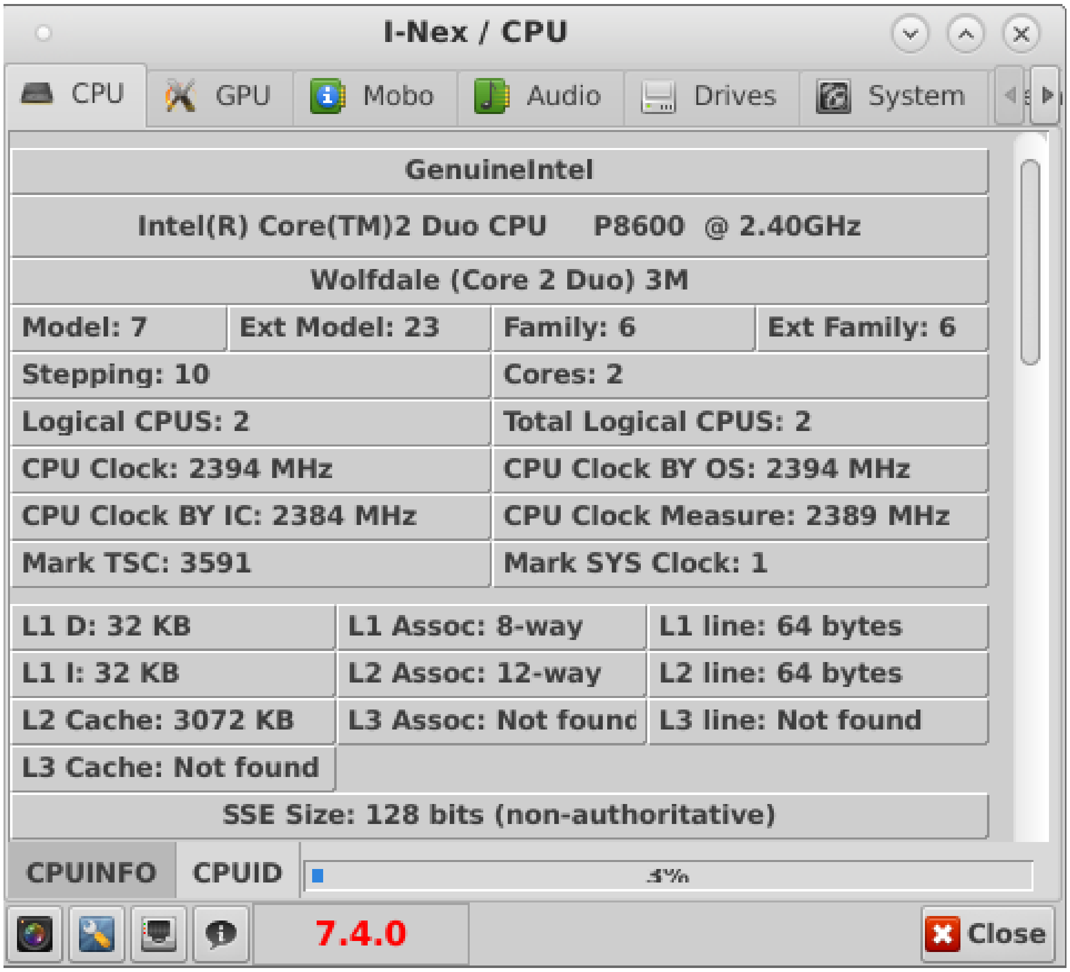
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
1η εργαστηριακή άσκηση

Νοέμβρης 2014

Ερώτημα 1 – Εισαγωγικά

(i)

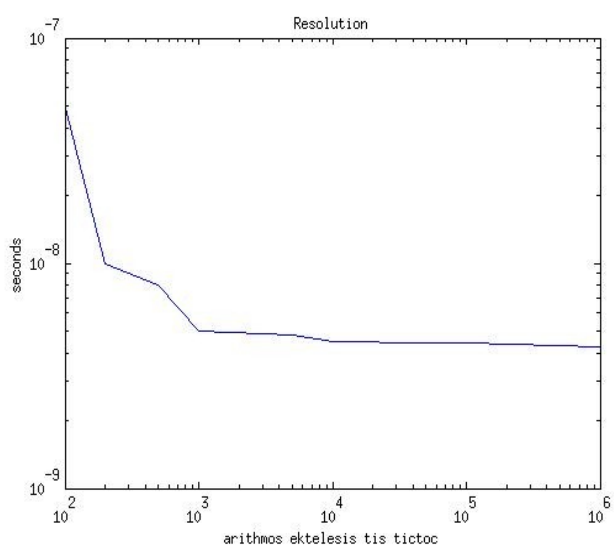


(ii)

MATLAB R2013a (8.1.0.604) 64-bit (glnxa64)

(iii)

Εκτελώντας αρκετές φορές την εντολή `tictoc` παρατηρούμε οτι οι τιμές που μας επιστρέφονται έχουν μεγάλη απόκλιση η μια από την άλλη (από 0.000005 εως 0.000020 sec). Γιαυτό το λόγο θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε τον μέσο όρο εκτέλεσης της `tictoc`. Η βασική ιδέα είναι οτι με μια δομή επανάληψης θα εκτελέσουμε την tictoc και θα δούμε σε ποιά τιμή σταθεροποιείται.



Ο κώδικας που χρησιμοποίησα είναι ο `resolution.m` που υπάρχει στο αρχείο της αναφοράς. Τα αποτελέσματα τα αναπαριστούμε σε μια γραφική παράσταση του χρόνου συναρτήσει του αριθμού εκτέλεσης της εντολής.

Από την γραφική παράσταση παρατηρούμε οτι η τιμή εκτέλεσης της tictoc σχεδόν σταθεροποιείται στην τιμ:

$3.43*10^{-9}$ seconds

(iv)

Από το διπλανό σχήμα το αποτέλεσμα της εντολής `bench` για την διάσπαση μητρώων LU είναι 0.2293

MATLAB Benchmark (times in seconds)

Computer Type	LU	FFT	ODE	Sparse	2-D	3-D
Linux (64-bit) 3.47 GHz Intel Xeon	0.0626	0.0661	0.1617	0.1161	0.2055	0.0911
Windows 7 Enterprise (64-bit) 3.47 GHz Intel Xeon	0.0701	0.0719	0.1094	0.1297	0.2784	0.7044
Windows 7 Enterprise (64-bit) 2.7 GHz Intel Core i7	0.0857	0.0801	0.0958	0.1319	0.2975	0.7003
Mac OS X Lion (64-bit) 2.66 GHz Intel Xeon	0.0547	0.1278	0.2008	0.1877	0.6670	0.6299
Mac OS X Mountain Lion (64-bit) 2 GHz Intel Core i7	0.0725	0.1292	0.1881	0.1587	0.7203	0.6476
Windows 7 Enterprise (64-bit) 2.66 GHz Intel Core 2 Quad	0.1239	0.2333	0.1561	0.2822	0.4819	0.7390
Windows XP (32-bit) 1.86 GHz Intel Core 2	0.3406	0.3178	0.1883	0.3542	0.5775	0.3601
This machine	0.2293	0.2682	0.2353	0.3196	1.2732	1.0373

Place the cursor near a computer name for system and version details. Before using this data to compare different versions of MATLAB, or to download an updated timing data file, see the help for the bench function by typing "help bench" at the MATLAB prompt.

Ερώτημα 2 – Χρονομέτρηση Συναρτήσεων

(i)

`lu:` LU Matrix Factorization (Παραγοντοποίηση LU)

Χρησιμοποιείται για να κάνουμε παραγοντοποίηση lu σε ένα μητρώο. Η `[L U P Q R]=LU(A)` δίνει σαν αποτέλεσμα ένα άνω και ένα κάτω τριγωνικό μητρώο, (U και L αντίστοιχα) ένα μεταθετικό μητρώο στοιλών Q και ένα διαγώνιο μητρώο R για το οποίο ισχύει: `P*(R\A)*Q=L*U.` Το μητρώο U είναι μητρώο που προκύπτει από την απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση κατά γραμμές του μητρώου εισόδου A. Το μητρώο L παράγει στην διαγώνιο του άσσους, πάνω από αυτή μηδενικά και κάτω από αυτή τους όρους απαλοιφής lij με τους οποίους πολλαπλασιάζουμε τις γραμμές I για την απαλοιφή του όρου της ίδιας γραμμής στην στήλη j. Το μητρώο P/Q είναι το ταυτοτικό μητρώο με τις στήλες/γραμμές που θέλουμε να μεταθέσουμε στο μητρώο A ανεστραμμένες. Το R είναι διαγώνιο μητρώο με τους όρους επί της διαγωνίου

`qr:` Orthogonal-Tringular Decomposition (Διάσπαση QR)

Χρησιμοποιείται για να κάνουμε διάσπαση QR σε ένα μητρώο. Η `[Q R E]=qr(A)` με `[m n]=size(A)` δίνει ως αποτέλεσμα ένα mxn άνω τριγωνικό μητρώο R, ένα mxm μοναδιαίο μητρώο Q και ένα μεταθετικό μητρώο στηλών Ε.

svd: Singular Value Decomposition (Ανάλυση Ιδιάζουσων Τιμών)
Χρησιμοποιείται για για να κάνουμε διάσπαση SVD σε ένα μητρώο. Η `[U S V]=svd(A)` με `[m n]=size(A)` δίνει ως αποτέλεσμα ένα mxn διαγώνιο μητρώο S με μη αρνητικά στοιχεία κατά μήκος της διαγωνίου σε φθίνουσα σειρά (τις ιδιάζουσες τιμές του μητρώου Α), δύο unitary μητρώα `U(mxm), V(nxn),` τέτοια ώστε `U*S*V'=A.`

det:
Υλοποιεί τη βασική πράξη της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα. Η εντολή `d=det(X)` εκχωρεί στο d τη τιμή της ορίζουσας του πίνακα X.

rank:
Το rank είναι η εντολή κατάταξης του μητρώου που χρησιμοποιείται ως όρισμα. Για παράδειγμα η εντολή rank(A) παρέχει μια εκτίμηση του αριθμού των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών του μητρώου Α. Η εντολή rank(A,tol) δίνει τον αριθμό των ιδιόμορφων τιμών του Α που είναι μεγαλύτερα από το tol. Η εντολή rank χρησιμοποιεί το προκαθορισμένο tol `[tol = max(size(A)) * eps(norm(A))]`

(ii)

(α')
Με την χρήση της συνάρτησης `tictoc` οι χρόνοι εκτέλεσης που έλαβα είναι:

	lu(A) (sec)	A*b (sec)
$n = 2^7 = 128$	0.0038	$1.13*10^{-4}$
$n = 2^8 = 256$	0.0124	$1.11*10^{-4}$
$n = 2^9 = 512$	0.0119	$8.83*10^{-4}$
$n = 2^{10} = 1024$	0.0581	0.0022

(β')
Εκτελώντας τις παραπάνω εντολές από μια φορά την κάθε μια γνωρίζουμε οτι η τιμή που λαμβάνουμε δεν είναι αξιόπιστη. Για αυτό το λόγω επιλέγω χρησιμοποιώντας μια δομή επανάληψης να εκτελέσω τις εντολές πολλές φορές (100 φορες στην συγκεκριμένη περίπτωση) και να υπολογίσω το μέσο όρο των μετρήσεων που θα λάβω.

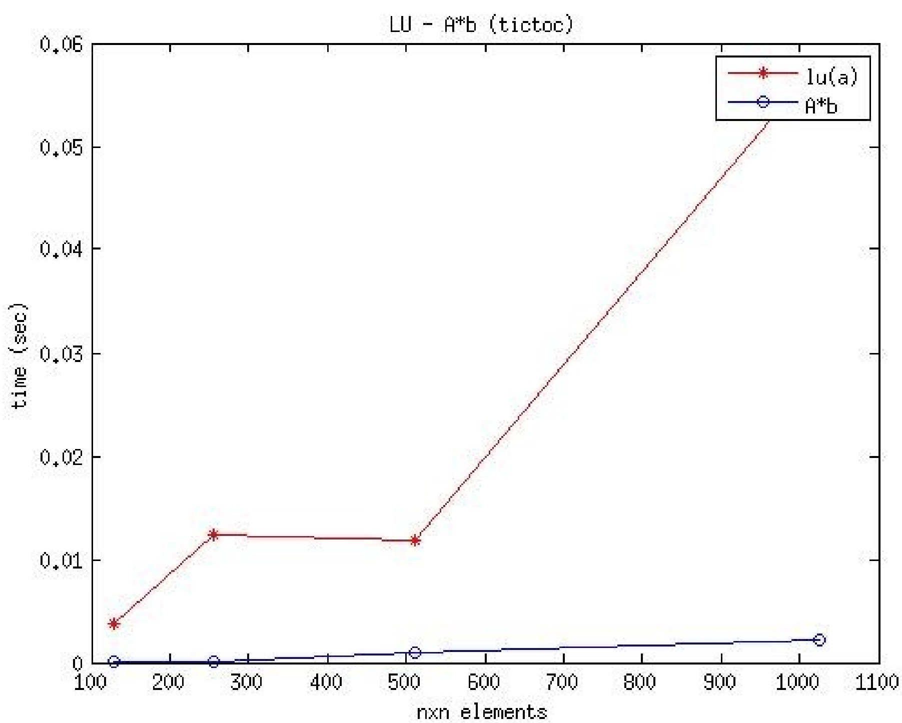
	lu(A) (sec)	A*b (sec)
$n = 2^7 = 128$	$3.416*10^{-4}$	$9.37*10^{-6}$

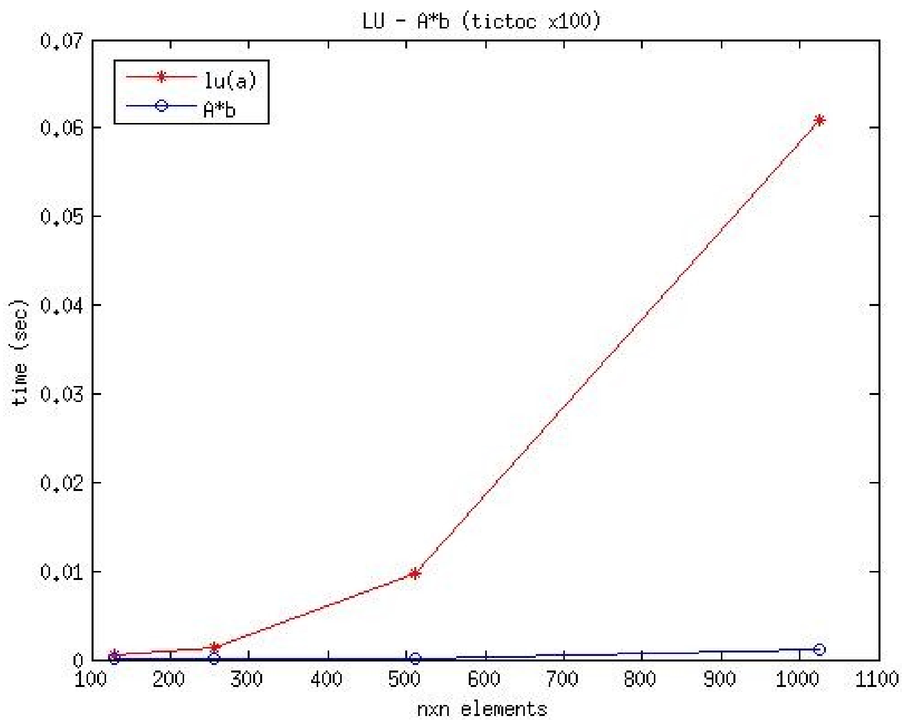
$n = 2^8 = 256$	0.0013	$2.284*10^{-5}$
$n = 2^9 = 512$	0.0098	$8.893*10^{-5}$
$n = 2^{10} = 1024$	0.0608	0.0012

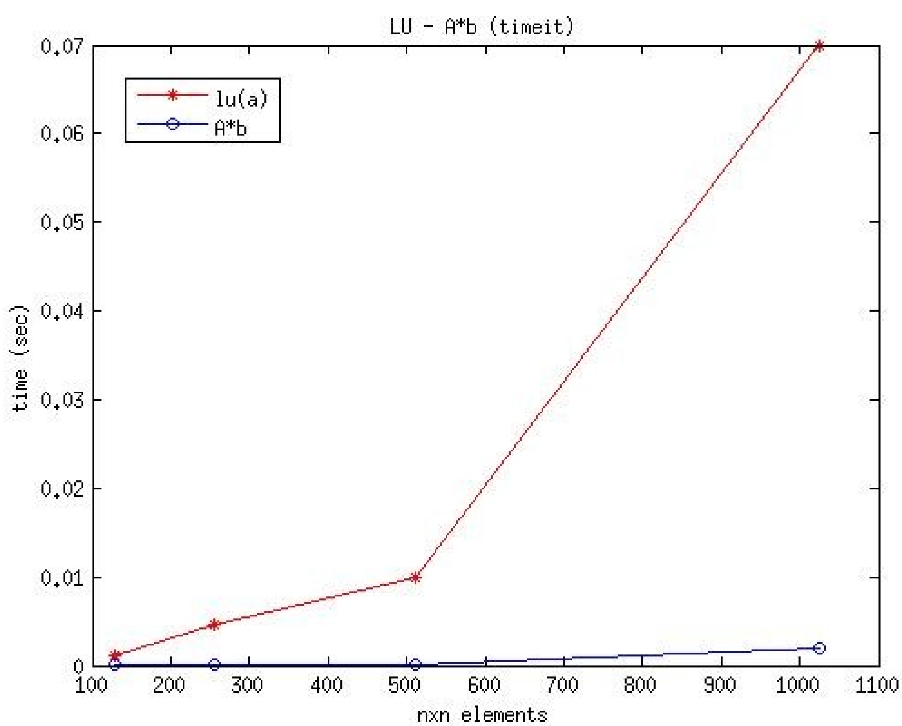
(γ')
Με χρήση της συνάρτησης timeit οι χρόνοι εκτέλεσης που έλαβα είναι:

	lu(A) (sec)	A*b (sec)
$n = 2^7 = 128$	0.0010	$6.531*10^{-5}$
$n = 2^8 = 256$	0.0047	$3.095*10^{-5}$
$n = 2^9 = 512$	0.0099	$1.264*10^{-4}$
$n = 2^{10} = 1024$	0.0659	0.0020

(iii)




LU - A*b (tictoc x100)
lu(a)
A*b
time (sec)
nxn elements
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000 1100


LU - A*b (timeit)
lu(a)
A*b
time (sec)
nxn elements
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000 1100

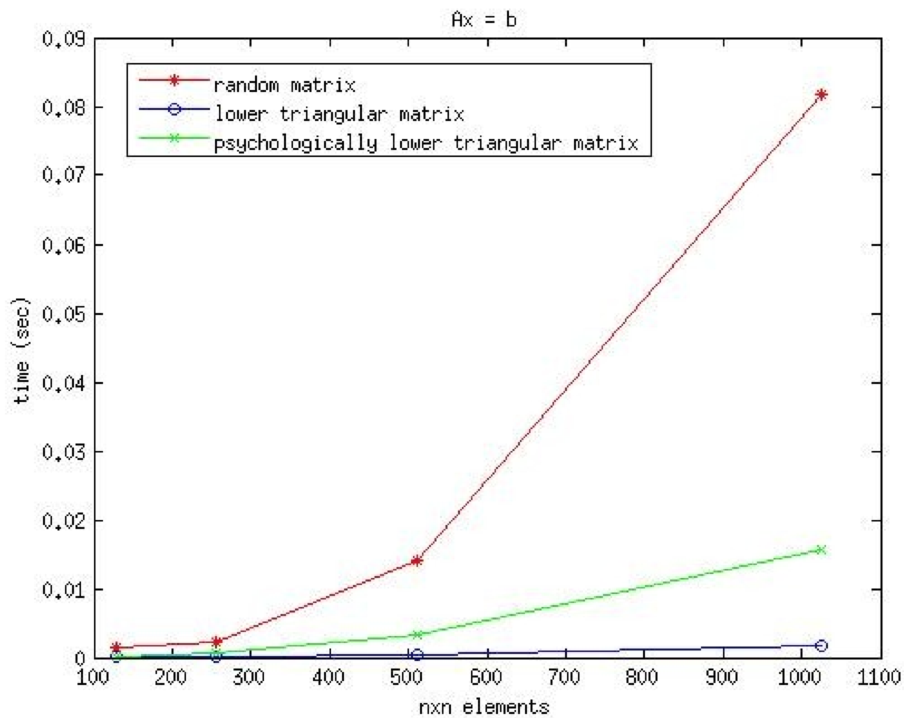
Ερώτημα 3 – Αξιολόγηση Ενδογενών Συναρτήσεων

(α')

Οι μετρήσεις που έλαβα για κάθε μια από τις τρείς περιπτώσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	i.	**ii.**	**ii.**
	Για τυχαίο μητρώο (sec)	Για τυχαίο κάτω τριγωνικό μητρώο (sec)	Για τυχαίο ψυχολογικά κάτω μητρώο (sec)
$n = 2^7 = 128$	0.0016	$3.288*10^{-5}$	$1.958*10^{-4}$
$N = 2^8 = 256$	0.0023	8.075*10-5	$7.719*10^{-4}$
$n = 2^9 = 512$	0.0140	$3.464*10^{-4}$	0.0033
$n = 2^{10} = 1024$	0.0817	0.0033	0.0158

(β')

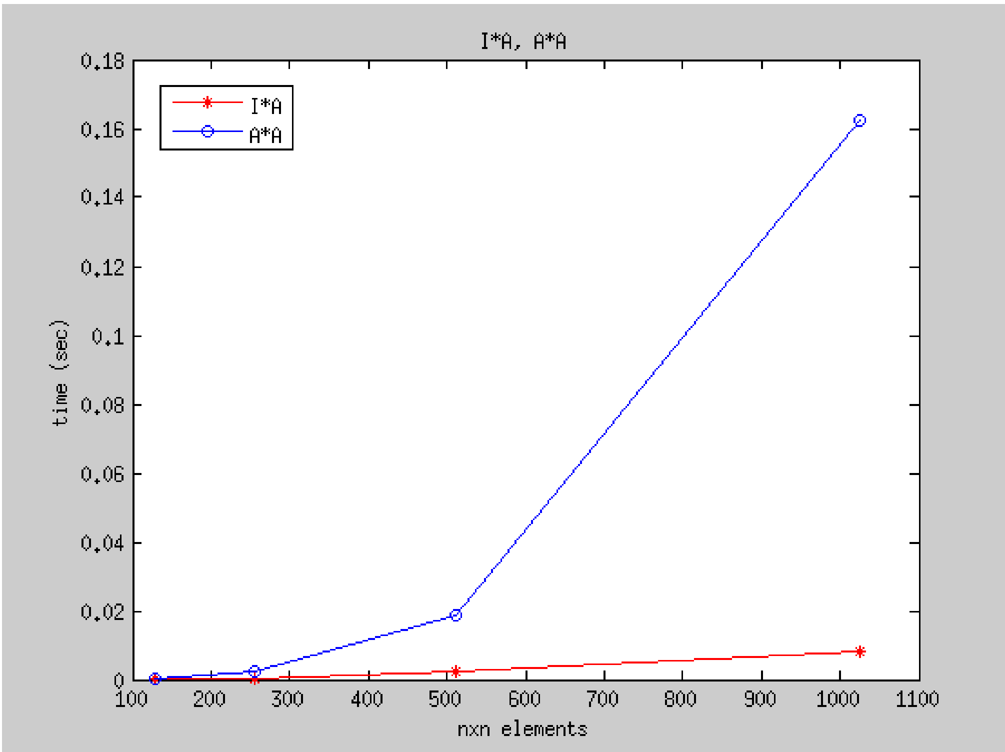


(γ')

Παρατηρώ οτι περισσότερος χρόνος απαιτείται για την επίλυση του συστήματος με ένα τυχαίο μητρώο, λιγότερος απαιτείται για το ψυχωλογικά κάτω τριγωνικό μητρώο ενώ τον λιγότερο χρειάζεται το κάτω τριγωνικό μητρώο. Αυτό οφείλεται στο οτι το τυχαίο μητρώο του πρώτου ερωτήματος έχει τυχαίους αριθμούς σε όλες τις θέσεις του, αντίθετα το ψυχωλογικά κάτω μητρώο ενώ έχει πολλά μηδενικά (πράγμα που κάνει την επίλυση να γίνεται γρηγορότερα) οι στήλες του είναι τυχαία αντιμεταθετημένες. Γιαυτό γρηγορότερο για την επίλυση του συστήματος είναι το κάτω τριγωνικό μητρώο το οποίο έχει εξίσου μηδενικά με το ψυχολογικά κάτω τριγωνικά μητρώο αυτό όμως έχουν συγκεκριμένη διάταξη οι στήλες του, επιταχύνοντας με αυτό το τρόπο την επίλυση.

(δ')

Οι ειδικές μορφές μητρώων μπορούν να επιρεάσουν τους χρόνους των βασικών αλγεβρικών πράξεων αρκεί να είναι σωστά ορισμένα ώστε να γίνουν αντιλυπτά από το σύστημα.



Η εκτέλεση πράξεις ενός τυχαίου μητρώου με ένα ταυτοτικό μητρώο είναι πολύ μικρότερη σε σχέση με τον πολλαπλασιασμό δύο τυχαίων μητρώων μεταξύ τους, αυτό συμβαίνει διότι η μεγαλύτερη έκταση ενός ταυτοτικού μητρώο καλύπτεται από μηδενικά κάτι το οποίο κάνει τον χρόνο εκτέλεσης της πράξης πολύ μικρότερο σε σχέση με δύο μητρώα που έχουν τυχαίες τιμές σε όλη την έκταση τους.

Ερώτημα 4 – Σύγκριση Υλοποιήσεων

1.

Υπολογίζω αρχικα το Φ_{min} για της πράξεις εντός της παρενθέσεως:

Ο χρόνος φόρτωσης του ταυτοτικού μητρώου I είναι μηδέν διότι υπάρχει ήδη στο σύστημα.

$$\Phi_{min} = \underbrace{\boxed{n + n}}_{\text{load } \upsilon,\, u} + \underbrace{\boxed{1}}_{\text{load k}} + \underbrace{\boxed{n^2}}_{\text{store}} = n^2 + 2n + 1$$

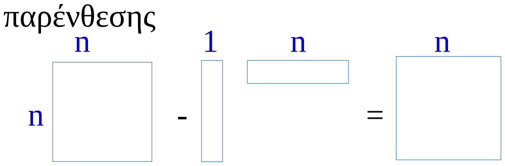
Για το $u\upsilon^{\top}$ ο αριθμός πράξεων που απαιτείται είναι:

$\Omega_1 =\ n^2$ πράξεις

Για την αφαιρεση $I - u\upsilon^{\top}$ απαιτούνται

$\Omega_2 = n^2$ πράξεις

Απεικόνιση της πράξης εντός της παρένθεσης



επομένως για την πράξη απαιτούνται
$\Omega_1 + \Omega_2 = 2n^2$ πράξεις

το γινόμενο που μας δίνεται ισούται με:

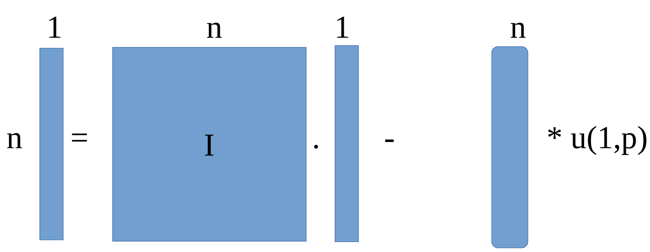
$$\underbrace{(I - u\upsilon^{\top})\,(I - u\upsilon^{\top})\,(I - u\upsilon^{\top})\,....(I - u\upsilon^{\top})}_{\text{p-1 πολλαπλασισμοί}}$$

p-1 πολλαπλασισμοί
το p πέρνει τιμές από 1 έως p

Άρα $\Omega = (2n^2\ (2p - 1))\ (p\text{-}1)$ πράξεις

2.

Η πράξη που θα υλοποιήσουμε για να πάρουμε την ζητούμενη στήλη θα είναι:



Η ζητούμενη στήλη θα προκύψει αν πολλαπλασιασουμε το μητρώο I με το διάνυσμα της κ-οστης του θέσης και από αυτό αφερούμε το γινόμενο του διανύσματος u με την τιμή που βρίσκεται στην κ-οστη θέση του διανύσματος υ^T

άρα απαιτούνται n^2 πράξεις για τον πολλαπλασιασμό του μητρώου I με το διάνυσμα, n πράξεις για τον πολλαπλασιασμό του διανύσματος u με τον βαθμωτό και n για την διαφορά των δύο διανυσμάτων.

Άρα $n^2 + n + n = n^2 + 2n$

Συνολικά $\Omega = ((n^2 + 2n)(2p - 1))(p - 1)$ πράξεις.

3.
Ο κώδικας της συνάρτησης είναι στο αρχείο my_func.m