Contenido

Parte I

Control Castellano - Bootcamp

Capítulo 1
Sistemas lineales

El exponencial matricial es impráctico de calcular con la matriz $\mathbf{A}$.

En cambio, lo que se hace en la practica es usar los autovalores y autovectores para efectuar una transformacion de coordenadas de las coordenadas de x a las coordenadas de algun autovector donde es mas facil escribir el exponencial matricial y facilita entender el sistema tambien.

Un autovector ξ cumple con la siguiente igualdad

$$\mathbf{A}\xi = \lambda\xi$$

Una forma de visualizar esto es que el producto entre la matriz $\mathbf{A}$ y el autovector mantiene la dirección del autovector.

$$\mathbf{T} = [\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n]$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Es posible diagonalizar el sistema siempre que no se tengan dos autovectores cuasi-paralelos o un sistema degenerado (autovectores generalizados) (entre otros casos)

Esto nos deja escribir la relación

$$\mathbf{AT} = \mathbf{TD}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{Tz} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{T\dot{z}} = \mathbf{ATz} \Rightarrow \mathbf{\dot{z}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{ATz}$$

Se obtienen entonces un sistema de ecuaciones desacoplado! El cambio de la variable z_i depende de si misma

$$\boxed{\mathbf{\dot{z}} = \mathbf{Dz}}$$

Se pueden obtener estas matrices en MATLAB en una linea:

```
[T, D] = eig(A);
```

La solución del sistema va ser simple

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{z}(0)$$

Es de interes poder mapear entre los dos espacios. Usando la expresión $\mathbf{A} = \mathbf{TDT}^{-1}$ se puede simplificar la exponencial matricial empleando conocimientos de algebra lineal

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{TDT}^{-1}t} = \mathbf{T}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{T}^{-1}$$

Cabe destacar que es barato calcular $e^{\mathbf{D}t}$ en términos computacionales.

Reescribimos la solución al sistema recordando $\mathbf{x} = \mathbf{Tz}$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\, \underbrace{e^{\mathbf{D}t}\, \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(0)}_{\mathbf{z}(0)}}_{\mathbf{z}(t)}$$

La igualdad de arriba se usa para computar la evolución de $\mathbf{x}$ en el tiempo aprovechando la simplicidad del cálculo de $e^{\mathbf{D}t}$.

Que hicimos?

- Descubrimos que si sabemos los autovectores/valores de $\mathbf{A}$ podemos transformar el sistema a un sistema de coordenadas donde es más facil resolver el sistema y estudiar su dinámica

El próximo paso es agregar la matriz de control y el vector de entrada para empezar a controlar el sistema.

Capítulo 2
Estabilidad y autovalores

Para el estudio de estabilidad podemos primero mirar a la igualdad

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(0)$$

Si uno de los valores diagonal de $e^{\mathbf{D}t}$ se va a infinito entonces la combinación resultante que iguala a $\mathbf{x}$ también se va ir al infinito. Recordemos que $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\lambda = a + ib \quad \Rightarrow \quad e^{\pm\lambda t} = e^{at}\left[\cos(bt) \pm i\sin(bt)\right]$$

Esto cuenta la siguiente historia

$$\text{si } a > 0 \text{ El sistema aumenta hasta llegar a infinito (}\textbf{Inestable}\text{)} \tag{2.1}$$

$$\text{si } a < 0 \text{ El sistema converge a cero a tiempo infinito (}\textbf{Estable}\text{)} \tag{2.2}$$

$$\tag{2.3}$$

Esto significa que tal vez comenzemos con un sistema inestable, es decir, que nuestra matriz A de la siguiente ecuación tiene autovalores con $a > 0$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Esto se puede remediar agregando el término $\mathbf{Bu}$ de tal forma que lleve los autovalores de la zona inestable ($a > 0$) a la zona estable ($a < 0$).

2.1. Evolución discreta

$$\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}_k, \qquad \mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\Delta t)$$

donde $\tilde{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}\Delta t}$. Sabiendo el vector de estado inicial podríamos calcular el estado para cualquier otro momento

$$\mathbf{x}_N = \tilde{\mathbf{A}}^N\mathbf{x}_0$$

En coordenadas de autovector, cada vez que multiplicamos la matriz estamos elevando nuestros autovalores de $\tilde{\mathbf{A}}$ a una potencia. Estos pueden agrandarse o achicarse dependiendo de su 'radio'

$$\lambda^N = R^N e^{i\theta}$$

si el radio R es menor a uno, la magnitud va decaer a medida que pasa el tiempo. Si el radio es mayor que uno crecerá sin cota superior.

```
[Tt, Dt] = eig(At);
aval = diag(Dt);
inestables = aval(aval>1);
```

Capítulo 3
Linealizando un sistema

1. Encontramos los puntos fijos $\bar{\mathbf{x}}$ tal que $f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$

2. Linealizamos alrededor de $\bar{\mathbf{x}}$

Para un sistema 2×2 el jacobiano es

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \left.\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^2 \ldots$$

Como linealizamos alrededor de un entorno reducido, los términos no-lineales van a ser muy pequeños si $\mathbf{x}$ es cercano a $\bar{\mathbf{x}}$. Y dado que es un punto fijo, $f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

Nuestro sistema linealizado va quedar así

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} \Delta x \Rightarrow \boxed{\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}}$$

Teorema 3.1 (Hartman–Grobman)**.** Si los autovalores de $\mathbf{A}$ tienen todos parte real entonces se puede describir el sistema como lineal en un vecindario de $\bar{\mathbf{x}}$.

Ejercicio 3.1. Determinar la estabilidad de un péndulo en su posición normal e invertida. Factor de fricción δ.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta) - \delta\dot{\theta}$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin(x_1) - \delta x_2 \end{bmatrix}$$

Nuestro jacobiano es

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\cos(x_1) & -\delta \end{bmatrix}$$

Los puntos fijos son

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz del sistema péndulo en posiciones normal d e invertida u:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\delta \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\delta \end{bmatrix}$$

Los autovalores son

$$\lambda_d = \begin{cases} -\frac{\ell\,\delta + \sqrt{-\ell\,(4\,g - \ell\,\delta^2)}}{2\,\ell} \\ -\frac{\ell\,\delta - \sqrt{-\ell\,(4\,g - \ell\,\delta^2)}}{2\,\ell} \end{cases} , \qquad \lambda_u = \begin{cases} -\frac{\ell\,\delta + \sqrt{\ell\,(\ell\,\delta^2 + 4\,g)}}{2\,\ell} \\ -\frac{\ell\,\delta - \sqrt{\ell\,(\ell\,\delta^2 + 4\,g)}}{2\,\ell} \end{cases}$$

Si se estudia el caso de un péndulo con valores $\frac{g}{\ell} = 1$ y $\delta = 0,1$

$$\lambda_d = -0,05 \pm 0,9987i, \qquad \lambda_u = \begin{cases} -1,0512 \\ 0,9512 \end{cases}$$

Podemos ver que los autovalores del péndulo normal tienen parte real menor a cero. Esto significa que es un sistema **estable**, tiende a cero la solución. En cambio, el péndulo invertido tiene un autovalor mayor que cero, característica de un sistema **inestable**.

Capítulo 4
Controlabilidad

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$. El control 'óptimo' para un sistema lineal se logra realimentando $-\mathbf{Kx}$, es decir:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{Kx} \quad \text{Control 'óptimo'}$$

Entonces nuestro sistema se describe de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BKx}$$
$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\,\mathbf{x}}$$

Nuestro objetivo ahora es elegir $\mathbf{K}$ para modificar las propiedades de mi sistema, como por ejemplo, la estabilidad. Si nuestro sistema es **controlable** va ser posible hacer estas modificaciones.

Definition 4.1. A grosso modo, mi sistema es controlable si puedo elegir $\mathbf{u} = -\mathbf{Kx}$ y así poner mis autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ en cualquier lugar del plano complejo. Si puedo elegir la posición de mis autovalores entonces se puede controlar la evolución del *state-space* eligiendo $\mathbf{u}$.

Para determinar si un sistema es controlable se construye la matriz de controlabilidad. El sistema es controlable si y soli si se verifica que la cantidad de columnas linealmente independientes sea igual a n.

Definition 4.2. Matriz de controlabilidad

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

En MATLAB se usa la función `ctrb` para obtener la matriz de contrabilidad

CÓDIGO 4.1: Obtención del rango de $\mathbf{Y}$

```
r = rank(ctrb(A,B));
```

Parte II

Control English

Capítulo 5
Introduction

5.1. Control theory

5.1.1. Basics

Taylor expansion (Linearization) of two-variable nonlinear equation.

$$f(x,y) = f(\overline{x},\overline{y}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x-\overline{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-\overline{y})\right] + \dots$$

Matlab command to convert state space to transfer function `[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,iu)` where `iu` must be specified for systems with more than one input.

5.1.2. State space

$\mathbf{u}(t)$ is inputs vector and is of size $p \times 1$ for a given system, i.e: $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ for two input system, $p = 2$.

$\mathbf{y}(t)$ is the output vector of size $q \times 1$.

$\mathbf{z}(t)$ is the *disturbance input*. Only applies to dynamical systems and is of size $r \times 1$

Thus we define the **state space variables** so that system output is purely in function of current system state variables and input variables.

$$\text{System Output} = f\,(\text{Current System State, System Input})$$

We will define X or $\mathbf{x}$ as our system state variables. There are some important aspects to note about state space variables such as

- System output $\mathbf{y}(t)$ will be a function of them
- They change over time
- They are internal to the system
- They may include system outputs (outputs will be a function of themselves in part)
- Their selection is inherent part of the system design process and there are different methods of selecting them.
- We will assume there is a minimal quantity of state variables that is sufficient to accurately describe the system
- If all system inputs u_j are defined beforehand for $t \geq t_0$ then $\mathbf{x}(t)$ defines all system states for time $t \geq t_0$

The mathematical representation of state space variables will be will be that of the **state vector** $\mathbf{x}(t)$ of size $n \times 1$.

To model our system we then define the equations that govern it in **state space**[1]. These are the **state-space equations** of the system. For a dynamic system these must include a variable that serves as memory of inputs for $t \geq t_1$. *Integrators* serve as memory devices for *continuous-time* models, however, our state-space representation is discrete! This is when state-space variables come in handy: The outputs of integrators can be considered as the variables that define the internal state of the dynamic system (Ogata).

For a system of size $p = q = n = 1$ one has the state-space representation defined as:

$$\dot{x}(t) = g\left[t_0, t, x(t), x(0), u(t)\right], \qquad y = h\left[t, x(t), u(t)\right]$$

For a *linear time-variant dynamical system* of arbitrary size it is convenient to represent it in it's linearized form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}(t)\mathbf{z}(t) \tag{5.1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \tag{5.2}$$

where

$\mathbf{A}_{n\times n}$ System matrix. Relates future state change with current state. May be zero. Also referred to as the state matrix in some bibliographies.

$\mathbf{B}_{n\times p}$ Control/input matrix. How system input influences state change. May be zero.

$\mathbf{C}_{q\times n}$ Output matrix. How system state influences system output.

$\mathbf{D}_{q\times p}$ Feed forward or feedthrough matrix. How system input influences system output. Is usually zero for most physical systems.

$\mathbf{E}_{n\times r}$ Input matrix for disturbances. Applies only for dynamical systems.

the system is said to be **time-invariant** if the above matrices are not dependent of time. An example of a **time-variant** system is a spacecraft, whose mass changes due to fuel consumption.

One method of state space variable selection is **physical selection**. This method is based on energy accumulators. It can be said that *the minimum number of state-space variables needed to model the system accurately is equal to the number of independent energy accumulators*. When state-space variable is not a energy variable it is said to be an augmented variable.

The general solution to the linear differential equation of state:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\ \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\ \mathbf{u}(t)$$

es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x})0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\ \mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Definition 5.1 (Matrix Exponential).

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^i}{i!} \tag{5.3}$$

[1]State space can be thought of an n-dimensional space whose axes are the state variables $(x_1, x_2 \ldots)$

A MATLAB function is provided to calculate the matrix exponential.

CÓDIGO 5.1: matrixexponential.m

```
A = rand(3);
t0 = 0.5;
fprintf('e^(At)=');disp(expt(t0,1e5,A));
function y = expt(t,n,A)
    y = eye(size(A));
    for i=1:n
        y = y + (A*t)^i/factorial(i);
    end
end
```