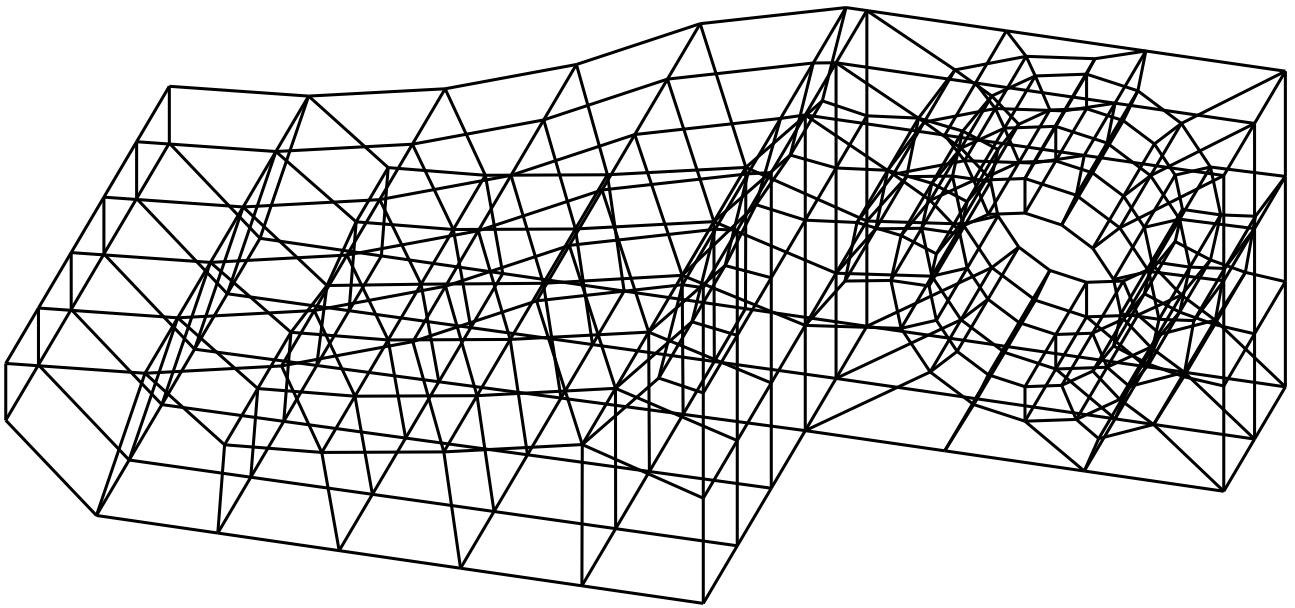


Instituto Tecnológico de Buenos Aires

# Elementos Finitos

UN APUNTE INFORMAL



PATRICIO WHITTINGSLOW

## 0. Introduccion al Metodo de los Elementos Finitos

El análisis o método de elementos finitos (FEA por *finite element analysis*) es usado para obtener una solución numérica de un problema de campo (electrostático, térmico, tensiones). Matemáticamente estos problemas están definidos como ecuaciones diferenciales o como un integral. Ambas expresiones pueden formularse con elementos finitos.

Las ventajas de FEA son

- Es aplicable a cualquier problema de campo
- No hay restricciones geométricas
- No hay restricciones al tipo de cargas o condiciones de borde que se pueden aplicar
- Se puede formular para materiales que no son isotrópicos e incluso el tipo de material puede cambiar dentro de un elemento
- Se pueden combinar distintos tipos de elementos en un modelos, por ejemplo, unir barras con vigas o incluso con elementos 3D.
- La aproximación se puede mejorar fácilmente refinando la malla donde hay gradientes de tensión altos

### 0.1. Proceso de resolucion

El primer paso es identificar y **clasificar** el problema.

- Cuales son los fenómenos físicos involucrados y que resultados se buscan del análisis
- Depende del tiempo? (estático o dinámico)
- Hace falta una resolución iterativa? (no linealidad: radiación, plasticidad)

Luego se comienza el **modelado** del problema.

- Se excluyen los detalles superfluos, dejando lo esencial para describir el problema con un margen de error adecuado sin complicar las cosas innecesariamente
- Un *modelo geométrico* se convierte en un *modelo matemático* cuando se describe su comportamiento mediante ecuaciones diferenciales y condiciones de borde.<sup>1</sup>

Un modelo matemático es una idealización donde se simplifican la geometría, propiedades del material, cargas y/o condiciones de borde en base del entendimiento del analista acerca lo que tiene (o no) importancia al momento de obtener los resultados requeridos.

Finalmente llega el momento de la **discretización**. Un modelo matemático se discretiza dividiéndolo en una malla de elementos finitos. De esta forma, un campo continuo es representado como una función partida la cual es definida por una cantidad finita de variables nodales e interpolación dentro de cada elemento.

### 0.2. Tipos de error

Al momento de discretizar se introduce error conocido como **error de discretización**. Eso sucede porque se aproxima un campo *suave* con una función partida. Aumentar el numero de elementos puede disminuir este error pero nunca eliminarlo.

Aún reduciendo el error de discretización se tendría **error numérico** porque toda computadora usa números de finita precisión para efectuar aritmética. Este error suele ser mínimo cuando se discretiza de forma adecuada y no se tiene una situación física propensa al *mal condicionamiento*.

Cabe destacar que se introdujo error antes de hacer una sola cuenta! El **error de modelado** se introduce por necesidad de simplificar el problema. Las cargas puntuales, los soportes fijos y los materiales perfectamente homogéneos no existen en la realidad! [Cook et al. \[2007\]](#).

---

<sup>1</sup>Un modelo de FEA no es la realidad, es una *simulación*. Difícilmente se obtengan resultados buenos cuando se aplique FEA a un modelo matemático que no refleja la realidad de forma apropiada.

## 1. Principios básicos de elementos finitos

La ecuación que se resuelve es

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = F^{\text{externas}}$$

para un sistema mecánico. Es común tratar problemas estáticos tener como variables de entrada (conocidos) las fuerzas externas  $F^{\text{externas}}$  (peso propio, fuerzas aplicadas, fuerza centrífuga etc.) y la rigidez del sistema  $K$  y donde se buscan los desplazamientos  $d$ . La ecuación a resolver el sistema es

$$d = K^{-1} \cdot F^{\text{externas}}$$

El método de los elementos finitos entonces tiene su campo de rigidez  $K$  que se suele llamar la matriz de rigidez global  $[K]$ . Esta asocia rigidez con los grados de libertad de los nodos obtenidos de la discretización. Para cuerpos solidos en el espacio hay 6 grados de libertad, 3 de desplazamiento ( $u, v, w$ ) y tres de giro ( $\varphi, \theta, \psi$ ).

Antes de discretizar un modelo se eligen las direcciones  $x, y, z$  globales.

### Parte I

## Elementos 1D

### 2. Elemento barra

Uno puede pensar el elemento barra como un resorte que solo ejerce fuerza en la dirección en que apunta su eje local  $x$ .

$$[k]_{\text{barra}} = \begin{bmatrix} X & -X \\ -X & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad X = \frac{EA}{L} \quad (1)$$

si se acopla la matriz a  $[K]$  así como está solo otorga rigidez en la dirección  $x$  global. Si la barra en cuestión **no** es paralela al eje  $x$  global se tiene que rotar la barra según su orientación real. Si el modelo es plano, osea solo se modelan  $x$  e  $y$  global, se puede rotar la barra como visto en 4.

Para orientar una barra que se encuentra en el espacio se puede usar la matriz de rotación para una viga 3D con una leve modificación a la matriz de rigidez de la barra. Esta tiene que incluir todos los grados de libertad del problema! Es decir, la matriz  $[k]_{\text{barra}}$  termina siendo de  $12 \times 12$  para un problema de 6 grados de libertad por nodo.

$$k_{1,1} = k_{7,7} = X, \quad k_{7,1} = k_{1,7} = -X, \quad \text{las demás: } k_{i,j} = 0$$

Un lector mosca ser dará cuenta que la matriz de rigidez de la viga Timoshenko 3-D (expresión 2) es la generalización para todo elemento 1D: barras e incluso vigas en el plano<sup>2)</sup>

#### **Bar patch test**

Llegado a este punto en la lectura, el autor se imagina que el lector debe estar ansioso por poner a prueba sus conocimientos. La figura 1 describe un problema estático que se puede resolver con una breve análisis a mano alzada. Este tipo de problema se denomina *patch test* porque sirve para ensayar la calidad del elemento y método de resolución.

El *bar patch test* se puede mallar como un problema plano en el plano  $xy$  con dos nodos ( $x_1 = y_1 = x_2 = 0, y_2 = 1\text{m}$ ) y un elemento que los une. La rigidez del material entonces sería  $EA = 1\text{N}$ . Se aplican las condiciones de borde detalladas en la figura: se restringen  $u_1, v_1$  y  $u_2$  y se resuelve el sistema para obtener  $v_2$ . Con este patch test se verifica el método de resolución, la forma en que se rota la matriz de rigidez de la barra, la aplicación de cargas y el elemento en si.

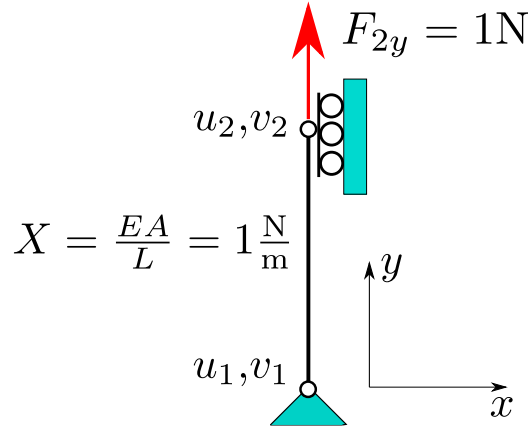


Figura 1: Un *bar patch test* para verificar un *solver* de elementos finitos.  $v_2 = 1\text{m}$ .

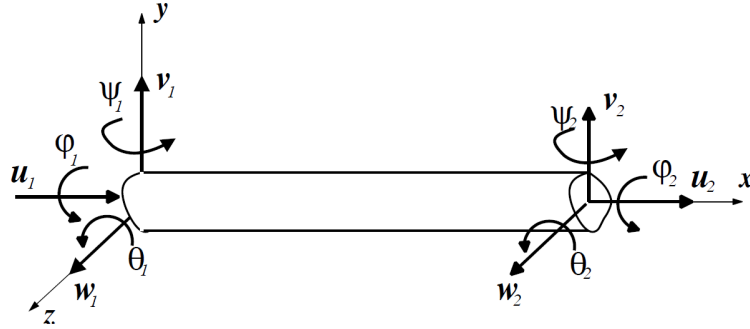


Figura 2: Grados de libertad (*dof*) y coordenadas locales de una viga 3D de dos nodos y 6 dof por nodo.

### 3. Viga 3D de Timoshenko

La viga de Timoshenko 3D tiene las siguientes funciones de forma (forma eficiente tomada de [Luo \[2008\]](#))

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = 1 - \xi \\ N_2 = \xi \end{array} \right\} \quad \text{Funciones de forma para barras}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{v_1} = \beta_y (2\xi^3 - 3\xi^2 + \alpha_y \xi + 1 - \alpha_y) \\ H_{v_2} = \beta_y (-2\xi^3 + 3\xi^2 - \alpha_y \xi) \\ H_{w_1} = \beta_z (2\xi^3 - 3\xi^2 + \alpha_z \xi + 1 - \alpha_z) \\ H_{w_2} = \beta_z (-2\xi^3 + 3\xi^2 - \alpha_z \xi) \\ H_{\theta_1} = L\beta_y [\xi^3 + (\frac{1}{2}\alpha_y - 2)\xi^2 + (1 - \frac{1}{2}\alpha_y)\xi] \\ H_{\theta_2} = L\beta_y [\xi^3 - (1 + \frac{1}{2}\alpha_y)\xi^2 + (\frac{1}{2}\alpha_y)\xi] \\ H_{\psi_1} = L\beta_z [\xi^3 + (\frac{1}{2}\alpha_z - 2)\xi^2 + (1 - \frac{1}{2}\alpha_z)\xi] \\ H_{\psi_2} = L\beta_z [\xi^3 - (1 + \frac{1}{2}\alpha_z)\xi^2 + (\frac{1}{2}\alpha_z)\xi] \\ G_{v_1} = \frac{6\beta_y}{L} (\xi^2 - \xi) \\ G_{v_2} = \frac{6\beta_y}{L} (-\xi^2 + \xi) \\ G_{w_1} = \frac{6\beta_z}{L} (\xi^2 - \xi) \\ G_{w_2} = \frac{6\beta_z}{L} (-\xi^2 + \xi) \\ G_{\theta_1} = \beta_y [3\xi^2 + (\alpha_y - 4)\xi + 1 - \alpha_y] \\ G_{\theta_2} = \beta_y [3\xi^2 - (\alpha_y + 2)\xi] \\ G_{\psi_1} = \beta_z [3\xi^2 + (\alpha_z - 4)\xi + 1 - \alpha_z] \\ G_{\psi_2} = \beta_z [3\xi^2 - (\alpha_z + 2)\xi] \end{array} \right.$$

<sup>2</sup>Las formulaciones de vigas en el plano más comunes son dos  $(v, \theta)$  y tres  $(u, v, \theta)$  grados de libertad por nodo.

donde  $x$  es la coordenada local sobre la viga:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \alpha_y = \frac{12EI_y}{kGAL^2}, \quad \beta_y = \frac{1}{1-\alpha_y}, \quad \alpha_z = \frac{12EI_z}{kGAL^2}, \quad \beta_z = \frac{1}{1-\alpha_z}$$

donde  $k$  es el **factor de corrección por corte**<sup>3</sup> y depende de la sección y del modulo de Poisson  $\nu$ . Algunos valores en la tabla 2.

Estas funciones de forma interpolan los desplazamientos sobre la viga:

$$\begin{cases} u = N_1 u_1 + N_2 u_2 \\ v = H_{v_1} v_1 + H_{\theta_1} \theta_1 + H_{v_2} v_2 + H_{\theta_2} \theta_2 \\ w = H_{w_1} w_1 + H_{\psi_1} \psi_1 + H_{w_2} w_2 + H_{\psi_2} \psi_2 \\ \varphi = N_1 \varphi_1 + N_2 \varphi_2 \\ \theta = G_{v_1} v_1 + G_{\theta_1} \theta_1 + G_{v_2} v_2 + G_{\theta_2} \theta_2 \\ \psi = G_{w_1} w_1 + G_{\psi_1} \psi_1 + G_{w_2} w_2 + G_{\psi_2} \psi_2 \end{cases}$$

para luego calcular los esfuerzos usando las mismas formulas vistas en estatica y resistencia de materiales.

$$\begin{aligned} M_z &= EI_z \frac{d^2 v}{dx^2}, & V_y &= \frac{dM_z}{dx} = EI_z \frac{d^3 v}{dx^3}, & N_x &= AE \frac{u_2 - u_1}{L} \\ T &= GJ_T \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{L}, & M_y &= EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}, & V_z &= EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} \end{aligned}$$

donde  $J_T$  es la constante torsional de la viga y  $A$  es la sección.<sup>4</sup>

La matriz de rigidez se puede obtener<sup>5</sup> integrando analíticamente a la funciones de forma mencionadas anteriormente sobre el largo de la viga. En este documento no se va tratar la matriz de rigidez que resulta de dicha integración. Se presenta al lector la matriz de rigidez de una viga Timoshenko 3D clásica Cook et al. [2007]:

$$[k]_{1D} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_1 & 0 & 0 & 0 & Y_2 & 0 & -Y_1 & 0 & 0 & 0 & Y_2 \\ 0 & 0 & Z_1 & 0 & -Z_2 & 0 & 0 & 0 & -Z_1 & 0 & -Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Z_2 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 & Z_2 & 0 & Z_4 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 & 0 & Y_3 & 0 & -Y_2 & 0 & 0 & 0 & Y_4 \\ -X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Y_1 & 0 & 0 & 0 & -Y_2 & 0 & Y_1 & 0 & 0 & 0 & -Y_2 \\ 0 & 0 & -Z_1 & 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & Z_1 & 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Z_2 & 0 & Z_4 & 0 & 0 & 0 & Z_2 & 0 & Z_3 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 & 0 & Y_4 & 0 & -Y_2 & 0 & 0 & 0 & Y_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \\ \theta_2 \end{matrix} \quad (2)$$

donde

$$\begin{aligned} X &= \frac{AE}{L}, & Y_4 &= \frac{2EI_z}{L}, & Y_3 &= 2Y_4, & Y_2 &= \frac{3Y_4}{L}, & Y_1 &= \frac{2Y_2}{L} \\ Z_4 &= \frac{2EI_y}{L}, & Z_3 &= 2Z_4, & Z_2 &= \frac{2Z_4}{L}, & Z_1 &= \frac{2Z_2}{L}, & S &= \frac{GJ_T}{L} \end{aligned}$$

## 4. Orientación de elementos 1D

Para orientar un elemento en el espacio para que proporcione la rigidez que corresponde se tiene que empezar de hablar de una *matriz de rotación*  $[T]$ .

<sup>3</sup>Ideado por Timoshenko en 1921 para permitir un mejor cálculo de las frecuencias naturales Dong et al. [2010].

<sup>4</sup>La constante torsional  $J_T$  es igual a  $I_p$  para secciones de viga circulares. Para perfiles abiertos de paredes delgadas, como por ejemplo un perfil doble T o un perfil 'C',  $J_T$  es mucho mas chico que  $I_p$ .

<sup>5</sup>Para una viga uniforme con sección simétrica y de material en su rango elástico.

$$[\mathbf{k}]_{\text{rotada}} = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{k}] [\mathbf{T}]$$

luego de ser rotada la matriz puede ser acoplada al sistema.

## Orientación de barras en el plano

La matriz de rigidez de una barra es definida horizontal. Esto significa que toda la rigidez está en  $x$ .

Una barra rotada  $\phi$  grados va tener una nueva rigidez en el eje global  $x$ , e incluso puede no tener rigidez si se rota 90 grados.

La matriz transformación de una barra en el plano está dada por

$$[\mathbf{T}]_{\text{Barra}} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 \\ \sin \phi & 0 \\ 0 & \cos \phi \\ 0 & \sin \phi \end{bmatrix}$$

## Orientación de vigas en el espacio

Para orientar una viga se tiene que aportar más información que para una barra. Mientras que una barra se puede orientar con el simple input de sus nodos, la viga de Timoshenko necesita orientar su eje  $y$  local además de su eje  $x$ .

Algunos programas como ADINA, por ejemplo, permiten al usuario especificar un nodo auxiliar o un vector auxiliar que apunta en la dirección en la cual se desea que la viga tenga mayor momento de inercia.

Supongamos que elegimos este vector auxiliar  $s_y = [0, 1, 0]$ . Esto nos va dar el mayor momento ante la flexión para una carga en  $y$  (suponiendo que  $I_z > I_y$ ). Para hallar la matriz de transformación  $[\mathbf{T}]$  debemos buscar los cosenos directores de nuestra viga en el espacio. Una vez que obtenemos el versor de orientación  $\hat{v}_x$  es trivial obtener el versor orientación en  $z$

$$\hat{v}_z = \frac{\hat{v}_x \times s_y}{\|\hat{v}_x \times s_y\|}$$

Luego de armar los versores  $\hat{v}_x$ ,  $\hat{v}_y$ ,  $\hat{v}_z$  se define la matriz de los cosenos directores  $\lambda$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \hat{v}_x \\ \hat{v}_y \\ \hat{v}_z \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

La matriz de transformación entonces es

$$[\mathbf{T}]_{1D} = \begin{bmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ & \lambda & \vdots \\ \vdots & & \lambda \\ 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (3)$$

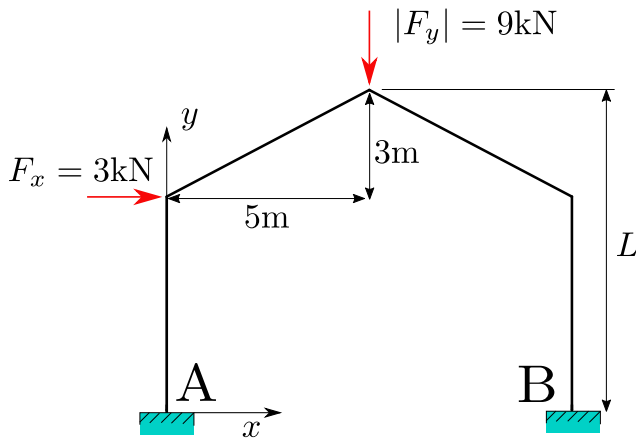
## 5. Ejercicios

### Pórticos

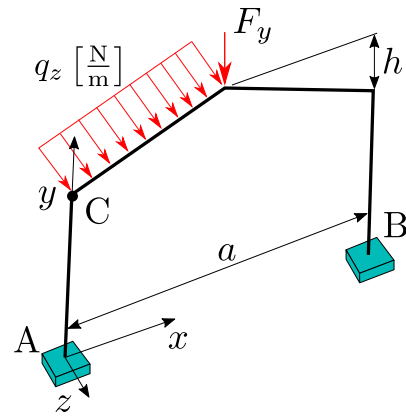
1. Para la figura 3a efectuar un modelo matemático y luego discretizar para resolver:

- Verificar que para el caso dado con  $F_x = 0$  las reacciones en  $y$  de los empotramientos son  $\frac{F_y}{2}$ .
- Se diseño el pórtico con una altura  $L = 7$  metros con perfiles IPN 160. Un análisis preliminar de una consultora sugiere que el punto superior supera los desplazamientos máximos permitidos de  $d_{\text{máx}} = 15\text{mm}$ . Verificar.
- ¿Que altura debería el pórtico así el punto superior no se desplaza mas que 26.7mm? Usar perfil IPB<sup>6</sup> 120. ¿Es esta la configuración de la figura 3a? (hint: si lo es)

<sup>6</sup>Se puede buscar también como perfil HEB.



(a) Pórtico de altura  $L$  a escala para el problema 1c



(b) Pórtico con una carga distribuida en dirección  $z$

Figura 3: Se considera  $E = 200\text{GPa}$ .

2. Para la figura 3b considerar perfiles HEB 340.

- Las reacciones considerando  $a = 12\text{m}$ ,  $h = 2\text{m}$  y una altura de  $8\text{m}$ .  $q_z = 500$  y  $F_y = 20\text{kN}$ .
- ¿Que orientación de vigas es favorable para reducir el desplazamiento del punto C?

Algunas Respuestas:

1b  $d = 0.0155\text{m}$ ,  $\{\mathbf{R}_A\} = \{1, 1; 4, 1; -1, 28\}\text{kN o kNm}$

2a  $\{\mathbf{R}_B\} = \{6; 2; -10; -0, 8; -6, 4; -0, 5; -16\}\text{kN o kNm}$ ,  $d_C = 2.38\text{mm}$

## Parte II

# Elementos 2D

## 6. Protips para el mallado

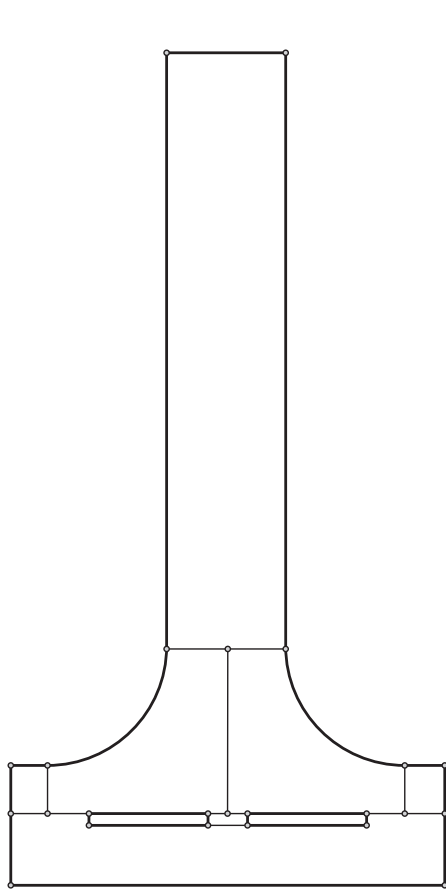
Para mallar como un pro, empezar dividiendo el dominio. Cosas a tener en mente:

- Donde está la sección de mi dominio que quiero estudiar? Puedo refinar en esa zona?
- Que orientacion va tener mi malla para cada division de dominio?
- Que forma tendrán mis elementos con una dada division? Habrá una mejor forma de dividir mi dominio así no tengo jacobianos estamboticos?

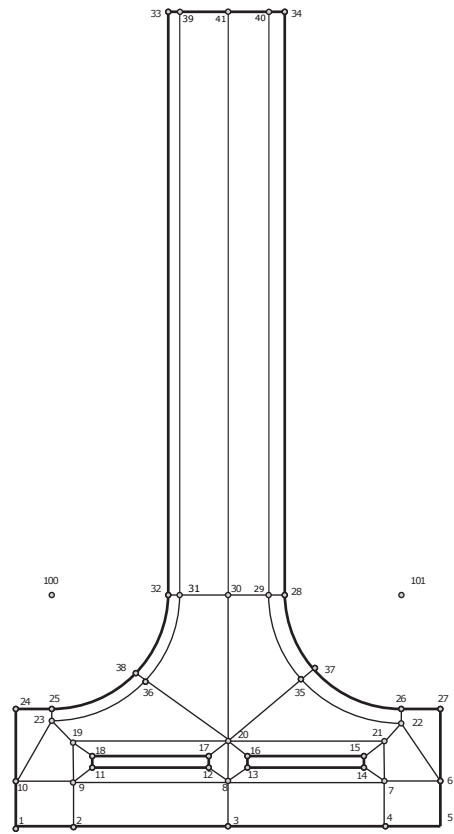
Protip: Necesitas saber que fuerza se tiene que hacer para que se mantenga en posición una arista o punto dado cargas térmicas/fuerza? Apoyalo (fix) y mira las reacciones con la carga térmica/fuerza.

## 7. Funciones de formas para elementos 2D

Se define cuantos nodos se va tener por elemento y se los ubica en el espacio  $(\xi, \eta)$  que por simplicidad se trataran como  $(x, y)$ . Con el triangulo de Pascal para polinomios se elige el grado del polinomio y los términos. Luego se resuelve el sistema de ecuaciones  $[\mathbf{N}] \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}$  donde  $[\mathbf{N}] = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n]$  y  $\mathbf{X} = [1 \ x \ y \ \dots \ x^{k-1}y^k \ x^k y^k]^T$ , o algo por el estilo. Se tienen que elegir los grados mas convenientes teniendo en cuenta la simetría y el número de nodos, este ultimo te limita el número de términos posibles por la naturaleza de la interpolación. La matriz  $\mathbf{A}$  tendrá en su **espacio fila** el mismo polinomio evaluado en la posición del nodo correspondiente a esa fila.



(a) Mallable con triángulos solamente.



(b) Se puede mallar con elementos cuadrilateros. No hay esquinas angulosas. Es posible obtener *una buena malla*. Los nodos 100 y 101 son auxiliares y no forman parte de la malla.

Figura 4: Dos formas de dividir una paleta de una turbina pelton que recibe un chorro incidente en su esquina superior derecha.

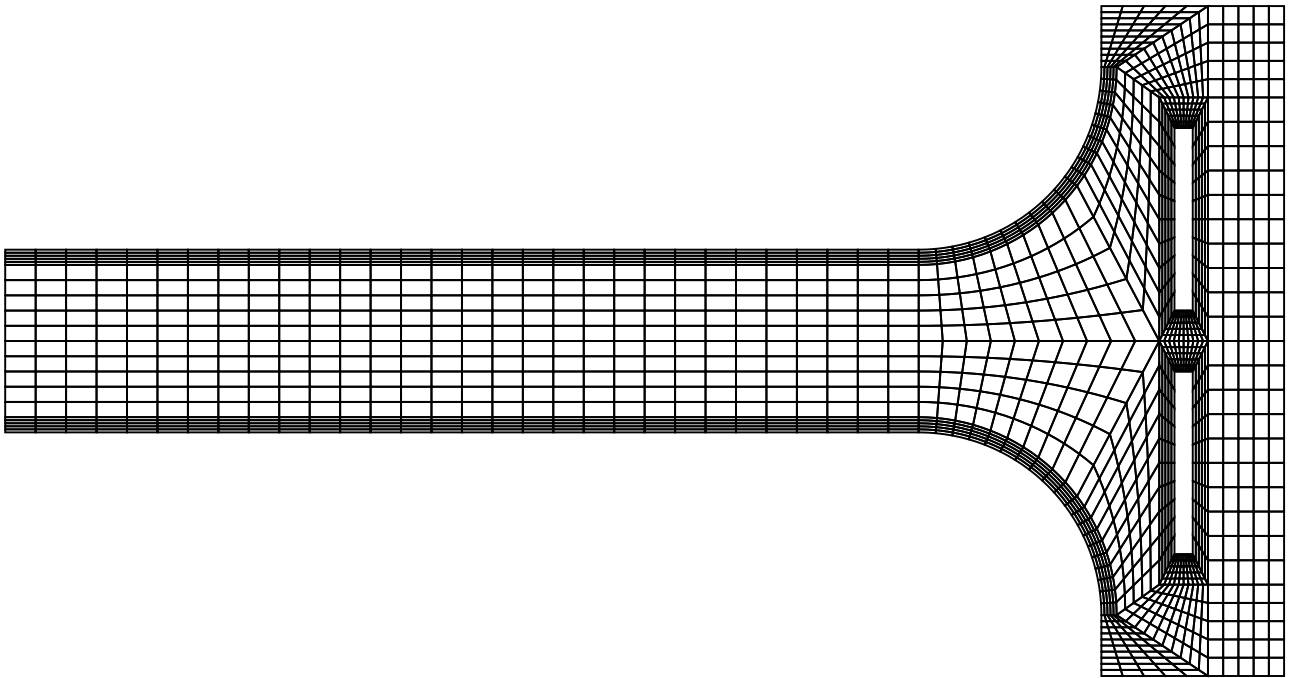


Figura 5: Ejemplo de malla usando divisiones de 4b. Se refina en los costados donde se tiene flexión.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & \dots & x_1^{k-1} y_1^k & x_1^k y_1^k \\ 1 & x_2 & y_2 & \dots & x_2^{k-1} y_2^k & x_2^k y_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & \dots & x_n^{k-1} y_n^k & x_n^k y_n^k \end{bmatrix}$$



Luego, las funciones de forma  $[\mathbf{N}]$  se pueden obtener así:  $[\mathbf{N}] = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}$

## 8. Cargas 2-D

La ecuación que rige como se cargan elementos, siendo  $\{\mathbf{r}\}$  las cargas nodales del elemento,  $\{\mathbf{F}\}$  fuerzas volumétricas,  $\{\Phi\}$  fuerzas de tracción superficiales,  $\{\epsilon_0\}$  las deformaciones iniciales y  $\{\sigma_0\}$  las tensiones iniciales (pg. 228)

$$\{\mathbf{r}\} = \int [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{F}\} dV + \int [\mathbf{N}]^T \{\Phi\} dS + \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] \{\epsilon_0\} dV - \int [\mathbf{B}] \{\sigma_0\} dV \quad (4)$$

## 9. Elementos isoparamétricos

- Un elemento que no esta distorsionado (sigue siendo rectangular) tiene  $J$  constante
- Cuidado con modo espurio. Ver tabla 6.8-1 pg. 226 el tema de full/reduced integration [Cook et al. \[2007\]](#)
- Como cargar tu elemento isoparamétrico en pg. 228

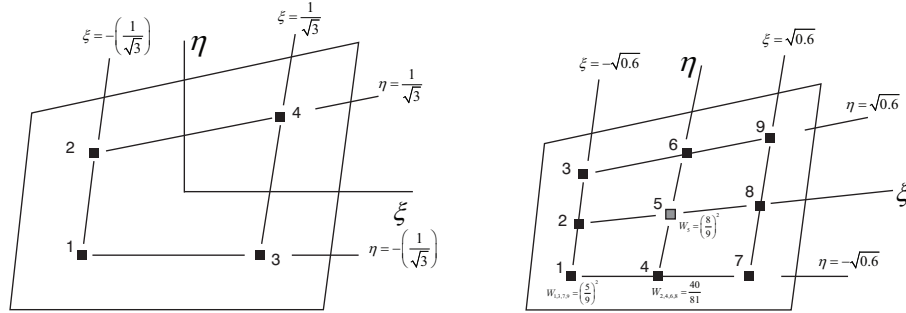


Figura 6: Puntos gauss para ordenes  $n = 2$  y  $n = 3$ . El peso para  $n = 2$  es igual en todos los puntos  $W_i = 1$

## 10. Ejemplo elemento exótico

### Matriz de Rigidez

Imaginemos un elementos Q5 cuadrado de  $2 \times 2$  con espesor  $t$  (igual al Q4 con un nodo en su centro). Si fuéramos a obtener las funciones de formas de dicho elemento quedarían iguales para  $(x, y)$  y para  $(\xi, \eta)$  por las dimensiones usadas. La funcionalidad que uno estaría tentado a seleccionar sería  $[1, x, y, x^2, y^2]$ , pero está trae problemas inesperados debido a que tiene varias soluciones en la interpolación. Como nuestra prioridad siempre es mantener la simetría la funcionalidad será  $[1, x, y, xy, x^2y^2]$ . Tomando el orden de la figura 7.

$$[\mathbf{N}] = \left[ \frac{x^2y^2}{4} + \frac{xy}{4} - \frac{x}{4} - \frac{y}{4}, \frac{x^2y^2}{4} - \frac{xy}{4} + \frac{x}{4} - \frac{y}{4}, \frac{x^2y^2}{4} + \frac{xy}{4} + \frac{x}{4} + \frac{y}{4}, \frac{x^2y^2}{4} - \frac{xy}{4} - \frac{x}{4} + \frac{y}{4}, 1 - x^2y^2 \right]$$

Llegado a este punto nos interesa obtener la matriz de rigidez. Si queremos lograr "full integration" deberíamos usar Gauss orden  $n = 3$  según  $2n - 1 \geq O([\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}])$ .  $[\mathbf{B}]$  es el *strain-deformation matrix*. El producto  $[\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}]$  da un polinomio de orden 6 ( $[\mathbf{B}]$  tiene el mismo orden que la derivada de  $[\mathbf{N}]$ ). De esta forma nos aseguramos que nuestro resultado va ser exacto para el elemento sin distorsionar.

Para este ejemplo, no se pide *full integration* entonces no pasa nada si queremos *underintegrate*. Usamos Gauss orden  $n = 2$ .

La rigidez de un elemento está dada por

$$[\mathbf{k}] = \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dV \quad (5)$$

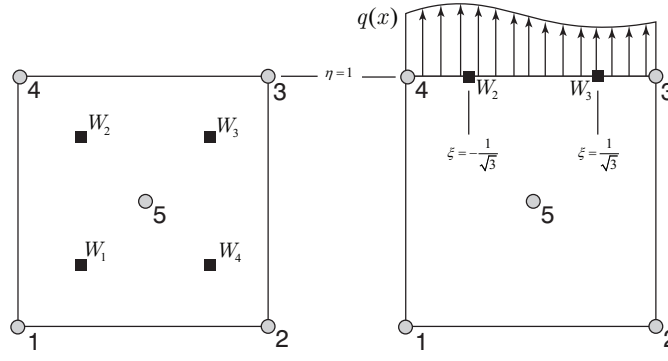


Figura 7: Elemento Q5 rectangular.

para un elemento plano la ecuación anterior es

$$[\mathbf{k}]_{2D} = \iint [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] t dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] t |\mathbf{J}| d\xi d\eta$$

donde  $[\mathbf{B}]$  es la matriz deformación-desplazamiento del elemento,  $[\mathbf{E}]$  es la matriz constitutiva, y  $|\mathbf{J}|$  es el determinante de la matriz Jacobiana, el cual se le suele decir simplemente el Jacobiano.

Este ultimo se calcula a partir de la derivada de las funciones de forma

### Carga de linea

Si el elemento está cargado sobre la linea 4-3 con una distribuida  $q(x)$  (en  $[N m^{-1}]$ ) entonces procedemos de la siguiente manera según el segundo término de (4):

$$r_{xi} = \int_{-1}^1 N_i (\tau \mathbf{J}_{11} - \sigma \mathbf{J}_{12}) t d\xi \quad (6)$$

$$r_{yi} = \int_{-1}^1 N_i (\sigma \mathbf{J}_{11} + \tau \mathbf{J}_{12}) t d\xi \quad (7)$$

donde  $\sigma$  es la sollicitación normal a la superficie y  $\tau$  es la tangencial. Para la fuerza sobre el nodo 4 se tiene

$$r_{y4} = N_4(\xi_2) t [\sigma(\xi_2) \mathbf{J}_{11} + \tau(\xi_2) \mathbf{J}_{12}] \cdot \mathbf{W}_2 + N_4(\xi_3) t [\sigma(\xi_3) \mathbf{J}_{11} + \tau(\xi_3) \mathbf{J}_{12}] \cdot \mathbf{W}_3$$

Si consideramos que solo hay una *carga distribuida de linea* a tracción/compresión como indica la figura 7, se reduce la ecuación anterior

$$r_{y4} = N_4(\xi_2) \mathbf{J}_{11} q(\xi_2) + N_4(\xi_3) \mathbf{J}_{11} q(\xi_3) = N_4 q \mathbf{J}_{11} \Big|_{\xi_2} + N_4 q \mathbf{J}_{11} \Big|_{\xi_3}$$

similarmente  $r_{y3} = N_3 q \mathbf{J}_{11} \Big|_{\xi_2} + N_3 q \mathbf{J}_{11} \Big|_{\xi_3}$  donde la matriz Jacobiana también se evalúa para cada punto de Gauss!

### Tensiones

- Las tensiones en los nodos suele ser de mayor interés que sobre los puntos de gauss (mas comprometidas, permiten estimar error)

## 11. Elementos Axisimetricos

Resuelvo problema 3-D en el plano. Los resultados son por cada unidad radian. Como sigo teniendo dos grados de libertad tengo las mismas funciones de forma. Cambia mi operador derivada.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & f & f & 0 \\ & 1 & f & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{sim.} & & & g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde

$$f = \frac{\nu}{1-\nu} \quad y \quad g = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

Una carga puntual  $P$  aplicada sobre un elemento axisimétrico no tiene el mismo significado físico que en elementos plane stress/strain.

$$P = 2\pi r q$$

donde  $q$  es la carga distribuida en [N/m],  $r$  es la distancia al eje de revolución y  $2\pi$  es el resultado de integrar la fuerza distribuida sobre  $\theta$ .

$$\{\mathbf{r}_e\} = \int \int_{-\pi}^{\pi} [\mathbf{N}]^T \begin{Bmatrix} \rho r \omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix} r d\theta dA$$

### Parte III

## Otras cosas

### 12. Desplazamientos iniciales

Si nuestro sistema tiene desplazamientos iniciales conocidos se puede formular un sistema a resolver:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{cc}] & [\mathbf{K}_{cx}] \\ [\mathbf{K}_{xc}] & [\mathbf{K}_{xx}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{D}_c\} \\ \{\mathbf{D}_x\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{R}_x\} \\ \{\mathbf{R}_c\} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Note que para los nodos donde se conocen los desplazamientos (los nodos cc) *se desconocen las cargas*.

$$\{\mathbf{D}_x\} = [\mathbf{K}_{xx}]^{-1} (\{\mathbf{R}_x\} - [\mathbf{K}_{xc}]\{\mathbf{D}_c\})$$

luego de obtener los desplazamientos desconocidas se puede obtener las cargas desconocidas (sobre los nodos conocidos):

$$\{\mathbf{R}_c\} = [\mathbf{K}_{cx}]\{\mathbf{D}_x\} + [\mathbf{K}_{cc}]\{\mathbf{D}_c\}$$

#### 12.1. Subestructuras

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_A \\ D_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A \\ R_B \end{bmatrix}$$

$$D_B = K_{BB}^{-1}(R_B - K_{BA}D_A)$$

$$D_A = K_{AA}^{-1}(R_A - K_{AB}D_B)$$

#### 12.2. Pitfalls

MATLAB

- Antes de aplicar carga distribuida, verificar la orientación del elemento con sus nodos  $(\xi, \eta)$
- 

#### 12.3. Error

Tipos de error:

- Modelado
- Bugs
- Error de usuario
- Error de discretización

- Error de redondeo/truncado
- Error de manipulación
- Error numérico (combinación de los dos anteriores)

Cálculo Tensiones en puntos superconvergencia (Gauss orden 1 para Q4, y Gauss orden 2 aproxima para Q8).

Extrapolo tensiones superconvergentes a los nodos ( $\sigma^*$ ).

Energía de deformación.

Se suele requerir que  $\eta \leq 0,05$

$$\|U\|^2 = \sum_{i=1}^m \int_{v_e} \{\epsilon\}_i^T [E] \{\epsilon\}_i dV$$

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m \int_{v_e} (\{\epsilon^*\}_i - \{\epsilon\}_i)^T [E] (\{\epsilon^*\}_i - \{\epsilon\}_i) dV$$

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m \int_{v_e} (\{\sigma^*\}_i - \{\sigma\}_i)^T [E]^{-1} (\{\sigma^*\}_i - \{\sigma\}_i) dV$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\|e\|^2}{\|e\|^2 + \|U\|^2}}$$

### 13. Transferencia de Calor

Tenemos el flujo de calor que es  $\underline{K} \nabla T$ , la divergencia de esto es el flujo neto que pasa por un punto.

$$\nabla(\underline{K} \nabla T) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

Ley de Newton:

$$q_c = h_c(s, T)(T - T_\infty)$$

Ley de Stefan Boltzmann

$$q_r = \epsilon_r \sigma (T^4 - T_\infty^4)$$

Es mas jodido el tema de modelar temperaturas fijas e imponer calor transferido, pues son aseveraciones no tan reales como imponer desplazamiento cero sobre un apoyo y fuerzas sobre vigas.

Para aplicar conveccion

Hay una parte que depende de la temperatura interna, la parte que no depende la deixo como vector de cargas. La parte que depende la tengo que sumar a mi matriz de conductividades

$$R_{C_i} = \oint_{\Gamma_{conv}} N_i h (T(x) - T_{fl}) d\gamma$$

Lo escribe sebas:  $kT = q_c = HT - RT_{fl} \longrightarrow (K - H)T = -RT_{fl}$

$$\text{Cargas : } R_H : \oint_{\Gamma_{conv}} N_i h T_{fl} d\gamma \quad \text{Conductividad : } K : \oint_{\Gamma_{cm}} N_i h N_j d\gamma$$

#### 13.1. Resolución de problemas típico

Condiciones de borde de temperatura

$$\{T_x\} = [K_{xx}]^{-1} (\{Q_x\} - [K_{xc}]\{T_c\})$$

luego de obtener las temperaturas desconocidas se puede obtener el flujo desconocido (sobre los nodos conocidos):

$$\{Q_c\} = [K_{cx}]\{T_x\} + [K_{cc}]\{T_c\}$$

## 14. Formulación elemento Hexaedro de 8 nodos

El modelado con elementos isoparamétricos hexaedros de 8 nodos es un buen punto de partida para comenzar a manejar los elementos finitos en 3 dimensiones. Un código hecho para obtener  $[K]$  con elementos H8 se adapta con facilidad para los H20.

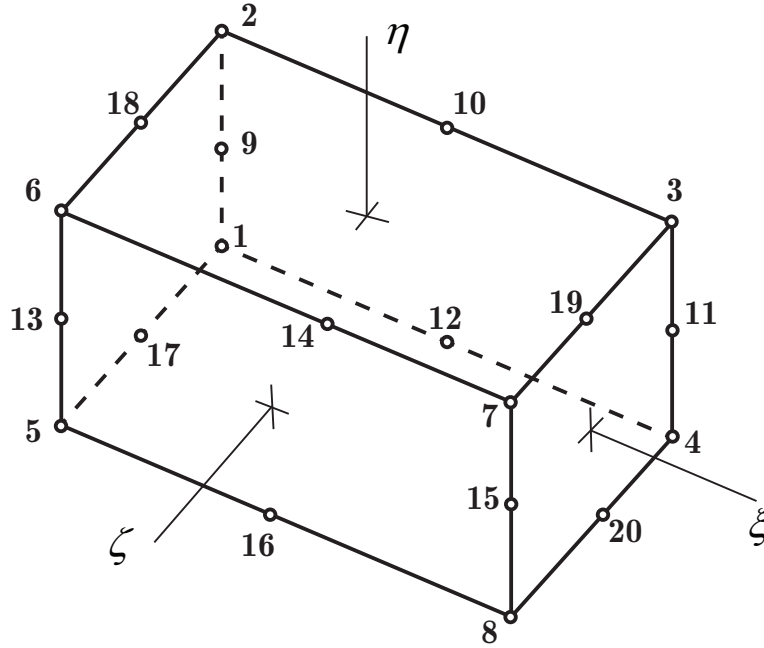


Figura 8: Numeración de nodos H20 en ADINA(Ejes sugeridos)

Cada nodo tendrá 3 grados de libertad, dándonos 24 dof por elemento. El elemento H20 de la figura 8 esta planteado de tal forma que los primeros nodos del 1 al 8 son los nodos del H8 que se va formular a continuación.

La funcionalidad a usar es la siguiente

$$X_{H8} = [1, \xi, \eta, \zeta, \xi\eta, \xi\eta\zeta, \xi\eta\zeta]$$

y la matriz constitutiva para el espacio 3D con 3 dof por nodo se escribe:

$$[E] = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad [E]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  y  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  y  $f = 2 + 2\nu$ .

### 14.0.1. Formulación elementos

El jacobiano tiene la forma

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

pudiendo ser calculado de la siguiente forma

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi}[\mathbf{N}] \\ \frac{\partial}{\partial \eta}[\mathbf{N}] \\ \frac{\partial}{\partial \zeta}[\mathbf{N}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 \\ x_7 & y_7 & z_7 \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde la primer matriz termina siendo  $3 \times 8$  para un elemento H8. La segunda matriz son las posiciones *globales* de los nodos del elemento. El jacobiano se puede entonces utilizar para calcular

$$[\partial \mathbf{N}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{N}] \\ \frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{N}] \\ \frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{N}] \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi}[\mathbf{N}] \\ \frac{\partial}{\partial \eta}[\mathbf{N}] \\ \frac{\partial}{\partial \zeta}[\mathbf{N}] \end{bmatrix} \quad (11)$$

con lo obtenido se puede calcular la matriz  $[\mathbf{B}]$ .

La matriz *strain-deformation* queda

$$[\mathbf{B}] = [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4 \quad B_5 \quad B_6 \quad B_7 \quad B_8]$$

donde

$$B_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial z \\ 0 & \partial N_i / \partial z & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z & 0 & \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Finalmente un calcula la rigidez del elemento usando (5).

## Parte IV

# No-linealidad y análisis dinámico

## 15. Respuesta dinámica estructural

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{D}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{D}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}^{\text{ext}}\} \quad (13)$$

Se puede resolver la ecuación de arriba para un sistema dado sin amortiguamiento y sin cargas externas<sup>7</sup> para obtener sus frecuencias naturales y los modos asociados a estos.

$$\{\mathbf{D}\} = \{\bar{\mathbf{D}}\} \sin \omega t, \quad \{\ddot{\mathbf{D}}\} = -\omega^2 \{\bar{\mathbf{D}}\} \sin \omega t$$

sin considerar la matriz de amortiguamiento se obtiene el problema de autovalores:

$$([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}])\{\bar{\mathbf{D}}\} = \{\mathbf{0}\}$$

donde  $\omega^2$  es un autovalor y la raíz de estos son las frecuencias naturales.

Amortiguamiento  $[\mathbf{C}] = \alpha[\mathbf{M}] + \beta[\mathbf{K}]$  cede una matriz no diagonal. Se complica la resolución. Existen dos otros modelos que tratan con una matriz  $[\mathbf{C}_\Phi]$  diagonal donde las ecuaciones se desacoplan.

<sup>7</sup>Se denomina vibración “libre” cuando no hay cargas asociadas. Si no hay amortiguamiento el desplazamiento es regido por  $u = \bar{u} \sin \omega t$ , donde  $\bar{u}$  es la amplitud de vibración y  $\omega$  es la frecuencia circular Cook et al. [2007].  $\omega$  es obtenida en radianes por segundo.

Amortiguamiento Modal: Se elige un  $\zeta$  para cada modo

$$[\mathbf{C}_\Phi] = \begin{bmatrix} 2\omega_n \zeta_n & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega_1 \zeta_1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Amortiguamiento proporcional. Se basa el análisis

$$[\mathbf{C}_\Phi] = [\Phi]^T (\alpha [\mathbf{M}] + \beta [\mathbf{K}]) [\Phi] = \alpha \delta [\mathbf{I}] + \beta [\Omega^2] \quad (15)$$

Si se quiere estudiar un rango de frecuencias de excitación tal que  $\omega_{\text{exc}} \in [\omega_1, \omega_2]$  y eligiendo dos valores de damping para ambas frecuencias  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  se tiene:

$$\alpha = 2\omega_1 \omega_2 (\zeta_1 \omega_2 - \zeta_2 \omega_1) / (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

$$\beta = 2(\zeta_2 \omega_2 - \zeta_1 \omega_1) / (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

Una vez obtenida  $[\mathbf{C}_\Phi]$  se pueden obtener los desplazamientos modales  $\{\mathbf{Z}\}$ . Tome en cuenta que debido a la diagonalidad de  $[\Omega^2]$  y  $\{\mathbf{R}_\Phi\}$  se desacoplan las ecuaciones de 13 y por ende se pasa a tratar dichas matrices diagonales como vectores columnas. Una vez desacopladas se tiene

$$\{\ddot{\mathbf{Z}}\} + 2\{\Omega\}\{\mathbf{C}_\Phi\}\{\dot{\mathbf{Z}}\} + \{\Omega^2\}\{\mathbf{Z}\} = \{\mathbf{R}_\Phi\}$$

$$\{\mathbf{Z}\} = \frac{\{\mathbf{R}_\Phi\}}{\{\Omega^2\} \sqrt{(1 - \chi^2)^2 + (2\{\mathbf{C}_\Phi\}\chi)^2}}$$

donde  $\chi = \frac{\omega_{\text{exc}}}{\{\Omega\}}$ .

### 15.1. Sine Sweep

A medida que la frecuencia de excitación aumenta la *amplitud del sistema disminuye*<sup>8</sup>. Es interesante pensar que si aumentara no tendría sentido buscar las frecuencias naturales porque estas son caracterizadas por un máximo de amplitud. Las curvas del barrido de frecuencia son decrecientes en lejanía de una frecuencia natural porque para una fuerza cíclica  $F(t) = F_0 \sin \omega t$  el tiempo que actúa en una dirección es inversamente proporcional a la frecuencia. Por ende la estructura no tiene tiempo para moverse lejos antes de que se invierta la dirección de la fuerza.

## 16. Transferencia de calor no-lineal y transitoria

### Radiacion

Cuando se tienen problemas de radiación se puede iterar para obtener el perfil usando **relajación**.

$$\begin{cases} \{\mathbf{T}_x\}_{\text{unrelaxed}}^{n+1} = [\mathbf{K}_{xx}]^{-1} (\{\mathbf{R}_x\}^n - [\mathbf{K}_{xc}]\{\mathbf{T}_c\}^n) \\ \{\mathbf{R}\}^n = \{\mathbf{R}_{\text{generado}}\} + \{\mathbf{R}_{\text{rad}}\}^n \\ \{\mathbf{T}\}^{n+1} = \{\mathbf{T}\}^n + \frac{1}{k_R} \cdot (\{\mathbf{T}\}_{\text{unrelaxed}}^{n+1} - \{\mathbf{T}\}^n) \end{cases} \quad (16)$$

donde  $k_R$  es la relajación o factor de atenuación de temperaturas. Cuanto mayor es más “amortiguada” es la convergencia del perfil. Se puede asegurar la convergencia de la solución pero a la vez será más lenta a mayores  $k_R$ .

### Método Galerkin

$$\int_{\Omega} -N_i k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - N_i q \, d\omega = 0$$

Se le ocurrió a alguien derivar respecto a K

<sup>8</sup>Excepto en cercanías de una frecuencia natural

$$(I) \frac{\partial (N_i k \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + N_i k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

e integro en el volumen

Lo que tenemos abajo es el integral de flujo de calor en la frontera (ultimo termino).  $k \frac{\partial T}{\partial x}$  es el flujo de calor en direccion x.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial (N_i k \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial (N_i k \frac{\partial T}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial (N_i k \frac{\partial T}{\partial z})}{\partial z} d\omega = \oint_{\Gamma} N_i k \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} ds$$

$$T = N_j T_j$$

$N_j$  y  $N_i$  representan dos cosas.  $N_j$  nos da el perfil termico. Abajo multiplican entre ellas cruzadamente.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} k \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j + \frac{\partial N_i}{\partial y} k \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j + \frac{\partial N_i}{\partial z} k \frac{\partial N_j}{\partial z} T_j - \int_{\Omega} N_i Q d\omega - \oint_{\Gamma} N_i q_{\bar{n}} ds = 0$$

Temperature-Heat flux matrix [B]:

Para 2D Q4

$$[B] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

## Transitorio

Matriz capacidad

$$[C] = \int_{\Omega} [N]^T \rho c [N] d\omega$$

El calculin

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = \{R_B\} + \{R_Q\} = \{R_T\} = [C] = \int_{\Omega} [N]^T \rho c [N] d\omega$$

Sebas dice  $C\dot{T} + kT = R$ . Cuando esta en equilibrio? En tiempo  $n$  esta en equilibrio tal que  $C\dot{T}^n + kT^n = R^n$ , si podemos calcular el tiempo  $n+1$  entonces podemos resolver el problema transitorio. Con un *peso* (que llamamos beta) podemos darle mas bola al tiempo  $n$  o el tiempo  $n+1$ .  $(T^{n+1} - T^n)/\Delta t = \dot{T}^{n+\beta}$  es lo que puedo calcular. Si  $\beta = 1$  entonces

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = \dot{T}^{n+1}$$

y si  $\beta = 0$

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = \dot{T}^n$$

$$\dot{T}^{n+\beta} = (1-\beta)\dot{T}^n + \beta\dot{T}^{n+1}$$

$$\dot{T}^{n+1}$$

Si a beta le digo que vale cero el futuro muere en cambio si beta vale 1 entonces TODO depende del futuro.

$$\beta[C]\{\dot{T}\}^{n+1} + (1-\beta)[C]\{\dot{T}\}^n + [K]\beta\{T\}^{n+1} + [K](1-\beta)\{T\}^n = (1-\beta)\{R_T\}^n + \beta\{R_T\}^{n+1}$$

Ecuación iterativa:

$$\{\mathbf{T}\}^{n+1} = ([C] + \Delta t \beta [K])^{-1} \left( ([C] - \Delta t (1-\beta) [K]) \{\mathbf{T}\}^n + \Delta t ((1-\beta)\{\mathbf{R}\}^n + \beta\{\mathbf{R}\}^{n+1}) \right) \quad (17)$$

$\beta = 0$	Euler Forward Difference
$\beta = 0.5$	Crank Nicholson
$\beta = 0.666$	Galerkin
$\beta = 1$	Backward Difference



La estabilidad es pedir que los autovalores de  $A$  sean menores que 1. donde

$$[A] = ([C] + \Delta t \beta [K])^{-1} ([C] - \Delta t (1 - \beta) [K])$$

Estabilidad 1-D:

$$A = \frac{c - \Delta t (1 - \beta) k}{c + \Delta t \beta k} = \frac{1 - \Delta t (1 - \beta) \omega}{1 + \Delta t \beta \omega}$$

Donde

$$\omega = \frac{k}{c}$$

tal que

$$\left| \frac{1 - \Delta t \omega + \Delta t \beta \omega}{1 + \Delta t \omega} \right| < 1$$

$$1 - \Delta t \omega + \Delta t \beta \omega > -1 - \Delta t \beta \omega$$

$$2 - \Delta t \omega + 2 \Delta t \beta \omega > 0$$

$$2 + (-1 + 2\beta) \Delta t \omega > 0$$

$$(-1 + 2\beta) \Delta t \omega > -2$$

$$\Delta t \omega > \frac{-2}{-1 + 2\beta}$$

Si beta es menor a un medio entonces siempre es positivo y por lo tanto no importa el paso de tiempo que tome siempre va converger.

Si beta es 0 te queda que es inestable. CORREGIDO  $\lambda > -1$  por ende la desigualdad de abajo te puede quedar positiva o negativa dependiendo del valor de  $\beta$

$$\Delta t \omega (2\beta - 1) > -2$$

## 17. Analisis Dinámico

Es cuasiestatico cuando la deformacion avanza

Cargas armonicas: Analizo respuesta de la estructura ante cada modo.

Aumentar damping disminuye la amplitud del motor, pero a la vez lo que le otorga damping se convierte rigido y toma reacciones.

Para simular transitorio podemos usar la descomposicion modal con metodos numericos usando runge kutta... porque ahora tengo una particular... la funcion

Ahora pueden variar de cualquier manera:

$$D = D(x, y, z, t) = N(x, y, z) D(t)$$

Desarrollamos  $D$  en serie Taylor.

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \Delta x + \frac{1}{2} \dots$$

Con las ecuaciones de taylor despejadas para  $n+1$  y  $n-1$  puedo adivinar el futuro con el presente (y pasado).

$$\{D\}_{n+1} = \{D\}_{n-1} + 2\Delta t \{\dot{D}\}_n$$

Sin conocer  $\dot{D}_n$  esta dificil... uso taylor otra vez!

$$\left[ \frac{M}{\Delta t^2} + \frac{C}{2\Delta t} \right] \{D\}_{n+1} = \{R^{ext}\}_n - [K] \{D\}_n + \frac{2}{\Delta t^2} [M] \{D\}_n - \left[ \frac{M}{\Delta t^2} - \frac{C}{2\Delta t} \right] \{D\}_{n-1}$$

donde  $\{R^{ext}\}$  puede ser una función en el tiempo también! Una funcion heaviside excita TODOS los modos.

Optimización: No hay mucho que se pueda hacer. Es super complicated

Se presentan al lector dos formas de resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} [M] \dot{V} + [C] V + [K] \{D\} = \{R^{ert}\} \\ \{\dot{D}\} = \{V\} \end{cases}$$

## Métodos de resolución

Integración directa. Resuelve 13.

$$\begin{cases} \{\mathbf{V}\}^{n+1} = \{\mathbf{V}\}^n + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{M}]^{-1} (\{\mathbf{R}^{\text{ext}}\} - [\mathbf{C}]\{\mathbf{V}\} - [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\}) \\ \{\mathbf{D}\}^{n+1} = \{\mathbf{D}\}^n + \frac{\Delta t}{2} \{\mathbf{V}\} \end{cases}$$

RUNGE KUTTA

Tengo que resolver las dos ecuaciones simultáneamente

$$\begin{cases} \{\mathbf{V}\}^{n+1} = \{\mathbf{V}\}^n + \frac{\Delta t}{6} (\{\dot{k}_1^{\dot{V}}\} + 2\{\dot{k}_2^{\dot{V}}\} + 2\{\dot{k}_3^{\dot{V}}\} + \{\dot{k}_4^{\dot{V}}\}) \\ \{\mathbf{D}\}^{n+1} = \{\mathbf{D}\}^n + \frac{\Delta t}{6} (\{\dot{k}_1^{\dot{D}}\} + 2\{\dot{k}_2^{\dot{D}}\} + 2\{\dot{k}_3^{\dot{D}}\} + \{\dot{k}_4^{\dot{D}}\}) \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} \{\dot{k}_1^{\dot{V}}\} = [\mathbf{M}]^{-1} (\{\mathbf{R}^{\text{ext}}\}^n - [\mathbf{C}]\{\mathbf{V}\}^n - [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\}^n) \\ \{\dot{k}_1^{\dot{D}}\} = \{\mathbf{V}\}^n \\ \{\dot{k}_2^{\dot{V}}\} = [\mathbf{M}]^{-1} (\{\mathbf{R}^{\text{ext}}\}^{n+\frac{1}{2}} - [\mathbf{C}](\{\mathbf{V}\}^n + \frac{\Delta t}{2} \{\dot{k}_1^{\dot{V}}\}) - [\mathbf{K}](\{\mathbf{D}\}^n + \frac{\Delta t}{2} \{\dot{k}_1^{\dot{D}}\})) \\ \{\dot{k}_2^{\dot{D}}\} = \{\mathbf{V}\}^n + \frac{\Delta t}{2} \{\dot{k}_1^{\dot{V}}\} \\ \{\dot{k}_3^{\dot{V}}\} = [\mathbf{M}]^{-1} (\{\mathbf{R}^{\text{ext}}\}^{n+\frac{1}{2}} - [\mathbf{C}](\{\mathbf{V}\}^n + \frac{\Delta t}{2} \{\dot{k}_2^{\dot{V}}\}) - [\mathbf{K}](\{\mathbf{D}\}^n + \frac{\Delta t}{2} \{\dot{k}_2^{\dot{D}}\})) \\ \{\dot{k}_3^{\dot{D}}\} = \{\mathbf{V}\}^n + \frac{\Delta t}{2} \{\dot{k}_2^{\dot{V}}\} \\ \{\dot{k}_4^{\dot{V}}\} = [\mathbf{M}]^{-1} (\{\mathbf{R}^{\text{ext}}\}^{n+1} - [\mathbf{C}](\{\mathbf{V}\}^n + \Delta t \{\dot{k}_3^{\dot{V}}\}) - [\mathbf{K}](\{\mathbf{D}\}^n + \Delta t \{\dot{k}_3^{\dot{D}}\})) \\ \{\dot{k}_4^{\dot{D}}\} = \{\mathbf{V}\}^n + \Delta t \{\dot{k}_3^{\dot{V}}\} \end{cases}$$

Espectro de respuesta

Gráfico  $\ddot{u}-\omega$  muestra las cargas que podría estar sometido tu sistema.

A frecuencias mas altas la diferencia entre las Z es mayor:

$$S_i = \frac{Z_i^{\text{máx}}}{Z_i^{\text{st}}}$$

Ataco el sistema con un “Paquete” de cargas y cada modo responde de su propia forma. Este metodo Sebas le dice Random. Se suele usar para sistemas tipo placas en satelites, donde tenes todas las plaquetas vibrando y no conoces que esta pasando ahi. Para estructuras no tanto porque son más estables y se conoce mejor que puede llegar a ser el modo de vibración porque los modos de vibracion estan bien separados-> cosa que no es verdad en satelites.

$$D(t)j = [\Phi]\{Z(t)\} = \sum_j j\Phi_{ji}Z_i(t) = \sum_j \Delta_{ji}(t)$$

Voy a tener un desplazamiento máximo cuando los modos esten todos en su máximo... pero eso sucede cuando están en fase, cosa que nunca sucede porque siempre hay algun desfase. Hay criterios para determinar el desplazamiento máximo, una incluye sumando la primer autoforma que es la más grande y luego sumando cuadrados mínimos de las otras. Con esto te cubris de la tensión que podría llegar a ocurrir ().

## 18. No linealidad

Porque cuando deformas una regla aumenta la rigidez? En parte porque cambia la geometria (a una viga curva) y porque hay tensiones remanentes al deformarse. Las tensiones remanentes se pueden pensar como una cuerda de guitarra que al ser tensionada son mas 'rigida' las cuerdas, cuesta mas deformar...

Cargando por desplazamientos no me pierdo de soluciones intermedias, como por ejemplo una viga que pandea deja de tomar fuerzas hasta que se la vuelve a deformar suficiente. Conviene no cargar por fuerzas! Cook et al. [2007]

Método variacional: Lo que buscamos es un estado de energia minima para el sistema, y como para obtener la energia tenemos que integrar se requiere integrar todo el sistema. Buscamos un punto donde el funcional sea estable. Decimos que toda la energia interna es igual al trabajo externo.

Formula resuelta en Resistencia de materiales

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - q = 0$$

Formula resuelta en elementos finitos

$$\Phi = \int_0^L \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 - q v dx \rightarrow \delta \Phi = 0$$

Para resolver variacionalmente necesitamos un potencial. Necesitamos saber como se almacena la energia. Con plasticidad pierdo energia, se entrega a la pieza de la forma de deformacion permanente.

Segun el principio de los trabajos virtuales. Lo que en verdad estamos escribiendo es un equilibrio de fuerzas, porque me estoy preguntando el estado final y si esta en equilibrio haciendo el calculo "si me muevo un cachito cuanto trabajo hago?". Entonces no estoy mirando los procesos disipativos!

Como hago para los fluidos si quiero aplicar PTV a fluidos? Tienes que plantear el Principio de trabajo virtual, lo mismo pero ahora con el tiempo ahi metido.

Hu-Washizu

$$\int_{V^e} \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}^T (\nabla \mathbf{u}) - \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{u} \right] dV - \int_{S_G^e} \bar{\mathbf{T}}^T \mathbf{u} dS$$

Separa parte elastica, deformaciones iniciales, etc. Sebas lo uso para que elementos Q6 pasen el Patch test.

### 18.1. Residuos Ponderados

Y si no tengo la fisica? Balance de una viga de seccion  $A$  con carga  $q$ .

$$A \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + q = 0$$

Pero el ultimo elemento de la viga esta sometido a carga  $P$ . La condicion de borde natural es:

$$AE \frac{\partial u}{\partial x} = P$$

Una condicion de borde comun seria  $u = 0$  sobre el empotramiento.

Soy vidente y digo que  $\tilde{u} = a_1 x + a_2 x^2$ . el mon o es por aproximada

Metiendolo en el PDE obtengo ecuaciones y resuelvo por los  $a$ . Si tienes mucha suerte los Residuos te dan cero tienes mucha suerte y lo que tienes en tus manos es una solucion al sistema. El residuo te dice cuanto error estas cometiendo.  $R_s = 0$  vale cero siempre porque es una condicion que impusimos.

Que hago? Calculo para que en  $x = x_0$  el residuo valga cero (Sebas dice en  $x = L/3$ ).

Hago una grilla de puntos y pido que se cumpla la ecuacion en ellos.

Si planteo que el integral de  $R$  valga cero entonces como que coloc un punto en  $x = L/2$ . Colocacion por puntos, es rapido y medio chotenguí, pero anda bien en una malla fina.

Metodo cuadrado minimos busca reducir el  $R$  violentamente. Integro el residuo al cuadrado mas el residuo en la condicion de borde al cuadrado multiplicado por un factor que puedes multiplicarlo por grandes numero par a que se cumpla forzadamente.  $1/L^2$  te da unidades correctas para dicho factor  $\alpha$

Galerkin: Las condiciones de borde naturales se llaman asi porque no las ves, pero estan metidas ahi en la ecuacion. a diferencia de las comunes que las eligo yo.

Porque co'no meto una funcion a multiplicar el residuo? Porque esta proyectando de tal forma de que valga cero. Si soy inteligente para proectar voy a lograr que las proyecciones sean nulas.

Al vector puedo descomponerlo en dos direcciones. Proyectamos tal que nos de cero en ciertas direcciones. Depende de cuantos coeficientes pusistes, proyectas tantas veces.

En la filmina 12 Sebas reemplaza  $= \int_V - \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dv$  y reemplaza cada peso correspondiente.

Galerkin 1D pg 13: Proyecto las funciones de forma del nodo respecto las otras y si misma. vector de cargas  $\sum_{n \in I_s} \int_L N_i q dx$

Si es sistema es par es estable. Fluidos con alta intercia, solidos. Si es impar entonces tienes problemas al tener ecuaciones cubicas (impares) mucho problema, no bueno.

Tener cuidado al elegir el grado. En fluidos se eligen diferentes grados para modelar la velocidad y la presion porque si no se traban.



$$I = \int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi \approx \phi(\xi_1)W_1 + \phi(\xi_2)W_2 \dots \phi(\xi_n)W_n \quad (25)$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_i \sum_j W_i W_j \phi(\xi, \eta) \quad (26)$$

### 19.3. Figuras

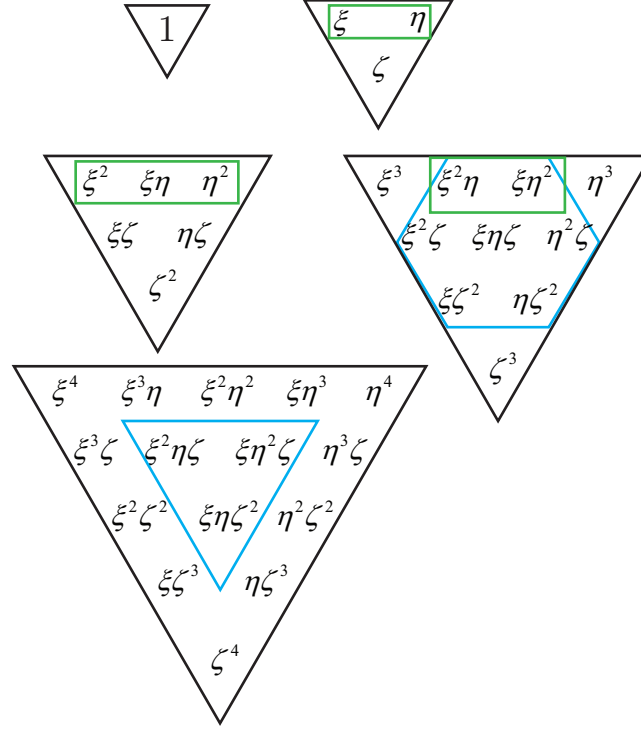


Figura 9: El tetrahedro de Pascal. Los términos de los elementos *serendipidad* están encuadrados.

### Referencias

Robert D Cook et al. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, 2007.

Yunhua Luo. An efficient 3d timoshenko beam element with consistent shape functions. *Adv. Theor. Appl. Mech*, 1(3):95–106, 2008.

Stanley B Dong, Can Alpdogan, and Ertugrul Taciroglu. Much ado about shear correction factors in timoshenko beam theory. *International Journal of Solids and Structures*, 47(13):1651–1665, 2010.