TP Transferencia de Calor

Canalis – 56674, Whittingslow – 55423

29 de octubre de 2018

1. Introducción

El método de volúmenes finitos ha ido acumulando interés de ingenieros en las ultimas décadas por su aptitud para resolver problemas de fluidos y térmicos. En esta entrega les ofrecemos una resolución de dos problemas por el método numérico de volúmenes finitos. Además se contrasta su rendimiento con las soluciones analíticas.

2. Problema 1

Este es un problema de conducción en un tubo sólido con convección al ambiente y generación volumétrica de calor.

A continuación desarrollaremos la ecuación diferencial de la solución analítica del modelo. Sea un diferencial radial de tubo de ancho $\mathrm{d}x$. La ecuación de conservación de energía indica que La ecuación diferencial que rige para el problema dado es la siguiente.

$$0 = -kA\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x} + kA\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x+dx} + \dot{q}_{vol}A\mathrm{d}x + h_{amb}\pi D(T_{amb} - T(x))\mathrm{d}x \tag{1}$$

Los primeros dos términos son la energía que ingresa por la superficie izquierda y derecha respectivamente. El tercero es el calor generado en el volumen. El último es la energía intercambiada con el ambiente por convección.

Esta se resolvió teniendo en cuenta las condiciones de borde, con el paquete simbólico de MATLAB®

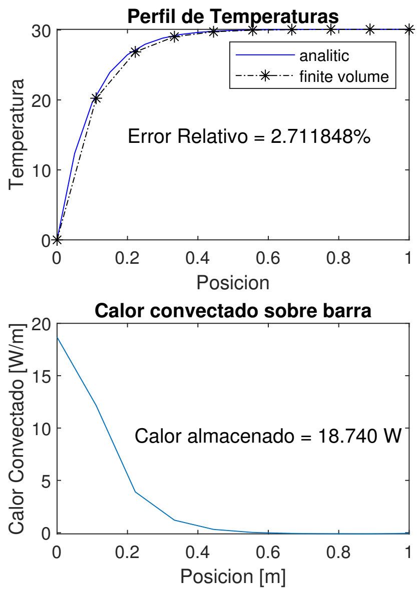

Figura 1: Solución 10 volúmenes

Metodo. Para resolver el problema numéricamente se utilizo la ecuación 1 planteada en cada volumen obteniéndose así la matriz $[\mathrm{C}]$ que multiplica el vector de temperaturas $[\mathrm{T}]$ para obtener el vector de flujo de calor $[\mathrm{Q}]$. Luego, para obtener las temperaturas desconocidas se soluciona dicho sistema tal que $[\mathrm{T}]$=$[\mathrm{C}]^{-1}[\mathrm{Q}]$. Para el medio volumen en x=L se planteó la misma ecuación, pero obviando el componente de flujo por conducción del lado derecho. Para el medio volumen en x=0 se utilizó la ecuación $T(n = 0) = T_0 = 0$.

Resultados. La solución converge rápidamente a la solución analítica con pocos volúmenes. El perfil de temperaturas tiene un error relativo máximo de 2,7 % para 10 volúmenes (ver figura 1).

En contraste, la conservación de energía no se cumple, teniendo un error varios ordenes de magnitud mayor que el perfil de temperaturas. Se obtuvo la solución exacta al calor convectado $Q_{\text{conv}} \approx 30{,}866$W para analizar donde está el problema. [1] Se llegó a que para 10 volúmenes $Q_{\text{conv}} = 35{,}95$W, y el calor conducido por la pared $Q_{k_{x=0}} = -18{,}22$W teniendo así una acumulación[2] de $18{,}7\,\mathrm{J\,s^{-1}}$. Se llega a la conclusión que el gradiente de temperatura en la pared es el mayor contribuidor de error en la conservación de energía. Se tiene que llegar a un número de volúmenes alto para comprobar que se conserva la energía. Refinando con 10.000 volúmenes nos da que se acumulan $0{,}017\,\mathrm{J\,s^{-1}}$.

[1] Se considero que no hay calor intercambiado en la pared adiabática para todos los cálculos

[2] La *acumulación* ocurre por error numérico.

3. Problema 2

El segundo problema se diferencia por tener conducción en dos dimensiones. Se tiene una placa que tiene los cuatro lados con temperaturas fijas: tres de ellos con T=0 y un último con $T(x, y = b) = T_m \cdot sin(\frac{\pi x}{L})$. La solución analítica, que habrá sido obtenida con variables separables, es $T(x, y) = T_m \cdot sinh(\pi y/L)/sinh(\pi b/L) \cdot sin(\pi x/L)$. Para la discretización planteamos las ecuaciones de los volúmenes finitos, divididos de la forma visto en el Kreith[2] (figura 2).

Método. En los volúmenes interiores rige la ecuación

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0 \tag{2}$$

Para los volúmenes de los exteriores no planteamos conservación, si no que directamente fijamos su temperatura a la correspondiente con las condiciones de borde. Numéricamente, eso quiere decir que $[\mathrm{C}]_{(\text{nodo externo, nodo externo})} = 1$, y del lado del vector de flujos $[\mathrm{Q}]_{\text{nodo externo}} = [\mathrm{T}]_{\text{en el nodo}}$. Como comentario se puede decir que esto es contraintuitivo porque pone temperaturas cargadas en el lugar donde suele haber calores volumétricos. El método de solución es idéntico al detallado para el problema 1.

Resultados. Se observó que con pocos volúmenes se obtiene un perfil de bajo error.[3] El error cuadrático medio decrece exponencialmente con el aumento de volúmenes como se observa en el gráfico a escala logarítmica (figura 2).

El calor acumulado según la solución numérica es virtualmente cero comparado al acumulado de la solución exacta.[4] Esto se debe a que la solución numérica busca la conservación de la energía en el dominio discretizado mientras que la solución exacta la busca en el dominio continuo. [5] El residuo que aparece es computacional (nota 4). Eventualmente, con suficientes volúmenes dicha solución numérica converge a la exacta y se conserva la energía. Efectivamente, con volúmenes infinitos el dominio discretizado y el dominio continuo coinciden.

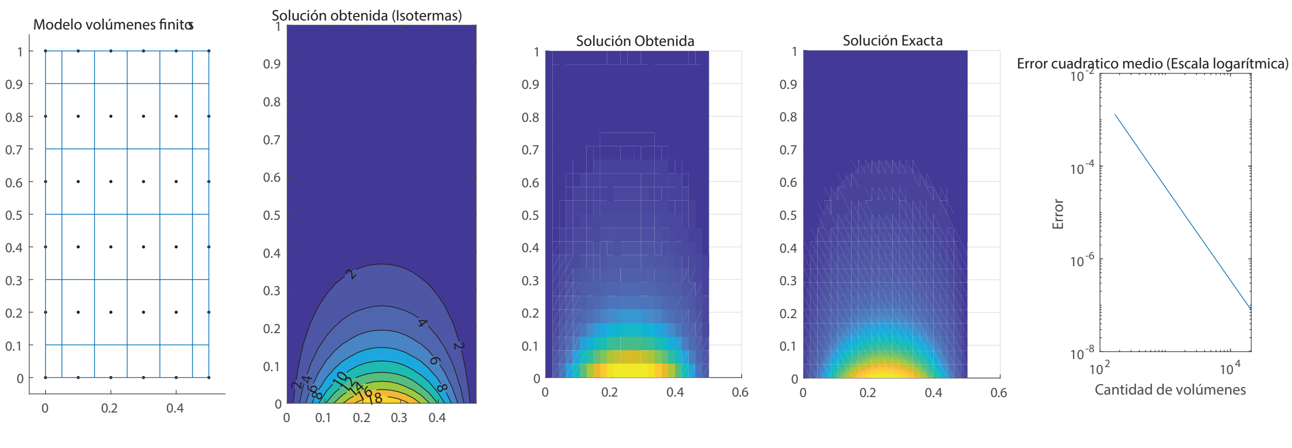

Figura 2: Solución para 25 volúmenes (Problema 2).

Referencias

[1] Air Force Research Laboratory, Munitions Directorate. AFRL/RWPC. *Finite volume algorithms for heat conduction*, Technical report for period December 2009-May 2010.

[2] Kreith, Frank and Manglik, Raj M and Bohn, Mark S. Cengage learning *Principles of heat transfer*, 2012

[3] Error cuadrado medio [ECM] $= 0,051$ para 25 volúmenes

[4] $Q_{\text{acum.}} = 7.05 \times 10^{-15}$ para 25 volúmenes.

[5] El planteo del problema es un balance de energía.