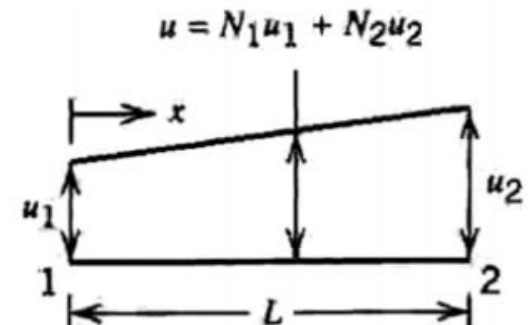
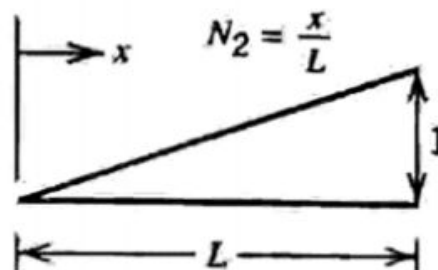
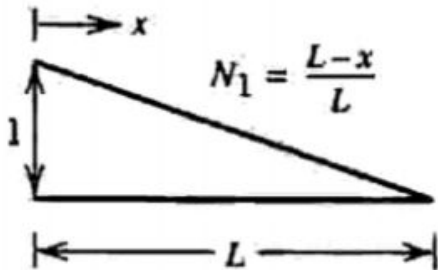


Tensiones en elemento de barra

Recordemos que hemos asumido una variación lineal de los desplazamientos axiales $u(x)$ a través de las funciones de forma $[N(x)]$.

$$u(x) = u_1 \left(\frac{L-x}{L} \right) + u_2 \left(\frac{x}{L} \right) = [N(x)] \{D_e\} = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$



Tensiones en elemento de barra

Luego, al ser la deformación ϵ la derivada de los desplazamientos, tendremos una aproximación constante elemento por elemento de la deformación.

$$\epsilon_x = \frac{du(x)}{dx} = \frac{\Delta u}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

Como las tensiones son proporcionales a la deformación, resultan ser:

$$\sigma_x = E\epsilon_x = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

Tensiones en elemento de barra

Haciendo uso de las funciones de forma, podemos obtener directamente las deformaciones como producto matricial y usando los resultados en los grados de libertad.

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} = \frac{\overbrace{d}^{[\partial]}}{dx} [N(x)] \{d_e\} = \underbrace{[\partial][N(x)]}_{[B(x)]} \{d_e\} = [B(x)] \{D_e\}$$

$$[B(x)] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_e} & \frac{1}{L_e} \end{bmatrix}$$

Tensiones debido a la flexión

De la teoría de barras de Euler Bernoulli, sabemos que

Secciones permanecen planas

$$\sigma_x(x) = E\varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} = E \frac{\partial \left(y \frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)}{\partial x} = Ey \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}$$

$$M(x) = EI_z \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{M(x)}{I_z} = \frac{\sigma(x)}{y}$$

Tensiones debido a la flexión

Como las funciones del elemento de viga son polinomios de orden cúbico, nuestras aproximaciones para el momento y el corte serán lineales y constantes elemento por elemento respectivamente.

$$N_1 = \frac{1}{L^3}(2x^3 - 3x^2L + L^3)$$

$$N_2 = \frac{1}{L^3}(x^3L - 2x^2L^2 + xL^3)$$

$$N_3 = \frac{1}{L^3}(-2x^3 + 3x^2L)$$

$$N_4 = \frac{1}{L^3}(x^3L - x^2L^2)$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \Rightarrow$$

$$v = [N]\{d\}$$

Tensiones debido a la flexión

Obtenemos las tensiones axiales debido a la flexión directamente de los valores en los grados de libertad.

$$v = [N]\{d\} \Rightarrow \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{Bmatrix}^T}_{[\partial^2][N]=[B]} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

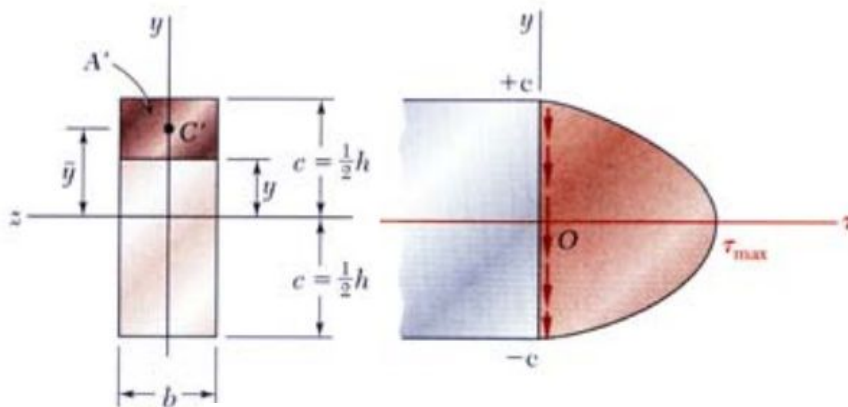
$$\sigma(x) = \frac{y}{I_z} [B] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

Tensiones debido al corte

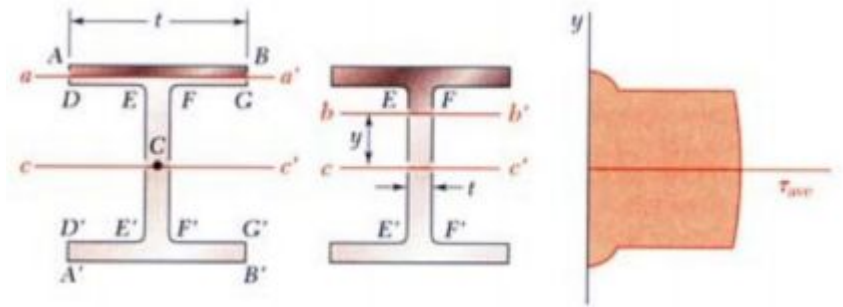
La teoría de vigas de Euler Bernoulli tiene como consecuencia una nula deformación por corte. Entonces, para obtener las tensiones tangenciales por corte usamos los resultados de Resistencia de Materiales a partir de los valores de corte obtenidos como:

$$V = EI_z \frac{\partial^3 v(x)}{\partial x^3} = EI_z \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{12}{L^3} \\ \frac{6}{L^2} \\ -\frac{12}{L^3} \\ \frac{6}{L^2} \end{Bmatrix}^T}_{[\partial][B]} \underbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}}_{[D]}$$

Recuerdo de resistencia de



$$\tau_{max} = \frac{3V}{2A}$$



$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It}$$

$$\tau_{max} = \frac{V}{A_{web}}$$

Tensiones debido a la torsión

La formulación que vamos a usar en este caso es análoga al caso de sollicitación axial, es decir, con una aproximación lineal del giro de la sección.

$$\begin{array}{ll} \text{AXIAL} & \frac{d}{dx} \left(AE \frac{du_x}{dx} \right) + b = 0, \quad 0 \leq x \leq L \\ \text{TORSIÓN} & \frac{d}{dx} \left(GJ \frac{d\theta_x}{dx} \right) + \overbrace{m_x}^{\text{Momento Torsor x unid. de longitud}} = 0, \quad 0 \leq x \leq L \end{array}$$

Nuevamente asumimos simetrías en la sección que permiten desacoplar el problema de torsión con el resto, y que el centro de corte, el baricentro de la sección y la proyección sobre la sección del eje de la barra coinciden.

Tensiones debido a la torsión

Para una sección circular o anillo de radio exterior R:

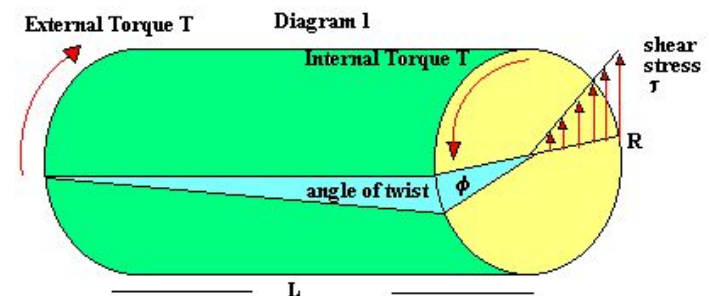
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad T = GJ \frac{d\theta_x}{dx} = GJ \frac{\theta_{x,2} - \theta_{x,1}}{L} \Rightarrow \tau_T = \frac{TR}{J}$$

La matriz de rigidez es análoga al caso axial:

$$K_{e,axial} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad K_{e,torsion} = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para otras secciones:

$$T = GK \frac{\theta_{x,2} - \theta_{x,1}}{L} \quad \tau_T = \frac{T c_T}{K}$$



Procedimiento general

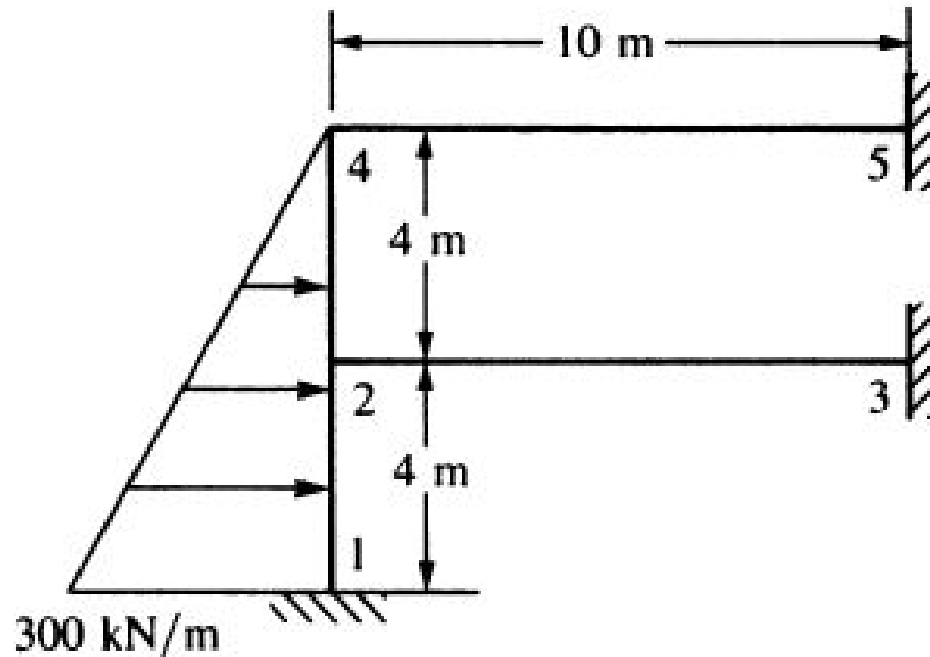
Para obtener las tensiones en un elemento una vez resuelto el problema de Elementos Finitos y conociendo los valores de los grados de libertad globales debemos:

1. Obtener los valores de los grados de libertad locales del elemento a analizar.
2. Reconstruir las funciones de desplazamiento axial u y de deflexión v (en el caso de flexión compuesta tendremos dos funciones, una para cada plano) a partir de las funciones de forma.
3. Teniendo los desplazamientos obtener la tensión axial debido a cargas axiales y flexión.
4. Para las tensiones tangenciales obtenemos el corte a partir de las deflexiones y recurrimos a la teoría de Resistencia de Materiales. Se procede similarmente con la torsión.
5. Por superposición y desacoplamiento, podemos obtener las tensiones normales totales como la suma de la sollicitación axial y la flexión, y las tensiones tangenciales totales como la suma de las originadas por corte y por torsión.

Ejemplo de cálculo: Pórtico 2D

Resolver mediante elementos viga y obtener los siguientes resultados para los desplazamientos y el giro en el punto 2

$$d_{2x} = 5.70 \text{ mm}, \quad d_{2y} = -0.0244 \text{ mm}, \quad \phi_2 = 0.00523 \text{ rad}$$

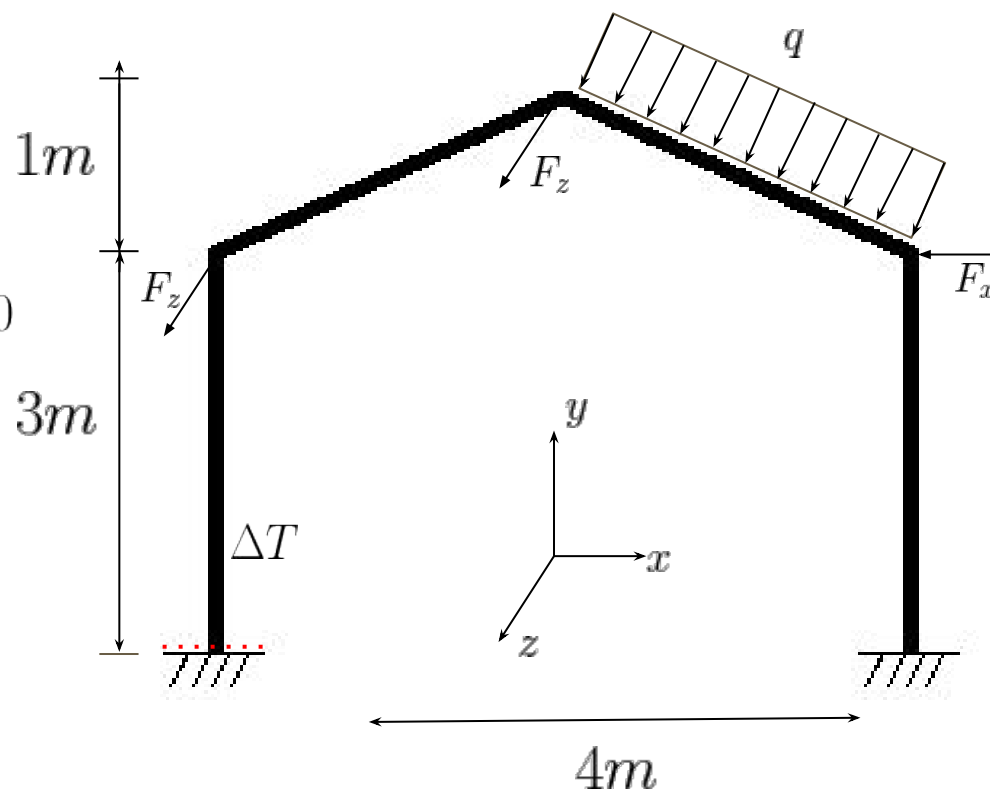


$$\begin{aligned} E &= 210 \text{ GPa} \\ I &= 0.5 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \\ A &= 0.5 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

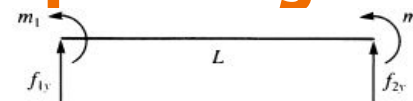
Ejemplo de cálculo: Pórtico 3D

Se aplican las siguientes fuerzas y una variación de temperatura en la columna izquierda. El objetivo es resolver el problema mediante elementos finitos y obtener las solicitaciones en la sección indicada. Luego, calcular las tensiones en dicha sección.

Material : Acero
Perfil columnas = IPE 300
Perfil vigas = IPE 160
 $q = 10\text{ kN/m}$
 $F_x = 5\text{ kN}$
 $F_z // z \text{ y } F_z = 2\text{ kN}$
 $\Delta T = 20^\circ$



Cargas nodales equivalentes para vigas



Positive nodal force conventions

Table D-1 Single element equivalent joint forces f_0 for different types of loads

	f_{1y}	m_1	Loading case	f_{2y}	m_2
1.	$-\frac{P}{2}$	$-\frac{PL}{8}$		$-\frac{P}{2}$	$\frac{PL}{8}$
2.	$-\frac{Pb^2(L+2a)}{L^3}$	$-\frac{Pab^2}{L^2}$		$-\frac{Pa^2(L+2b)}{L^3}$	$\frac{Pa^2b}{L^2}$
3.	$-P$	$-\alpha(1-\alpha)PL$		$-P$	$\alpha(1-\alpha)PL$
4.	$-\frac{wL}{2}$	$-\frac{wL^2}{12}$		$-\frac{wL}{2}$	$\frac{wL^2}{12}$
5.	$-\frac{7wL}{20}$	$-\frac{wL^2}{20}$		$-\frac{3wL}{20}$	$\frac{wL^2}{30}$
6.	$-\frac{wL}{4}$	$-\frac{5wL^2}{96}$		$-\frac{wL}{4}$	$\frac{5wL^2}{96}$
7.	$-\frac{13wL}{32}$	$-\frac{11wL^2}{192}$		$-\frac{3wL}{32}$	$\frac{5wL^2}{192}$
8.	$-\frac{wL}{3}$	$-\frac{wL^2}{15}$		$-\frac{wL}{3}$	$\frac{wL^2}{15}$
9.	$-\frac{M(a^2+b^2-4ab-L^2)}{L^3}$	$\frac{Mb(2a-b)}{L^2}$		$\frac{M(a^2+b^2-4ab-L^2)}{L^3}$	$\frac{Ma(2b-a)}{L^2}$