

Instituto Tecnológico de Buenos Aires

Método de volúmenes finitos para transferencia de calor en sólidos

Patricio Whittingslow
Agustín Canalis

12 de diciembre de 2019

Glosario

$\{\mathbf{X}\}$ Vector columna X

$[\mathbf{X}]$ Matriz X

$\{\mathbf{T}\}^{m+1}$ Vector temperaturas evaluado en el instante de tiempo discretizado $m + 1$

$[\mathbf{C}] \setminus \{\mathbf{A}\}$ Resolución del sistema de ecuaciones para obtener el vector $\{\mathbf{B}\}$ donde $[\mathbf{C}]\{\mathbf{B}\} = \{\mathbf{A}\}$. Es equivalente a $[\mathbf{C}]^{-1} \cdot \{\mathbf{A}\}$

Notas

Los superíndices con m se refieren a la discretización temporal. Los subíndices v, n, s, e, w se refieren a la discretización espacial. Dicho subíndice v se refiere al volumen en cuestión donde se está haciendo el balance de energía; los volúmenes n, s, e, w se refieren a los vecinos de este último.

1. Discretización de la ecuación de calor

Se comienza con la ecuación de Fourier para un sólido con calor generado.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T + \dot{q}_G \quad (1)$$

Generalizándola para un volumen arbitrario dV

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = k \frac{\partial T}{\partial x} dS + \dot{q}_G dV \quad (2)$$

la cual se puede trabajar con un sistema cartesiano e integrar para llegar a la ecuación de Fourier discretizada para volúmenes finitos

$$\frac{V \rho c_p}{\Delta t} (T_v^{m+1} - T_v^m) = \sum_i^{\text{caras}} k \cdot S_i \frac{(T_i - T_v)}{\Delta x_i} + \dot{q}_G V \quad (3)$$

El esquema explícito (ecuación 4) para resolver la ecuación diferencial numéricamente obtiene las temperaturas en el próximo paso de tiempo con las temperaturas inmediatas

$$\frac{V \rho c_p}{\Delta t} (T_v^{m+1} - T_v^m) = \sum_i^{\text{caras}} k \cdot S_i \frac{(T_i - T_v)}{\Delta x_i} \Big|_m + \dot{q}_G V \quad (4)$$

tiene la ventaja de ser fácil de programar por su naturaleza intuitiva y de dar resultados precisos. Además, es paralelizable ya que las temperaturas futuras son independientes entre sí. Aún así, tiene la gran desventaja de ser inestable si se discretiza con un número Fourier lo suficientemente alto.

El esquema implícito (ecuación 5) es menos fácil de visualizar, pues las temperaturas del futuro dependen entre sí. Esto también lo hace imposible de paralelizar.

$$\frac{V\rho c_p}{\Delta t} (T_v^{m+1} - T_v^m) = \sum_i^{\text{caras}} k \cdot S_i \frac{(T_i - T_v)}{\Delta x_i} \Big|^{m+1} + \dot{q}_G V \Big|^{m+1} \quad (5)$$

pero si no se mira la mosca en la sopa, tiene la ventaja de ser estable.

2. Programación del FVM

2.1. Dominio

Por simplicidad se detallar el método de volúmenes finitos formulado para un problema 2-D. Primero se define el dominio. En la figura se encuentra una placa que tiene L_x de largo, L_y de alto, e de espesor y está dividida en 6 volúmenes cuadrados. El hecho que sean cuadrados simplificará los cálculos más adelante.

2.2. Condiciones de borde

El próximo paso es definir el modelo matemático, es decir, condiciones de borde de Dirichlet y de Neumann. Tenemos los dos costados aislados y el borde superior de la placa a una temperatura T_H y el borde inferior a una temperatura T_C como se puede ver en la figura 1. Se tiene entonces condiciones de borde de Neumann sobre la caras de costado (E y W) y condiciones de borde de Dirichlet en la superior e inferior.

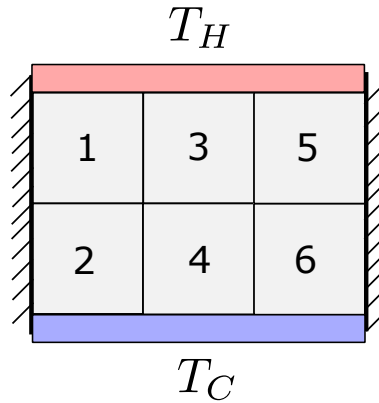


Figura 1: Un dominio simple.

2.3. La matriz vecindario

Llegado a este punto se puede comenzar la programación. Resulta visualmente cómodo plantear un sistema de orientación con las direcciones cardinales. En 2D se tiene el norte, oeste, este y sur, según sus contrapartes en ingles: N,W,E,S (figura 2). Esto nos va ayudar indexar que volúmenes comparten una frontera en la matriz **vecindario**, dicho de otra forma, cuales son los **vecinos** de un volumen \mathbf{V} .

Se necesita obtener la matriz **vecindario** que tiene una fila por cada volumen indicando cada uno de sus vecinos y su posición respecto al volumen en cuestión.

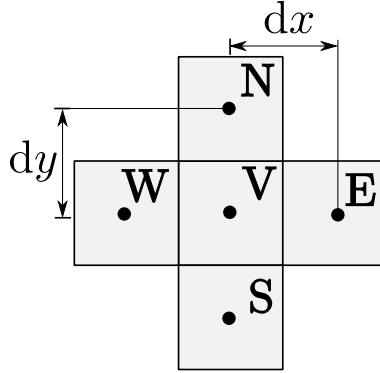


Figura 2: Orientaciones en 2D

Identificaremos los bordes aislados con un 0, los bordes calientes (T_H aplicada) con un -1 y los bordes fríos (T_C) con -2 . Para facilitar el armado de **vecindario** (y que resulte más visual lo que se está haciendo) se podría armar una matriz del dominio. Para el ejemplo tendría la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

los ceros de las esquinas no tienen ningún significado físico.

Si se elige el orden $[N, W, E, S]$, entonces para el caso de la figura **vecindario** tiene la forma

$$\text{vecindario} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{N_{\text{vol}} \times N_{\text{dir}}} \quad (6)$$

osea que los **vecinos** del volumen 2 son $[1 \ 0 \ 4 \ -2]$. N_{vol} es la cantidad de volúmenes y N_{dir} es la direccionalidad del problema, en este caso tenemos 4 direcciones porque es un problema plano. Para problemas 3D se tienen 6 direcciones incluyendo las direcciones arriba y abajo $[U, N, W, E, S, D]$.

2.4. Formulación para el método de volúmenes finitos

Una vez que conocemos el vecindario de los volúmenes se necesita saber que esquema se va aplicar. En este texto se va tratar el esquema implícito o *Euler Backward*.

El problema a resolver es obtener la temperatura del próximo paso de tiempo T^{m+1} usando la temperatura conocida en el paso de tiempo corriente T^m . Comenzamos despejando para T^m en (5) sin calor generado y teniendo en cuenta que $\Delta x = \Delta y$

$$T_V^m = T_V^{m+1} - \overbrace{\frac{kS\Delta t}{V\rho c_p \Delta x}}^{=Fo_x} \sum_i^{\text{caras}} (T_i - T_V) \Big|^{m+1} \quad (7)$$

Nos ha ayudado bastante que sean cuadrados los volúmenes, podemos calcular el número de Fourier por igual para todos los volúmenes. En el caso que no se tengan volúmenes cuadrados se tendrá un número de Fourier en x y otro diferente en y

$$Fo_x = \frac{kS\Delta t}{V\rho c_p \Delta x} = \frac{k\Delta z\Delta y\Delta t}{(\Delta z\Delta x\Delta y)\rho c_p \Delta x} = \frac{k\Delta t}{\Delta x^2\rho c_p}$$

de ahora en adelante se usa un único número de Fourier.

Expandiendo (7)

$$T_V^m = T_V^{m+1} + Fo(T_V^{m+1} - T_N^{m+1}) + Fo(T_V^{m+1} - T_W^{m+1}) + Fo(T_V^{m+1} - T_E^{m+1}) + Fo(T_V^{m+1} - T_S^{m+1}) \quad (8)$$

juntando términos nos queda

$$T_V^m = T_V^{m+1}(1 + 4Fo) - FoT_N^{m+1} - FoT_W^{m+1} - FoT_E^{m+1} - FoT_S^{m+1} \quad (9)$$

Todas las temperaturas del futuro son incógnitas y por ende se necesita plantear un sistema de ecuaciones y resolver simultáneamente para la temperatura T^{m+1} para todos los volúmenes. La ecuación en forma matricial:

$$\{\mathbf{T}\}^m = [\mathbf{C}]\{\mathbf{T}\}^{m+1}$$

como lo que nos interesa es $\{\mathbf{T}\}^{m+1}$, multiplicamos ambos lados por la inversa de la matriz $[\mathbf{C}]$

$$\{\mathbf{T}\}^{m+1} = [\mathbf{C}]^{-1} \{\mathbf{T}\}^m \quad (10)$$

2.5. Armado de la matriz $[\mathbf{C}]$

Se arma la ecuación 9 para cada volumen \mathbf{V} , que será una fila en $[\mathbf{C}]$. Hecho en Matlab:

Código 1: Se arma la matriz $[\mathbf{C}]$ para volúmenes cuadrados.

```
C = zeros(Nvol);
Fovec = [Fo Fo Fo Fo];
for v = 1:Nvol
    vecinos = vecindario(v,:);
    conducen = vecinos ~= 0;
    C(v,v) = 1 + sum(Fovec(conducen));
    C(v,vecinos) = - Fovec(conducen);
end
```

el código de arriba arma la matriz tomando en cuenta los bordes aislados que no conducen. **Solo usar para una malla donde $dx = dy$.** Si se quiere agregar temperaturas fijas o convección hace falta una formulación no especificada aún. Para el caso dado la matriz $[\mathbf{C}]$ no cambia en el tiempo. Con los temas vistos hasta este punto el usuario podría resolver un sistema con condiciones de entorno conocidas y

ver como evoluciona en el tiempo. Un ejemplo podría ser fijar la temperatura de un volumen más alto que la de los volúmenes alrededor y dejar al sistema evolucionar hasta la termalización.

2.6. Vector de flujo de calor {D}

A continuación se tiene el caso del trabajo practico: una placa aislada en sus bordes (N,W,S,E), con calor generado en su parte inferior (Down) y convección en su parte superior (Up).

Lo que hay que agregar a D son todos los términos de la ecuación de conservación que no dependen de un T_i . En este caso la ecuación para cada uno de los elementos es:

$$V\rho c_p \frac{(T_v^{m+1} - T_v^m)}{\Delta t} = \frac{kS}{\Delta x}(T_w^{m+1} - T_v^{m+1}) + \frac{kS}{\Delta y}(T_n^{m+1} - T_v^{m+1}) + \dot{Q}_G^{m+1} + \left(\frac{\Delta z}{2kS} + \frac{1}{h_c S} \right) (T_{\infty U} - T_v^{m+1})$$

La cual luego procesar se vuelve:

$$T_v^m = T_v^{m+1}(1 + 4Fo + Fo_{cz}) - FoT_n^{m+1} - FoT_w^{m+1} - FoT_e^{m+1} - FoT_s^{m+1} - \dot{Q}_G^{m+1} \cdot \frac{\Delta t}{V\rho c_p} - Fo_{cz}T_{\infty U} \quad (11)$$

Donde

$$Fo_{cz} = \left(\frac{\Delta z}{2kS} + \frac{1}{h_c S} \right) \cdot \frac{\Delta t}{V\rho c_p}$$

Para lidiar con el calor generado y la convección hay que agregar a la ecuación el vector de flujo de calor {D} tal que:

$$\{\mathbf{T}\}^{m+1} = [\mathbf{C}] \setminus (\{\mathbf{T}\}^m + \{\mathbf{D}\}^{m+1}) \quad (12)$$

Los últimos dos términos de la ecuación 9 son los que van a parar a {D} evaluados en el futuro.