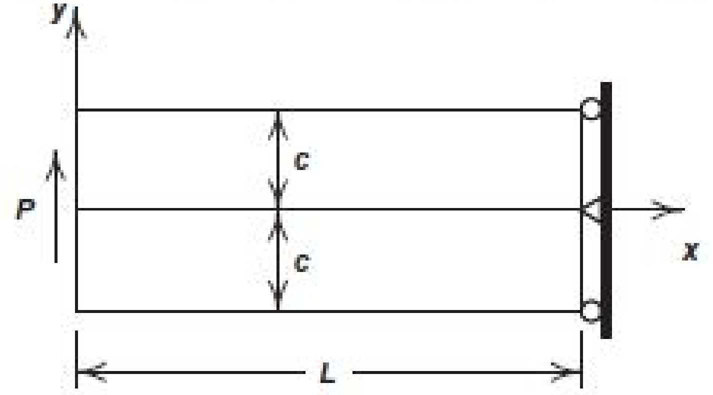
Convergencia de la solución discreta

Problema de estado plano de tensión (práctica 9)

$$c = 10, \quad L = 100, \quad w = 1, \quad P = 80, \quad E = 1000, \quad \text{and} \quad \nu = 0.25$$



Condiciones de borde

$$u(L,0) = v(L,0) = 0$$

$$u(L,c) = u(L,-c) = 0$$

Cargas

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = w \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad x = 0, \; -c \le y \le c$$

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = w \begin{Bmatrix} -\sigma_x \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad x = L, \; -c \le y \le c$$

Solución exacta

$$\boxed{\begin{aligned} u &= -\frac{P(x^2 - L^2)y}{2EI} - \frac{\nu P y(y^2 - c^2)}{6EI} + \frac{P y(y^2 - c^2)}{6GI} \\ v &= \frac{\nu P x y^2}{2EI} + \frac{P(x^3 - L^3)}{6EI} - \left(\frac{PL^2}{2EI} + \frac{\nu P c^2}{6EI} + \frac{P c^2}{3GI}\right)(x - L) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{3}{2}\frac{Pxy}{c^3} \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= -\frac{3P}{4c}\left[1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right] \end{aligned}}$$

Convergencia de la solución discreta

Problema de estado plano de tensión (práctica 9)

Obtener curvas de convergencia (error relativo vs. h) para distintos parámetros de malla h->0 usando elementos lineales (Q4, CST) y cuadráticos (LST, Q8, Q9) de:

Solución discreta

- ❑ Máximo error en los desplazamientos (en valor absoluto)

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \int_{v_e} \left(\{\varepsilon^*\}_i - \{\varepsilon\}_i\right)^T [E] \left(\{\varepsilon^*\}_i - \{\varepsilon\}_i\right) dv$$

- ❑ Error en las deformaciones

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \, \boldsymbol{\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega$$

- ❑ Error de la energía

Solución exacta

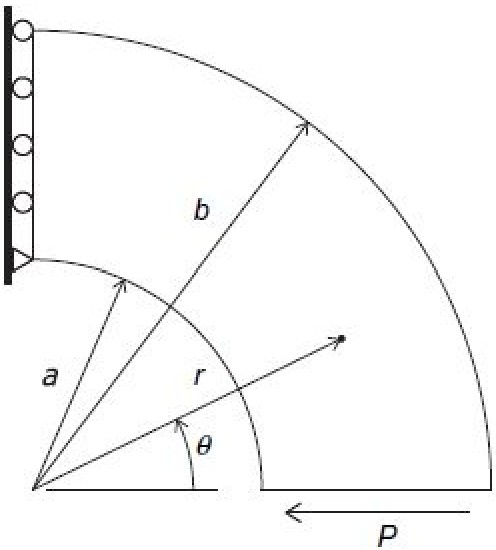
$$\eta_E = \frac{|E_{ex} - E_{fe}|}{E_{ex}}$$

Error relativo:

A partir de las curvas obtener orden de convergencia. ¿Qué pasa con la curva de convergencia de un elemento Q16?

Convergencia de la solución discreta

Problema de estado plano de tensión



Datos

$$a = 5, \quad b = 10, \quad w = 1, \quad u_0 = -0.01, \quad E = 10{,}000 \quad \text{and} \quad \nu = 0.25$$

Condiciones de borde

$$u(x, 0) = u_0 \qquad \text{and} \qquad u(0, y) = v(0, a) = 0$$

$$\boxed{u_r(r, 0) = -\frac{\pi P}{2NE}(a^2 + b^2) = u_0}$$

Solución exacta

$$\boxed{\begin{aligned} u_r = \; & \frac{P}{NE}\left\{\left[\frac{1}{2}(1-3\nu)r^2 - \frac{a^2b^2(1+\nu)}{2r^2} - (a^2+b^2)(1-\nu)\ln r\right]\sin\theta \right. \\ & \left. + (a^2+b^2)(2\theta-\pi)\cos\theta\right\} - K\sin\theta \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_\theta = -\frac{P}{NE}\Bigg\{ & \left[\frac{1}{2}(5+\nu)r^2 - \frac{a^2b^2(1+\nu)}{2r^2}\right. \\ & \left. + (a^2+b^2)[(1-\nu)\ln r + (1+\nu)]\right]\cos\theta \\ & + (a^2+b^2)(2\theta-\pi)\sin\theta\Bigg\} - K\cos\theta \end{aligned}}$$

$$N = a^2 - b^2 + (a^2+b^2)\ln b/a.$$

$$K = \frac{P}{NE}\left[\frac{1}{2}(1-3\nu)a^2 - \frac{b^2(1+\nu)}{2} - (a^2+b^2)(1-\nu)\ln a\right]$$

Convergencia de la solución discreta

Problema de estado plano de tensión

- ❏ Imponer la condición no homogénea de borde
- ❏ Repetir el análisis anterior para obtener la curva de máximo error en los desplazamientos (en valor absoluto) en función de h.
- ❏ Obtener los valores de energía U para cada valor de h y comparar con la energía exacta

$$E_{ex} = \frac{1}{\pi}\left[\ln 2 - 0.6\right] = 0.0296496684424$$