

LIA Aerospace

Gimballed EDF propelled VTVL vehicle design and control

Patricio Whittingslow
Luis Cretton

29 de marzo de 2021

1. Introducción

Los vehículos VTVL son tan viejos como el primer alunizaje. Traen en si varias ventajas frente a otros vehículos voladores como la gran reducción de espacio necesario para despegar y aterrizar. Esto no es un detalle menor dado que la mayor parte de la superficie terrestre de la tierra no son pistas de aterrizaje si no más bien terreno formado naturalmente.

Este documento propone el diseño, simulación, control y fabricación de un vehículo eléctrico con capacidades VTVL que podría usarse para transporte de insumos médicos a zonas de acceso limitado o para investigar el fenómeno del *fuel sloshing* en vehículos con tanques esbeltos.



Figura 1: Dos vehículos VTVL eléctricos modernos. “VBat” (Izq.) y “Ikarus” (Der.).

Los vehículos VTVL eléctricos son propulsados por hélices en su mayoría y constan casi siempre de 3 o más propulsores en un arreglo simétrico y plano. Recientemente hay un interés por la construcción de vehículos de una sola hélice por la buena relación empuje–peso que tienen. Sin embargo, estos vehículos no vienen sin sus complicaciones:

- La rotación dada al aire por la hélice causa un momento en el eje de propulsión que es contrareestado en vehículos multirotores
- Inclinar al rotor durante su funcionamiento causa una fuerza perpendicular a la dirección de inclinación conocido como el efecto giroscópico.

El primer punto es mitigado fácilmente agregando álabes a la salida del chorro para enderezar el flujo y contrarestar la rotación. El segundo punto solo se resuelve conociendo las ecuaciones de momento angular y actuando con un sistema de control a lazo cerrado.

2. Modelo 2D simplificado

Esta siguiente sección detallará el tratamiento matemático efectuado para controlar un vehículo con propulsión vectorizada en el plano. El proposito es ilustrar a un nivel simple las herramientas que serán aplicadas para controlar el vehículo diseñado.

2.1. Modelado matemático

Comenzamos con las ecuaciones dinámicas de un vehículo en el plano con control de propulsión vectorizada (por ángulo)

$$\begin{cases} \ddot{y} = \frac{F}{m} \sin(\gamma + \beta) \\ \ddot{z} = \frac{F}{m} \cos(\gamma + \beta) - g \\ \ddot{\gamma} = \frac{r_{CG} \cdot F}{I_{xx}} \sin \beta \end{cases}$$

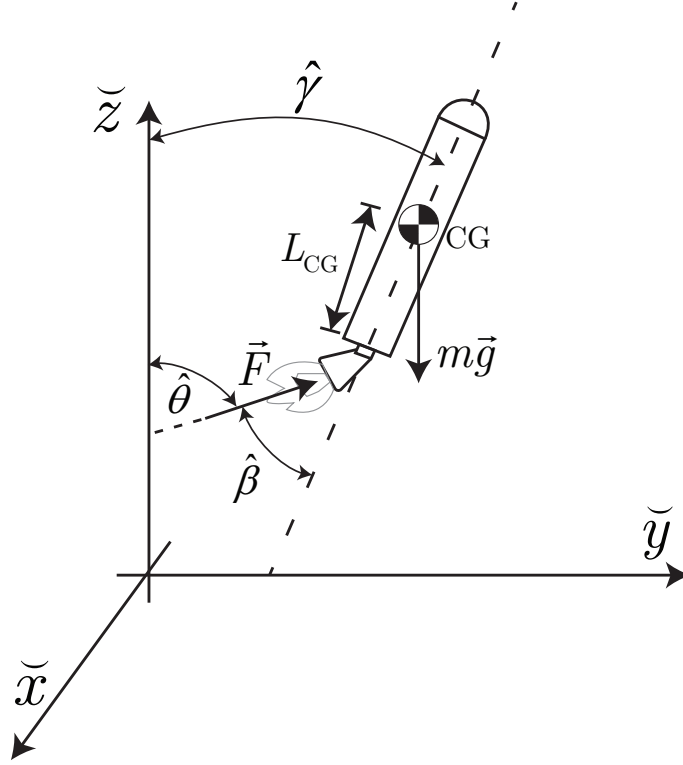


Figura 2: Diagrama de cuerpo libre de un vehículo con propulsión vectorizada 2D.

donde L_{CG} y F están en función del tiempo, $m = m_0 - \int \dot{m}$ y $\theta = \gamma + \beta$.

Vale la pena aclarar que no se tomarán en cuenta los siguientes efectos:

- Fuerza de drag
- Viento
- *Fuel sloshing*
- Efectos relativísticos

2.2. Armado de sistema lineal

Se propone un punto de operación alrededor del cual se linealizan las ecuaciones. El estado del vehículo es *vertical y quieto en el espacio*. *

$$\begin{aligned}\gamma^* &= 0 \\ \beta^* &= 0 \\ F^* &= mg\end{aligned}$$

en este caso F es la desviación del punto de operación. Desde ahora en adelante $\Delta F = F - mg$.

2.3. Representación en espacio de estados

El número de variables de estado será igual a número de almacenadores de energía independientes. Estos son

z Energía potencial por la gravedad

*La linealización es válida solo para un vehículo vertical. Se deberá modificar el método para modelar un vehículo orbital.

\dot{y}, \dot{z} Energía cinetica del vehículo

$\dot{\gamma}$ Momento angular del vehículo

entonces, las variables de estado son las siguientes

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = z$$

$$x_4 = \dot{z}$$

$$x_5 = \gamma$$

$$x_6 = \dot{\gamma}$$

donde $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_3 = x_4$ y $\dot{x}_5 = x_6$

Se aprovecha la expansión de Taylor para la linealización de expresiones trigonométricas:

$$\sin(x + y)|_{x=x_0+\Delta x, y=y_0+\Delta y} \approx \sin(x_0 + y_0) + \cos(x_0 + y_0)(x - x_0) + \cos(x_0 + y_0)(y - y_0)$$

Las ecuaciones dinámicas de los estados 2,3, y 4 son dadas por las ecuaciones mostradas al comienzo de esta sección. Abajo están las ecuaciones de estados

$$\dot{x}_2 = \frac{F}{m} (\gamma + \beta) = gx_5 + gu_2 \quad (1)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{F}{m} - g = \frac{F - F_0}{m} = \frac{u_1}{m} \quad (2)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{L_{CG} \cdot F}{I_{xx}} \beta = \frac{L_{CG} \cdot mg}{I_{xx}} u_2 \quad (3)$$

donde T_s es el periodo de sampleo.

Los vectores de entrada y salida son

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta F \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ \gamma \end{bmatrix}$$

tal que las ecuaciones de salida son

$$y_1 = x_1 \quad (4)$$

$$y_2 = x_3 \quad (5)$$

$$y_3 = x_5 \quad (6)$$

Se escriben las matrices del sistema y de control ($\mathbf{D} = [0]$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_{CG} \cdot mg}{I_{xx}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

El sistema mostrado en (7) es *fully state controllable*.

3. Ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido

Se hará referencia a la figura 2 para explicar las variables en juego en el modelo 3D debido a la dificultad inherente de mostrar las 16 variables de estado en un dibujo del modelo 3D.

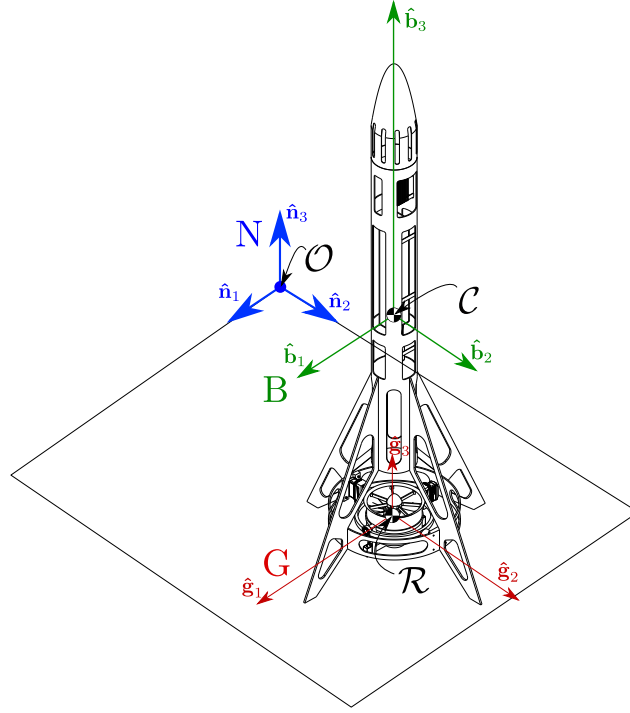


Figura 3: Marcos de referencia tomados para el análisis de cuerpo rígido. Por simplicidad se toman los centros de masa del cardán y del rotor como coincidentes en el punto \mathcal{R} .

3.1. Notación

La notación es la del libro *Rigid Body Dynamics of Mechanisms, Theoretical Basics* Hahn [2013]. Se requiere un tratamiento algebraico explícito de los marcos de referencia y representación debido al caso especial de un *gimballed rotor*. Este tratamiento facilita la programación de la simulación y subsecuentemente el control, el cual se volvería ambiguo y complejo con un tratamiento más común.

$\underline{r}_{\mathcal{CO}} = [x, y, z]$: Posición absoluta del centro de masa del vehículo leasé “posición de \mathcal{C} respecto \mathcal{O} ”)

$\underline{r}_{\mathcal{RC}}$: Posición del centro de masa del cardán respecto al centro de masa del vehículo

$\underline{\eta} = [\phi, \theta, \psi]$: Ángulos de actitud del vehículo (Ángulos Euler)

$\underline{\omega}_r^G$: Velocidad angular del rotor del EDF representado en el marco G (dirección constante)

$\underline{\omega}_{\text{BN}}^B$: Velocidad angular de B respecto a N, representado en el marco B.

α, β : Ángulo de actuación de vectorización del EDF o ángulo de actitud del marco G

δ : Ángulo de actuación de los dos flaps anti-roll

m : Masa del vehículo sin rotor

m_r : Masa del rotor

\underline{g} : Aceleración de la gravedad

\underline{F}^B : Empuje del EDF representado en el marco B

\mathbf{A}^{NB} : Matriz de transformación de cosenos directores de un marco B a el marco N

Caracterización del EDF

τ_c : Torque efectivo de control del EDF

K_T : Constante de empuje del EDF

K_Q : Coeficiente de torque viscoso de fricción

Q : Torque viscoso de fricción

τ_r : Torque de reacción por el swirl de salida

Caracterización del mecanismo anti-roll:

K_{FL} : Coeficiente de lift de los flaps anti-roll

K_{FD} : Coeficiente de drag de los flaps anti-roll

F_L : Lift de los flaps anti-roll

F_D : Drag de los flaps anti-roll

Matriz de inercia:

J_C^B : Vehículo sin rotor respecto a \mathcal{C} representado en B

J_{rR}^G : Rotor respecto a \mathcal{R} representado en G

J_{gR}^G : Cardán y motor sin rotor respecto a \mathcal{R} representado en G

3.2. Notación del álgebra a utilizar

El producto escalar se define como \cdot para diferenciarlo de simple multiplicación vectorial (\cdot) . $\tilde{\omega}$ es la matriz skew del vector que reemplaza el producto vectorial ya que $\tilde{r} \cdot v = r \times v$

$$\tilde{\omega}_{LR}^L = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{zLR}^L & \omega_{yLR}^L \\ \omega_{zLR}^L & 0 & -\omega_{xLR}^L \\ -\omega_{yLR}^L & \omega_{xLR}^L & 0 \end{pmatrix}$$

Se dice que J_C^B es la matriz de inercia respecto el punto \mathcal{C} , representado en el marco B: es decir, las componentes de la matriz de inercia están en la base de B. Esto se puede escribir así:

$$J_C^B = J_{b1} \hat{\mathbf{b}}_1 + J_{b2} \hat{\mathbf{b}}_2 + J_{b3} \hat{\mathbf{b}}_3$$

La derivada del término anterior respecto un marco N quedaría escrito

$${}^N j_C^B = {}^N \frac{dJ_C^B}{dt} = \mathbf{A}^{NB} \cdot {}^B \frac{dJ_C^B}{dt}$$

Se pueden demostrar las siguientes ecuaciones

$$\dot{\mathbf{A}}^{RL} = \mathbf{A}^{RL} \cdot \tilde{\omega}_{LR}^L = \tilde{\omega}_{LR}^R \cdot \mathbf{A}^{LR} = -\tilde{\omega}_{LR}^L \cdot \mathbf{A}^{RL} \quad (8)$$

$$\mathbf{A}^{BN} = (\mathbf{A}^{NB})^\top = (\mathbf{A}^{NB})^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^{NB} \cdot \mathbf{A}^{BN} = \mathbf{I} \quad (9)$$

donde ω_{LR}^L es la velocidad angular vectorial del marco L con respecto a R representado en L, \mathbf{A}^{RL} es la matriz de cosenos directores que transforma una vector de una base ortogonal L a otra base ortogonal R, y $\dot{\mathbf{A}}^{RL}$ es la derivada de la matriz \mathbf{A}^{RL} respecto R.

3.3. Variables de estado

Se tendrán las variables de estado de posición y velocidad donde z positivo es alejándose de la tierra.

$$\underline{r}_{CO}^N = [x \ y \ z], \quad \dot{\underline{r}}_{CO}^N = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]$$

El movimiento cuerpo rígido será descrito por 3 ángulos de Euler (Cardán o Bryant en algunas bibliografías) ϕ, θ y ψ (roll, pitch, yaw respectivamente).

$$\underline{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi] \quad (10)$$

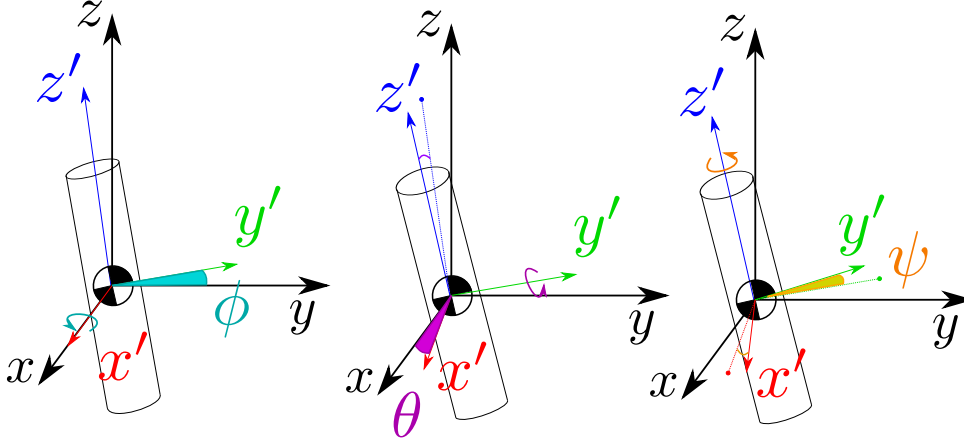


Figura 4: Diagrama mostrando las rotaciones de ángulo de Euler en el orden que son efectuadas para describir el sistema. ϕ representa el pitch, θ el yaw y ψ el roll. Se muestran las últimas posiciones de los ejes rotados con una línea punteada.

Los ángulos de la vectorización de la tobera serán α y β . δ corresponde a los actuadores que contrarrestan el roll del vehículo mediante dos flaps. Los ángulos α y β describen la dirección en la que está apuntando la tobera (equivalente a la orientación G) respecto la dirección del vehículo (marco B). $\omega_r = \omega_r^G$ es la velocidad angular del rotor.

Se escriben las variables de estado y el vector input, donde F es la fuerza que hace la tobera sobre el vehículo (la cual depende de la velocidad del vehículo)[†]

$$\mathbf{x} = [\underline{r}_{CO}^N \ \underline{\eta} \ \dot{\underline{r}}_{CO}^N \ \underline{\omega}_{BN}^B \ \omega_r \ \alpha \ \beta \ \delta]^\top \quad (11)$$

$$\mathbf{u} = [\tau_c \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\delta}]^\top \quad (12)$$

3.4. Modelo matemático

Definimos la transformación de los ángulos Euler con una matriz de transformación \mathbf{A}^{BN} donde c y s son las funciones coseno y seno, respectivamente.

$$\mathbf{A}^{BN} = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi & c\theta \cdot s\psi & -s\theta \\ s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\phi \cdot s\psi & s\phi \cdot s\theta \cdot s\psi + c\phi \cdot c\psi & s\phi \cdot c\theta \\ c\phi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\phi \cdot s\psi & c\phi \cdot s\theta \cdot s\psi - s\phi \cdot c\psi & c\phi \cdot c\theta \end{bmatrix} \quad (13)$$

La transformación nos servirá para poder pasar de la dinámica que está definida en el marco del vehículo B al marco N donde se tienen las variables de estado que se desean controlar.

Podemos obtener la velocidad en el marco del cuerpo

$$\dot{\underline{r}}_{CO}^B = \mathbf{A}^{BN} \cdot \dot{\underline{r}}_{CO}^N \quad (14)$$

[†]En el código ϕ, θ y ψ aparecen como $\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$

La obtención de la velocidad angular del cuerpo se complica por el hecho que la razón de cambio de los ángulos de Euler no son vectores cartesianos, si no más bien parámetros que describen la orientación del cuerpo rígido en el espacio.[‡] Para relacionar la velocidad angular con $\underline{\eta}$ es necesario utilizar la matriz de actitud cinemática $\mathbf{H}(\underline{\eta})$.

$$\mathbf{H}(\underline{\eta}) = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi) \tan(\theta) & \cos(\phi) \tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) \sec(\theta) & \cos(\phi) \sec(\theta) \end{bmatrix} \quad (15)$$

La matriz de actitud cinemática se usa para transformar

$$\dot{\underline{\eta}} = \mathbf{H}(\underline{\eta}) \cdot \underline{\omega}_{\text{BN}}^{\text{N}} \quad (16)$$

$$\underline{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}} = \mathbf{A}^{\text{BN}} \cdot \underline{\omega}_{\text{BN}}^{\text{N}} \quad (17)$$

e inversamente

$$\underline{\omega}_{\text{BN}}^{\text{N}} = \mathbf{H}^{-1}(\underline{\eta}) \cdot \dot{\underline{\eta}} \quad (18)$$

$$(19)$$

La fuerza que impulsa al vehículo en el marco del cuerpo se obtiene transformando del marco del cardán donde se conocen los componentes, al marco cuerpo. La matriz es calculada reemplazando $\phi \equiv \alpha$, $\theta \equiv \beta$, y $\psi = 0$.

$$\underline{F}^{\text{B}} = \mathbf{A}^{\text{BG}} \cdot \underline{F}^{\text{G}} \quad (20)$$

La aceleración del centro de masa del vehículo medido en el marco del cuerpo B es igualada a la fuerza

$${}^{\text{B}} \frac{d}{dt} (\dot{r}_{\text{CO}}^{\text{B}}) = \frac{1}{m + m_r} \cdot \underline{F}^{\text{B}} \quad (21)$$

luego obtenemos la aceleración en coordenadas globales

$$\ddot{r}_{\text{CO}}^{\text{N}} = \mathbf{A}^{\text{NB}} \cdot {}^{\text{B}} \frac{d}{dt} (\dot{r}_{\text{CO}}^{\text{B}}) - \underline{g}^{\text{N}} \quad (22)$$

Los momentos actuantes externos en el marco del vehículo respecto su centro de gravedad C están en función del diseño de los flaps anti roll Romarowski [2020].

$$\underline{M}_{\text{C}}^{\text{B}} = \tilde{r}_{\text{RC}}^{\text{B}} \cdot \underline{F}^{\text{B}} + \mathbf{A}^{\text{BG}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_r^2 K_{F_L} d_T \delta + \tau_r \end{bmatrix} \quad (23)$$

La aceleración angular en el marco B sale del desarrollo de la sección 3.5

$${}^{\text{B}} \frac{d}{dt} (\underline{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}}) = (J_{\text{C}}^{\text{B}})^{-1} \cdot (-\tilde{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}} \cdot J_{\text{C}}^{\text{B}} \cdot \underline{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}} - \mathbf{A}^{\text{BG}} \cdot \tilde{\omega}_{\text{GB}}^{\text{G}} \cdot J_{\text{rR}}^{\text{G}} \cdot \underline{\omega}_r^{\text{G}} - \tilde{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}} \cdot J_{\text{rR}}^{\text{G}} \cdot \underline{\omega}_r^{\text{G}} - \mathbf{A}^{\text{BG}} \cdot J_{\text{rC}}^{\text{G}} \cdot {}^{\text{N}} \dot{\underline{\omega}}_r^{\text{G}} + \underline{M}_{\text{C}}^{\text{B}}) \quad (24)$$

El rotor y los servos son modelados como de primer orden por el momento. Son limitados por velocidad máxima según sus especificaciones.

3.5. Dinámica angular del vehículo

El momento angular del vehículo respecto de su centro de masa (C) y representado en el marco fijo-tierra N debe tomar en cuenta el momento angular por tener un cuerpo con velocidad lineal y angular propia.

$$L_{\text{C}}^{\text{N}} = \underbrace{\mathbf{A}^{\text{NB}} \cdot J_{\text{C}}^{\text{B}} \cdot \underline{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}}}_{\text{Vehículo}} + \underbrace{\mathbf{A}^{\text{NG}} J_{\text{gR}}^{\text{G}} \cdot \underline{\omega}_{\text{GN}}^{\text{G}} + m_g \cdot \tilde{r}_{\text{RC}}^{\text{N}} \cdot \dot{r}_{\text{RC}}^{\text{N}}}_{\text{Cardán \& EDF}} + \underbrace{\mathbf{A}^{\text{NG}} \cdot J_{\text{rR}}^{\text{G}} \cdot \underline{\omega}_r^{\text{G}} + m_r \cdot \tilde{r}_{\text{RC}}^{\text{N}} \cdot \dot{r}_{\text{RC}}^{\text{N}}}_{\text{Rotor}} \quad (25)$$

[‡]Como bien sabemos la matriz de transformación \mathbf{A} solo es aplicable para transformar vectores cartesianos de una base ortogonal a otra. Los parámetros $\underline{\eta}$ conforman un vector de configuración, no un vector cartesiano!

Esta ecuación describe los efectos de tener un cardán con un rotor integrado acoplado al vehículo sin embargo algunos términos se podrían considerar negligibles debido al diseño del cardán.

Ámbos gimbals del cardán tienen su eje de giro cercano a su centro de masa lo cual significa que la velocidad relativa entre los puntos \mathcal{R} y \mathcal{C} va tener poco impacto sobre los torques internos del vehículo. Se considera que

$$\dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{R}\mathcal{C}} = 0 \quad (26)$$

La velocidad angular de los gimbals es poca ya que su actuación ocurre en el orden de la décima de grado lo cual implica un bajo impacto del término del cardán cuando es integrado en el tiempo. El término $\mathbf{A}^{\text{NG}} J_{g\mathcal{R}}^{\text{G}} \cdot \omega_{\text{GN}}^{\text{G}}$ entonces pasa a formar parte de la inercia del resto del vehículo $J_{\mathcal{C}}^{\text{B}}$, el cual ahora solo excluye al rotor.

El momento angular nos queda simplificado:

$$L_{\mathcal{C}}^{\text{N}} = \mathbf{A}^{\text{NB}} \cdot J_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \cdot \omega_{\text{BN}}^{\text{B}} + \mathbf{A}^{\text{NG}} J_{\text{r}\mathcal{R}}^{\text{G}} \cdot \omega_{\text{r}}^{\text{G}} \quad (27)$$

donde ω_{r} es la velocidad del rotor y $J_{\text{r}\mathcal{R}}^{\text{G}}$ es la matriz de inercia del rotor tomado alrededor de su centro de masa representado en coordenadas del marco cardán G.

Derivamos el momento angular con respecto a N y junto con $J_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \approx \text{constante}$ §

$$\begin{aligned} {}^{\text{N}}\dot{L}_{\mathcal{C}}^{\text{N}} &= {}^{\text{N}}\frac{\text{d}}{\text{d}t} (\mathbf{A}^{\text{NB}} \cdot J_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \cdot \omega_{\text{BN}}^{\text{B}} + \mathbf{A}^{\text{NG}} \cdot J_{\text{r}\mathcal{R}}^{\text{G}} \cdot \omega_{\text{r}}^{\text{G}}) \\ &= \dot{\mathbf{A}}^{\text{NB}} \cdot J_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \cdot \omega_{\text{BN}}^{\text{B}} + \underbrace{\mathbf{A}^{\text{NB}} \cdot \dot{J}_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \cdot \omega_{\text{BN}}^{\text{B}}}_{\approx 0} + \mathbf{A}^{\text{NB}} \cdot J_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \cdot \dot{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}} + \dot{\mathbf{A}}^{\text{NG}} \cdot J_{\text{r}\mathcal{R}}^{\text{G}} \cdot \omega_{\text{r}}^{\text{G}} + \mathbf{A}^{\text{NG}} \cdot {}^{\text{N}}\frac{\text{d}}{\text{d}t} (J_{\text{r}\mathcal{R}}^{\text{G}} \cdot \omega_{\text{r}}^{\text{G}}) \end{aligned}$$

la derivada de la inercia del cuerpo se anula y luego se aplica la regla de la cadena a la derivada

$$\begin{aligned} {}^{\text{N}}\dot{L}_{\mathcal{C}}^{\text{N}} &= \dot{\mathbf{A}}^{\text{NB}} \cdot J_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \cdot \omega_{\text{BN}}^{\text{B}} + \mathbf{A}^{\text{NB}} \cdot J_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \cdot \dot{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}} + \dot{\mathbf{A}}^{\text{NG}} \cdot J_{\text{r}\mathcal{R}}^{\text{G}} \cdot \omega_{\text{r}}^{\text{G}} + \mathbf{A}^{\text{NG}} \cdot {}^{\text{N}}\frac{\text{d}}{\text{d}t} (J_{\text{r}\mathcal{R}}^{\text{G}} \cdot \omega_{\text{r}}^{\text{G}}) \\ &= \mathbf{A}^{\text{NB}} \cdot \tilde{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}} \cdot J_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \cdot \omega_{\text{BN}}^{\text{B}} + \mathbf{A}^{\text{NB}} \cdot J_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \cdot \dot{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}} + \mathbf{A}^{\text{NG}} \cdot \tilde{\omega}_{\text{GN}}^{\text{G}} \cdot J_{\text{r}\mathcal{R}}^{\text{G}} \cdot \omega_{\text{r}}^{\text{G}} + \mathbf{A}^{\text{NG}} \cdot \left({}^{\text{N}}\dot{J}_{\text{r}\mathcal{R}}^{\text{G}} \cdot \omega_{\text{r}}^{\text{G}} + J_{\text{r}\mathcal{R}}^{\text{G}} \cdot {}^{\text{N}}\dot{\omega}_{\text{r}}^{\text{G}} \right) \end{aligned}$$

donde $\dot{J}_{\text{r}\mathcal{R}}^{\text{G}}$ se puede considerar despreciable por la geometría ligera del conjunto cardán y por actuaciones pequeñas (mencionadas anteriormente).

Como el rotor es fijo a al vehículo alrededor de un punto cercano a \mathcal{R} y el movimiento del gimbal es restringido por los actuadores se supone que el rotor es parte del cuerpo rígido del vehículo y se plantea su momento angular como un vector libre. Así podemos igualar $J_{\text{r}\mathcal{R}}^{\text{G}} \equiv J_{\text{r}\mathcal{C}}^{\text{G}} = J_{\text{r}}^{\text{G}}$, y por extensión, $J_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \equiv J_{\mathcal{C}}^{\text{B}}$.

$$= \mathbf{A}^{\text{NB}} \cdot \tilde{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}} \cdot J_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \cdot \omega_{\text{BN}}^{\text{B}} + \mathbf{A}^{\text{NB}} \cdot J_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \cdot \dot{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}} + \mathbf{A}^{\text{NG}} \cdot \tilde{\omega}_{\text{GN}}^{\text{G}} \cdot J_{\text{r}}^{\text{G}} \cdot \omega_{\text{r}}^{\text{G}} + \mathbf{A}^{\text{NG}} \cdot J_{\text{r}}^{\text{G}} \cdot {}^{\text{N}}\dot{\omega}_{\text{r}}^{\text{G}}$$

multiplicando por \mathbf{A}^{BN}

$$\mathbf{A}^{\text{BN}} \sum_i M_{i\mathcal{C}}^{\text{N}} = \sum_i M_{i\mathcal{C}}^{\text{B}} = \tilde{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}} \cdot J_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \cdot \omega_{\text{BN}}^{\text{B}} + J_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \cdot \dot{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}} + \mathbf{A}^{\text{BG}} \cdot \tilde{\omega}_{\text{GN}}^{\text{G}} \cdot J_{\text{r}}^{\text{G}} \cdot \omega_{\text{r}}^{\text{G}} + \mathbf{A}^{\text{BG}} \cdot J_{\text{r}}^{\text{G}} \cdot {}^{\text{N}}\dot{\omega}_{\text{r}}^{\text{G}}$$

entonces

$$J_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \cdot \dot{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}} = -\tilde{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}} \cdot J_{\mathcal{C}}^{\text{B}} \cdot \omega_{\text{BN}}^{\text{B}} - \mathbf{A}^{\text{BG}} \cdot \tilde{\omega}_{\text{GN}}^{\text{G}} \cdot J_{\text{r}}^{\text{G}} \cdot \omega_{\text{r}}^{\text{G}} - \mathbf{A}^{\text{BG}} \cdot J_{\text{r}}^{\text{G}} \cdot {}^{\text{N}}\dot{\omega}_{\text{r}}^{\text{G}} + \sum_i M_{i\mathcal{C}}^{\text{B}}$$

donde $\omega_{\text{GN}}^{\text{G}} = \omega_{\text{GB}}^{\text{G}} + \omega_{\text{BN}}^{\text{G}} = \omega_{\text{GB}}^{\text{G}} + \mathbf{A}^{\text{GB}} \omega_{\text{BN}}^{\text{B}}$

§La inercia del vehículo en su propio marco $J_{\mathcal{C}}^{\text{B}}$ es constante excepto por las variaciones introducidas al agruparlo con el término del cardán $J_{g\mathcal{C}}^{\text{B}}$, el cual varía en función a la actuación α, β .

Esto está bien?
el término $\tilde{\omega}_{\text{BN}}^{\text{B}} \cdot J_{\text{r}}^{\text{G}} \cdot \omega_{\text{r}}^{\text{G}}$ nos hace ruido

$$\begin{aligned}
J_C^B \cdot \dot{\omega}_{BN}^B &= -\tilde{\omega}_{BN}^B \cdot J_C^B \cdot \omega_{BN}^B - \mathbf{A}^{BG} \cdot \tilde{\omega}_{GB}^G \cdot J_T^G \cdot \omega_r^G - \mathbf{A}^{BG} \mathbf{A}^{GB} \cdot \tilde{\omega}_{BN}^B \cdot J_T^G \cdot \omega_r^G - \mathbf{A}^{BG} \cdot J_T^G \cdot {}^N\dot{\omega}_r^G + \sum_i M_{iC}^B \\
&= -\tilde{\omega}_{BN}^B \cdot J_C^B \cdot \omega_{BN}^B - \mathbf{A}^{BG} \cdot \tilde{\omega}_{GB}^G \cdot J_T^G \cdot \omega_r^G - \tilde{\omega}_{BN}^B \cdot J_T^G \cdot \omega_r^G - \mathbf{A}^{BG} \cdot J_T^G \cdot {}^N\dot{\omega}_r^G + \sum_i M_{iC}^B
\end{aligned}$$

donde ${}^N\dot{\omega}_r^G = \mathbf{A}^{GN} \cdot {}^G\dot{\omega}_r^G = \mathbf{A}^{GN} \cdot \dot{\omega}_r \hat{\mathbf{g}}_3$

\mathbf{A}^{GN} debería ser \mathbf{A}^{NG} posiblemente

4. Desarrollo de software

4.1. Elección de arquitectura

La decisión de software a usar depende del controlador a usar, poder de cálculo disponible on board, interfaces de perifericos y funcionalidad deseada.

El controlador a usar es el ARM Cortex-A72 que sería comprado en el paquete comercial conocido como *Raspberry Pi 4B+*. El producto provee salidas para los siguientes usos

- UART
- SPI
- I²C
- GPIO

La Raspberry Pi provee un entorno con linux instalado que permite la programación con virtualmente cualquier lenguaje de programación en existencia. Dado estas condiciones, el lenguaje de programación elegido es **Go** (Golang) debido a los siguientes puntos

- Seguro - Modelo de memoria Go, sistema de tipado fuerte
- Simple - Claridad de sintaxis
- Concurrencia - Crear corutinas es simple, paralelizar corutinas es trivial
- Rendimiento - Superior a Python, Java y Matlab. Comparable a C
- Estable - *The Go 1 promise* (La promesa Go 1)
- Comprobado - Usado en sistemas de alto-riesgo/alta-complejidad (Kubernetes, Docker, Go-HEP)

4.2. Flujo de control

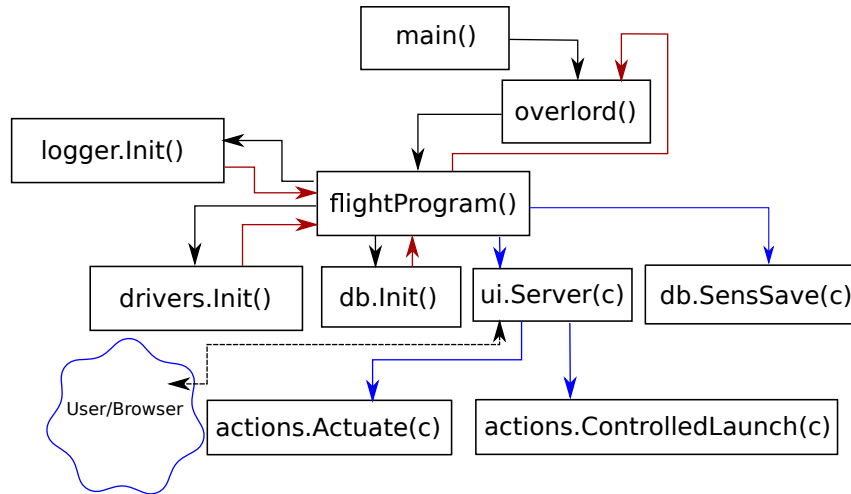


Figura 5: Gráfico de flujo de control (CFG) del programa de vuelo. Las líneas de flujo azules son corutinas independientes al programa principal. Las líneas negras son flujo del programa principal. Las líneas rojas son flujo del programa principal al encontrar un error.

Se ilustra el flujo de control a grandes rasgos usando un CFG en la figura 5. El programa principal corre la rutina `overlord` que a su vez comanda `flightProgram` y espera que esta devuelva control a `overlord`. El propósito de `overlord` es guardar el estado del vehículo y ante una falla irre recuperable en `flightProgram`, terminar con todas las corutinas generadas por `flightProgram` y sus afiliadas y a su vez reiniciar `flightProgram` nuevamente con el último estado antes de la falla.

Agradecimientos

Dan Etenberg por hacer todo posible. Ben Romarowski por ayuda con la dinámica de cuerpo rígido y aerodinámica de los flaps.

Referencias

Hubert Hahn. *Rigid Body Dynamics of Mechanisms: 1 Theoretical Basis*. Springer Science & Business Media, 2013.

Ben Romarowski. Dynamics and control of gimbaled edf. Technical report, LIA Aerospace, 2020.