Problemas de elasticidad lineal plana

La forma "fuerte" del problema de elasticidad lineal en el plano es:

Encontrar $(\mathbf{u}) = (u_1, u_2)$ tal que

$$-(\mathbf{Div}\boldsymbol{\sigma})_i = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = f_i \text{ en } \Omega \qquad 1 \leq i \leq 2$$

Equilibrio

$$u_i = h_i \text{ en } \Gamma|_D$$

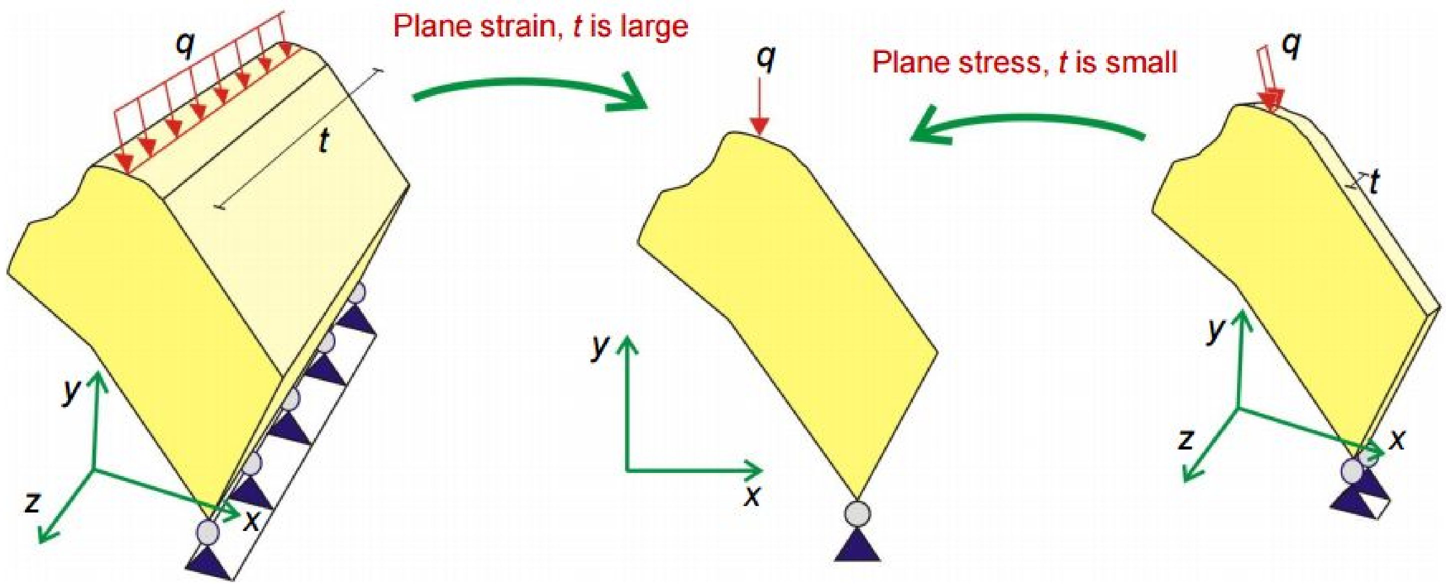
Condiciones de borde para los desplazamientos

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ en } \Gamma_N$$

$$\sum_{j=1}^{2} \sigma_{ij}(u) n_j = g_i \text{ en } \Gamma_N$$

Condiciones de borde para la tensiones

Estado plano de deformación/tensión



$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

plane strain ($\varepsilon_z = 0$)

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & 0 \\ v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & (1-2v) \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z = v(\sigma_x + \sigma_y)$$

plane stress ($\sigma_z = 0$)

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-v) \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_z = \frac{-v}{1-v}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

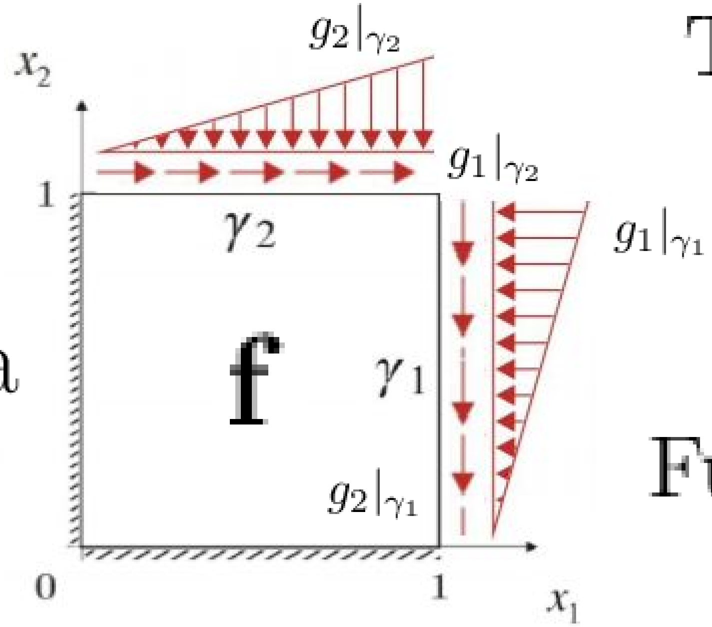
Problemas de elasticidad lineal plana

<u>Problema 1:</u> resolver como estado plano de deformación

Material
$$E = 5 \times 10^9 \ (Pa)$$
$$\nu = 0.3$$

$$g_i|_{\gamma_j}$$
Tensiones de borde

Geometría



$$f = (f_1, f_2)$$
Fuerzas volumétricas

Problemas de elasticidad lineal plana

Paso 1: Proponer una solución que respete las condiciones de borde para probar el método y el programa.

Paso 2: Determinar las fuerzas volumétricas y las tensiones en los bordes que corresponden a la solución propuesta a partir de la ecuación de elasticidad.

Paso 3: Cargar la mallas de elementos provistas.

Paso 4: Resolver el problema con las condiciones de borde calculadas.

Paso 5: Calcular el error en los nodos comparando con la solución exacta.

Paso 6: Probar con distintas soluciones y distintas mallas.

Problemas de elasticidad lineal plana: ejemplo 1

<u>Solución propuesta:</u> $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = (x_1 x_2, -2x_1 x_2)$

(elegida a dedo para testear nuestro programa)

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2\,x_1 \\ \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & 0 \\ v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & (1-2v) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma 11 \\ \sigma 22 \\ \sigma 12 \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} (1-\nu)(x_2) + \nu(-2\,x_1) \\ \nu(x_2) + (1-\nu)(-2\,x_1) \\ (1-2\nu)(x - 2x_2) \end{pmatrix}$$

Problemas de elasticidad lineal plana: ejemplo 1

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{f} = -\mathbf{Div}\boldsymbol{\sigma} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{12} \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{21} + \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2E}{(1+\nu)}\left(\frac{\nu}{(1-2\nu)} + \frac{1}{2}\right) \\ \frac{-E}{(1+\nu)}\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{(1-2\nu)}\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}|_{\Gamma 1} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}|_{\Gamma 1} = \boldsymbol{\sigma}_{|\Gamma_1} \cdot n_{|\Gamma_1}$$

$$= \boldsymbol{\sigma}_{|\Gamma_1} \cdot (1,0) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} (1-\nu)y - 2\nu \\ (1-2\nu)(1-2y) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}|_{\Gamma 2} = \boldsymbol{\sigma}_{|\Gamma_2} \cdot (0,1) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} (1-2\nu)(x_1 - 2) \\ \nu + (1-\nu)(-2x_1) \end{pmatrix}$$

Problemas de elasticidad lineal plana: ejemplo 1

Coeficientes de Lame'

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$(G) = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\mu+\lambda) \\ -(\mu+\lambda) \end{pmatrix}$$

$$g_1|_{\gamma_1} = [(2\mu+\lambda)\,x_2 - 2\lambda]$$

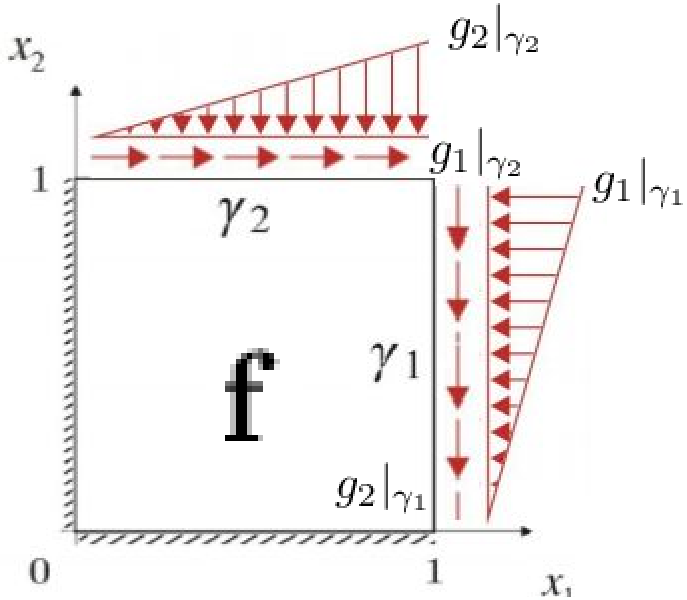
$$g_2|_{\gamma_1} = \mu\,(1-2x_2)$$

$$g_1|_{\gamma_2} = \mu\,(x_1-2)$$

$$g_2|_{\gamma_2} = [-2\,(2\mu+\lambda)\,x_1 + \lambda]$$

Problemas de elasticidad lineal plana: ejemplo 1

Resumen (y unidades)

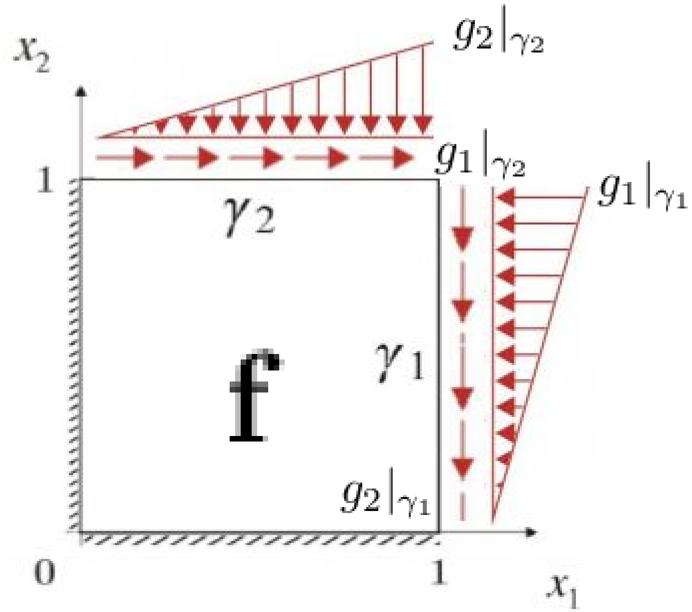


$$u_1(x_1,x_2) = x_1 x_2 \times 10^{-2} \quad (m)$$
$$u_2(x_1,x_2) = -2\,x_1 x_2 \times 10^{-2} \quad (m)$$

$$E = 5\times 10^9\ (Pa)$$
$$\nu = 0.3$$
$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 2.8846\times 10^9\ (Pa)$$
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 1.9231\times 10^9\ (Pa)$$

$$f_1 = 2(\mu+\lambda)\times 10^{-2} = 9.6154\times 10^7 \quad (N\,m^{-3})$$
$$f_2 = -(\mu+\lambda)\times 10^{-2} = -4.8077\times 10^7 \quad (N\,m^{-3})$$
$$g_1|_{\gamma_1} = [(2\mu+\lambda)\,x_2 - 2\lambda]\times 10^{-2} = (6.7308x_2 - 5.7692)\times 10^7 \quad (N\,m^{-2})$$
$$g_2|_{\gamma_1} = \mu(1-2x_2)\times 10^{-2} = (1.9231 - 3.8462x_2)\times 10^7 \quad (N\,m^{-2})$$
$$g_1|_{\gamma_2} = \mu(x_1-2)\times 10^{-2} = (1.9231x_1 - 3.8462)\times 10^7 \quad (N\,m^{-2})$$
$$g_2|_{\gamma_2} = [-2(2\mu+\lambda)\,x_1 + \lambda]\times 10^{-2} = (-13.462x_1 + 2.8846)\times 10^7 \quad (N\,m^{-2})$$

Problemas de elasticidad lineal plana: ejemplo 2



$$
\begin{aligned}
u_1(x_1,x_2) &= 2\,(e^{x_1}-1)x_2 \times 10^{-2} \quad (m)\\
u_2(x_1,x_2) &= -(e^{x_2}-1)x_1 \times 10^{-2} \quad (m)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E &= 5\times 10^9\ (Pa)\\
\nu &= 0.3\\
\lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)\,(1-2\nu)} = 2.8846\times 10^9\ (Pa)\\
\mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} = 1.9231\times 10^9\ (Pa)
\end{aligned}
$$

$$f_1 = [e^{x_2}\,(\lambda+\mu) - 2x_2e^{x_1}\,(\lambda+2\mu)]\times 10^{-2} = (4.8077e^{x_2} - 13.462x_2e^{x_1})\times 10^7 \quad (N\,m^{-3})$$

$$f_2 = [-2e^{x_1}\,(\lambda+\mu) + x_1e^{x_2}\,(\lambda+2\mu)]\times 10^{-2} = (-9.6154e^{x_1} + 6.7308x_1e^{x_2})\times 10^7 \quad (N\,m^{-3})$$

$$g_1|_{\gamma_1} = [2\,(\lambda+2\mu)\,e\,x_2 - \lambda e^{x_2}]\times 10^{-2} = (13.462e\,x_2 - 2.8846)\times 10^7 \quad (N\,m^{-2})$$

$$g_2|_{\gamma_1} = \mu\,(2e - e^{x_2} - 1)\times 10^{-2} = (3.8462e - 1.9231e^{x_2} - 1.9231)\times 10^7 \quad (N\,m^{-2})$$

$$g_1|_{\gamma_2} = \mu\,(2e^{x_1} - e - 1)\times 10^{-2} = (3.8462e^{x_1} - 1.9231\times 10^7 e - 1.9231)\times 10^7 \quad (N\,m^{-2})$$

$$g_2|_{\gamma_2} = [2\lambda e^{x_1} - (\lambda+2\mu)\,e\,x_1]\times 10^{-2} = (5.7692e^{x_1} - 6.7308e\,x_1)\times 10^7 \quad (N\,m^{-2})$$

Problemas de elasticidad lineal plana

Comparar resultados utilizando distintos elementos (CST, Q4, LST, Q8/9).

¿Qué se puede decir de la solución del primer problema?
¿Va a importar la cantidad de elementos de cuatro lados que usemos en la precisión de nuestra aproximación para el caso 1? ¿Y para el 2?

Pensar cuán bien vamos a aproximar la condiciones de borde en ambos casos con nuestros elementos.

Calcular y graficar:

- máxima diferencia entre valor real y valor de la aproximación discreta $\max_{\Sigma_h} |u - u_h|$
- Tensiones en los elementos
- Tensiones de Von Mises