Contenido

I Control Castellano - Bootcamp 2

1. Sistemas lineales 3

2. Estabilidad y autovalores 6
   2.1. Evolución discreta 6
   2.2. Linealizando un sistema 7

3. Controlabilidad 9
   3.1. Grados de controlabilidad y gramianes 9
   3.2. Posicionamiento de autovalores (polos) 10

4. Observabilidad 12

Parte I

Control Castellano - Bootcamp

Capítulo 1
Sistemas lineales

El planteo de la evolución de un sistema de primer orden es dado por (1.1). Su solución analítica requiere evaluar exponencial de la matriz $\mathbf{A}$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}(t)\mathbf{z}(t) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \tag{1.2}$$

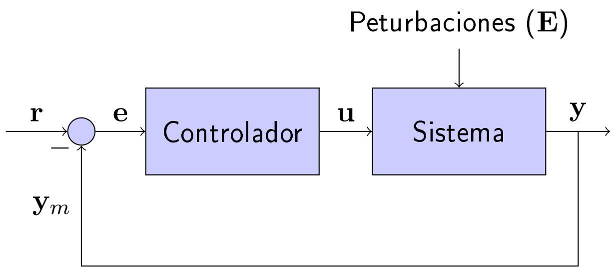

FIGURA 1.1: Esquema de un sistema de control genérico.

La exponencial de una matriz (1.3) es poco práctica para calcular con la matriz $\mathbf{A}$ y muy costosa numéricamente.

Definition 1.1. Exponencial de una matriz

$$e^{\mathbf{X}} = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{X}^k}{k!} \tag{1.3}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad.

En cambio, lo que se hace en la practica es usar los autovalores y autovectores para efectuar una transformación de coordenadas de las coordenadas de $\mathbf{x}$ a las coordenadas de algún autovector donde es mas fácil escribir la exponencial de una matriz y facilita entender el sistema también.

Un **autovector** $\xi \in \mathbb{C}^n$ cumple con la siguiente igualdad. $\lambda \in \mathbb{C}$ son los **autovalores** del sistema.

$$\mathbf{A}\xi = \lambda\xi$$

Una forma de visualizar esto es que el producto entre la matriz $\mathbf{A}$ y el autovector mantiene la dirección del autovector.

$$\mathbf{T} = [\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n]$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Es posible diagonalizar el sistema siempre que no se tengan dos autovectores cuasi-paralelos o un sistema degenerado (autovectores generalizados) (entre otros casos).

Esto nos deja escribir la relación

$$\mathbf{AT} = \mathbf{TD}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{Tz} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{T\dot{z}} = \mathbf{ATz} \Rightarrow \mathbf{\dot{z}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{ATz}$$

Se obtienen entonces un sistema de ecuaciones desacoplado! El cambio de la variable z_i depende de si misma

$$\boxed{\mathbf{\dot{z}} = \mathbf{Dz}}$$

Se pueden obtener estas matrices en MATLAB en una linea:

```
[T, D] = eig(A);
```

La solución del sistema va ser simple

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{z}(0)$$

Es de interes poder mapear entre los dos espacios. Usando la expresión $\mathbf{A} = \mathbf{TDT}^{-1}$ se puede simplificar la exponencial de una matriz empleando conocimientos de algebra lineal

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{TDT}^{-1}t} = \mathbf{T}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{T}^{-1}$$

Cabe destacar que es barato calcular $e^{\mathbf{D}t}$ en términos computacionales.

Reescribimos la solución al sistema recordando $\mathbf{x} = \mathbf{Tz}$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\, \underbrace{e^{\mathbf{D}t}\, \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(0)}_{\mathbf{z}(0)}}_{\mathbf{z}(t)}$$

La igualdad de arriba se usa para computar la evolución de $\mathbf{x}$ en el tiempo aprovechando la simplicidad del cálculo de $e^{\mathbf{D}t}$.

Que hicimos?

- Descubrimos que si sabemos los autovectores/valores de $\mathbf{A}$ podemos transformar el sistema a un sistema de coordenadas donde es más facil resolver el sistema y estudiar su dinámica

El próximo paso es agregar la matriz de control y el vector de entrada para empezar a controlar el sistema.

Capítulo 2
Estabilidad y autovalores

Para el estudio de estabilidad podemos primero mirar a la igualdad

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(0)$$

Si uno de los valores diagonal de $e^{\mathbf{D}t}$ se va a infinito entonces la combinación resultante que iguala a $\mathbf{x}$ también se va ir al infinito. Recordemos que $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\lambda = a + ib \quad \Rightarrow \quad e^{\pm\lambda t} = e^{at}\left[\cos(bt) \pm i\sin(bt)\right]$$

Esto cuenta la siguiente historia

si $a > 0$ El sistema aumenta hasta llegar a infinito (**Inestable**) (2.1)

si $a < 0$ El sistema converge a cero a tiempo infinito (**Estable**) (2.2)

(2.3)

Esto significa que tal vez comenzemos con un sistema inestable, es decir, que nuestra matriz A de la siguiente ecuación tiene autovalores con $a > 0$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Esto se puede remediar agregando el término $\mathbf{B}\mathbf{u}$ de tal forma que lleve los autovalores de la zona inestable ($a > 0$) a la zona estable ($a < 0$).

2.1. Evolución discreta

$$\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}_k, \qquad \mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\Delta t)$$

donde $\tilde{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}\Delta t}$. Sabiendo el vector de estado inicial podríamos calcular el estado para cualquier otro momento

$$\mathbf{x}_N = \tilde{\mathbf{A}}^N\mathbf{x}_0$$

En coordenadas de autovector, cada vez que multiplicamos la matriz estamos elevando nuestros autovalores de $\tilde{\mathbf{A}}$ a una potencia. Estos pueden agrandarse o achicarse dependiendo de su ‘radio’

$$\lambda^N = R^N e^{i\,N\theta}$$

si el radio R es menor a uno, la magnitud va decaer a medida que pasa el tiempo. Si el radio es mayor que uno crecerá sin cota superior.

```
[Tt, Dt] = eig(At);
aval = diag(Dt);
inestables = aval(aval>1);
```

2.2. Linealizando un sistema

1. Encontramos los puntos fijos $\bar{\mathbf{x}}$ tal que $f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$

2. Linealizamos alrededor de $\bar{\mathbf{x}}$

Para un sistema 2×2 el jacobiano es

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \left.\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^2 \ldots$$

Como linealizamos alrededor de un entorno reducido, los términos no-lineales van a ser muy pequeños si $\mathbf{x}$ es cercano a $\bar{\mathbf{x}}$. Y dado que es un punto fijo, $f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

Nuestro sistema linealizado va quedar así

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} \Delta x \Rightarrow \boxed{\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}}$$

Teorema 2.1 (Hartman–Grobman)**.** Si los autovalores de $\mathbf{A}$ tienen todos parte real entonces se puede describir el sistema como lineal en un vecindario de $\bar{\mathbf{x}}$.

Ejercicio 2.1. Determinar la estabilidad de un péndulo en su posición normal e invertida. Factor de fricción δ.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta) - \delta\dot{\theta}$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin(x_1) - \delta x_2 \end{bmatrix}$$

Nuestro jacobiano es

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\cos(x_1) & -\delta \end{bmatrix}$$

Los puntos fijos son

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz del sistema péndulo en posiciones normal d e invertida u:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\delta \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\delta \end{bmatrix}$$

Los autovalores son

$$\lambda_d = \begin{cases} -\frac{\ell\,\delta+\sqrt{-\ell\,(4\,g-\ell\,\delta^2)}}{2\,\ell} \\ -\frac{\ell\,\delta-\sqrt{-\ell\,(4\,g-\ell\,\delta^2)}}{2\,\ell} \end{cases} \quad , \qquad \lambda_u = \begin{cases} -\frac{\ell\,\delta+\sqrt{\ell\,(\ell\,\delta^2+4\,g)}}{2\,\ell} \\ -\frac{\ell\,\delta-\sqrt{\ell\,(\ell\,\delta^2+4\,g)}}{2\,\ell} \end{cases}$$

Si se estudia el caso de un péndulo con valores $\frac{g}{\ell} = 1$ y $\delta = 0,1$

$$\lambda_d = -0,05 \pm 0,9987i, \qquad \lambda_u = \begin{cases} -1,0512 \\ 0,9512 \end{cases}$$

Podemos ver que los autovalores del péndulo normal tienen parte real menor a cero. Esto significa que es un sistema **estable**, tiende a cero la solución. En cambio, el péndulo invertido tiene un autovalor mayor que cero, característica de un sistema **inestable**.

Capítulo 3
Controlabilidad

En el capítulo 2 (Estabilidad y autovalores) se vio que constituye un sistema estable. Para poder controlarlo se deben poder mover los autovalores desde el plano real hacia el complejo (estabilizar el sistema). Esto se hace con control óptimo.

Recordando la ecuación de nuestro sistema (1.1), escribimos nuestro sistema de una forma diferente para poder caracterizar el efecto del input $\mathbf{u}$ sobre la estabilidad (los autovalores):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}$$
$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\,\mathbf{x}}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$. El control 'óptimo' para un sistema lineal se logra realimentando $-\mathbf{K}\mathbf{x}$, es decir:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad \text{Control 'óptimo'}$$

Nuestro objetivo ahora es elegir $\mathbf{K}$ para modificar las propiedades de mi sistema, como por ejemplo, la estabilidad. Si nuestro sistema es **controlable** va ser posible hacer estas modificaciones.

Definition 3.1. A grosso modo, mi sistema es controlable si puedo elegir $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ y así poner mis autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ en cualquier lugar del plano complejo. Si puedo elegir la posición de mis autovalores entonces se puede controlar la evolución del *state-space* eligiendo $\mathbf{u}$.

Para determinar si un sistema es controlable se construye la matriz de controlabilidad. El sistema es controlable si y solo si se verifica que la cantidad de columnas linealmente independientes sea igual a n.

Definition 3.2. Matriz de controlabilidad

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

En MATLAB se usa la función `ctrb` para obtener la matriz de controlabilidad

CÓDIGO 3.1: Obtención del rango de $\mathbf{Y}$

```
Y = ctrb(A,B);
r = rank(Y);
```

3.1. Grados de controlabilidad y gramianes

Mirar el rango de la matriz de controlabilidad nos da un valor binario de la controlabilidad del sistema. Hay estudios más ricos que se pueden hacer para conocer que tan controlable es el sistema.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Definition 3.3. Gramian de controlabilidad

$$\mathbf{W}_t = \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}^\top e^{\tau\mathbf{A}^\top}\mathrm{d}\tau \quad \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen valores reales y positivos entonces $\mathbf{W}_t$ va tener autovalores reales tal que

$$\mathbf{W}_t\xi = \lambda\xi$$

donde los autovectores (ξ de $\mathbf{W}_t$) correspondientes a los autovalores más grandes serán las 'direcciones' más controlables en el espacio de estados.

Una aproximación del gramian de controlabilidad para sistemas discretos

$$\mathbf{W}_t \approx \mathbf{Y}\mathbf{Y}^\top$$

donde los autovalores de $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\top$ son los valores singulares de $\mathbf{Y}$

```
[U,SIG, V] = svd(Y,'econ');
```

donde se listan las columnas de U como las direcciones más controlables en orden decreciente. La primer columna de U va ser la dirección más controlable en el espacio de estados.

Es decir, si nuestro vector de input $\mathbf{u}$ tiene norma 1 nuestro sistema $\mathbf{x}$ va poder evolucionar $\xi_1\lambda_1$, $\xi_2\lambda_2$, etc. Esto tiene fuerte implicaciones en el estudio de estabilidad ya que nos interesa que las direcciones en $\mathbf{x}$ inestables (ξ inestables) sean controlables.

Definition 3.4. Estabilización Un sistema es estabilizable si y solo si todos los autovectores inestables[1] de $\mathbf{A}$ están contenidos en el subespacio controlable.

Definition 3.5. Popov-Belevitch-Hautus test El par $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es controlable si y solo si

$$\operatorname{rango}\left[(\mathbf{A} - a\mathbf{I}) \quad \mathbf{B}\right] = n \qquad \forall a \in \mathbb{C}$$

Consecuencias del ensayo PBH:

1. $\operatorname{rango}(\mathbf{A} - a\mathbf{I}) = n$ excepto para autovalores $a = \lambda$. Por ende, solo se necesita hacer el test para los autovalores de $\mathbf{A}$

2. $\mathbf{B}$ necesita tener algun componente en cada en cada dirección de los autovectores de $\mathbf{A}$.

3. Si $\mathbf{B}$ es una proyección aleatoria, entonces es muy probable que el sistema sea controlable. Esto se debe a que $\mathbf{B}$ solo necesita tener **una** componente en dirección de cada autovector de $\mathbf{A}$

Si tengo multiplicidad de autovalores (sistema degenerado) entonces voy a necesitar más de una columna en $\mathbf{B}$ para que se cumpla PBH.

3.2. Posicionamiento de autovalores (polos)

Equivalencias de la definición 3.1

[1] También se incluye a veces los autovectores amortiguados en esta definición

1. El sistema es controlable
2. Se pueden elegir posiciones arbitrarias para los autovalores (polos): $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$
3. Accesibilidad completa en $\mathbb{R}^n$. Es decir, para todo estado $\xi \in \mathbb{R}^n$ existe un input $\mathbf{u}(t)$ tal que $\mathbf{x}(t) = \xi$.

Para posicionar autovalores en MATLAB se usa el comando `place`

CÓDIGO 3.2: Posicionamiento de autovalores en las posiciones `eigs` deseadas.

```
K = place(A,B,eigs)
```

Capítulo 4
Observabilidad

Ahora hablaremos de estimadores y de la observabilidad del sistema. El algebra para determinar la observabilidad es muy similar al visto en el capítulo de controlabilidad y se comienza a notar una dualidad entre la matriz $\mathbf{A}$ y las matrices $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$.

Definition 4.1. Matriz de observabilidad

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Definition 4.2. Observabilidad El sistema es observable si el rango (espacio fila) de la matriz $\mathcal{O}$ es igual a n. Verificado en MATLAB:

CÓDIGO 4.1: Como calcular $\mathcal{O}$ y su rango en MATLAB

```
OB = obsv(A,C)
r = rank(OB)
```

Si el sistema es observable entonces se puede estimar todo valor de $\mathbf{x}$ con los valores medidos u observados $\mathbf{y}$. Más adelante veremos que los filtros Kalman tienen su propio sistema lineal dinámico con autovalores que indican que tan rápido converge el estimador $\hat{\mathbf{x}}$ a $\mathbf{x}$

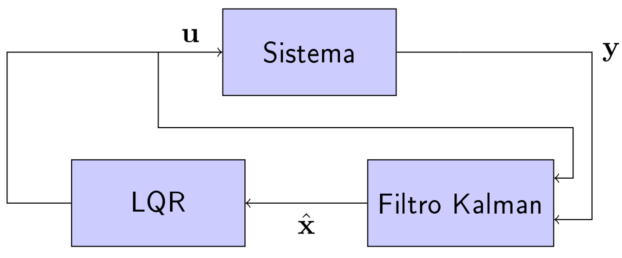

FIGURA 4.1: Sistema de control óptimo con estimador Kalman

Similarmente al estudio de gramianes de controlabilidad, se puede efectuar un *singular value decomposition* para determinar el grado de observabilidad del sistema. En MATLAB:

```
[U, SIG, V] = svd(OB)
```

donde `V` va contener los vectores singulares de la matriz de observabilidad que apuntan en la dirección que se tiene mejor relación señal a ruido, también conocido en ingles como *Signal to Noise ratio* y S/N.

Lo que se hace en la práctica es asegurar que el sistema sea observable verificando el rango de $\mathcal{O}$, mirar la descomposicion singular para determinar direcciones en las cuales se tiene mejor S/N, y construir un filtro de Kalman que estime las variables de estado dado que hay ruido y peturbaciones en el sistema.