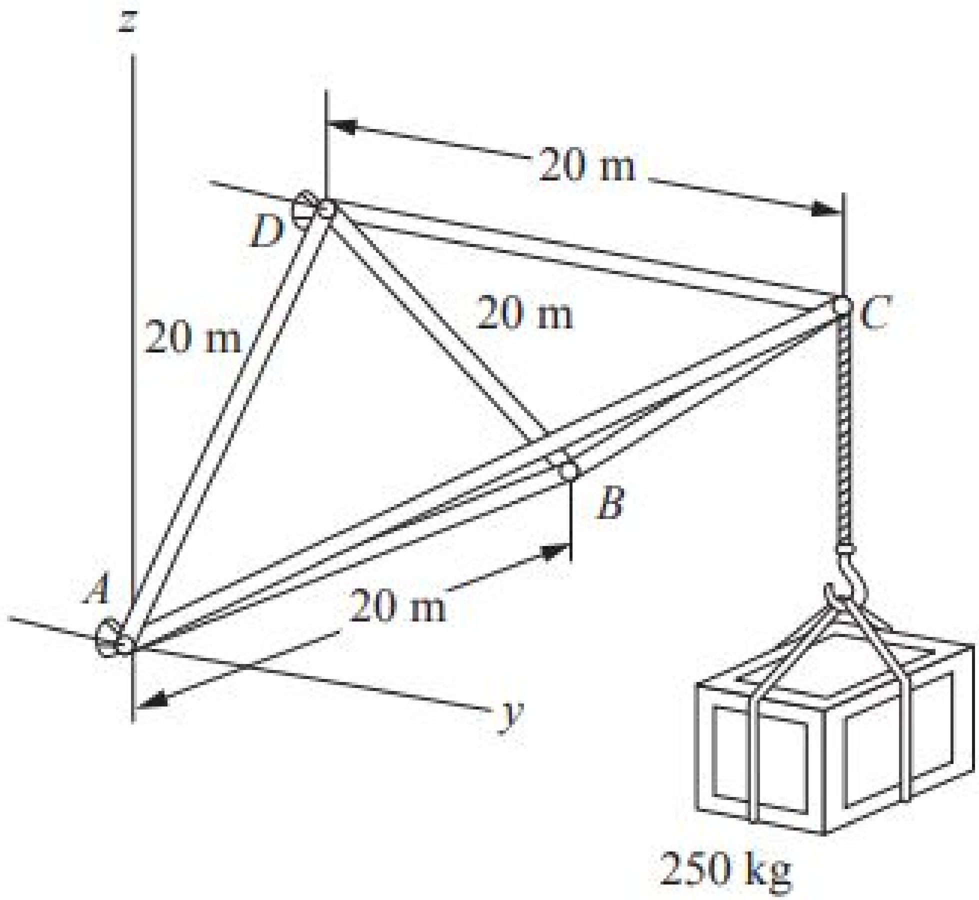
ELEMENTO DE BARRA - Ejercicios 3D

Calcular el máximo desplazamiento nodal y el elemento más tensionado con Matlab

E = 210 GPa

A = 100 cm^2

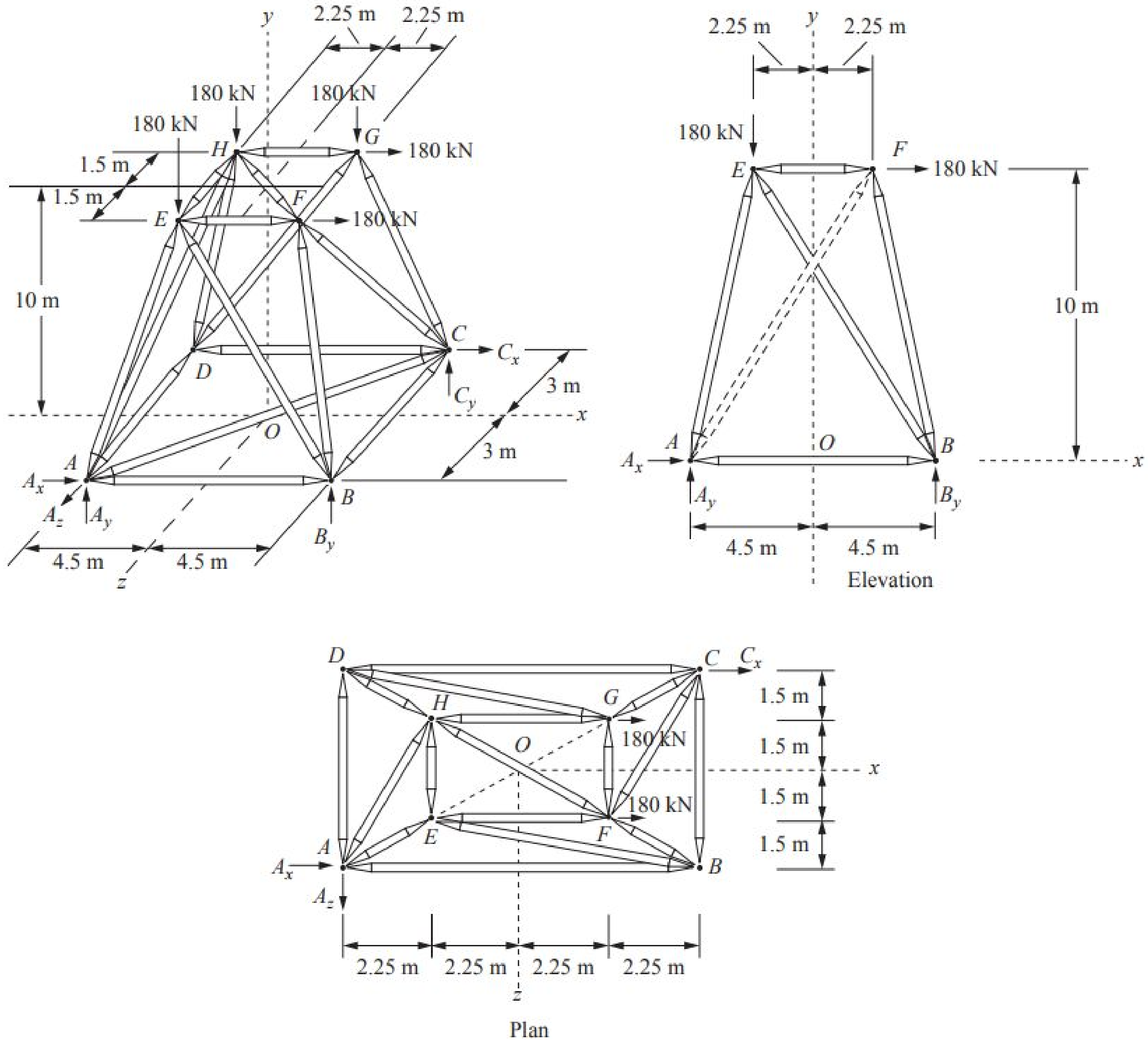


ELEMENTO DE BARRA - Reticulados espaciales

Calcular el máximo desplazamiento nodal y el elemento más tensionado con ADINA y compare con MATLAB (opcional)

E = 210 GPa

A = 100 cm^2



ELEMENTO DE VIGA

HIPÓTESIS (Teoría de vigas de Euler - Bernoulli)

- Pequeños desplazamientos
- Secciones permanecen planas y normales al eje ($\ncong$ Viga de Timoshenko)
- Deformación de corte nula ($\ncong$ Viga de Timoshenko)
- Problemas axial y de flexión desacoplados (Cargas axiales en el eje de la viga no generan momento)

ECUACIÓN DIFERENCIAL EN TÉRMINO DE DESPLAZAMIENTOS (Caso 2D)

Deflexión

Momento

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - q = 0, \quad M = EI_y \frac{d^2 u_z}{dx^2}$$

$$V = \frac{dM}{dx} = EI_y \frac{d^3 u_z}{dx^3}$$

Corte

$$\boxed{\frac{d^2}{dx}\left(EI_y \frac{d^2 u_z}{dx^2}\right) - q = 0}$$

Carga distribuida

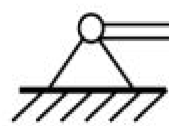
ECUACIÓN DIFERENCIAL EN TÉRMINO DE DESPLAZAMIENTOS (Caso 2D)

Ecuación de 4to orden → 4 condiciones de borde

Borde Libre

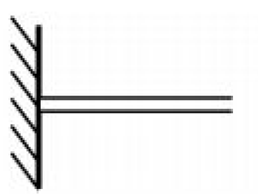
$$V = M = 0$$

Articulación



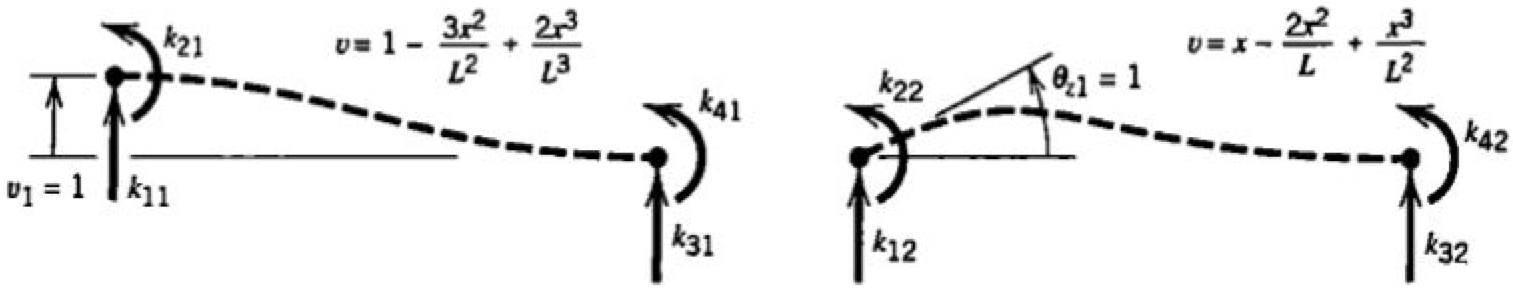
$$M = u_z = 0$$

Empotramiento

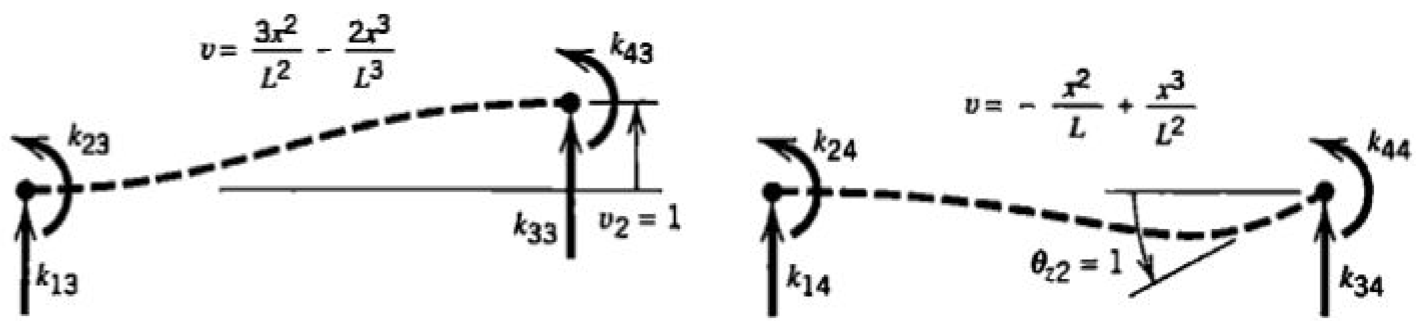


$$u_z = \frac{du_z}{dx} = 0$$

FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN DE HERMITE



(c) (d)



FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN DE HERMITE

Cualquier polinomio de grado 3 se escribe como combinación lineal de estos 4 polinomios interpoladores N1, N2, N3, N4.

$$N_1 = \frac{1}{L^3}\left(2x^3 - 3x^2L + L^3\right) \qquad N_2 = \frac{1}{L^3}\left(x^3L - 2x^2L^2 + xL^3\right)$$

$$N_3 = \frac{1}{L^3}\left(-2x^3 + 3x^2L\right) \qquad N_4 = \frac{1}{L^3}\left(x^3L - x^2L^2\right)$$

"Funciones de forma" (Fijas)

Grados de libertad

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

$$[N] = [N_1 \;\; N_2 \;\; N_3 \;\; N_4]$$

$$\boxed{v = [N]\{d\}}$$

Reconstruyo ***v***
(deflexión de la viga)

MATRIZ DE RIGIDEZ PARA FLEXIÓN EN 2D

Luego, para obtener la columna ***c*** de la matriz de rigidez del elemento de viga, imponemos el valor unitario en el grado de libertad ***c*** y nulo en los demás.

Obtenemos $v = [N]\{d\}$ y a partir de la deflexión y usando la ecuación diferencial podemos calcular todas los M y V necesarios que serán los valores de rigidez.

$$V = EI\frac{d^3v}{dx^3}\bigg|_{x=0} = \frac{EI}{L^3}\left(12v_1 + 6L\phi_1 - 12v_2 + 6L\phi_2\right)$$

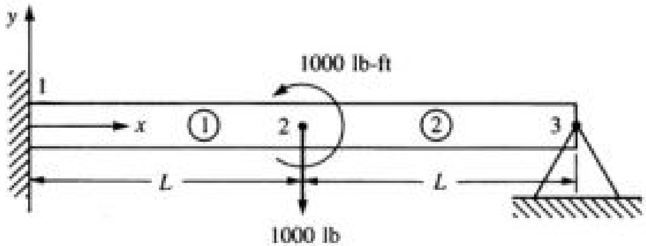
$$-V = -EI\frac{d^3v}{dx^3}\bigg|_{x=L} = \frac{EI}{L^3}\left(-12v_1 - 6L\phi_1 + 12v_2 - 6L\phi_2\right)$$

$$-M = -EI\frac{d^2v}{dx^2}\bigg|_{x=0} = \frac{EI}{L^3}\left(6Lv_1 + 4L^2\phi_1 - 6Lv_2 + 2L^2\phi_2\right)$$

$$M = EI\frac{d^2v}{dx^2}\bigg|_{x=L} = \frac{EI}{L^3}\left(6Lv_1 + 2L^2\phi_1 - 6Lv_2 + 4L^2\phi_2\right)$$

$$[\mathbf{k}] = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{-12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ \frac{-12EI_z}{L^3} & \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{-6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{array} \end{array}$$

EJEMPLO 1: Geometría y matrices locales



$$
\mathbf{k}^{(1)} = \frac{EI}{L^3}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} \quad v_1 & \quad \phi_1 & \quad v_2 & \quad \phi_2 \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
12 & 6L & -12 & 6L \\
6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\
-12 & -6L & 12 & -6L \\
6L & 2L^2 & -6L & 4L^2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\mathbf{k}^{(2)} = \frac{EI}{L^3}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} \quad v_2 & \quad \phi_2 & \quad v_3 & \quad \phi_3 \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
12 & 6L & -12 & 6L \\
6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\
-12 & -6L & 12 & -6L \\
6L & 2L^2 & -6L & 4L^2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matriz global

$$
\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix}
= \frac{EI}{L^3}
\begin{bmatrix}
12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\
6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\
-12 & -6L & 12+12 & \boxed{-6L+6L} & -12 & 6L \\
6L & 2L^2 & -6L+6L & 4L^2+4L^2 & -6L & 2L^2 \\
0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\
0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ v_3 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}
$$

Element 1 Element 2

Imposición de condiciones de vínculo

$$v_1 = \phi_1 = v_3 = 0$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12+12 & -6L+6L & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & -6L+6L & 4L^2+4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ 0 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

Sistema final

$$\begin{Bmatrix} -1{,}000\ lb \\ 1{,}000\ lb\,ft \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6L \\ 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

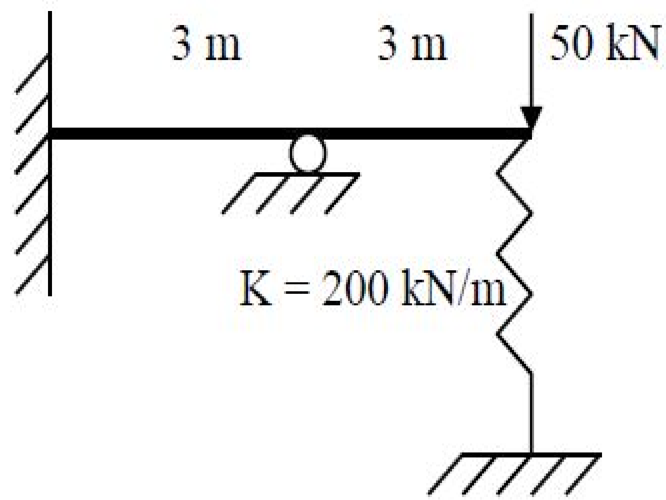
A partir de los valores en los grados de libertad y las funciones interpoladoras podemos reconstruir la solución de Elementos Finitos del problema.

Con ella podemos obtener: Momentos, corte, tensiones y deformaciones.

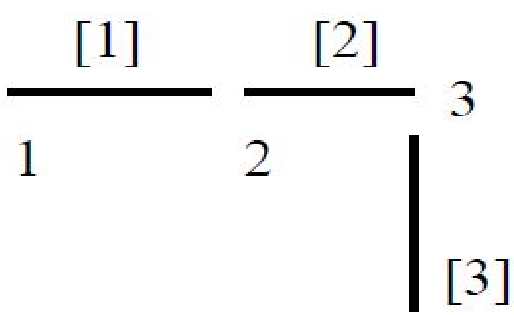
EJEMPLO 2: Geometría y cargas

Objetivo: Calcular deflexión del punto extremo

$E = 210$ GPa, $I = 2\mathrm{x}10^{-4}\,\mathrm{m}^4$



Discretización



Matrices locales y global

$$[K_e]^{(1)} = (EI/L^3)\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2\,L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2\,L^2 & -6L & 4\,L^2 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array}$$

$$[K_e]^{(2)} = (EI/L^3)\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2\,L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2\,L^2 & -6L & 4\,L^2 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array}$$

$$[K_e]^{(3)} = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K \end{pmatrix}\begin{array}{c} v_3 \\ v_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2\,L^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & & & 12+K' & -6L & -K' \\ & & & & & 4L^2 & 0 \\ \text{SYMMETRY} & & & & & & K' \end{pmatrix} \end{array} \times (EI)/(L^3)$$

$$K' = (K) \times [L^3 / (EI)]$$

Eliminación de reacciones de vínculo

$v_1 = \theta_1 = 0$

$v_2 = 0$

$$K_G = EI / (L^3) \begin{pmatrix} 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 12+K' & -6L \\ 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

$V_4 = 0$

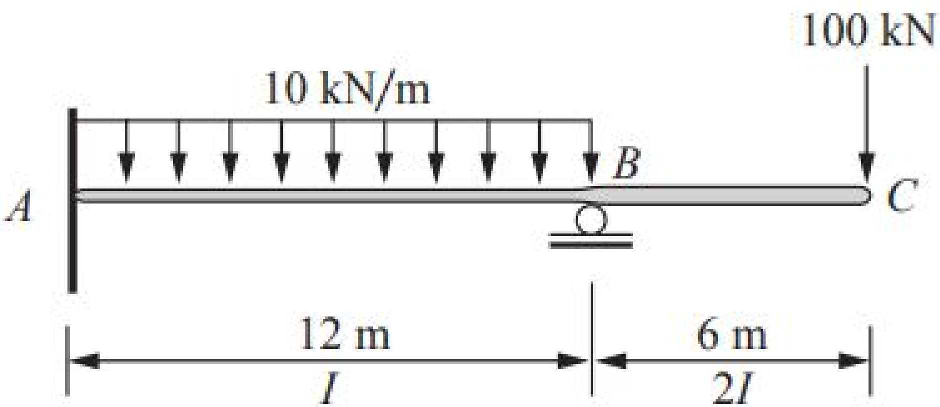
Sistema final

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} = 15.55 \times 10^5 \begin{pmatrix} 72 & -18 & 18 \\ -18 & 12.1 & -18 \\ 18 & -18 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO

Objetivo: Calcular la pendiente en el punto B y la deflexión y la pendiente en el punto C con diferente número de elementos Comparar con la solución analítica de teoría de barras (opcional)

$E = 210\,\text{GPa}$



$c = 0.30\text{ m},\ I = 700 \cdot 10^{-6}\text{ m}^4$