

# ELEMENTOS FINITOS CHEATSHEET

**AUTORES**

55423

## 1. Parcial 2

Protip: Necesitas saber que fuerza se tiene que hacer para que se mantenga en posición una arista o punto dado cargas térmicas/fuerza? Apoyalo (fix) y mira las reacciones con la carga termica/fuerza.

### 1.1. Expresiones útiles

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)} \quad (1)$$

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (6)$$

$$\tau_n = - \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (7)$$

$$I = \int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi \approx \phi(\xi_1)W_1 + \phi(\xi_2)W_2 \dots \phi(\xi_n)W_n \quad (8)$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_i \sum_j W_i W_j \phi(\xi, \eta) \quad (9)$$

$n=0$							1
$n=1$			$x$		$y$		
$n=2$			$x^2$		$xy$		$y^2$
$n=3$			$x^3$		$x^2y$		$xy^2$
$n=4$			$x^4$		$x^3y$		$x^2y^2$
$n=5$			$x^5$		$x^4y$		$x^3y^2$
$n=6$			$x^6$		$x^5y$		$x^4y^2$
							$x^3y^3$
							$x^2y^4$
							$xy^5$
							$y^6$

### 1.2. Como obtener cualquier función de forma

Se define cuantos nodos se va tener por elemento y se los ubica en el espacio  $(\xi, \eta)$  que por simplicidad se trataran como  $(x, y)$ . Con el triangulo de Pascal para polinomios se elige el grado del polinomio y los términos. Luego se resuelve el sistema de ecuaciones  $N_i \cdot X = A$  donde  $N_i = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n]$  y  $X = [1 \ x \ y \ \dots \ x^{k-1}y^k \ x^k y^k]^T$ , o algo por el estilo. Se tienen que elegir los grados mas convenientes teniendo en cuenta la simetría y el número de nodos, este ultimo te limita el número de términos posibles por la naturaleza de la interpolación. La matriz  $A$  tendrá en su **espacio fila** el mismo polinomio evaluado en la posición del nodo correspondiente a esa fila.

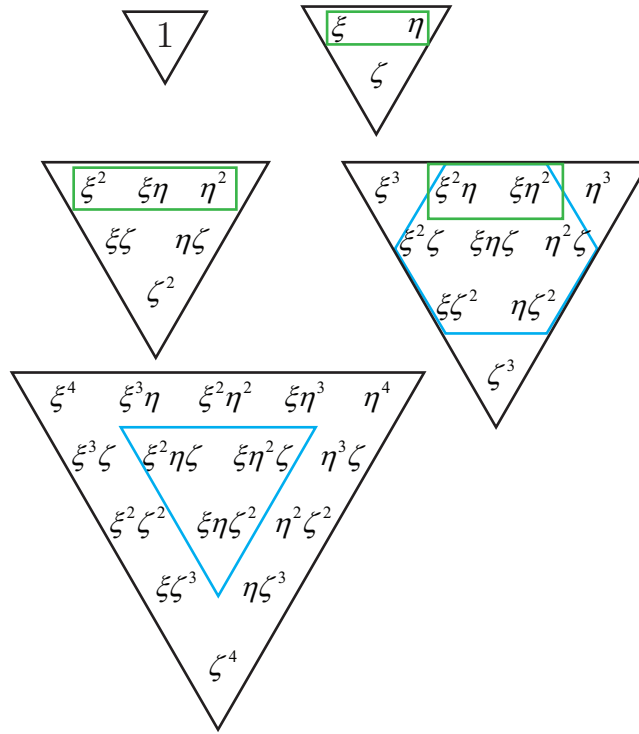


Figura 1: El tetrahedro de Pascal. Los términos de los elementos *serendipidad* están encuadrados.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & \dots & x_1^{k-1} y_1^k & x_1^k y_1^k \\ 1 & x_2 & y_2 & \dots & x_2^{k-1} y_2^k & x_2^k y_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & \dots & x_n^{k-1} y_n^k & x_n^k y_n^k \end{bmatrix}$$

Luego, las funciones de forma  $N_i$  se pueden obtener así:  $N_i = X^{-1} A$

### 1.3. Elementos isoparamétricos

- Un elemento que no esta distorsionado (sigue siendo rectangular) tiene  $J$  constante
- Cuidado con modo espurio. Ver tabla 6.8-1 pg. 226 el tema de full/reduced integration.
- Todo sobre como cargar tu elemento isoparam. en pg. 228
- 

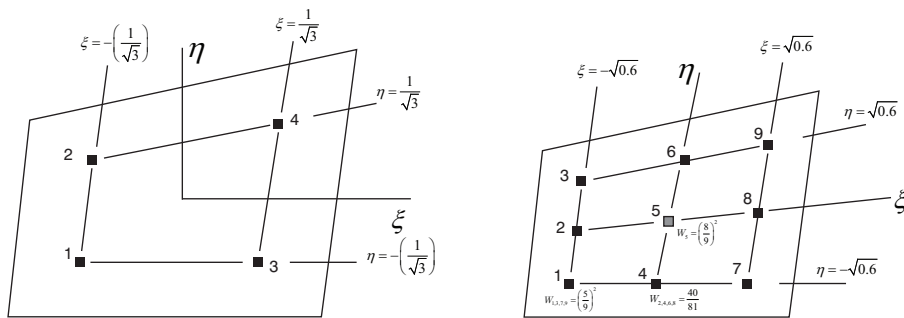


Figura 2: Puntos gauss para ordenes  $n = 2$  y  $n = 3$ . El peso para  $n = 2$  es igual en todos los puntos  $W_i = 1$

## 1.4. Ejemplo elemento exótico

### Matriz de Rigidez

Imaginemos un elemento Q5 cuadrado de  $2 \times 2$  con espesor  $t$  (igual al Q4 con un nodo en su centro). Si fuéramos a obtener las funciones de formas de dicho elemento quedarían iguales para  $(x, y)$  y para  $(\xi, \eta)$  por las dimensiones usadas. La funcionalidad que uno estaría tentado a seleccionar sería  $[1 \ x \ y \ x^2 \ y^2]$ , pero está trae problemas inesperados debido a que tiene varias soluciones en la interpolación. Como nuestra prioridad siempre es mantener la simetría la funcionalidad será  $[1 \ x \ y \ x y \ x^2 y^2]$ . Tomando el orden de la figura 3.

$$N_i = \left[ \frac{x^2 y^2}{4} + \frac{x y}{4} - \frac{x}{4} - \frac{y}{4}, \frac{x^2 y^2}{4} - \frac{x y}{4} + \frac{x}{4} - \frac{y}{4}, \frac{x^2 y^2}{4} + \frac{x y}{4} + \frac{x}{4} + \frac{y}{4}, \frac{x^2 y^2}{4} - \frac{x y}{4} - \frac{x}{4} + \frac{y}{4}, 1 - x^2 y^2 \right]$$

Llegado a este punto nos interesa obtener la matriz de rigidez. Si queremos lograr “full integration” deberíamos usar Gauss orden  $n = 3$  según  $2n - 1 \geq O([\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}])$ . El producto  $[\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}]$  da un polinomio de orden 6 ( $[\mathbf{B}]$  tiene el mismo orden que la derivada de  $[\mathbf{N}]$ ). De esta forma nos aseguramos que nuestro resultado va ser exacto para el elemento sin distorsionar.

Para este ejemplo, no se pide *full integration* entonces no pasa nada si queremos *underintegrate*. Usamos Gauss orden  $n = 2$ .

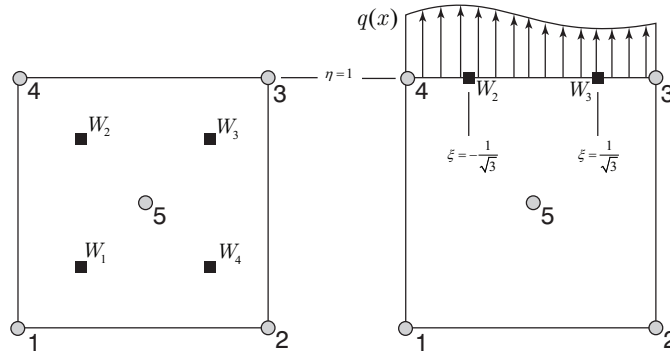


Figura 3: Elemento Q5 rectangular.

La rigidez de un elemento está dada por

$$[\mathbf{k}] = \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dV = \int \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] t dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] t |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (10)$$

donde  $[\mathbf{B}]$  es la matriz deformación-desplazamiento del elemento,  $[\mathbf{E}]$  es la matriz constitutiva, y  $|\mathbf{J}|$  es el determinante de la matriz Jacobiana, el cual se le suele decir simplemente el Jacobiano.

Este ultimo se calcula a partir de la derivada de las funciones de forma

### Cargas 2-D

La ecuación que rige como se cargan elementos, siendo  $\{\mathbf{r}\}$  las cargas nodales,  $\{\mathbf{F}\}$  fuerzas volumétricas,  $\{\Phi\}$  fuerzas de tracción superficiales,  $\{\epsilon_0\}$  las deformaciones iniciales y  $\{\sigma_0\}$  las tensiones iniciales (pg. 228)

$$\{\mathbf{r}\} = \int [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{F}\} dV + \int [\mathbf{N}]^T \{\Phi\} dS + \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] \{\epsilon_0\} dV - \int [\mathbf{B}] \{\sigma_0\} dV \quad (11)$$

**Carga de línea.** Si el elemento está cargado sobre la línea 4-3 con una distribuida  $q(x)$  (en  $[N m^{-1}]$ ) entonces procedemos de la siguiente manera según el segundo término de (11):

$$r_{xi} = \int_{-1}^1 N_i (\tau \mathbf{J}_{11} - \sigma \mathbf{J}_{12}) t d\xi \quad (12)$$

$$r_{yi} = \int_{-1}^1 N_i (\sigma \mathbf{J}_{11} + \tau \mathbf{J}_{12}) t d\xi \quad (13)$$

donde  $\sigma$  es la sollicitación normal a la superficie y  $\tau$  es la tangencial. Para la fuerza sobre el nodo 4 se tiene

$$r_{y4} = N_4(\xi_2)t[\sigma(\xi_2)\mathbf{J}_{11} + \tau(\xi_2)\mathbf{J}_{12}] \cdot \mathbf{W}_2 + N_4(\xi_3)t[\sigma(\xi_3)\mathbf{J}_{11} + \tau(\xi_3)\mathbf{J}_{12}] \cdot \mathbf{W}_3$$

Si consideramos que solo hay una *carga distribuida de linea* a tracción/compresión como indica la figura 3, se reduce la ecuación anterior

$$r_{y4} = N_4(\xi_2)\mathbf{J}_{11} q(\xi_2) + N_4(\xi_3)\mathbf{J}_{11} q(\xi_3) = N_4 q \mathbf{J}_{11} \Big|_{\xi_2} + N_4 q \mathbf{J}_{11} \Big|_{\xi_3}$$

similarmente  $r_{y3} = N_3 q \mathbf{J}_{11} \Big|_{\xi_2} + N_3 q \mathbf{J}_{11} \Big|_{\xi_3}$  donde la matriz Jacobiana también se evalúa para cada punto de Gauss!

**Carga volumétrica.**

## Tensiones

- Las tensiones en los nodos suele ser de mayor interés que sobre los puntos de gauss (mas comprometidas, permiten estimar error)

## 2. Parcial 3

### 2.1. Axisimetría

Resuelvo problema 3-D en el plano. Los resultados son por cada unidad radian. Como sigo teniendo dos grados de libertad tengo las mismas funciones de forma. Cambia mi operador derivada.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & f & f & 0 \\ & 1 & f & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{sim.} & & & g \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

donde

$$f = \frac{\nu}{1-\nu} \quad \text{y} \quad g = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

Una carga puntual  $P$  aplicada sobre un elemento axisimétrico no tiene el mismo significado físico que en elementos plane stress/strain.

$$P = 2\pi r q$$

donde  $q$  es la carga distribuida en [N/m],  $r$  es la distancia al eje de revolución y  $2\pi$  es el resultado de integrar la fuerza distribuida sobre  $\theta$ .

$$\{\mathbf{r}_e\} = \int \int_{-\pi}^{\pi} [\mathbf{N}]^T \begin{Bmatrix} \rho r \omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix} r d\theta dA$$

### 2.2. Subestructuras

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_A \\ D_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A \\ R_B \end{bmatrix}$$

$$D_B = K_{BB}^{-1}(R_B - K_{BA}D_A)$$

$$D_A = K_{AA}^{-1}(R_A - K_{AB}D_B)$$

### 2.3. Pitfalls

MATLAB

- Antes de aplicar carga distribuida, verificar la orientación del elemento con sus nodos  $(\xi, \eta)$
- 

### 2.4. Error

Tipos de error:

- Modelado
- Bugs
- Error de usuario
- Error de discretización
- Error de redondeo/truncado
- Error de manipulación
- Error numérico (combinación de los dos anteriores)

Cálculo Tensiones en puntos superconvergencia (Gauss orden 1 para Q4, y Gauss orden 2 aproxima para Q8).

Extrapolo tensiones superconvergentes a los nodos ( $\sigma^*$ ).

Energía de deformación.

Se suele requerir que  $\eta \leq 0,05$

$$\|U\|^2 = \sum_{i=1}^m \int_{v_e} \{\epsilon\}_i^T [E] \{\epsilon\}_i dV$$

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m \int_{v_e} (\{\epsilon^*\}_i - \{\epsilon\}_i)^T [E] (\{\epsilon^*\}_i - \{\epsilon\}_i) dV$$

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m \int_{v_e} (\{\sigma^*\}_i - \{\sigma\}_i)^T [E]^{-1} (\{\sigma^*\}_i - \{\sigma\}_i) dV$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\|e\|^2}{\|e\|^2 + \|U\|^2}}$$

ADINA

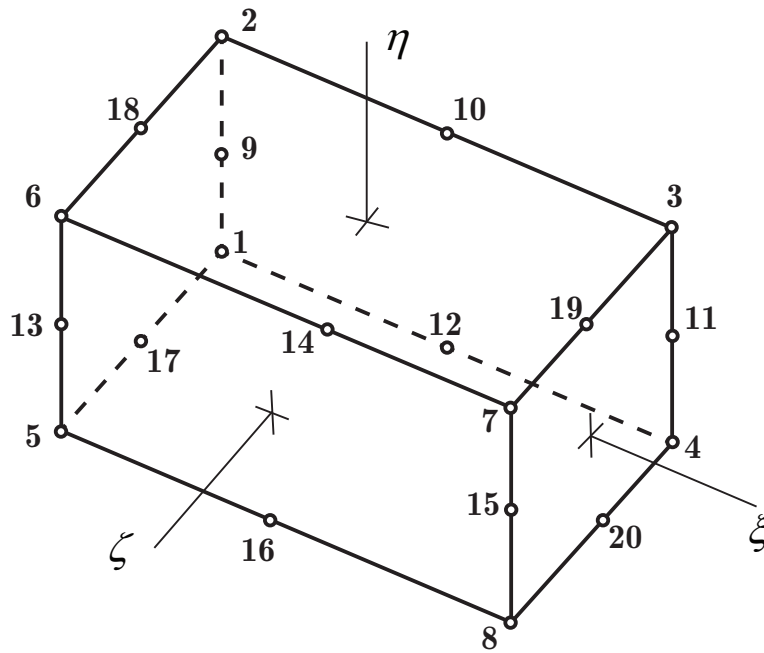


Figura 4: Numeración de nodos H20 en ADINA(Ejes sugeridos)

### 3. Finitos II

$$[M]\{\ddot{D}\} + [C]\{\dot{D}\} + [K]\{D\} = \{R\} \quad (14)$$

Amortiguamiento  $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$  cede una matriz no diagonal. Se complica la resolución. Existen dos otros modelos que tratan con una matriz  $[C_\Phi]$  diagonal donde las ecuaciones se desacoplan.

Amortiguamiento Modal: Se elige un  $\zeta$  para cada modo

$$[C_\Phi] = \begin{bmatrix} 2\omega_n \zeta_n & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega_1 \zeta_1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Amortiguamiento proporcional. Se basa el análisis

$$[\mathbf{C}_\Phi] = [\Phi]^T (\alpha[\mathbf{M}] + \beta[\mathbf{K}]) [\Phi] = \alpha\delta[\mathbf{I}] + \beta[\Omega^2] \quad (16)$$

Si se quiere estudiar un rango de frecuencias de excitación tal que  $\omega_{\text{exc}} \in [\omega_1, \omega_2]$  y eligiendo dos valores de damping para ambas frecuencias  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  se tiene:

$$\alpha = 2\omega_1\omega_2(\zeta_1\omega_2 - \zeta_2\omega_1)/(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

$$\beta = 2(\zeta_2\omega_2 - \zeta_1\omega_1)/(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

Una vez obtenida  $[\mathbf{C}_\Phi]$  se pueden obtener los desplazamientos modales  $\{\mathbf{Z}\}$ . Tome en cuenta que debido a la diagonalidad de  $[\Omega^2]$  y  $\{\mathbf{R}_\Phi\}$  se desacoplan las ecuaciones de 14 y por ende se pasa a tratar dichas matrices diagonales como vectores columnas. Una vez desacopladas se tiene

$$\{\ddot{\mathbf{Z}}\} + 2\{\Omega\}\{\mathbf{C}_\Phi\}\{\dot{\mathbf{Z}}\} + \{\Omega\}^2\{\mathbf{Z}\} = \{\mathbf{R}_\Phi\}$$

$$\{\mathbf{Z}\} = \frac{\{\mathbf{R}_\Phi\}}{\{\Omega\}^2 \sqrt{(1 - \chi^2)^2 + (2\{\mathbf{C}_\Phi\}\chi)^2}}$$

donde  $\chi = \frac{\omega_{\text{exc}}}{\{\Omega\}}$ .

### 3.1. Sine Sweep

A medida que la frecuencia de excitación aumenta la *amplitud del sistema disminuye*<sup>1</sup>. Es interesante pensar que si aumentara no tendría sentido buscar las frecuencias naturales porque estas son caracterizadas por un máximo de amplitud. Las curvas del barrido de frecuencia son decrecientes en lejanía de una frecuencia natural porque para una fuerza cíclica  $F(t) = F_0 \sin \omega t$  el tiempo que actúa en una dirección es inversamente proporcional a la frecuencia. Por ende la estructura no tiene tiempo para moverse lejos antes de que se invierta la dirección de la fuerza.

## 4. Apuntes Segundo Parcial

Es cuasiestático cuando la deformación avanza

Cargas armónicas: Análisis respuesta de la estructura ante cada modo.

Aumentar damping disminuye la amplitud del motor, pero a la vez lo que le otorga damping se convierte rígido y toma reacciones.

Para simular transitorio podemos usar la descomposición modal con métodos numéricos usando Runge-Kutta... porque ahora tengo una particular... la función

Ahora pueden variar de cualquier manera:

$$D = D(x, y, z, t) = N(x, y, z)D(t)$$

Desarrollamos  $D$  en serie Taylor.

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}...$$

Con las ecuaciones de Taylor despejadas para  $n+1$  y  $n-1$  puedo adivinar el futuro con el presente (y pasado).

$$\{D\}_{n+1} = \{D\}_{n-1} + 2\Delta t \{\dot{D}\}_n$$

Sin conocer  $\dot{D}_n$  está difícil... uso Taylor otra vez!

$$\left[ \frac{M}{\Delta t^2} + \frac{C}{2\Delta t} \right] \{D\}_{n+1} = \{R^{\text{ext}}\}_n - [K]\{D\}_n + \frac{2}{\Delta t^2}[M]\{D\}_{n-1} - \left[ \frac{M}{\Delta t^2} - \frac{C}{2\Delta t} \right] \{D\}_{n-1}$$

donde  $\{R^{\text{ext}}\}$  puede ser una función en el tiempo también! Una función Heaviside excita TODOS los modos.

Optimización: No hay mucho que se pueda hacer. Es super complicated

RUNGE KUTTA

<sup>1</sup>Excepto en cercanías de una frecuencia natural



Tengo que resolver las dos ecuaciones simultáneamente

$$\begin{cases} [M]\dot{V} + [C]V + [K]\{D\} = \{R^{ert}\} \\ \{\dot{D}\} = \{V\} \end{cases}$$

Espectro de respuesta

Gráfico  $\ddot{u}-\omega$  muestra las cargas que podría estar sometido tu sistema.

A frecuencias mas altas la diferencia entre las Z es mayor:

$$S_i = \frac{Z_i^{\max}}{Z_i^{\text{st}}}$$

Ataco el sistema con un “Paquete” de cargas y cada modo responde de su propia forma. Este metodo Sebas le dice Random. Se suele usar para sistemas tipo placas en satelites, donde tenes todas las plaquetas vibrando y no conoces que esta pasando ahi. Para estructuras no tanto porque son más estables y se conoce mejor que puede llegar a ser el modo de vibración porque los modos de vibracion estan bien separados->cosa que no es verdad en satelites.

$$D(t)j = [\Phi]\{Z(t)\} = \sum_j \Phi_{ji} Z_i(t) = \sum_j \Delta_{ji}(t)$$

Voy a tener un desplazamiento máximo cuando los modos esten todos en su máximo... pero eso sucede cuando están en fase, cosa que nunca sucede porque siempre hay algun desfasaje. Hay criterios para determinar el desplazamiento máximo, una incluye sumando la primer autoforma que es la más grande y luego sumando cuadrados mínimos de las otras. Con esto te cubris de la tensión que podría llegar a ocurrir ().

## 5. No linealidad

Metodo variacional: Lo que buscamos es un estado de energia minima para el sistema, y como para obtener la energia tenemos que integrar se requiere integrar todo el sistema. Buscamos un punto donde el funcional sea estable. Decimos que toda la energia interna es igual al trabajo externo.

Formula resuelta en Resistencia de materiales

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - q = 0$$

Formula resuelta en elementos finitos

$$\Phi = \int_0^L \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 - q v dx$$