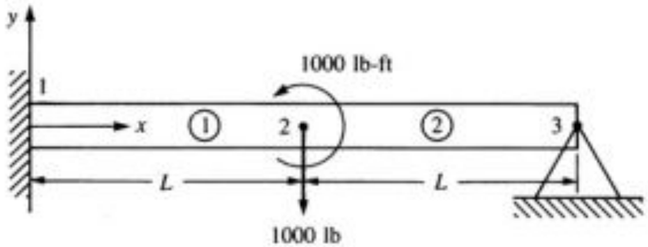
Práctica 2

Temas de clase:

- Elemento viga 1D (Ejemplos 1 y 2 y Ejercicio 3)
- Elemento viga para problemas 2D (Ejercicios 4 y 5)
- *Primer* ADINA
- Redacción de informe

EJEMPLO 1



$$
\begin{array}{c} \\ \mathbf{k}^{(1)} = \dfrac{EI}{L^3} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \quad v_1 & \quad \phi_1 & \quad v_2 & \quad \phi_2 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c} \\ \mathbf{k}^{(2)} = \dfrac{EI}{L^3} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \quad v_2 & \quad \phi_2 & \quad v_3 & \quad \phi_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matriz global

$$
\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}
\begin{bmatrix}
12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\
6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\
-12 & -6L & 12+12 & \boxed{-6L+6L} & -12 & 6L \\
6L & 2L^2 & -6L+6L & 4L^2+4L^2 & -6L & 2L^2 \\
0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\
0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ v_3 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}
$$

Element 1 Element 2

Imposición de condiciones de vínculo

$$v_1 = \phi_1 = v_3 = 0$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12+12 & -6L+6L & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & -6L+6L & 4L^2+4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ 0 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

Sistema final

$$\begin{Bmatrix} -1{,}000\ lb \\ 1{,}000\ lb\,ft \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6L \\ 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

A partir de los valores en los grados de libertad y las funciones interpolantes podemos reconstruir la solución de Elementos Finitos del problema.

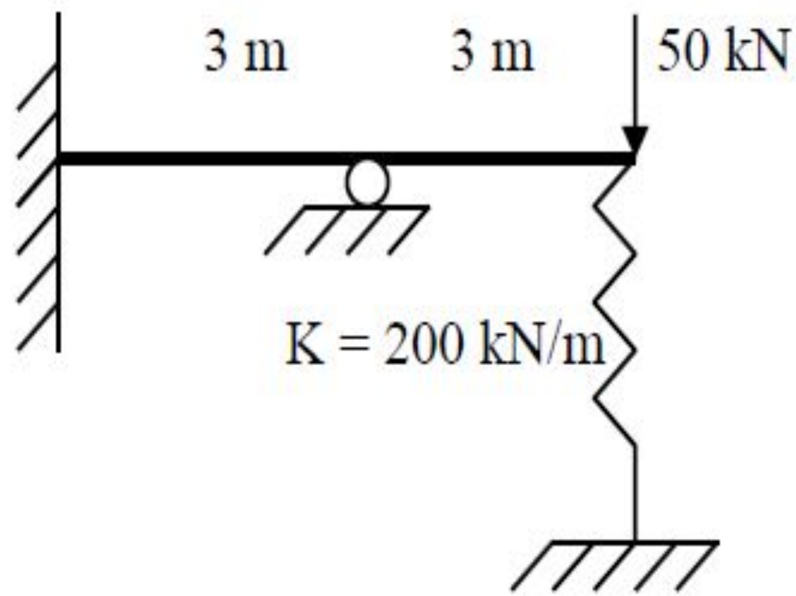
Con ella podemos obtener: Momentos, corte, tensiones y deformaciones.

EJEMPLO 2

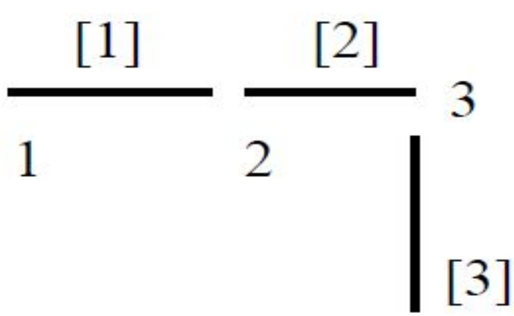
Objetivo: Calcular deflexión del punto extremo

Datos y geometría

$E = 210\ \text{GPa}, \ \ I = 2\text{x}10^{-4}\ \text{m}^4$



Discretización



V3 = -17.4419mm

Matrices locales y global

$$[K_e]^{(1)} = (EI/L^3)\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array}$$

$$[K_e]^{(2)} = (EI/L^3)\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array}$$

$$[K_e]^{(3)} = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K \end{pmatrix}\begin{array}{c} v_3 \\ v_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 & v_4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & & & 12+K' & -6L & -K' \\ & & & & & 4L^2 & 0 \\ \text{SYMMETRY} & & & & & & K' \end{pmatrix} \end{array} \times (EI)/(L^3)$$

$$K' = (K) \times [L^3/(EI)]$$

Eliminación de reacciones de vínculo

$v_1 = \theta_1 = 0$

$v_2 = 0$

$$K_G = EI/(L^3) \begin{pmatrix} 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 12+K' & -6L \\ 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

$V_4 = 0$

Sistema final

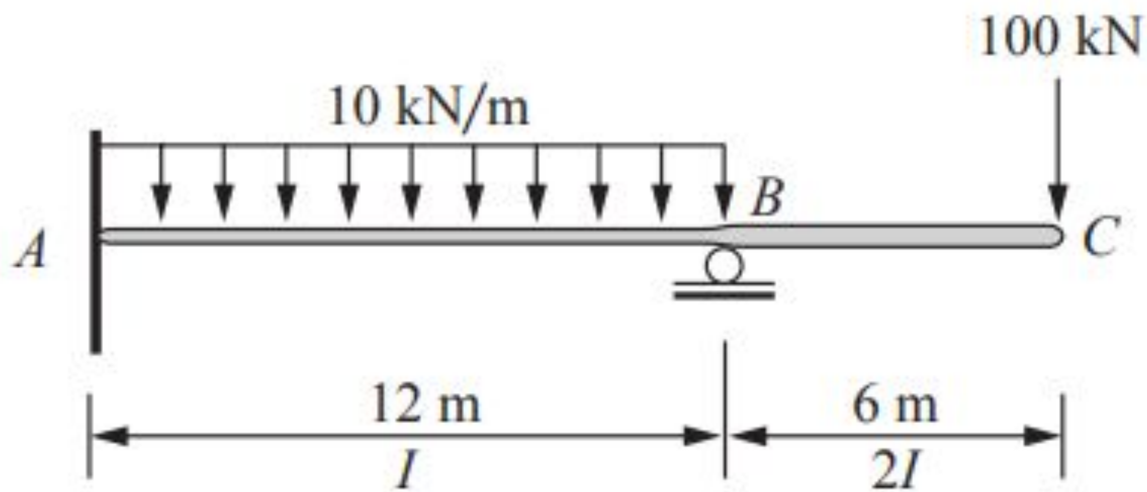
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} = 15.55 \text{ x } 10^5 \begin{pmatrix} 72 & -18 & 18 \\ -18 & 12.1 & -18 \\ 18 & -18 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3

Objetivo:

- Calcular la pendiente en el punto B
- La deflexión y pendiente en el punto C con diferente número de elementos
- El desplazamiento en el punto medio entre B y C (sin colocar un nodo en el punto).

$E = 210\,\text{GPa}$



$c = 0.30\ \text{m},\ I = 700 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^4$

$\theta B \approx -0.0098$

$V((B+C)/2) \approx -37.0408\text{mm}$

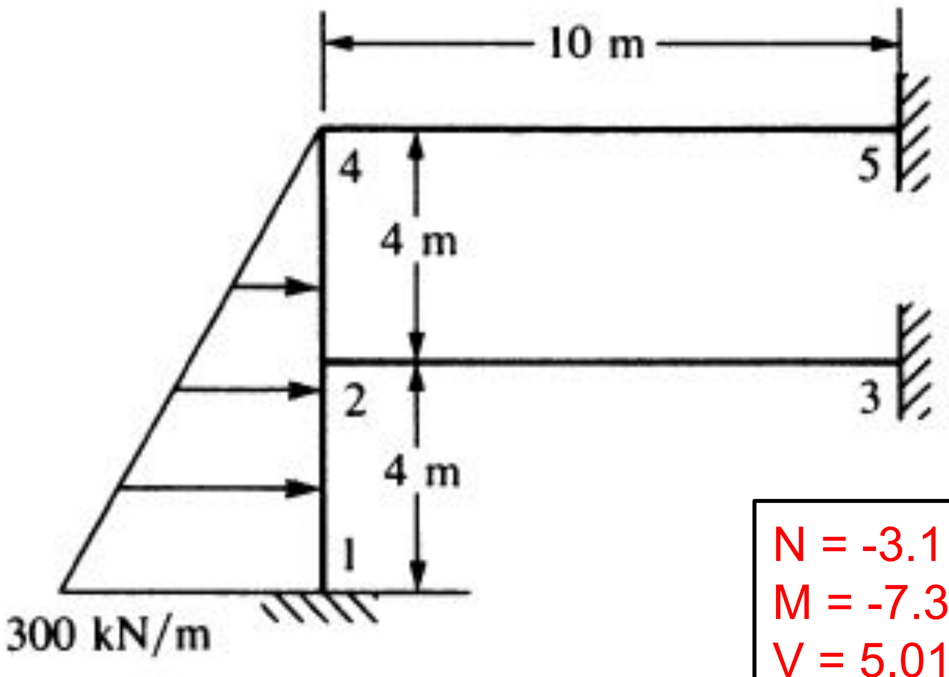
$VC \approx -83.2653\ \text{mm}$

EJERCICIO 4: Pórtico 2D

Resolver mediante elementos viga y obtener los siguientes resultados para los desplazamientos y el giro en el punto 2.

Determinar las solicitaciones en el punto medio entre 2 y 4.

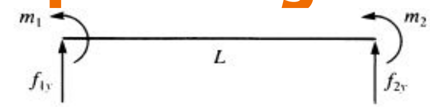
$$d_{2x} = 5.70 \text{ mm}, \quad d_{2y} = -0.0244 \text{ mm}, \quad \phi_2 = 0.00523 \text{ rad}$$



$E = 210$ GPa
$I = 0.5 \times 10^{-4}$ m^4
$A = 0.5 \times 10^{-2}$ m^2

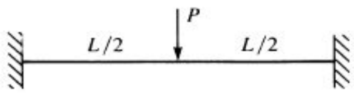
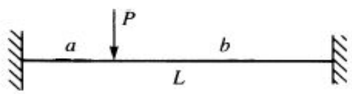
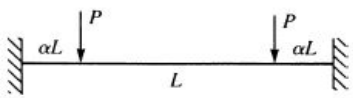
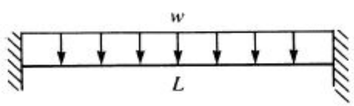
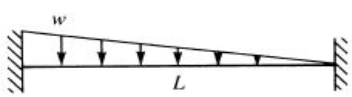
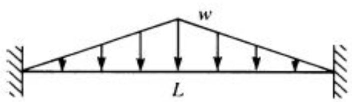
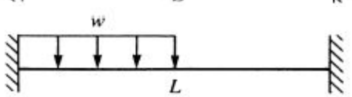
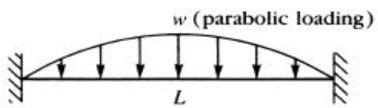
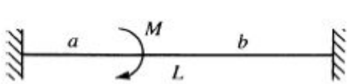
N = -3.11 x 10^3 N
M = -7.36 x 10^5 Nmm
V = 5.016 x 10^4 N / 2.9987 x 10^5 N

Cargas nodales equivalentes para vigas



Positive nodal force conventions

Table D–1 Single element equivalent joint forces f_0 for different types of loads

	f_{1y}	m_1	Loading case	f_{2y}	m_2
1.	$\frac{-P}{2}$	$\frac{-PL}{8}$		$\frac{-P}{2}$	$\frac{PL}{8}$
2.	$\frac{-Pb^2(L+2a)}{L^3}$	$\frac{-Pab^2}{L^2}$		$\frac{-Pa^2(L+2b)}{L^3}$	$\frac{Pa^2b}{L^2}$
3.	$-P$	$-\alpha(1-\alpha)PL$		$-P$	$\alpha(1-\alpha)PL$
4.	$\frac{-wL}{2}$	$\frac{-wL^2}{12}$		$\frac{-wL}{2}$	$\frac{wL^2}{12}$
5.	$\frac{-7wL}{20}$	$\frac{-wL^2}{20}$		$\frac{-3wL}{20}$	$\frac{wL^2}{30}$
6.	$\frac{-wL}{4}$	$\frac{-5wL^2}{96}$		$\frac{-wL}{4}$	$\frac{5wL^2}{96}$
7.	$\frac{-13wL}{32}$	$\frac{-11wL^2}{192}$		$\frac{-3wL}{32}$	$\frac{5wL^2}{192}$
8.	$\frac{-wL}{3}$	$\frac{-wL^2}{15}$		$\frac{-wL}{3}$	$\frac{wL^2}{15}$
9.	$\frac{-M(a^2+b^2-4ab-L^2)}{L^3}$	$\frac{Mb(2a-b)}{L^2}$		$\frac{M(a^2+b^2-4ab-L^2)}{L^3}$	$\frac{Ma(2b-a)}{L^2}$

EJERCICIO 5: Pórtico 2D

Obtener cargas equivalentes aplicadas en D y B al remover la plataforma del modelo. Modelar la unión entre D y B con un elemento barra. Determinar la fuerza ejercida por el pistón y el desplazamiento vertical del punto E.

Considerar una sección rectangular de 10cm X 10cm de acero 1020 para las vigas y sección circular de 5cm de diámetro para el pistón y la barra. Medidas en cm.