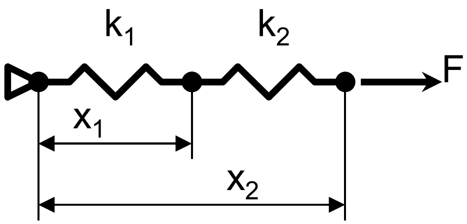
Principio de los Trabajos Virtuales vs Mínima energía potencial total



Con el método de energías no se puede resolver problemas no lineales mietras que con trabajos virtuales sí.

$$W_{\text{int}} = \delta x_1 (x_1 k_1) + \delta (x_2 - x_1)((x_2 - x_1) k_2) \quad ; \quad W_{ext} = F \delta x_2$$

$$\delta x_1 (x_1 k_1) + (\delta x_2 - \delta x_1)((x_2 - x_1) k_2) = F \delta x_2$$

$$\delta x_1 (x_1 k_1 - (x_2 - x_1) k_2) + \delta x_2 ((x_2 - x_1) k_2 - F) = 0 \ \ \forall \delta x_1 \ \ y \ \forall \delta x_2$$

$x_1 k_1 - (x_2 - x_1) k_2 = 0$ Equilibrio en x_1

$(x_2 - x_1) k_2 - F = 0$ Equilibrio en x_2

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

Lo mismo.

$$\Pi = U + V$$

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$$

$$V(x_1, x_2) = -F x_2$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 - F x_2$$

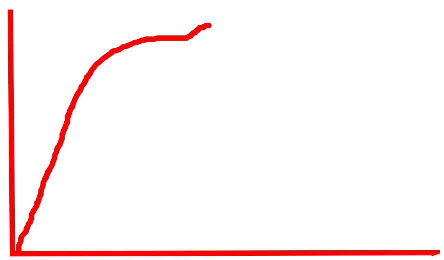
$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = k_2 (x_2 - x_1) - F = 0$$

Principio de la Mínima Energía Potencial Total ¿Qué resuelve?

Energía Potencial
Sólido Elástico

$$U = \int_V \int \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} \, dv = \int_V \int \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} \, dv = \int_V \tfrac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, dv = \int_V \tfrac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, dv$$



Energía Potencial Cargas

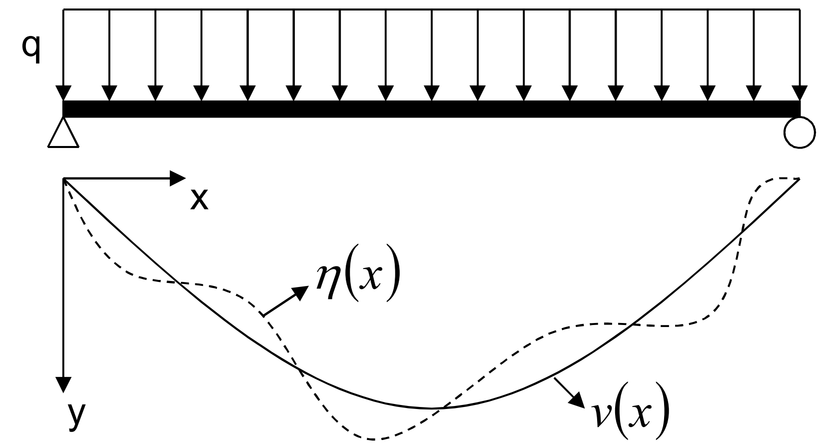
$$V = -\int_v \underline{F} \cdot \underline{u} \, dv - \int_s \underline{\Phi} \cdot \underline{u} \, dv$$

Energía Potencial Total $\Pi = U + V$

$$\delta\Pi = \delta\left(U + V\right) = 0$$

Cuando v es la exacta, las formulaciones debiles y fuertes dan lo mismo. La debil toma toda la viga y la fuerte toma punto a punto. Es preferible usar la debil cuando v no es la exacta ya que promedia y comete menos error.

Formulación Variacional



Funcional $$\Phi = \int_0^H F\left(x, v(x), \frac{dv(x)}{dx}, \cdots, \frac{d^m v(x)}{dx^m}\right) dx$$

$$\min \Phi = \int_0^L \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 - qv \;\; dx \Rightarrow \delta\Phi = 0!!! \quad \Leftrightarrow \quad EI\frac{d^4 v}{dx^4} - q = 0$$

Debil — Fuerte

Variación admisible $\eta = \eta(x) \rightarrow \eta(0) = \eta(L)$ con las mismas condiciones de borde esenciales que v(x)

$$\delta\Phi(v,\eta) = \left.\frac{\partial \Phi(v+\varepsilon\eta)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon\to 0}$$ Variación de Gateaux

$$\delta\Phi = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left.\left(\int_0^L \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2(v+\varepsilon\eta)}{dx^2}\right)^2 - q(v+\varepsilon\eta)dx\right)\right|_{\varepsilon\to 0} = \left.\left(\int_0^L EI\left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \varepsilon\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)\frac{d^2\eta}{dx^2} - q\,\eta\;dx\right)\right|_{\varepsilon\to 0}$$

$$\delta\Phi = \int_0^L EI\frac{d^2 v}{dx^2}\frac{d^2\eta}{dx^2}dx - \int_0^L q\,\eta dx = EI\left(\left.\frac{d^2 v}{dx^2}\frac{d\eta}{dx}\right|_0^L - \int_0^L \frac{d^3 v}{dx^3}\frac{d\eta}{dx}dx\right) - \int_0^L q\,\eta dx$$

Ecuación diferencial

$$\delta\Phi = EI\left(\left.\frac{d^2 v}{dx^2}\frac{d\eta}{dx}\right|_0^L - \left(\frac{d^3 v}{dx^3}\underbrace{\eta\Big|_0^L}_{0} - \int_0^L \frac{d^4 v}{dx^4}\eta\,dx\right)\right) - \int_0^L q\,\eta dx = \underbrace{EI\left.\frac{d^2 v}{dx^2}\frac{d\eta}{dx}\right|_0^L}_{0} + \int_0^L \overbrace{\left(EI\frac{d^4 v}{dx^4} - q\right)}^{0}\eta\,dx$$

condición de borde natural

Ya sabe que no tiene momentos en las puntas.

Formulación Variacional

Energía Potencial Sólido Elástico

$$U_0 = \int [\sigma]^T : [d\varepsilon] = \int \sigma_x \, d\varepsilon_x + \sigma_y \, d\varepsilon_y + \sigma_z \, d\varepsilon_z + 2\sigma_{xy} \, d\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{yz} \, d\varepsilon_{yz} + 2\sigma_{zx} \, d\varepsilon_{zx}$$

$$U_0 = \int \sigma_x \, d\varepsilon_x + \sigma_y \, d\varepsilon_y + \sigma_z \, d\varepsilon_z + \sigma_{xy} \, d\gamma_{xy} + \sigma_{yz} \, d\gamma_{yz} + \sigma_{zx} \, d\gamma_{zx} \underbrace{= \tfrac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} = \tfrac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\}}_{\text{Elástico Lineal}}$$

$$U = \int_v U_0 dv = \int_v \tfrac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv = \int_v \tfrac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} dv$$

Equilibrio Mecánico

$$\underbrace{\int_v \left(\tfrac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_0\} \right) dv}_{\text{Energía interna almacenada}} = \underbrace{\int_v \{u\}^T \{F\} dv + \int_s \{u\}^T \{\Phi\} ds + \{D\}^T \{P\}}_{\text{Trabajo externo}}$$

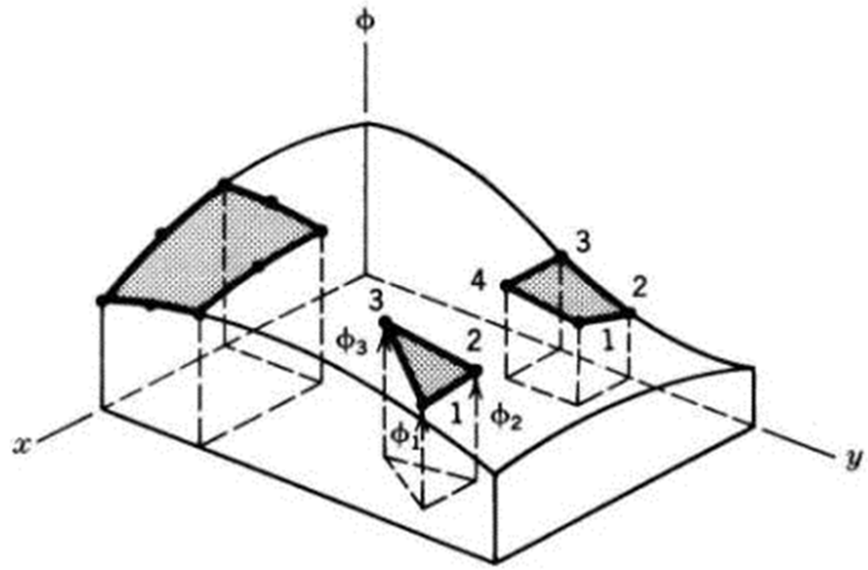
Funcional

$$\Pi = \int_v \left(\tfrac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_0\} \right) dv - \int_v \{u\}^T \{F\} dv - \int_s \{u\}^T \{\Phi\} ds - \{D\}^T \{P\}$$

Formulación Variacional.

Discretización

$$\{u\}=[N]\{d\} \quad ; \quad \{\varepsilon\}=[\partial]\{u\} \quad ; \quad [B]=[\partial]\{N\}\rightarrow\{\varepsilon\}=[B]\{d\}$$



$$\Pi=\int_v \tfrac{1}{2}\{d\}^T[B]^T[E][B]\{d\}-\{d\}^T[B]^{T^T}[E]\{\varepsilon_0\}+\{d\}^T[B]^{T^T}\{\sigma_0\}dv-\int_v\{d\}^T[N]^T\{F\}dv-\int_s\{d\}^T[N]^T\{\Phi\}ds-\{D\}^T\{P\}$$

Extensión

$$\Pi=\tfrac{1}{2}\sum_i^{nels}\{d\}_i^T[K]_i\{d\}_i-\sum_i^{nels}\{d\}_i^T\{r_e\}-\{D\}^T\{P\}=\tfrac{1}{2}\{D\}^T[K]\{D\}-\{D\}^T\{R\}$$

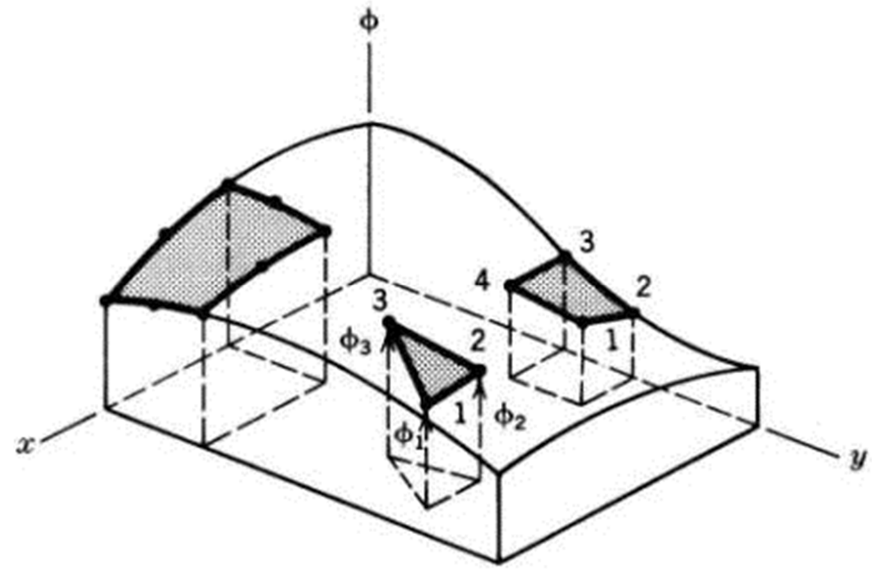
$$[K]_i=\int_{v_e}[B]^T[E][B]dv_e \quad ;\{r_e\}=\int_{v_e}[N]^T[F]dv_e+\int_{s_e}[N]^T[\Phi]ds_e+\int_{v_e}[B]^T[E][\varepsilon_0]dv_e-\int_{v_e}[B]^T[E][\sigma_0]dv_e$$

$$\{R\}=\sum_i^{nels}\{r_e\}+\{P\}$$

Minimización

$$\left[\frac{\partial\Pi}{\partial D_i}\right]=[K]\{D\}-\{R\}=0 \quad ; \quad [K]\{D\}=\{R\}$$

Formulación Variacional.



Simetría $$\frac{\partial^2\Pi}{\partial D_i \partial D_j} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial D_j \partial D_i} = K_{ij}$$

Equilibrio $$\frac{\partial\Pi}{\partial D_i} = 0$$

Energía Potencial Elástica $$\Pi = U + \Omega \quad ; \quad U = \tfrac{1}{2}\{D\}^T[K]\{D\} \quad ; \quad \Omega = -\{D\}^T\{R\}$$

Definida Positiva $$\tfrac{1}{2}\{D\}^T[K]\{D\} > 0$$

Precisión $$D \rightarrow O\left(h^{p+1}\right)$$

p: grado polinomio

h: tamaño elemento $$\frac{\partial^r D}{\partial x^r} \rightarrow O\left(h^{p+1-r}\right)$$

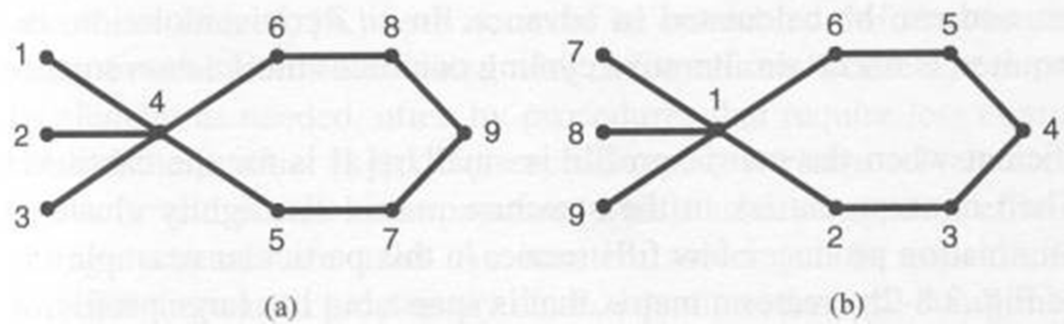
Matriz de Rigidez

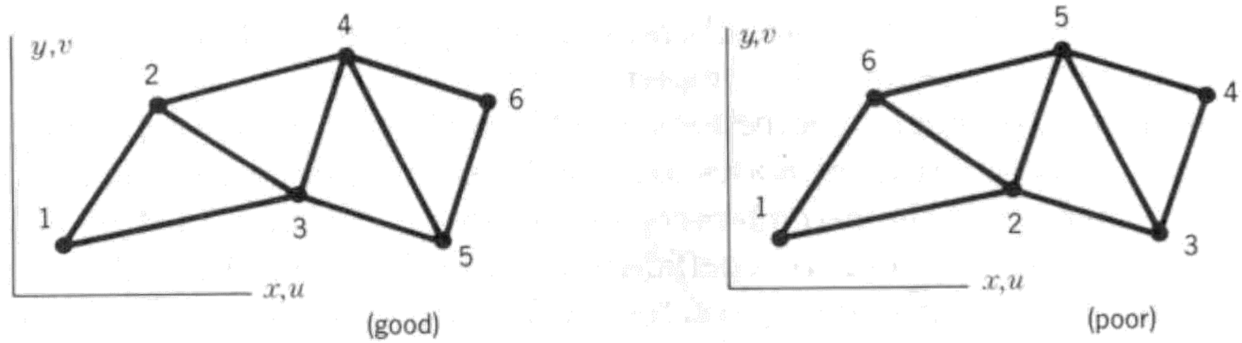
El almacenamiento es más eficiente si la matriz es más diagonal.

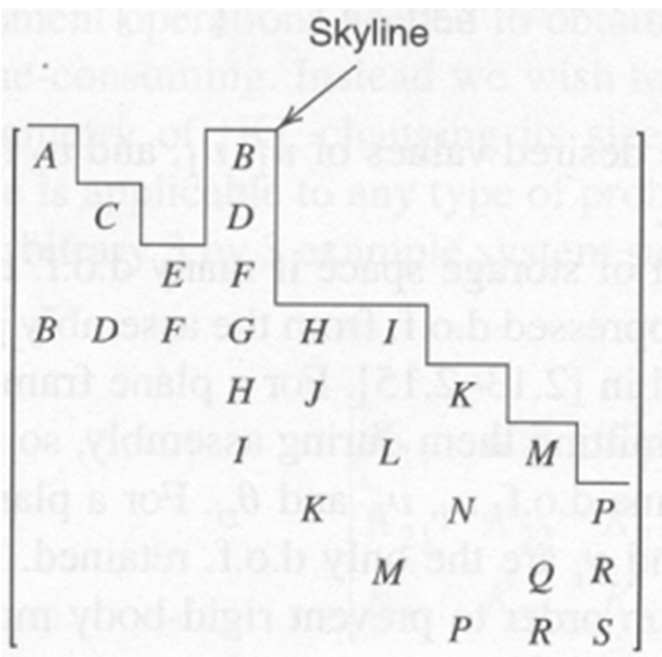
- Almacenamiento
- Numeración
- Inversión

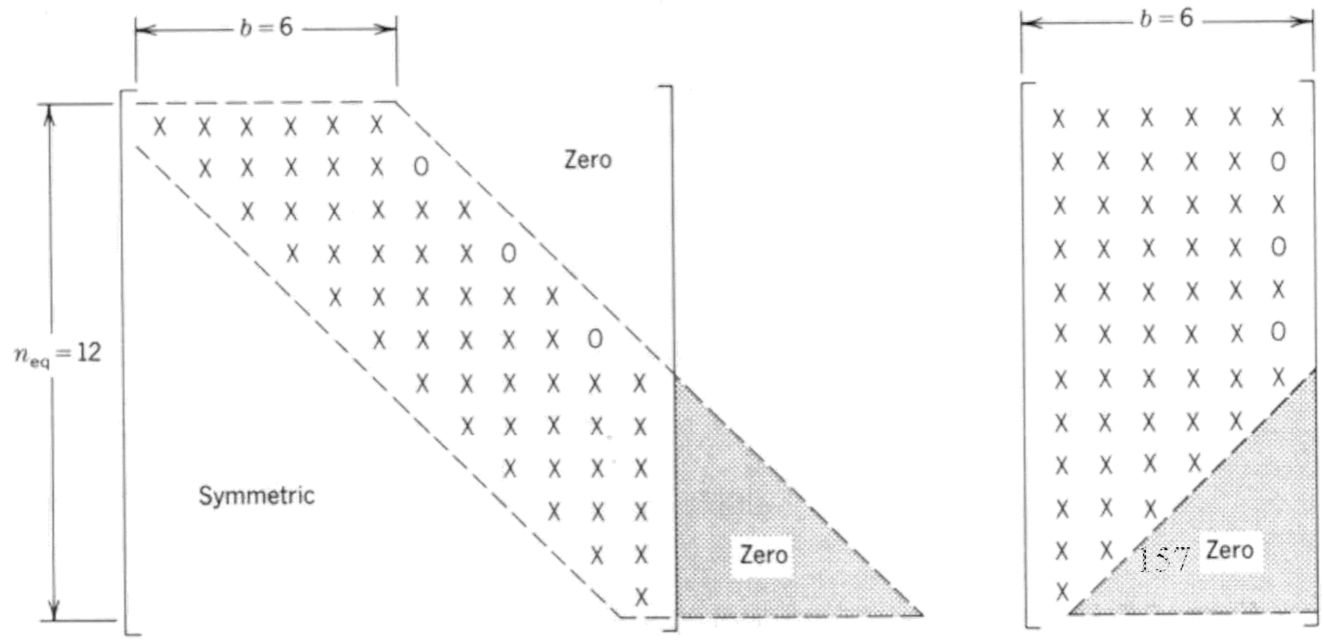
b = bandwidth
t = time
n = dim K

t = n.b^2









Almacenamiento de matrices

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & F & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & D & F & G & H & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H & J & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & L & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K & 0 & N & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M & R & S \end{bmatrix}$$

Bandwidth

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & B \\ C & 0 & D & 0 \\ E & F & 0 & 0 \\ G & H & I & 0 \\ J & 0 & K & 0 \\ L & 0 & M & \otimes \\ N & R & \otimes & \otimes \\ S & \otimes & \otimes & \otimes \end{bmatrix}$$

Skyline

$$M = [A \quad C \quad E \quad B \quad D \quad F \quad G \quad H \quad J \quad I \quad 0 \quad L \quad K \quad \ldots]$$
$$v = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 7 \quad 9 \quad 12 \quad 15 \quad 18]$$

Sparse

$$M = [A \quad B \quad C \quad D \quad E \quad F \quad G \quad H \quad I \quad J \quad K \quad L \quad M \quad \ldots]$$
$$c = [1 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad \ldots]$$
$$r = [1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 12 \quad 15 \quad 18]$$

Almacenamiento: full $O(n^2)$ vs sparse $O(n)$

Complejidad: full $O(n^3)$ vs sparse $O(n)$

Métodos de solución

Métodos frontales

- Número de operaciones fijo
- Precisión fija

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

Eliminación de Gauss

$$\mathbf{Lx} = \mathbf{r}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{12} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{Bmatrix}$$

Factorización Doolittle / Crout

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} = \mathbf{LUx}$$

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{12} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{n1} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{LUx} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$$

Métodos de solución

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

Métodos Iterativos

•Valor inicial o semilla

•Número de operaciones dependen de la precisión

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad k : iteraciones$$

$$\mathbf{Qx} = (\mathbf{Qx} - \mathbf{Ax}) + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{Ix} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Ax}) + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}$$

Como no tiene que invertir la matriz, ahora memoria, tarda hasta la mitad.

Q tiene que tener el radio espectral menor que 1 para que converja.

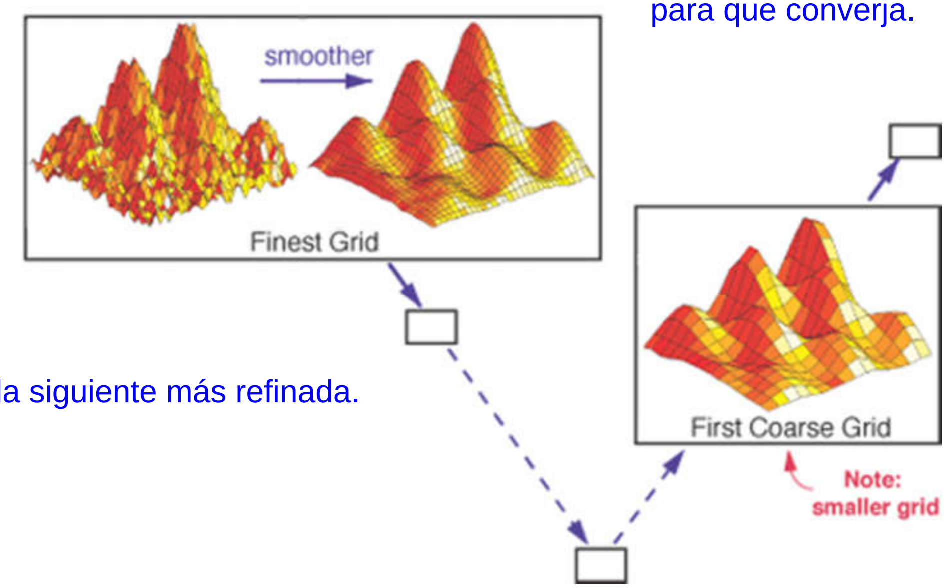
Métodos Multigrilla

• Métodos Iterativos

• Problemas multiescala

• Problemas de propagación

Usa la información de la malla previa para la siguiente más refinada.



http://computation.llnl.gov/casc/sc2001_fliers/SLS/SLS01.html