalos de cortos de tiempo, al contrario, suelen llevar décadas y una fuerte inversión para que sean posibles estos logros. El diseño y auge de vehículos VTVL viene a subsanar estos factores ya que una vez terminada la misión el vehículo se puede reutilizar, con mínimas intervenciones, y estaría listo para una nueva misión, atacando estos dos puntos principales anteriormente mencionados, el tiempo y el costo. Esto es a diferencia del método convencional donde el vehículo, luego de completar la misión, pasa a formar parte de basura espacial o, en el mejor de los casos, es recuperado del mar como el caso del Space Shuttle.

Un vehículo VTVL es aquel que despegue verticalmente (como la mayoría de los cohetes convencionales) y aterriza verticalmente, por sí solo, sin necesidad de ser tripulado, y con el objeto de completar una misión, esto supone una gran variante de ventajas, como ser una de las más destacadas el reutilizamiento del vehículo, con todo lo que ello implica, logrando una optimización de los costos, disminución de huella ecológica, y tiempo de desarrollo para las empresas interesadas.

Los vehículos VTVL son tan viejos como el primer alunizaje. Traen en si varias ventajas frente a otros vehículos voladores como la gran reducción de espacio necesario para despegar y aterrizar. Esto no es un detalle menor dado que la mayor parte de la superficie terrestre de la tierra no son pistas de aterrizaje si no más bien terreno formado naturalmente.

Este documento propone el diseño, simulación, control y fabricación de un vehículo con capacidades VTVL siendo un prototipo de baja escala. Este prototipo serviría como punta pie inicial para vehículos de escala mayor que puedan completar misiones espaciales. Existen varias ventajas de implementar este tipo de tecnología.

A baja escala, un vehículo que despegue y aterriza por su cuenta, teniendo la capacidad de superar obstáculos que se presenten, puede ser de gran utilidad en ambientes hostiles para el ser humano, que esto se logre de manera rápida y efectiva podría ser la diferencia entre el éxito o no de la misión. Como ser el transporte de insumos médicos en tiempo real desde que un paciente lo requiere, en zonas de acceso limitado.

Últimamente hay un interés nuevo en imágenes espaciales. El vehículo podría ser utilizado para fines de sistemas de monitoreo y análisis geoespacial mediante el uso de estas imágenes, como hacen las empresas *Ceres Imaging* y *Satelloptic*.

El vehículo una vez desarrollado y funcionando, puede servir de plataforma para diversos estudios de fenómenos de dinámica de fluidos, como ser, mediciones aerodinámicas, investigación del *fuel sloshing* en vehículos con tanques esbeltos.

Los sistemas de vehículos orbitales tienen sistemas complejos que deben ser testeados en una primera etapa mediante algún ensayo controlado. El vehículo que se desarrolla en el presente documento podría ser usado para tales fines como una plataforma para pruebas como ser el despliegue de una nariz o etapa, comprobación de sensores y actuadores a gran velocidad y con empuje variable.

2. Estudios

En lo que se refiere a la construcción del vehículo, el diseño propuesto paso por varias etapas y decisiones de ingeniería hasta su forma final. Desde su diseño en lápiz y papel hasta la simulación del CAD con el detalle del ultimo bulón del ensamble para poder recoger datos de momentos de inercia, centros de masa y la dinámica del vehículo.

2.1. Agua como propelente

El primer prototipo muy distante del diseño final perteneciente a este trabajo, consistía en un recipiente a presión con agua, abulonado a un chasis, con un gimbal y actuadores para poder redirigir el empuje.

La figura 1 muestra los resultados de una simulación de un vehículo pequeño de aluminio con un recipiente a presión lleno en parte de agua y aire a 200 bar. La simulación considera masa variable y una transición isoentrópica del gas en el recipiente. En el mejor de los casos se llegaba a un tiempo de vuelo cercano a los 4 segundos que no es suficiente para comprobar un sistema de control.

Para optimizar este problema se modificaba

- Diámetro de la tobera – más empuje vs. menos tiempo de vuelo controlado
- Volumen de agua – más tiempo de vuelo vs. mayor peso de vehículo

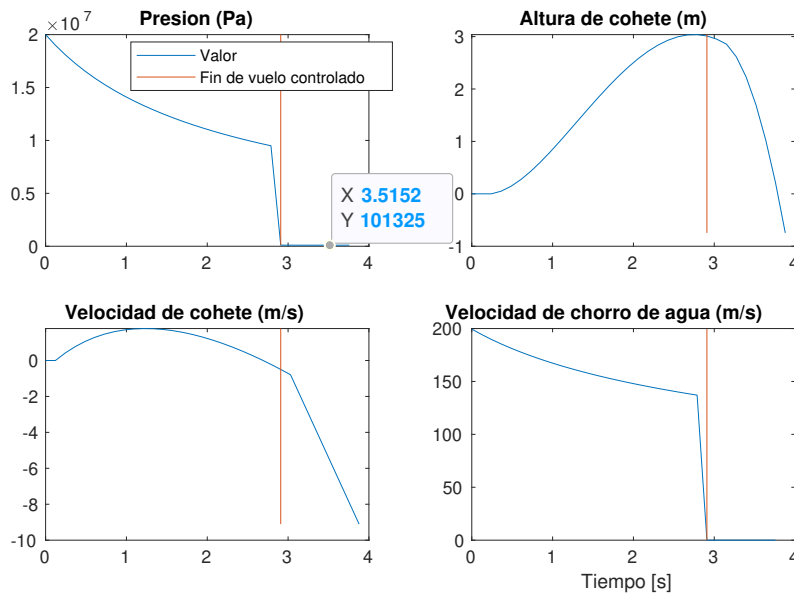


Figura 1: Análisis preliminar para un vehículo propulsado por agua a presión. La presión es la del tanque (absoluta). El peso estructural que se utilizó fue de 10kg.

2.2. Turbina

Se propuso la construcción de una turbina de combustible líquido, como método de propulsión del vehículo favorable debido al excelente cociente de peso-empuje.

Esta idea se vio descartada por la pandemia que estamos atravesando (COVID19) debido a que no teníamos acceso al taller de la institución para poder realizar en tiempo y forma el dispositivo mecánico, que era la primer tarea inmediata a tener en banco de pruebas asegurando su funcionamiento en optimas condiciones, para luego proseguir con el desarrollo del vehículo y el sistema de control.

2.3. Propulsión eléctrica

Luego de descartar las ideas vistas en 2.1 y 2.2 se pasó al análisis de la incorporación de una turbina eléctrica que es un dispositivo ya existente en el mercado, no en nuestro país, pero que



Figura 2: Dos vehículos VTOL eléctricos modernos. “VBat” (Izq.) y “Ikarus” (Der.).

podría llegar a importarse mediante una inversión privada.¹ Dado el alcance de un proyecto de universidad se decidió por un diseño compuesto por elementos comercialmente disponibles.²

Para lograr estas tareas generalmente los vehículos VTOL de baja escala generalmente son propulsados por motores eléctricos.

Los vehículos VTOL eléctricos son propulsados por hélices en su mayoría y constan casi siempre de 3 o más propulsores en un arreglo simétrico y plano. Recientemente hay un interés por la construcción de vehículos de una sola hélice por la buena relación empuje–peso que tienen. Sin embargo, estos vehículos no vienen sin sus complicaciones:

- La rotación dada al aire por la hélice causa un momento en el eje de propulsión que es contrarrestado en vehículos multirrotores.
- Inclinar al rotor durante su funcionamiento causa una fuerza perpendicular a la dirección de inclinación conocido como el efecto giroscópico.

El primer punto es mitigado fácilmente agregando álabes a la salida del chorro para enderezar el flujo y contrarrestar la rotación. El segundo punto solo se resuelve conociendo las ecuaciones de momento angular y controlando actuadores con un sistema de control a lazo cerrado. Los sistemas vistos en la figura 2 tienen la particularidad de poder ser representados con relativa facilidad usando un solo marco de referencia inercial para el cálculo de las ecuaciones de momento angular.

Existen placas pre-programadas para vehículos multirrotores, pero en el caso de vehículos monorrotores de hélice fija se precisa re-programar la placa para compensar por el efecto giroscópico y agregar dinámica de álabes ya que no existe software disponible aún para esta configuración. En el caso de tener una hélice móvil se suma un nivel de complejidad agregada debido al despeje de las ecuaciones de momento angular (ver sección 5). Al momento de escribir este documento aún no hay desarrollo disponible de carácter público para esta configuración.

3. Diseño

En el marco de este proyecto, es de interés el diseño mecánico del mecanismo de control semejante un vehículo propulsado por combustión externa. Estos últimos suelen ser dirigidos por toberas montadas sobre un cardán. En el caso de un vehículo eléctrico de una hélice se tendría que montar el sistema de propulsión centrado en un gimbal para no obstruir el flujo.

¹Agradecemos a LIA Aerospace por hacerse cargo de la compra de todos los elementos necesarios para la fabricación del cohete.

²Commercial off the shelf (COTS)

3.1. Selección de propulsador

Existen diversas maneras de impulsar un vehículo de forma eléctrica. Luego de un cuidadoso estudio y discusión de ingeniería se decidió optar por un EDF, quien juega un rol central en el diseño pues es lo que se intenta controlar para llevar a cabo la navegación y guiado. Se analizo ir por un EDF de aluminio, por una cuestión de durabilidad, relación empuje-peso, reducir probabilidad de fallas y roturas en sucesivos experimentos. Los EDF de aluminio solo se consiguen en el exterior y su precio es en dolares³. Esto trae varios inconvenientes en lo referente al presupuesto acotado, logística, compra y obtención. Los EDF disponibles de plástico tienen una relación de empuje-diámetro mucho menor con respecto a los de aluminio. Cabe destacar que el costo de un EDF de plástico y un EDF de aluminio son cercanos para diámetros similares.

Hablar del bucle

3.2. Diseño de la mecánica

Para el diseño del gimbal se propuso una distribución de los mecanismos de actuación con servos concéntricos a los ejes de rotación. Para evitar de esta manera complejidad de mecanismos, cantidad de piezas de conexión entre servo y ejes, manufactura de mecanismos, uniones rotoides, y obtener así un mapeo lineal del ángulo de actuación. El único intermediario es el rodamiento que como se dispuso en la configuración ocupa el mínimo lugar posible justo por encima de la estría del servo y se lleva las cargas. Este mecanismo viene con la desventaja de una reducción de la resolución del ángulo de actuación comparado a un sistema actuado por un mecanismo biela-manivela.

El material seleccionado para la fabricación del gimbal fue aluminio serie siete mil calidad aeroespacial. Esta construido de una sola pieza, siendo el elemento que se lleva las tensiones en todo momento en variabilidad de ángulos hacia el fuselaje, por ello la decisión de ser de la serie de mayor resistencia mecánica de los aluminios comerciales.

Los rodamientos seleccionados son de dimensiones 18mm exterior, 10mm interior y 7mm de espesor, elegidos de esta manera por una cuestión de espacio para poder pasar la estría de los servomotores por dentro, dejando un espesor de la pared del estriado de 2.5mm, para evitar fisuras y hacer posible la manufactura de la pieza. La forma de generar el estriado interno, es la de indentar con un patrón sobre un agujero previo de diámetro medio a los valores máximos y mínimos de las crestas y valles de la estría. Esta operación debe hacerse con el material en bruto para no arruinar las tolerancias que necesitan los rodamientos. Los rodamientos se montarían clavados, minimizando el peso al no agregar seguers ni tapas con bulones.

Los ejes del gimbal estarían en disposición simplemente apoyada y de forma axisimétrica para prevenir perturbaciones dinámicas por desbalanceo.

Con respecto al fuselaje, al inicio se pensó una envolvente cilíndrica para el anillo externo del gimbal. Luego se diseñó un desarrollo reticulado optimizado, se pasó por diferentes modelos e ideas, hasta que se combinaron varios puntos fuertes de cada idea. La envolvente del gimbal se fabrica de forma rolada y optimizada en peso a raíz de una planchuela de aluminio vaciada y luego generando su forma cilíndrica.⁴ Esto distribuye las masas de manera más favorable con menos espacio ocupado (dinámica-peso). Aguas arriba del gimbal se optó por un chasis tubular, con diversos vaciados, que mediante flejes puede soportar cada elemento que se acopla al cohete por medio de uniones abulonadas. Permitiendo mediante sus aberturas el acceso a cada componente del vehículo, proporcionando, además, una renovación del aire para una evacuación del calor generado, y un flujo abundante hacia la admisión del EDF.

De la manera que se construye el gimbal puede entregar una rotación entera sin hacer contacto con la estructura. Se elige esta configuración por posibles desviaciones del proyecto en el futuro, calculamos que utilizaremos menos de 20° de rotación de cada eje de gimbal ($\pm 10^\circ$).

³El cambio de divisas es desfavorable para el lugar donde se desarrolla este proyecto.

⁴Contiene al anillo del gimbal.

3.3. Posición de baterías

La la decisión de donde posicionar las baterías surgía de querer simular un vehículo semejante a los VTOL de la industria aeroespacial y también la posibilidad de tener una inercia favorable para los márgenes de estabilidad. Estos dos últimos puntos sugieren que la posición ideal para las baterías es arriba de todo. Esto haría que el punto alrededor del cual se linealizó las ecuaciones de movimiento sea más estable. Luego de una conversación con Pablo Cossutta, un ingeniero electrónico especialista en sistemas de potencia, se optó por la configuración encontrada en el documento. Las baterías se encuentran cerca del EDF para alejar las líneas de potencia trifásica correspondientes al motor brushless de lo que es la electrónica digital. Al inestabilizar el punto de operación se obtiene una mejora en la respuesta ante actuaciones permitiendo una corrección de trayectoria más rápida.⁵

3.4. Selección de servos

Para obtener una buena respuesta del vehículo ante actuaciones se debe acotar la resolución necesaria. Según [Castillo-Martínez et al. \[2018\]](#), la resolución angular de un servo es de

$$R_p = \frac{\theta \cdot T_D}{PW}$$

donde θ es el ángulo de barrido del servo (especificado por el fabricante), T_D es el tiempo muerto y PW es el ancho de pulso operativo.

El servo seleccionado es el SC1258TG. Tiene las siguientes especificaciones

- Tiempo muerto (*deadband*) $3\mu s$
- Rango de ancho de pulso mínimo y máximo $800-2100\mu s$
- Posición neutra $1500\mu s$
- Ángulo de barrido operativo 100° (para $1000-2000\mu s$)
- Velocidad $1,05 \text{ rad/s}$

Se tiene entonces una resolución mínima de $0,3^\circ$ con un ancho de pulso de $2000\mu s$. Esta resolución es alimentada como parámetro de actuación en las simulaciones.

Incluir estudio de resolución de servo

3.5. Contexto de pandemia

Las medidas tomadas durante la pandemia por el gobierno fueron muy estrictas e influyó a todo tipo de acción que se quiso tomar. Durante el primer año de pandemia no nos pudimos reunir físicamente para discutir ideas de diseño, lo cual dificultó el avance físico del proyecto como así también la toma de decisiones y la comunicación entre partes, crucial en el inicio de todos proyectos de ingeniería.

Una de las mayores complicaciones que se tuvo fue la compra de componentes, además de la fabricación, que se vio afectada, por las políticas cambiantes de nuestro país con respecto a la compra y la entrada de productos importados a suelo argentino. Incluso la compra y llegada de los productos fue un motivo de festejo luego de un tortuoso trayecto.

4. Modelo 2D simplificado

Esta siguiente sección detallará el tratamiento matemático efectuado para controlar un vehículo con propulsión vectorizada en el plano. El propósito es ilustrar a un nivel simple las herramientas que serán aplicadas para controlar el vehículo diseñado.

⁵ Este resultado es deseado cuando se desea tener mejor rendimiento por ángulo de actuación, como sucede con los aviones caza que utilizan este fenómeno a conveniencia.

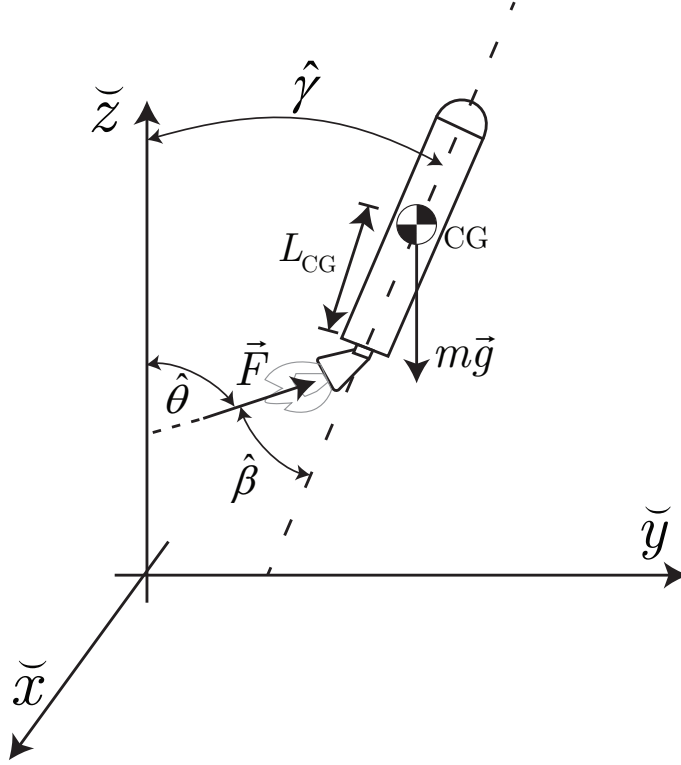


Figura 3: Diagrama de cuerpo libre de un vehículo con propulsión vectorizada 2D.

4.1. Modelado matemático

Comenzamos con las ecuaciones dinámicas de un vehículo en el plano con control de propulsión vectorizada (por ángulo)

$$\begin{cases} \ddot{y} = \frac{F}{m} \sin(\gamma + \beta) \\ \ddot{z} = \frac{F}{m} \cos(\gamma + \beta) - g \\ \ddot{\gamma} = \frac{L_{CG} \cdot F}{I_{xx}} \sin \beta \end{cases}$$

donde L_{CG} y F están en función del tiempo, $m = m_0 - \int \dot{m}$ y $\theta = \gamma + \beta$.

Vale la pena aclarar que no se tomarán en cuenta los siguientes efectos:

- Coeficiente de arrastre
- Viento
- *Fuel sloshing*
- Efectos relativistas

4.2. Armado de sistema lineal

Se propone un punto de operación alrededor del cual se efectúa la linealización las ecuaciones. El estado del vehículo es *vertical y quieto en el espacio*.⁶

$$\begin{aligned} \gamma^* &= 0 \\ \beta^* &= 0 \\ F^* &= mg \end{aligned}$$

en este caso F es la desviación del punto de operación. Desde ahora en adelante $\Delta F = F - mg$.

⁶La linealización es valida solo para un vehículo vertical. Se deberá modificar el método para modelar un vehículo orbital.

4.3. Representación en espacio de estados

El número de variables de estado será igual a número de almacenadores de energía independientes. Estos son

z Energía potencial por la gravedad

\dot{y}, \dot{z} Energía cinética del vehículo

$\dot{\gamma}$ Momento angular del vehículo

entonces, las variables de estado son las siguientes

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = z$$

$$x_4 = \dot{z}$$

$$x_5 = \gamma$$

$$x_6 = \dot{\gamma}$$

donde $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_3 = x_4$ y $\dot{x}_5 = x_6$

Se aprovecha la expansión de Taylor para la linealización de expresiones trigonométricas:

$$\sin(x + y)|_{x=x_0+\Delta x, y=y_0+\Delta y} \approx \sin(x_0 + y_0) + \cos(x_0 + y_0)(x - x_0) + \cos(x_0 + y_0)(y - y_0)$$

Las ecuaciones dinámicas de los estados 2,3, y 4 son dadas por las ecuaciones mostradas al comienzo de esta sección. Abajo están las ecuaciones de estados

$$\dot{x}_2 = \frac{F}{m} (\gamma + \beta) = gx_5 + gu_2 \quad (1)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{F}{m} - g = \frac{F - F_0}{m} = \frac{u_1}{m} \quad (2)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{L_{CG} \cdot F}{I_{xx}} \beta = \frac{L_{CG} \cdot mg}{I_{xx}} u_2 \quad (3)$$

donde T_s es el periodo de muestreo.

Los vectores de entrada y salida son

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta F \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ \gamma \end{bmatrix}$$

tal que las ecuaciones de salida son

$$y_1 = x_1 \quad (4)$$

$$y_2 = x_3 \quad (5)$$

$$y_3 = x_5 \quad (6)$$

Se escriben las matrices del sistema y de control ($\mathbf{D} = [0]$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_{CG} \cdot mg}{I_{xx}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

El sistema mostrado en (7) es *fully state controllable*.

5. Ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido

Se hará referencia a la figura 3 para explicar las variables en juego en el modelo 3D debido a la dificultad inherente de mostrar las 16 variables de estado en un dibujo del modelo 3D.

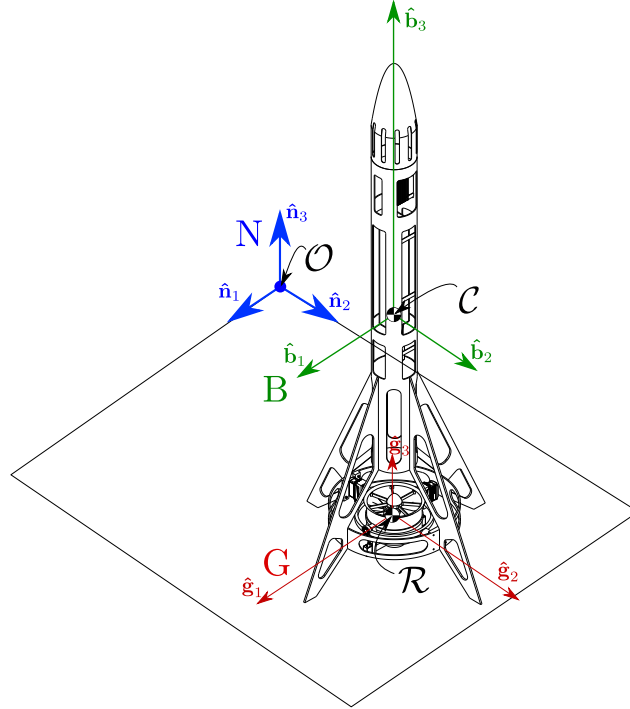


Figura 4: Marcos de referencia tomados para el análisis de cuerpo rígido. Por simplicidad se toman los centros de masa del cardán y del rotor como coincidentes en el punto \mathcal{R} .

5.1. Notación

La notación es la del libro *Rigid Body Dynamics of Mechanisms, Theoretical Basics* Hahn [2013]. Se requiere un tratamiento algebraico explícito de los marcos de referencia y representación debido al caso especial de un *gimballed rotor*. Este tratamiento facilita la programación de la simulación y subsecuentemente el control, el cual se volvería ambiguo y complejo con un tratamiento más común o simplificado.

$\underline{r}_{\mathcal{CO}} = [x, y, z]$: Posición absoluta del centro de masa del vehículo leasé “posición de \mathcal{C} respecto \mathcal{O} ”)

$\underline{r}_{\mathcal{RC}}$: Posición del centro de masa del cardán respecto al centro de masa del vehículo

$\underline{\eta} = [\phi, \theta, \psi]$: Ángulos de actitud del vehículo (Ángulos Euler)

$\underline{\omega}_r^G$: Velocidad angular del rotor del EDF representado en el marco G (dirección constante)

$\underline{\omega}_{BN}^B$: Velocidad angular de B respecto a N, representado en el marco B.

α, β : Ángulo de actuación de vectorización del EDF o ángulo de actitud del marco G

δ : Ángulo de actuación de los dos flaps anti-roll

m : Masa del vehículo sin rotor

m_r : Masa del rotor

\underline{g} : Aceleración de la gravedad

\underline{F}^B : Empuje del EDF representado en el marco B

\mathbf{A}^{NB} : Matriz de transformación de cosenos directores de un marco B a el marco N

Caracterización del EDF

τ_c : Torque efectivo de control del EDF

K_T : Constante de empuje del EDF

K_Q : Coeficiente de torque viscoso de fricción

Q : Torque viscoso de fricción

τ_r : Torque de reacción por el swirl de salida

Caracterización del mecanismo anti-roll:

K_{FL} : Coeficiente de lift de los flaps anti-roll

K_{FD} : Coeficiente de drag de los flaps anti-roll

F_L : Lift de los flaps anti-roll

F_D : Drag de los flaps anti-roll

Matriz de inercia:

J_C^B : Vehículo sin rotor respecto a \mathcal{C} representado en B

$J_{r\mathcal{R}}^G$: Rotor respecto a \mathcal{R} representado en G

$J_{g\mathcal{R}}^G$: Cardán y motor sin rotor respecto a \mathcal{R} representado en G

5.2. Notación del álgebra a utilizar

El producto escalar se define como \cdot para diferenciarlo de simple multiplicación vectorial (\cdot) . $\tilde{\omega}$ es la matriz skew del vector que reemplaza el producto vectorial ya que $\tilde{r} \cdot v = r \times v$

$$\tilde{\omega}_{LR}^L = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{zLR}^L & \omega_{yLR}^L \\ \omega_{zLR}^L & 0 & -\omega_{xLR}^L \\ -\omega_{yLR}^L & \omega_{xLR}^L & 0 \end{pmatrix}$$

Se dice que J_C^B es la matriz de inercia respecto el punto \mathcal{C} , representado en el marco B: es decir, las componentes de la matriz de inercia están en la base de B. Esto se puede escribir así:

$$J_C^B = J_{b1}\hat{\mathbf{b}}_1 + J_{b2}\hat{\mathbf{b}}_2 + J_{b3}\hat{\mathbf{b}}_3$$

La derivada del término anterior respecto un marco N quedaría escrito

$${}^N j_C^B = {}^N \frac{dJ_C^B}{dt} = \mathbf{A}^{NB} \cdot {}^B \frac{dJ_C^B}{dt}$$

Se pueden demostrar las siguientes ecuaciones

$$\dot{\mathbf{A}}^{RL} = \mathbf{A}^{RL} \cdot \tilde{\omega}_{LR}^L = \tilde{\omega}_{LR}^R \cdot \mathbf{A}^{LR} = -\tilde{\omega}_{LR}^L \cdot \mathbf{A}^{RL} \quad (8)$$

$$\mathbf{A}^{BN} = (\mathbf{A}^{NB})^\top = (\mathbf{A}^{NB})^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^{NB} \cdot \mathbf{A}^{BN} = \mathbf{I} \quad (9)$$

donde ω_{LR}^L es la velocidad angular vectorial del marco L con respecto a R representado en L, \mathbf{A}^{RL} es la matriz de cosenos directores que transforma un vector de una base ortogonal L a otra base ortogonal R, y $\dot{\mathbf{A}}^{RL}$ es la derivada de la matriz \mathbf{A}^{RL} respecto R.

5.3. Variables de estado

Se tendrán las variables de estado de posición y velocidad donde z positivo es alejándose de la tierra.

$$\mathbf{r}_{CO}^N = [x \ y \ z], \quad \dot{\mathbf{r}}_{CO}^N = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]$$

El movimiento cuerpo rígido será descrito por 3 ángulos de Euler (Cardán o Bryant en algunas bibliografías) ϕ, θ y ψ (roll, pitch, yaw respectivamente).

$$\underline{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi] \quad (10)$$

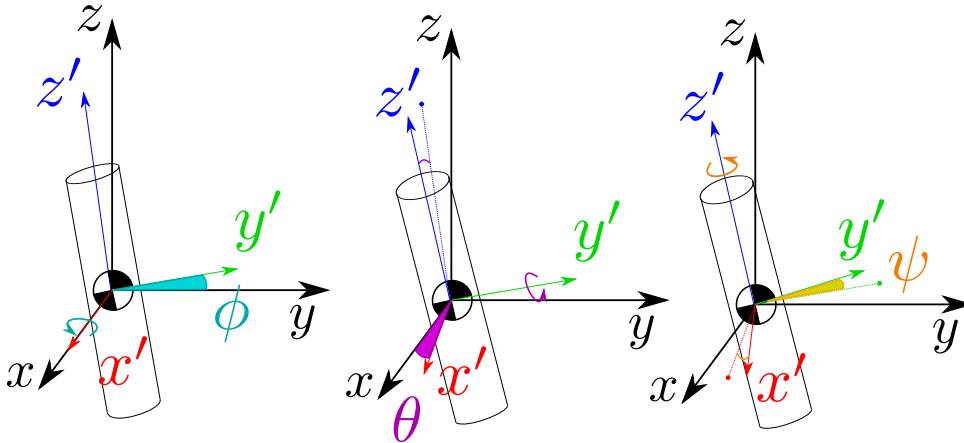


Figura 5: Diagrama mostrando las rotaciones de ángulo de euler en el orden que son efectuadas para describir el sistema. ϕ representa el pitch, θ el yaw y ψ el roll. Se muestran las últimas posiciones de los ejes rotados con una línea punteada.

Los ángulos de la vectorización de la tobera serán α y β . δ corresponde a los actuadores que contrarrestan el roll del vehículo mediante dos flaps. Los ángulos α y β describen la dirección en la que está apuntando la tobera (equivalente a la orientación G) respecto la dirección del vehículo (marco B). $\omega_r = \omega_r^G$ es la velocidad angular del rotor.

Se escriben las variables de estado y el vector input, donde F es la fuerza que hace la tobera sobre el vehículo (la cual depende de la velocidad del vehículo)⁷

$$\mathbf{x} = [r_{CO}^N \ \underline{\eta} \ \dot{r}_{CO}^N \ \underline{\omega}_{BN}^B \ \omega_r \ \alpha \ \beta \ \delta]^\top \quad (11)$$

$$\mathbf{u} = [\tau_c \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\delta}]^\top \quad (12)$$

En la próxima sección se buscará obtener el vector de variables de estado derivado en el tiempo $\dot{\mathbf{x}}$.

⁷En el código ϕ, θ y ψ aparecen como $\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$

5.4. Ecuaciones diferenciales

Definimos la transformación de los ángulos euler con una matriz de transformación \mathbf{A}^{BN} donde c y s son las funciones coseno y seno, respectivamente.

$$\mathbf{A}^{\text{BN}} = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi & c\theta \cdot s\psi & -s\theta \\ s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\phi \cdot s\psi & s\phi \cdot s\theta \cdot s\psi + c\phi \cdot c\psi & s\phi \cdot c\theta \\ c\phi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\phi \cdot s\psi & c\phi \cdot s\theta \cdot s\psi - s\phi \cdot c\psi & c\phi \cdot c\theta \end{bmatrix} \quad (13)$$

La transformación nos servirá para poder pasar de la dinámica que está definida en el marco del vehículo B al marco N donde se tienen las variables de estado que se desean controlar.

Podemos obtener la velocidad en el marco del cuerpo

$$\dot{\underline{r}}_{\text{CO}}^{\text{B}} = \mathbf{A}^{\text{BN}} \cdot \dot{\underline{r}}_{\text{CO}}^{\text{N}} \quad (14)$$

La obtención de la velocidad angular del cuerpo se complica por el hecho que la razón de cambio de los ángulos de Euler no son vectores cartesianos, si no más bien parámetros que describen la orientación del cuerpo rígido en el espacio.⁸ Para relacionar la velocidad angular con $\underline{\eta}$ es necesario utilizar la matriz de actitud cinemática $\mathbf{H}(\underline{\eta})$.

$$\mathbf{H}(\underline{\eta}) = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi) \tan(\theta) & \cos(\phi) \tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) \sec(\theta) & \cos(\phi) \sec(\theta) \end{bmatrix} \quad (15)$$

La matriz de actitud cinemática se usa para transformar

$$\dot{\underline{\eta}} = \mathbf{H}(\underline{\eta}) \cdot \underline{\omega}_{\text{BN}}^{\text{N}} \quad (16)$$

$$\underline{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}} = \mathbf{A}^{\text{BN}} \cdot \underline{\omega}_{\text{BN}}^{\text{N}} \quad (17)$$

e inversamente

$$\underline{\omega}_{\text{BN}}^{\text{N}} = \mathbf{H}^{-1}(\underline{\eta}) \cdot \dot{\underline{\eta}} \quad (18)$$

$$(19)$$

La fuerza que impulsa al vehículo en el marco del cuerpo se obtiene transformando del marco del cardán donde se conocen los componentes, al marco cuerpo. La matriz es calculada reemplazando $\phi \equiv \alpha$, $\theta \equiv \beta$, y $\psi = 0$.

$$\underline{F}^{\text{B}} = \mathbf{A}^{\text{BG}} \cdot \underline{F}^{\text{G}} \quad (20)$$

La aceleración del centro de masa del vehículo medido en el marco del cuerpo B es igualada a la fuerza

$${}^{\text{B}} \frac{d}{dt} (\dot{\underline{r}}_{\text{CO}}^{\text{B}}) = \frac{1}{m + m_r} \cdot \underline{F}^{\text{B}} \quad (21)$$

luego obtenemos la aceleración en coordenadas globales

$$\ddot{\underline{r}}_{\text{CO}}^{\text{N}} = \mathbf{A}^{\text{NB}} \cdot {}^{\text{B}} \frac{d}{dt} (\dot{\underline{r}}_{\text{CO}}^{\text{B}}) - \underline{g}^{\text{N}} \quad (22)$$

Los momentos actuantes externos en el marco del vehículo respecto su centro de gravedad \mathcal{C} están en función del diseño de los flaps anti roll Romarowski [2020].

$$\underline{M}_{\mathcal{C}}^{\text{B}} = \underline{\tilde{r}}_{\mathcal{RC}}^{\text{B}} \cdot \underline{F}^{\text{B}} + \mathbf{A}^{\text{BG}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_r^2 K_{FL} d_T \delta + \tau_r \end{bmatrix} \quad (23)$$

⁸ Como bien sabemos la matriz de transformación \mathbf{A} solo es aplicable para transformar vectores cartesianos de una base ortogonal a otra. Los parámetros $\underline{\eta}$ conforman un vector de configuración, no un vector cartesiano!

La aceleración angular en el marco B sale del desarrollo de la sección 5.5

$${}^B \frac{d}{dt} (\underline{\omega}_{BN}^B) = (J_C^B)^{-1} \cdot (-\tilde{\omega}_{BN}^B \cdot J_C^B \cdot \underline{\omega}_{BN}^B - \mathbf{A}^{BG} \cdot \tilde{\omega}_{GB}^G \cdot J_{rR}^G \cdot \underline{\omega}_r^G - \tilde{\omega}_{BN}^B \cdot J_{rR}^G \cdot \underline{\omega}_r^G - \mathbf{A}^{BG} \cdot J_{rR}^G \cdot {}^N \dot{\underline{\omega}}_r^G + \underline{M}_C^B) \quad (24)$$

El rotor y los servos son modelados como de primer orden por el momento. Son limitados por velocidad máxima según sus especificaciones.

Las ecuaciones diferenciales se pueden entonces escribir

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{r}}_{CO}^N & \underline{\dot{\eta}} & \ddot{\underline{r}}_{CO}^N & {}^B \frac{d}{dt} (\underline{\omega}_{BN}^B) & \dot{\omega}_r & \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\delta} \end{bmatrix}^\top \quad (25)$$

5.5. Dinámica angular del vehículo

El momento angular del vehículo respecto de su centro de masa (\mathcal{C}) y representado en el marco fijo-tierra N debe tomar en cuenta el momento angular por tener un cuerpo con velocidad lineal y angular propia.

$$L_C^N = \underbrace{\mathbf{A}^{NB} \cdot J_C^B \cdot \underline{\omega}_{BN}^B}_{\text{Vehículo}} + \underbrace{\mathbf{A}^{NG} J_{gR}^G \cdot \underline{\omega}_{GN}^G + m_g \cdot \tilde{r}_{RC}^N \cdot \dot{r}_{RC}^N}_{\text{Cardán \& EDF}} + \underbrace{\mathbf{A}^{NG} \cdot J_{rR}^G \cdot \underline{\omega}_r^G + m_r \cdot \tilde{r}_{RC}^N \cdot \dot{r}_{RC}^N}_{\text{Rotor}} \quad (26)$$

Esta ecuación describe los efectos de tener un cardán con un rotor integrado acoplado al vehículo sin embargo algunos términos se podrían considerar despreciables debido al diseño del cardán.

Ambos gimbals del cardán tienen su eje de giro cercano a su centro de masa lo cual significa que la velocidad relativa entre los puntos \mathcal{R} y \mathcal{C} va tener poco impacto sobre los torques internos del vehículo. Se considera que

$$\dot{r}_{RC} = 0 \quad (27)$$

La velocidad angular de los gimbals es poca ya que su actuación ocurre en el orden de la décima de grado lo cual implica un bajo impacto del término del cardán cuando es integrado en el tiempo. El término $\mathbf{A}^{NG} J_{gR}^G \cdot \underline{\omega}_{GN}^G$ entonces pasa a formar parte de la inercia del resto del vehículo J_C^B , el cual ahora solo excluye al rotor.

El momento angular nos queda simplificado:

$$L_C^N = \mathbf{A}^{NB} \cdot J_C^B \cdot \underline{\omega}_{BN}^B + \mathbf{A}^{NG} J_{rR}^G \cdot \underline{\omega}_r^G \quad (28)$$

donde $\underline{\omega}_r$ es la velocidad del rotor y J_{rR}^G es la matriz de inercia del rotor tomado alrededor de su centro de masa representado en coordenadas del marco cardán G.

Derivamos el momento angular con respecto a N y junto con $J_C^B \approx \text{constante}$ ⁹

$$\begin{aligned} {}^N \dot{L}_C^N &= {}^N \frac{d}{dt} (\mathbf{A}^{NB} \cdot J_C^B \cdot \underline{\omega}_{BN}^B + \mathbf{A}^{NG} \cdot J_{rR}^G \cdot \underline{\omega}_r^G) \\ &= \dot{\mathbf{A}}^{NB} \cdot J_C^B \cdot \underline{\omega}_{BN}^B + \mathbf{A}^{NB} \cdot \underbrace{{}^N \dot{J}_C^B}_{\approx 0} \cdot \underline{\omega}_{BN}^B + \mathbf{A}^{NB} \cdot J_C^B \cdot \dot{\underline{\omega}}_{BN}^B + \dot{\mathbf{A}}^{NG} \cdot J_{rR}^G \cdot \underline{\omega}_r^G + \mathbf{A}^{NG} \cdot {}^N \frac{d}{dt} (J_{rR}^G \cdot \underline{\omega}_r^G) \end{aligned}$$

la derivada de la inercia del cuerpo se anula y luego se aplica la regla de la cadena a la derivada

$$\begin{aligned} {}^N \dot{L}_C^N &= \dot{\mathbf{A}}^{NB} \cdot J_C^B \cdot \underline{\omega}_{BN}^B + \mathbf{A}^{NB} \cdot J_C^B \cdot \dot{\underline{\omega}}_{BN}^B + \dot{\mathbf{A}}^{NG} \cdot J_{rR}^G \cdot \underline{\omega}_r^G + \mathbf{A}^{NG} \cdot {}^N \frac{d}{dt} (J_{rR}^G \cdot \underline{\omega}_r^G) \\ &= \mathbf{A}^{NB} \cdot \tilde{\omega}_{BN}^B \cdot J_C^B \cdot \underline{\omega}_{BN}^B + \mathbf{A}^{NB} \cdot J_C^B \cdot \dot{\underline{\omega}}_{BN}^B + \mathbf{A}^{NG} \cdot \tilde{\omega}_{GN}^G \cdot J_{rR}^G \cdot \underline{\omega}_r^G + \mathbf{A}^{NG} \cdot \left({}^N \dot{J}_{rR}^G \cdot \underline{\omega}_r^G + J_{rR}^G \cdot {}^N \dot{\underline{\omega}}_r^G \right) \end{aligned}$$

donde \dot{J}_{rR}^G se puede considerar despreciable por la geometría ligera del conjunto cardán y por actuaciones pequeñas (mencionadas anteriormente).

⁹La inercia del vehículo en su propio marco J_C^B es constante excepto por las variaciones introducidas al agruparlo con el término del cardán J_{gC}^B , el cual varía en función a la actuación α, β .

Como el rotor es fijo a al vehículo alrededor de un punto cercano a \mathcal{R} y el movimiento del gimbal es restringido por los actuadores se supone que el rotor es parte del cuerpo rígido del vehículo y se plantea su momento angular como un vector libre. Así podemos igualar $J_{\mathcal{R}}^G \equiv J_{\mathcal{C}}^G = J_{\mathcal{C}}^G$, y por extensión, $J_{\mathcal{R}}^B \equiv J_{\mathcal{C}}^B$.

$$= \mathbf{A}^{NB} \cdot \tilde{\omega}_{BN}^B \cdot J_{\mathcal{C}}^B \cdot \omega_{BN}^B + \mathbf{A}^{NB} \cdot J_{\mathcal{C}}^B \cdot \dot{\omega}_{BN}^B + \mathbf{A}^{NG} \cdot \tilde{\omega}_{GN}^G \cdot J_{\mathcal{C}}^G \cdot \omega_r^G + \mathbf{A}^{NG} \cdot J_{\mathcal{C}}^G \cdot {}^N\dot{\omega}_r^G$$

multiplicando por \mathbf{A}^{BN}

$$\mathbf{A}^{BN} \sum_i M_{iC}^N = \sum_i M_{iC}^B = \tilde{\omega}_{BN}^B \cdot J_{\mathcal{C}}^B \cdot \omega_{BN}^B + J_{\mathcal{C}}^B \cdot \dot{\omega}_{BN}^B + \mathbf{A}^{BG} \cdot \tilde{\omega}_{GN}^G \cdot J_{\mathcal{C}}^G \cdot \omega_r^G + \mathbf{A}^{BG} \cdot J_{\mathcal{C}}^G \cdot {}^N\dot{\omega}_r^G$$

entonces

$$J_{\mathcal{C}}^B \cdot \dot{\omega}_{BN}^B = -\tilde{\omega}_{BN}^B \cdot J_{\mathcal{C}}^B \cdot \omega_{BN}^B - \mathbf{A}^{BG} \cdot \tilde{\omega}_{GN}^G \cdot J_{\mathcal{C}}^G \cdot \omega_r^G - \mathbf{A}^{BG} \cdot J_{\mathcal{C}}^G \cdot {}^N\dot{\omega}_r^G + \sum_i M_{iC}^B$$

donde $\omega_{GN}^G = \omega_{GB}^G + \omega_{BN}^G = \omega_{GB}^G + \mathbf{A}^{GB}\omega_{BN}^B$

Esto está bien?
el término $\tilde{\omega}_{BN}^B \cdot J_{\mathcal{C}}^B \cdot \omega_r^G$ nos hace ruido

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{C}}^B \cdot \dot{\omega}_{BN}^B &= -\tilde{\omega}_{BN}^B \cdot J_{\mathcal{C}}^B \cdot \omega_{BN}^B - \mathbf{A}^{BG} \cdot \tilde{\omega}_{GB}^G \cdot J_{\mathcal{C}}^G \cdot \omega_r^G - \mathbf{A}^{BG} \mathbf{A}^{GB} \cdot \tilde{\omega}_{BN}^B \cdot J_{\mathcal{C}}^G \cdot \omega_r^G - \mathbf{A}^{BG} \cdot J_{\mathcal{C}}^G \cdot {}^N\dot{\omega}_r^G + \sum_i M_{iC}^B \\ &= -\tilde{\omega}_{BN}^B \cdot J_{\mathcal{C}}^B \cdot \omega_{BN}^B - \mathbf{A}^{BG} \cdot \tilde{\omega}_{GB}^G \cdot J_{\mathcal{C}}^G \cdot \omega_r^G - \tilde{\omega}_{BN}^B \cdot J_{\mathcal{C}}^G \cdot \omega_r^G - \mathbf{A}^{BG} \cdot J_{\mathcal{C}}^G \cdot {}^N\dot{\omega}_r^G + \sum_i M_{iC}^B \end{aligned}$$

donde ${}^N\dot{\omega}_r^G = \mathbf{A}^{GN} \cdot {}^G\dot{\omega}_r^G = \mathbf{A}^{GN} \cdot \dot{\omega}_r \hat{\mathbf{g}}_3$

\mathbf{A}^{GN} debería ser \mathbf{A}^{NG} posiblemente

6. Simulación

Para comprobar el sistema de control se definió el sistema no-lineal en MATLAB, se obtuvo el sistema lineal sobre un punto de operación tomando el jacobiano del sistema de ecuaciones diferenciales para controlar el sistema, y finalmente se integró el sistema no lineal en el tiempo retroalimentado con el sistema de control.

Se investigó la respuesta del vehículo ante perturbaciones Delta-Dirac de orientación.

6.1. Sistema no-lineal

El sistema (25) describe la dinámica no-lineal del vehículo con 16 ecuaciones. Estas pueden ser integradas mediante un método numérico para ecuaciones diferenciales ordinarias multivariantes no-autónomas. El requerimiento no-autónomo surge de la necesidad de incorporar el vector \mathbf{u} a la integración, el cual incluye las actuaciones en base a lo que leen los sensores.

Para satisfacer el requerimiento no-autónomo se tuvo que implementar un método numérico basado en Runge-Kutta orden 4. El método fue probado y contrastado con soluciones analíticas conocidas.

6.2. Sistema de control

Se optó por controlar mediante el controlador LQR debido a la simplicidad de implementación y adaptabilidad para problemas de variables de estado. Como se mencionó anteriormente, se obtiene el jacobiano del sistema (25) alrededor del punto de operación. Esta es la matriz del sistema \mathbf{A} . La matriz \mathbf{B} también es el jacobiano del sistema pero diferenciado respecto \mathbf{u} . Finalmente, \mathbf{C} es la combinación lineal de las mediciones de los sensores (ver sección 4 para entender el proceso).

Se modelaron las siguientes imperfecciones en el sistema:

- Delay en medición/actuación
- Desalineación de sensores (acelerómetro y giroscopio)
- Resolución mínima de actuación del gimbal según lo visto en la sección 3.4

La matriz costo asociada al equilibrio es construida asignando los siguientes valores a la diagonal: 5 a las posiciones globales, 1 a las velocidades, $1e-3$ a la velocidad del rotor del EDF, $1e-4$ a la velocidad angular en pitch y yaw del vehículo, y $1e-5$ a las variables restantes (actuadores, ángulos de Euler y velocidad angular en roll).

La matriz costo asociada a los actuadores es diagonal con los siguientes valores: 1000 a actuadores de pitch y yaw del gimbal, $1e-5$ al actuador de roll, y $1e-6$ al control velocidad del rotor del EDF.

6.3. Resultados de simulación

Todos los ejes x corresponden al tiempo en segundos.

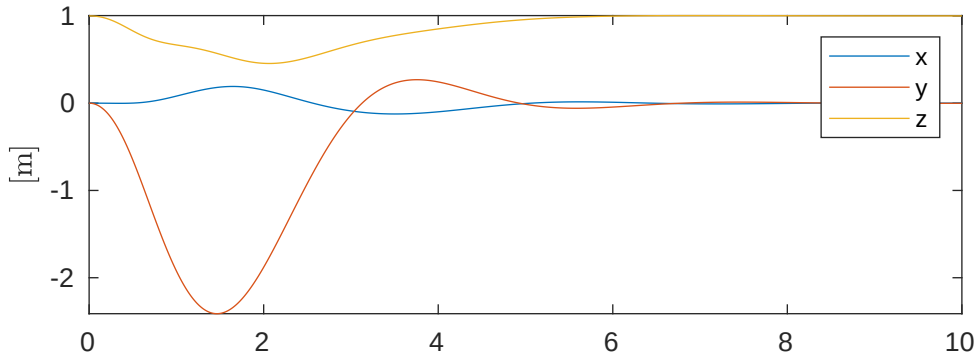


Figura 6: Posición del vehículo

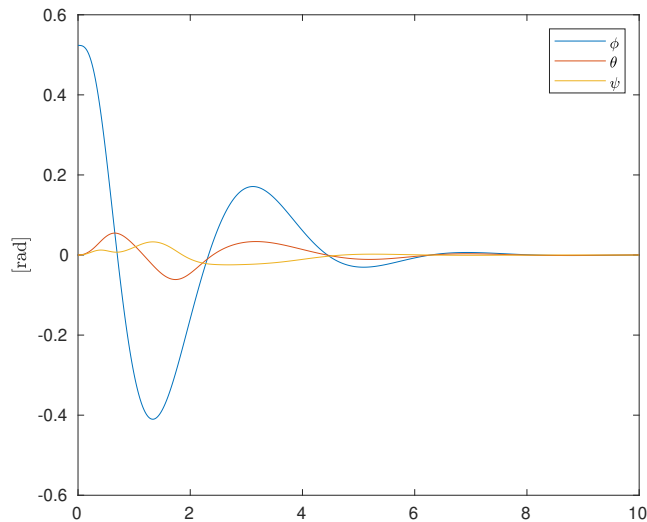


Figura 7: Ángulos de euler. Note que solo hubo perturbación inicial en ϕ sin embargo la actuación del gimbal (α) generó una perturbación interna en θ por el efecto giroscópico.

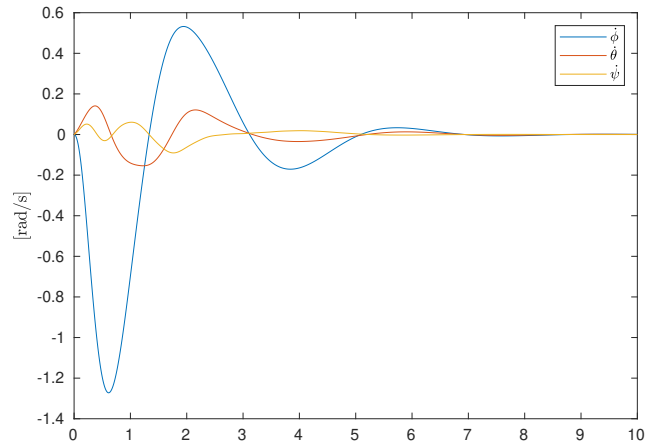


Figura 8: Velocidad angular del vehículo

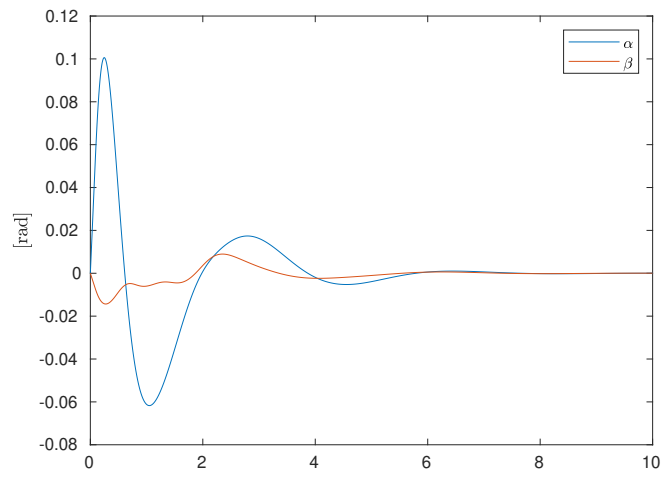


Figura 9: Actuación angular del gimbal.

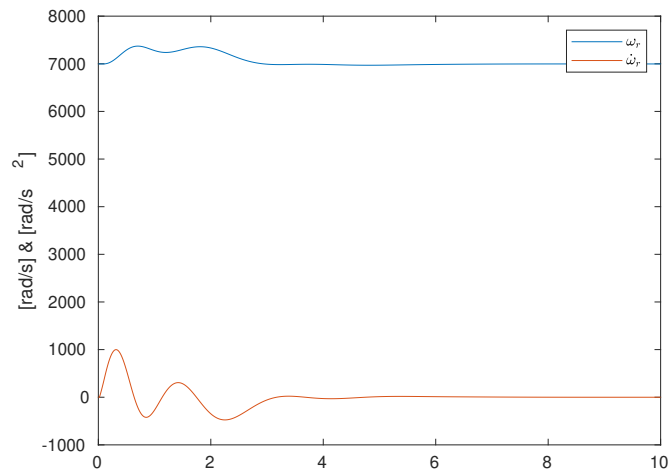


Figura 10: Velocidad y aceleración angular del rotor.

7. Desarrollo de software

7.1. Elección de arquitectura

La decisión de software a usar depende del controlador a usar, poder de cálculo disponible, interfaces de periféricos y funcionalidad deseada.

El controlador a usar es el ARM Cortex-A72 que sería comprado en el paquete comercial (SoC) conocido como *Raspberry Pi 4B+*. El producto provee salidas para los siguientes usos

- [UART](#)
- [SPI](#)
- [I²C](#)
- [GPIO](#)

La Raspberry Pi provee un entorno con Linux instalado que permite la programación con virtualmente cualquier lenguaje de programación en existencia. Dado estas condiciones, el lenguaje de programación elegido es **Go** (Golang) debido a los siguientes puntos

- Seguro - Modelo de memoria Go, sistema de tipado fuerte¹⁰
- Simple - Claridad de sintaxis
- Concurrencia - Crear [corrutinas](#) es simple, paralelizar corrutinas es trivial
- Rendimiento - Superior a Python, Java y Matlab. Comparable a C. Esto también implica un menor consumo de energía
- Estable - *The Go 1 promise* (La promesa Go 1)
- Comprobado - Usado en sistemas de alto-riesgo/alta-complejidad (Kubernetes, Docker, Go-HEP)
- Portable - Todos los programas Go compilan a código nativo (código de máquina) para cualquier arquitectura y sistema operativo. Incluso se puede programar microcontroladores (TinyGo)

¹⁰Hoy en día hay pocos lenguajes con sistemas de tipos fuertes. Contrario a la creencia popular, C y C++ ambos son tipados débilmente.

7.2. Flujo de control

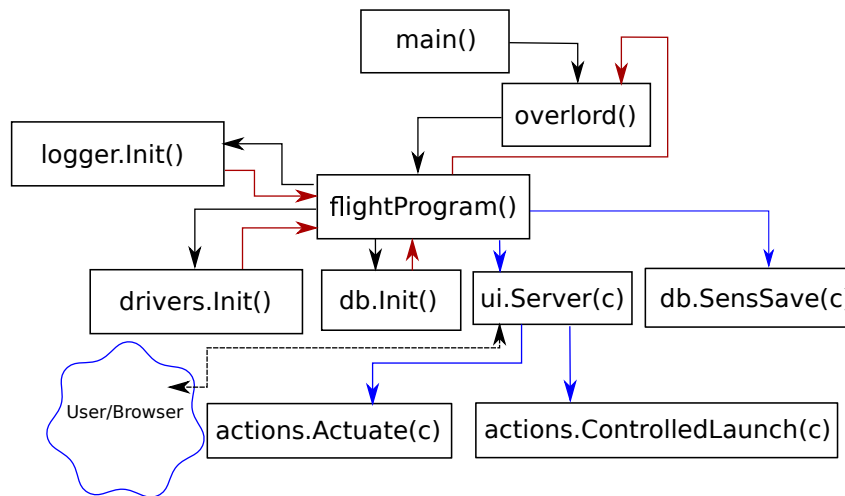


Figura 11: Gráfico de flujo de control (CFG) del programa de vuelo. Las líneas de flujo azules son corrutinas independientes al programa principal. Las líneas negras son flujo del programa principal. Las líneas rojas son flujo del programa principal al encontrar un error.

Se ilustra el flujo de control a grandes rasgos usando un CFG en la figura 11. El programa principal corre la rutina `overlord` que a su vez comanda `flightProgram` y espera que esta devuelva control a `overlord`. El propósito de `overlord` es guardar el estado del vehículo y ante una falla irrecuperable en `flightProgram`, terminar con todas las corrutinas generadas por `flightProgram` y sus afiliadas y a su vez reiniciar `flightProgram` nuevamente con el último estado antes de la falla.

7.3. Interfaz con hardware

Como se mencionó anteriormente, la computadora elegida tiene varios puertos que servirán como interfaces con periféricos, entre ellos

- ADC (sensores)
- Generadores de PWM (para actuadores)
- Blinkenlights

Para la interacción del software con el hardware se usará la librería [periph.io](#). Esta librería permite la interacción a través de los protocolos de comunicación de la Raspberry Pi. Los drivers para los periféricos fueron programados según la información dada en las datasheet.

7.4. Implementación

tbc

Agradecimientos

Dan Etenberg por hacer todo posible. Ben Romarowski por ayuda con la dinámica de cuerpo rígido y aerodinámica de los álabes.

Referencias

Miguel Ángel Castillo-Martínez, Blanca Esther Carvajal-Gámez, and Francisco Javier Gallegos Funes. Efectos en la resolución de servomotores con interfaz pwm por la generación de señales en microcontroladores. *Research in Computing Science*, 147:89–98, 2018.

Hubert Hahn. *Rigid Body Dynamics of Mechanisms: 1 Theoretical Basis*. Springer Science & Business Media, 2013.

Ben Romarowski. Dynamics and control of gimbaled edf. Technical report, LIA Aerospace, 2020.