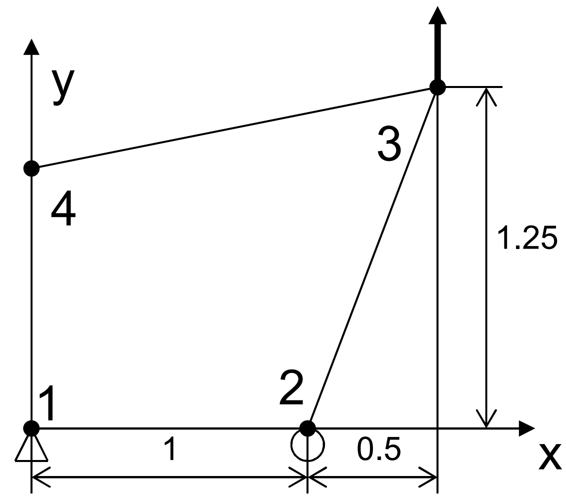
Integración

3 Autovalores son nulos ya que son movimientos rígidos.



$$K_{exacta} = \begin{bmatrix} 0.47774 & 0.1047 & \cdots \\ 0.1047 & 0.50257 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \qquad \Lambda_{exacta} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.42312 \\ 0.60786 \\ 0.69738 \\ 0.82946 \\ 1.7308 \end{Bmatrix}$$

Para un Q4, con 2 puntos de Gauss alcanza:

$$k = \iint \frac{B^T}{|J|} C \frac{B}{\cancel{|J|}} \cancel{|J|} \, ds.t$$

$$K_{1\,\text{punto de Gauss}} = \begin{bmatrix} 0.27273 & 0.13636 & \cdots \\ 0.13636 & 0.27273 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \qquad \Lambda_{1\,\text{punto de Gauss}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.65177 \\ 0.79261 \\ 1.7261 \end{Bmatrix}$$

Sólo si el jacobiano es constante ya que, si es función, se vuelve una función irracional.

$$K_{4\,\text{puntos de Gauss}} = \begin{bmatrix} 0.47628 & 0.1049 & \cdots \\ 0.1049 & 0.50166 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \qquad \Lambda_{4\,\text{puntos de Gauss}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.42098 \\ 0.60530 \\ 0.69676 \\ 0.82873 \\ 1.7308 \end{Bmatrix}$$

Como no tiene jacobiano constante, 4 puntos no son suficientes.

Si K tiene diagonal positiva y es simetrica, entonces es DIAGONALIZABLE.

[K] * {d} = {R}

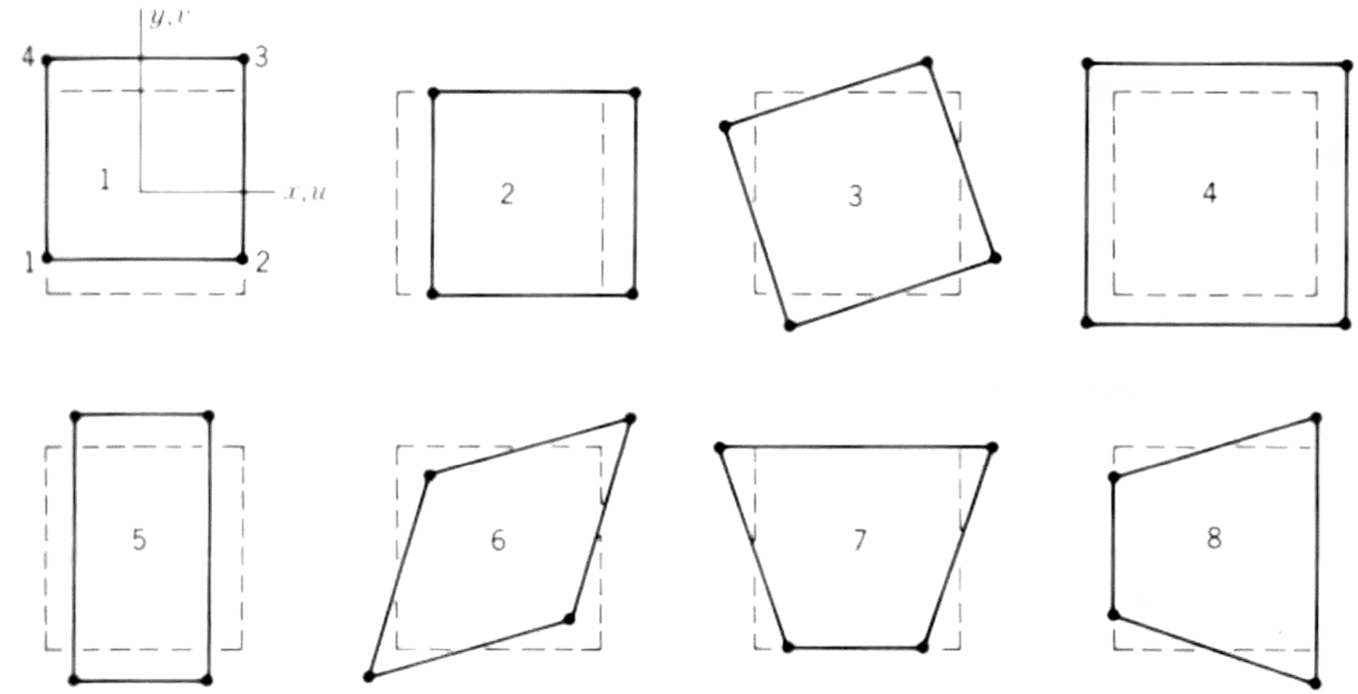
[phi]' * [K] * [phi] * [phi]' * {d} = [phi]' * {R}

[K]diag {D}phi = {R}phi

Inestabilidad

Autoformas

Movimientos rígidos, no generan ni deformaciónes ni tensiones.



$$V^T K V = D$$

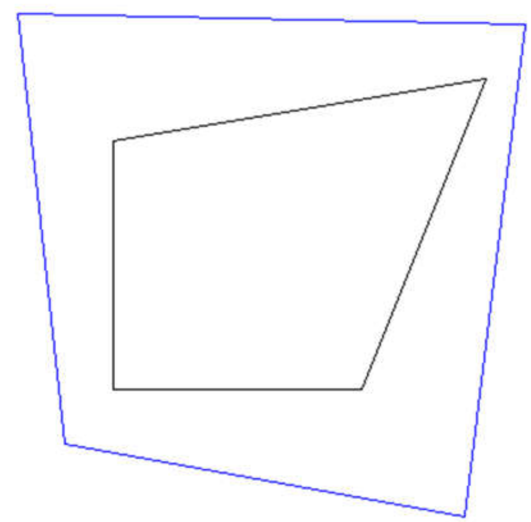
Ejemplo

$$D = \begin{Bmatrix} -0.19147 \\ -0.21972 \\ 0.41314 \\ -0.51368 \\ 0.15799 \\ 0.22101 \\ -0.37966 \\ 0.5124 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = BD$$

$$\varepsilon_{\text{volumétrica}} = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

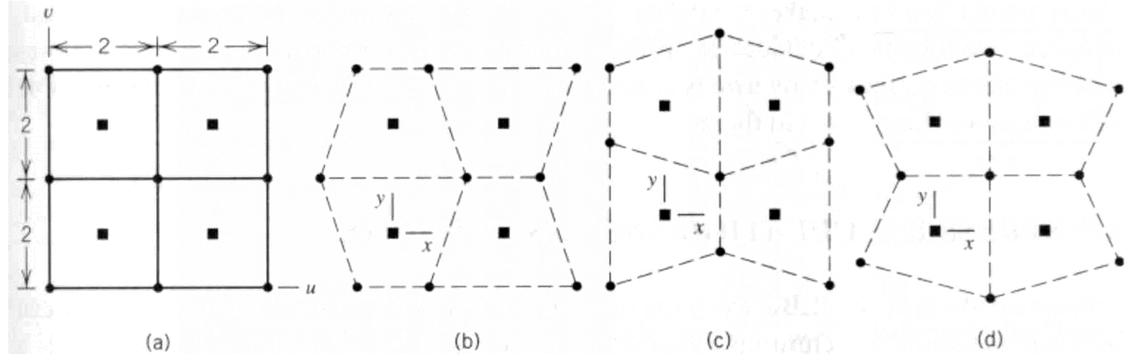
$$\varepsilon_{\text{volumétrica}} = \frac{13.281 + 1.2028\xi + 1.3846\eta}{11 + \xi + 2\eta}$$



Inestabilidad

Modos Singulares

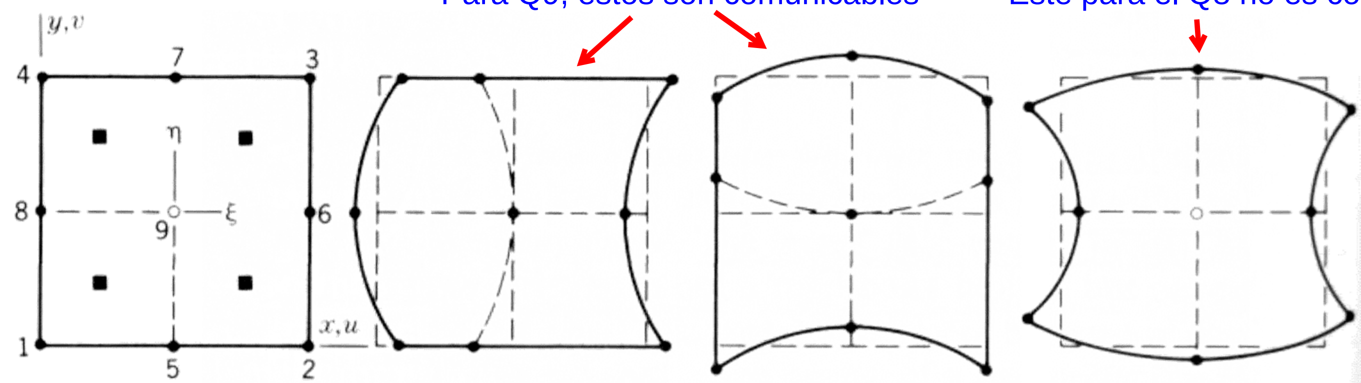
Modo espureo comunicable. Nadie me puede para muajajajjajaja



Hourglass

Para Q9, estos son comunicables

Este para el Q8 no es comunicable



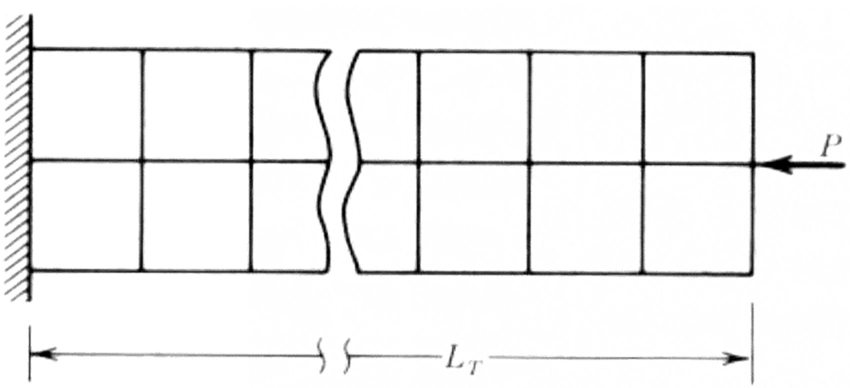
Eight- or nine-node elements (a)

Nine-node element only (b)

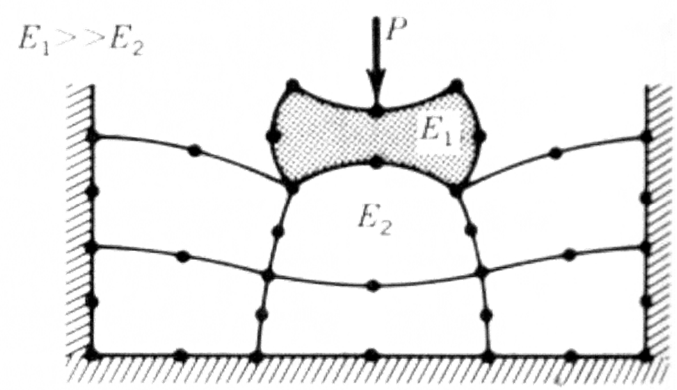
Nine-node element only (c)

Eight- and nine-node elements (d)

Estructuras y Materiales



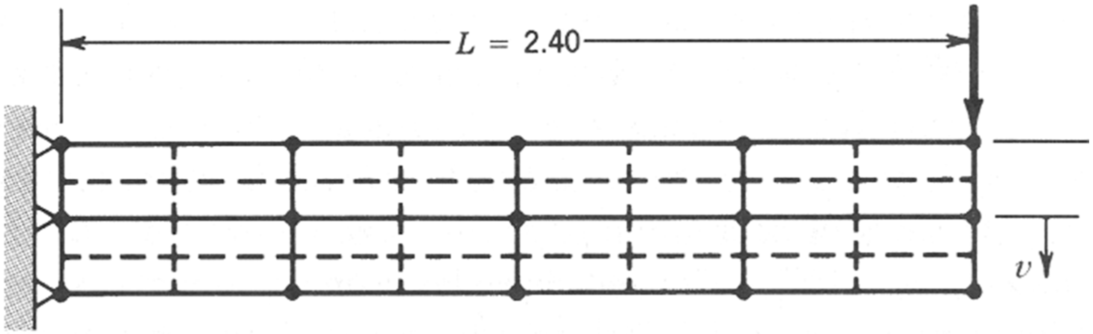
(a)

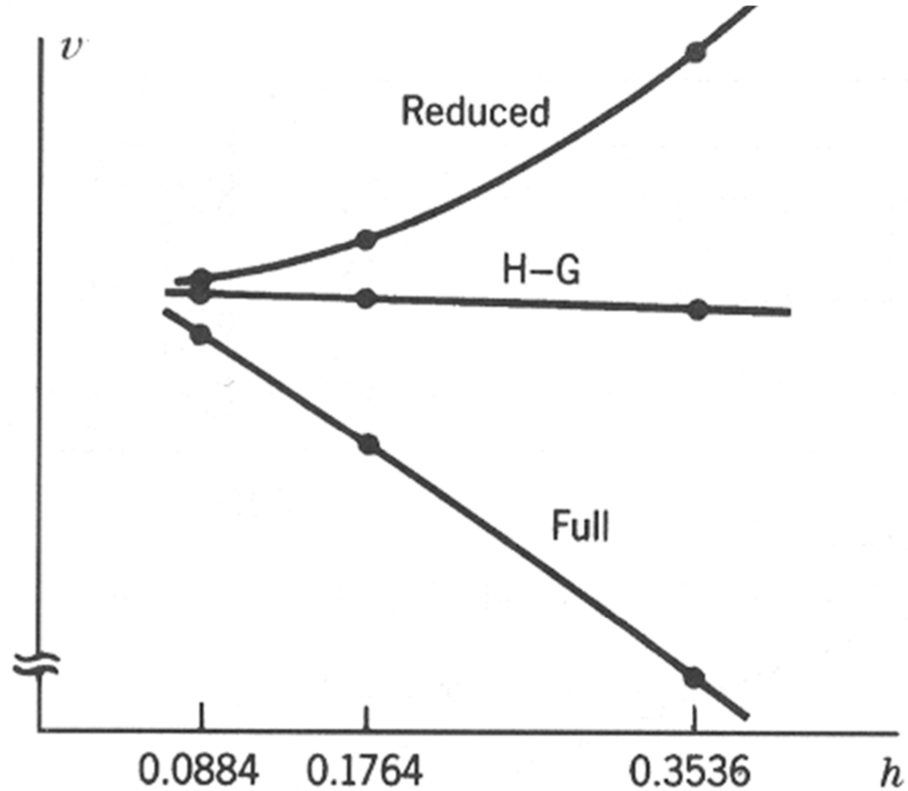


(b)

Convergencia

Siempre las soluciones de elementos finitos van a ser más rígidas ya que las funciones de deformación son impuestas y no son las reales que existen en la realidad.

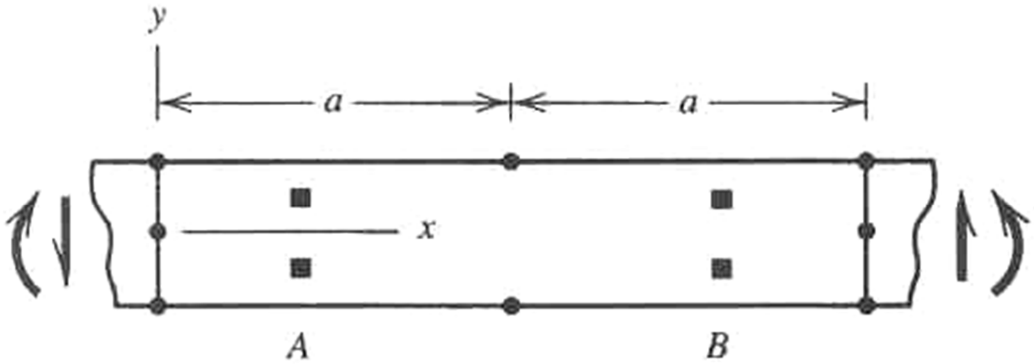


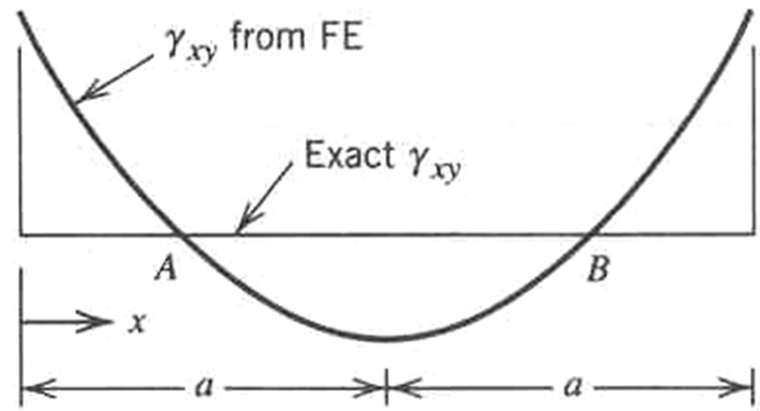


La integración full converge al reducir el tamaño del elemento h.
Aún asi, la reducida converge más rápido siempre y cuando existan modos espúreos ya que flexibiliza la rigidez de imponer funciónes.
Siempre combiene subintegrada.
El hourglass converge aún más rápido ya que tiene un corrección: se le inventa una rigidez para evitar el modo espúreo.

Convergencia

Puntos de Gauss – Superconvergencia – Puntos de Barlow





k	Superconvergent points	Gauss points
1	0	0
2	$\pm\sqrt{3}/3 = \pm 0.57735$	$\pm\sqrt{3}/3 = \pm 0.57735$
3	$0, \pm\sqrt{5}/3 = \pm 0.74535$	$0, \pm\sqrt{3/5} = \pm 0.77459$
4	$\pm\frac{\sqrt{3\pm\sqrt{29/5}}}{2\sqrt{2}} = \pm 0.27195, \pm 0.82221$	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}\pm\frac{2\sqrt{6}}{7\sqrt{5}}} = \pm 0.33998, \pm 0.861136$
5	$0, \pm\frac{\sqrt{35\pm 8\sqrt{7}}}{5\sqrt{3}} = \pm 0.42948, \pm 0.86537$	$0, \pm\frac{\sqrt{5\pm 2\sqrt{10/7}}}{3} = \pm 0.53846, \pm 0.90617$

Table 5 – Numerical values of superconvergent points and Gauss points.

Studies on Barlow points, Gauss points and Superconvergent points in 1D with Lagrangian and Hermitian finite element basis”, Comput. Appl. Math. vol.27 no.3 São Carlos 2008

Cálculo de Tensiones

Evaluación Directa de tensiones en nodos $\{\sigma(x,y)\} = [C][B(x,y)]\{D\}$

Extrapolación de Tensiones:

Cambio de coordenadas $\begin{cases} \xi\sqrt{3} = r \\ \eta\sqrt{3} = s \end{cases}$

$$\sigma_x(r,s) = \sum_i^{npg} \sigma_x(\xi_i,\eta_i) N_i^*(r,s) = \begin{bmatrix} \sigma_x(-a,-a) \\ \sigma_x(a,-a) \\ \sigma_x(a,a) \\ \sigma_x(-a,a) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_1(r,s) \\ N_2(r,s) \\ N_3(r,s) \\ N_4(r,s) \end{bmatrix}$$

$a = 1/\sqrt{3}$