ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
2η ΑΣΚΗΣΗ

Χαρακτηριστικά Συστήματος

Το σύστημα τρέχει Manjaro Linux (Arch Linux based) με Kernel Linux 3.14.25-1, επεξεργαστή Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU P8600 @ 2.40Ghz.
Η ιεραρχία της μνήμης είναι δύο επιπέδων:
Το πρώτο επίπεδο αποτελείται από δύο κρυφές μνήμες, η μία για data (L1 D-cache) και η άλλη για instructions (L1 code cache) και οι δύο των 32 KB με τα παρακάτω χαρακτηριστηκά L1 assoc. 8-way, και 64 byte line size και για τις δύο.
Η κύρια μνήμη (L2 cache) έχει μέγεθος 3072 KB, L2 assoc. 12-way και 64 byte line size.
Χρησιμοποιώ το λογισμικό: MATLAB R2013a (8.1.0.604) 64-bit (glnxa64)
Η διακριτότητα του χρονομετρητή μέσω των εντολών tic,toc είναι: $3.43 * 10^{-9}$ *sec.*
Το αποτέλεσμα της εντολής bench για την διάσπαση μητρώων LU είναι 0.2293sec.
Το σύστημα δεν χρησιμοποιεί εντολές FMA.

Ερώτημα 1 - Πράξεις με Πολυώνυμα

(α΄)

poly: Λαμβάνει ως όρισμα ένα διάνυσμα τις τιμές του οποίου τις θεωρούμε ρίζες ενός πολυωνύμου και η συνάρτηση μας επιστρέφει διάνυσμα με τους συντελεστές του πολυωνύμου με ρίζες το δοθέν διάνυσμα.
Η λογική του αλγορίθμου αποτυπώνεται στις γραμμές 39 εως 41 όπου σε μια επανάληψη για j = 1 εως n όπου στις θέσεις 2 εως j+1 του διανύσματος c καταχωρείται η διαφορά του στοιχείου e(j) επί το διάνυσμα c(1:j) με το αρχικοποιημένο διάνυσμα c.
polyval: Δέχεται ως πρώτο όρισμα ένα διάνυσμα με τους συντελεστές του πολυωνύμου και ως δεύτερο όρισμα μια τιμή ή μια σειρά από τιμές. Η συνάρτηση μας επιστρέφει προσεγγιστικά την τιμή του πολυωνύμου (διάνυσμα συντελεστών του πολυωνύμου) για τις τιμές που δώσαμε με χρήση Horner.
Η λογική του αλγορίθμου αποτυπώνεται στις γραμμές 97 εως 99 όπου σε μια επανάληψη για j = n-1 εως 1 με βήμα -1 πολλαπλασιάζει το x με κάθε στοιχείο της στήλης j+1 του μητρώου V.

(β΄)

(i)

Το αρχείο με τον κώδικα υλοποίησης είναι το erotima1bi. Οι συντελεστές καταχωρούνται σε μητρώο, όπου κάθε γραμμή του περιέχει τους συντελεστές για κάθε διαφορετικό n. Οι συντελεστές που προκύπτουν είναι φαίνονται στο μητρώο results που προκύπτει. Για κάθε τιμή του n οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι σε πλήθος n+2 επομένως στο μητρώο οπου καταχωρώ την τιμή NaN σημαίνει οτι οι συγκεκριμένες θέσεις ¨περισσεύουν’ για το αντίστοιχο πολυώνυμο.

(ii)

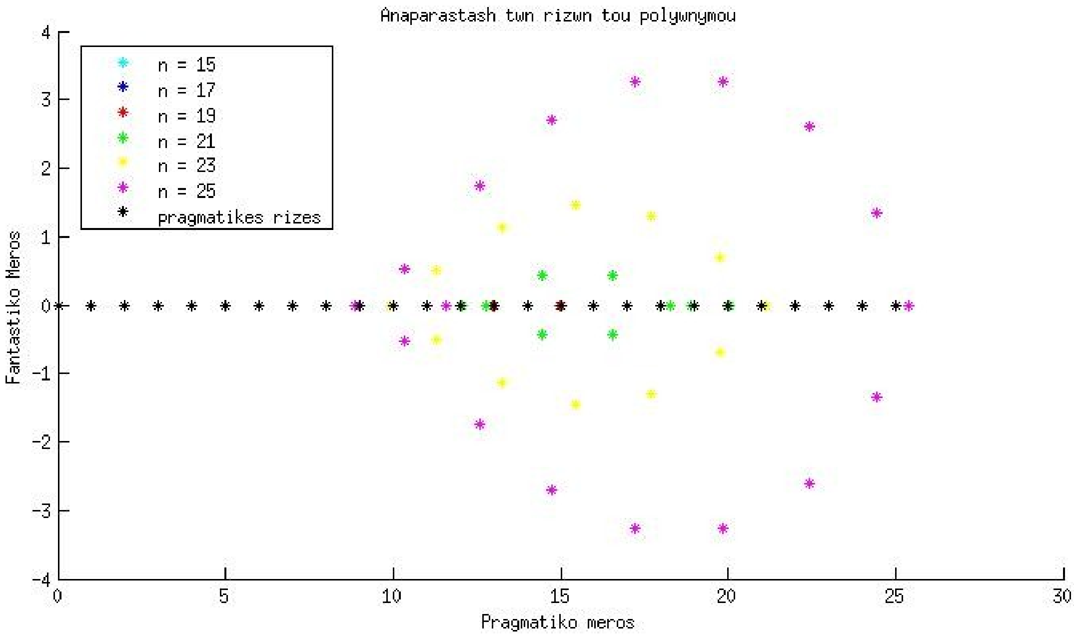
Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τιμές των πολυωνύμων που επιστρέφει η polyval για x = 1 και x = n

	x = 1	x = n
n = 15	0	0
n = 17	0	0
n = 19	0	633881344
n = 21	0	233242933690368
n = 23	−25165824	$7.91249 * 10^{18}$
n = 25	8589934592.0000	$-6.58109 * 10^{21}$

Θεωρητικά οι τιμές που θα έπρεπε να παίρνουμε για x = 1 και x = n θα έπρεπε να είναι πάντα το μηδέν αφού οι συγκεκριμένες τιμές αποτελούν ρίζες του πολυωνύμου κάθε φορά. Αυτό που παρατηρώ είναι οτι μέχρι τον το πολυώνυμο για x = 1 επιστρέφει μηδενικά ενώ μετά τιμές πολύ μεγάλες. Αυτό συμβαίνει διότι όσο αυξάνεται ο βαθμός τόσο αυξάνονται οι πράξεις και μεταφέρονται σφάλματα βγάζοντας ¨λάθος’ αποτελέσματα. Για x = n τώρα παρατηρούμε οτι η συνάρτηση polyval επιστρέφει μηδενικά μέχρι τον 17ο βαθμό του πολυωνύμου ενώ για μεγαλύτερους βαθμούς βλέπουμε οι αριθμοί να είναι ανεξήγητα μεγάλοι. Η αιτία είναι η ίδια με παραπάνω μόνο που εδώ οι πράξεις γίνονται με πολύ μεγαλύτερους αριθμούς (αφού x = n) πράγμα το οποίο κάνει το αποτέλεσμα να ¨χαλάει’ ακόμα και από τον 19ο βαθμό του πολυωνύμου.

(iii)

Οι ρίζες που επιστρέφει η roots σε σχέση με τις πραγματικές ρίζες των πολυωνύμων φαίνεται στην παρακάτω γραφική παράσταση:



Παρατηρούμε όσο το n είναι μικρότερο από 21 η διαφορά στις τιμές δεν είναι μεγάλη, όταν όμως ο βαθμός του πολυωνύμου είναι πάνω από 21ο τότε παρατηρούμε οι τιμές αρχίζουν να έχουν και φανταστικό μέρος και αποκλείνουν ακόμα περισσότερο από τις πραγματικές ρίζες. Αυτό οφείλεται στο ότι όσο αυξάνεται ο βαθμός του πολυονύμου τόσο περισσότερες πράξεις εκτελούνται με συνέπεια η μεταφορά των σφαλμάτων να δημιουργ μεγαλύτερο σφάλμα στο τελικό αποτέλεσμα.

Ερώτημα 2 - Αθροίσματα - Μονάδα Στρογγύλευσης

(α΄)

Κάθε τρόπος άθροισης υλοποιείται με μια συνάρτηση που έχει όνομα της μορφής function2 και κατάληξη το αντίστοιχο ερώτημα

(i)

Η συνάρτηση **function2ai** υλοποιεί την πρόσθεση με τον τρόπο που περιγράφει το ερώτημα παίρνοντας ως όρισμα ένα διάνυσμα όπως περιγράφεται στο ερώτημα (β΄).

(ii)

function2aii η αντίστοιχη συνάρτηση υλοποίησης.

(iii)

fuction2aiii η αντίστοιχη συνάρτηση υλοποίησης.

(iv)

function2aiv η αντίστοιχη συνάρτηση με βάση τον κώδικα που έχει δοθεί (ο οποίος είναι τροποποιημένος).

(β΄)

Η παραγωγή του κατάλληλου διανύσματος εισόδου παράγεται από συνάρτηση function2b (και κατάληξη το χο ερώτημα) που καλείται μέσα στο script. Όλα τα ζητούμενα του ερωτήματος 2 υπολογίζονται από script με όνομα erotima2.m με την βοήθεια συναρτήσεων που έχω υλοποιήσει για κάθε ερώτημα. Τα αποτελέσματα κατα-χωρούνται σε ένα μητρώο 4x4 με τον εξής τρόπο:

	1ος τρόπος άθροισης	2ος τρόπος άθρ.	3ος τρόπος άθρ.	4ος τρόπος άθρ.
1η είσοδος	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·
2η είσοδος	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·
3η είσοδος	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·
4η είσοδος	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·

Με βάση τα διανύσματα εισόδου που μας περιγράφουν τα ερωτήματα (β΄) και (i), (ii), (iii) τα αποτελέσματα των πράξεων του υποερωτήματος (α΄) παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

(format long)	1ος τρόπος άθροισης	2ος τρόπος άθρ.	3ος τρόπος άθρ.	4ος τρόπος άθρ.
1η είσοδος	0.000001867442732	0.000001867442732	0.000001867442732	0.000001867442732
2η είσοδος	−0.030563436343082	−0.030563436343082	−0.030563436343082	−0.030563436343082
3η είσοδος	6.144000000000005	6.144000000000005	6.144000000000005	6.144000000000000
4η είσοδος	0.001644689956023	0.001644689956023	0.001644689956023	0.001644689956023

(γ΄)

Για τον σχολιασμό των αποτελεσμάτων ως προς την απόκλιση της κάθε μεθόδου ή της κάθε εισόδου θα υπ
το εμπρός σχετικό σφάλμα για όλους του συνδυασμούς εισόδου και τρόπου άθροισης. Ως θεωρητικό αποτέλεσμα θα θεωρούμε κάθε φορά το αποτέλεσμα που προκύπτει από πράξεις στοιχείων με διπλή ακρίβεια. Γνωρίζουμε από την θεωρία ότι το εμπρός σφάλμα ορίζεται ως $\frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$ όπου x^* είναι το θεωρητικό αποτέλεσμα και x το αποτέλεσμα της υπολοίησης.

	1ος τρόπος άθροισης	2ος τρόπος άθρ.	3ος τρόπος άθρ.	4ος τρόπος άθρ.
1η είσοδος	$4.6312 * 10^{-4}$	0.0541	$4.6312 * 10^{-4}$	0.0017
2η είσοδος	$1.3159 * 10^{-6}$	$1.3159 * 10^{-6}$	$1.3159 * 10^{-6}$	$5.4018 * 10^{-9}$
3η είσοδος	$2.8610 * 10^{-6}$	$2.8610 * 10^{-6}$	$2.8610 * 10^{-6}$	0
4η είσοδος	$2.1504 * 10^{-6}$	$2.3384 * 10^{-8}$	$2.1504 * 10^{-5}$	$2.3384 * 10^{-8}$

Μια γενική παρατήρηση μου μπορούμε να κάνουμε είναι ότι μεγαλύτερες αποκλίσεις παρατηρούνται στις πράξεις με την πρώτη είσοδο (το ανάπτυγμα της taylor) αφού τα σφάλματα είναι της τάξης του 10^{-4} μέχρι όμως και της τάξης του 10^{-2}. Για τις υπόλοιπες εισόδους παρατηρώ ότι τα σφάλματα των πράξεων εξομαλύνονται αφού μειώνονται στην τάξη του 10^{-15}, 10^{-6} και 10^{-8} ενώ φτάνοουν και στο μηδέν (στην περίπτωση της 3ης ειδόδου όπου οι πράξεις εκτελούνται με τον 4ο τρόπο. Τα μικρότερα σφάλματα μπορούμε να πούμε οτι εξάγει ο 4ος τρόπος άθροισης που πέρα από την ιδιαιτερότητα του διανύσματος εισόδου έχει πολύ μικρά εως μηδαμινά σφάλματα.

Ερώτημα 3 - Γραμμικά Συστήματα

Μέρος Α

(α΄) **(i)**

Το αρχείο με όνομα function3Aai αποτελεί συνάρτηση με είσοδο ένα μητρώο η οποία υπολογίζει τον δείκτη κατάστασης του. Ως προς νόρμα μεγίστου έχουμε πάρει τη νόρμα απείρου. Οι δείκτες κατάστασης των μητρώων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	δείκτης κατάστασης
ερώτημα 1.	93903.3007770663
ερώτημα 2.	$7.26361 * 10^{22}$
ερώτημα 3.	43129.21962
ερώτημα 4.	512
ερώτημα 5(i).	$3.66088 * 10^{214}$
ερώτημα 5(ii).	$2.32861 * 10^{156}$

Κατά την διάρκεια του υπολογισμού του δείκτη κατάστασης εμφανίζονται προειδοποιήσεις της μορφής:

```
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be inaccurate. RCOND
= 6.538312e-22.
In cond at 47
In function3Aai at 3
In erotima3A at 15
```

Αυτή η προειδοποίηση κατά τον υπολογισμό του δείκτη κατάστασης εμφανίζεται για το μητρώο του ερωτήματος 2. αλλά και στα δύο μητρώα του ερωτήματος 5. πράγμα που σημαίνει ότι τα συγκεκριμένα μητρώα είναι 'κακώς'

ορισμένα δηλαδή σε παρακάτω υπολογισμούς του προβλήματος τα συγκεκριμένα μητρώα δεν θα μας επιστ
τις αναμενόμενες τιμές. Επίσης αυτό φαίνεται και από τον δείκτη κατάστασης αυτών των μητρώων που είναι πολύ μεγάλος.

(ii)

Το αρχείο με όνομα function3Aaii αποτελεί συνάρτηση με είσοδο ένα μητρώο και ένα διάνυσμα η οποία υπολογ
το εμπρός σχετικό σφάλμα της επίλυσης του συστήματος Ax=b.
Τα εμπρός σχετικά σφάλματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	εμπρος σχσφάλμα
ερώτημα 1.	$1.7364 * 10^{-13}$
ερώτημα 2.	$1.5682 * 10^{123}$
ερώτημα 3.	$1.5943 * 10^{-13}$
ερώτημα 4.	1
ερώτημα 5(i).	$5.0665 * 10^{205}$
ερώτημα 5(ii).	$1.5777 * 10^{137}$

(iii)

Το αρχείο με όνομα function3Aaiii αποτελεί συνάρτηση με είσοδο ένα μητρώο και ένα διάνυσμα η οποία υπολογ
το πίσω σφάλμα της επίλυσης του συστήματος Ax=b.
Τα πίσω σφάλματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	εμπρός σχσφάλμα
ερώτημα 1.	$1.5813 * 10^{-16}$
ερώτημα 2.	$1.1064 * 10^{-23}$
ερώτημα 3.	$1.2405 * 10^{-16}$
ερώτημα 4.	0.4481
ερώτημα 5ι.	$3.5228 * 10^{-19}$
ερώτημα 5ιι.	$1.0165 * 10^{-18}$

(β΄)

Για να συμφωνούν τα αποτελέσματα για τα σφάλματα με τις θεωρητικές προβλέψεις (φράγματα) αντίστοιχα θα πρέπει
στικά για κάθε περίπτωση επίλυσης να ισχύει φράγμα < (εμπρός σφαλμα) όπου φράγμα είναι ίσο με το (πίσω σφάλμα)*(δείκτη κατάστασης). Στον κώδικα κάνω τη σύγκριση και παρατηρώ ότι όλα τα αποτελέσματα συμφων
με τις θεωρητικές προβλέψεις εκτός από το μητρώο του ερωτήματος 2. κάτι το οποίο δικαιολογείται αφού είναι ένα ¨κακώς’ ορισμένο μητρώο όπως εξηγήσαμε και στο παραπάνω ερώτημα.

Μέρος Β

(α΄)

Στο αρχείο με όνομα erotima3B υπάρχει ο κώδικας για την δημιουργία των ζητούμενων διανυσμάτων του ερωτήματος.

(β΄)

Η συνάρτηση με όνομα function3Bb υπολογίζει το εμπρός σφάλμα του πολλαπλασιασμού των μητρώων για και τις δύο μεθόδους (Strassen και mtimes). Η συνάρτηση δέχεται τρία ορίσματα, το πρώτο είναι το ¨θεωρητικό’ αποτέλεσμα (mtimes με διπλή ακρίβεια) το δεύτερο όρισμα είναι ο υπολογισμός με την μέθοδο mtimes και το τρίτο όρισμα είναι ο υπολογισμός με την μέθοδο Strassen.
Με την μέθοδο mtimes το εμπρός σχετικό σφάλμα που υπάρχει είναι

ερώτημα (i)	$9.9448 * 10^{-8}$
ερώτημα (ii)	$7.7943 * 10^{-8}$
ερώτημα (iii)	$2.3496 * 10^{-8}$

Με αυτή την μέθοδο παρατηρούμε ότι το εμπρός σχετικό σφάλμα είναι της τάξης του 10^{-8}
Με την μέθοδο Strassen το εμπρός σχετικό σφάλμα που υπάρχει είναι

ερώτημα (i)	$1.6804 * 10^{-6}$
ερώτημα (ii)	$8.9107 * 10^{-7}$
ερώτημα (iii)	$7.8716 * 10^{-5}$

Παρατηρούμε ότι τα σφάλματα με την μέθοδο strassen είναι και μεγαλύτερα και έχουν και μεγαλύτερη απόκλιση μεταξύ του σε σχέση με την μέθοδο mtimes.

(γ΄)

Τα σφάλματα που εξάγει η μέθοδος Strassen είναι σαφώς πιο μεγάλα σε σχέση με την μέθοδο mtimes που έχει πολύ μικρότερα σφάλματα και με μικρές διαφορές σε σχέση με τις διαφορετικές εισόδους.