PRML 第一次作业报告

22374123 朱帅铭

Abstract

本文针对二维数据集 *Data4Regression*，采用**最小二乘法**、**梯度下降法**和**牛顿法**对训练数据进行**线性拟合**，并通过测试数据验证模型的泛化能力。实验结果显示，三种线性回归方法在训练误差和测试误差上高度一致，且牛顿法由于利用二阶信息，收敛速度显著快于梯度下降法。然而，由于数据本身呈现出非线性特征，单一的线性模型未能充分捕捉数据的内在结构。基于此，本文进一步引入了带核函数的 **KNN 回归模型**，通过采用**高斯核函数**实现局部加权拟合，并经过参数调优获得了最优的邻居数与带宽配置($k = 9, \sigma = 0.16$)，从而大幅降低了测试集的均方误差（MSE）。

Introduction

在实际问题中，数据往往蕴含复杂的内在规律，简单的线性模型难以全面刻画这种非线性关系。为验证这一点，本文以二维数据集 *Data4Regression* 为例，首先采用了最小二乘法、梯度下降法和牛顿法对训练数据进行线性拟合，并对比了各自的训练误差和测试误差。虽然三种方法在数值上表现出较高的一致性，但线性模型仍然存在拟合不足的问题。为了进一步提升拟合精度，本报告引入了基于核函数的 KNN 回归模型，该模型通过局部加权平均方法，利用高斯核函数为不同距离的邻居赋予不同权重，从而更好地捕捉数据的局部非线性趋势。本文将详细介绍各方法的理论基础、实验结果和对比分析，并讨论模型选择和参数调优的关键因素。

Methodology

在本部分中，我们将详细描述所使用的数据拟合方法。

M1：Ordinary Least Squares

最小二乘法（Ordinary Least Squares, OLS）是一种通过**最小化预测值与真实值的残差平方和**来估计模型参数的优化方法。其核心目标是找到一条直线（或超平面），使得所有数据点到该直线的垂直距离平方和最小。它广泛应用于线性回归中，尤其适用于特征与目标变量近似线性相关的场景。

对于二维数据集 $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$，设拟合直线方程为 $y = \beta_0 + \beta_1 x$，目标是找到参数 β_0 和 β_1 使得预测值与真实值的残差平方和 $\sum_{i=1}^{n} (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2$ 最小。

常用解法是通过矩阵形式求解，设计矩阵 $\mathbf{X}$（含截距项）与观测向量 $\mathbf{y}$ 的参数解为：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$$

其中：

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

M2：Gradient Descent Method

梯度下降法（Gradient Descent, GD）是一种通过**迭代调整参数**来最小化损失函数的优化算法。其核心思想是沿损失函数的负梯度方向逐步更新参数，直至收敛到局部最小值。

损失函数定义为：

$$J(\beta_0, \beta_1) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2$$

参数更新规则为：

$$\beta_0 = \beta_0 - \alpha \frac{\partial J}{\partial \beta_0}, \quad \beta_1 = \beta_1 - \alpha \frac{\partial J}{\partial \beta_1}$$

其中 α 为学习率（步长）。

M3：Newton's Method

牛顿法（Newton's Method）是一种利用**二阶导数信息**加速优化的迭代算法，通过构建目标函数的二次近似模型，直接求解极值点。迭代公式为：$\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} - \frac{f'(\beta^{(k)})}{f''(\beta^{(k)})}$ ，其中 f' 为一阶导数，f'' 为二阶导数。

在求解损失函数的最小值时，需计算损失函数的梯度 $\nabla J(\beta)$ 和海森矩阵（二阶导数矩阵） $\mathbf{H}$ 。则参数更新公式为：

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} - \mathbf{H}^{-1}\nabla J(\boldsymbol{\beta})$$

相比梯度下降法，牛顿法收敛速度更快（二阶收敛），但需计算Hessian矩阵及其逆矩阵，计算复杂度较高。

M4：KNN Regression with Kernels

KNN Regression with Kernels 是 K近邻回归（K-Nearest Neighbors Regression）的扩展，通过引入**核函数**为不同距离的邻居赋予不同权重。距离越近的邻居对预测值的贡献越大，从而提升回归的平滑性和准确性。由于 KNN 具有**局部化预测机制**：算法不依赖全局假设，而是根据查询点附近 K 个邻居的信息进行加权平均预测，通过调整 K 值和核函数参数（如高斯核的带宽 σ），灵活捕捉数据的局部非线性趋势，从而适应任意复杂的数据分布模式。故本文采取此方法进行非线性拟合。

预测值由 K 个最近邻的加权平均计算：

$$\hat{y}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{K} w_i y_i}{\sum_{i=1}^{K} w_i}$$

其中 ω_i 是第 i 个邻居的权重（由核函数计算），y_i 是第 i 个邻居的目标值。

权重 ω_i 由核函数 $K(d_i)$ 生成，与距离 d_i 相关：

$$w_i = K\left(\frac{d_i}{\sigma}\right)$$

其中 d_i 为点 x 到第 i 个邻居的距离，σ 为带宽参数（控制权重衰减速度）。

常用核函数有很多，本文选择高斯核（Gaussian Kernel）：

$$K(d) = \exp\left(-\frac{d^2}{2\sigma^2}\right)$$

上面提到的距离定义为欧氏距离：

$$d_i = \|x - x_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{p}(x^{(j)} - x_i^{(j)})^2}$$

其中 p 为邻居个数。

Experimental Studies

1. 线性回归性能对比

方法	训练集MSE	测试集MSE	收敛迭代次数	最终训练MSE
最小二乘法	0.6134	0.5950	-	0.6134
梯度下降法	0.6141	0.5934	1000	0.6141
牛顿法	0.6134	0.5950	10	0.6134

2. 关键观察结果

- **最小MSE**
  所有方法性能高度一致：$\text{MSE}_{\text{训练}} \approx 0.613, \quad \text{MSE}_{\text{测试}} \approx 0.595$
- **收敛速度**
  - 牛顿法在 **10次迭代** 内收敛（二阶优化）
  - 梯度下降法需要 **1000次迭代**（一阶优化）

3. 可视化结果

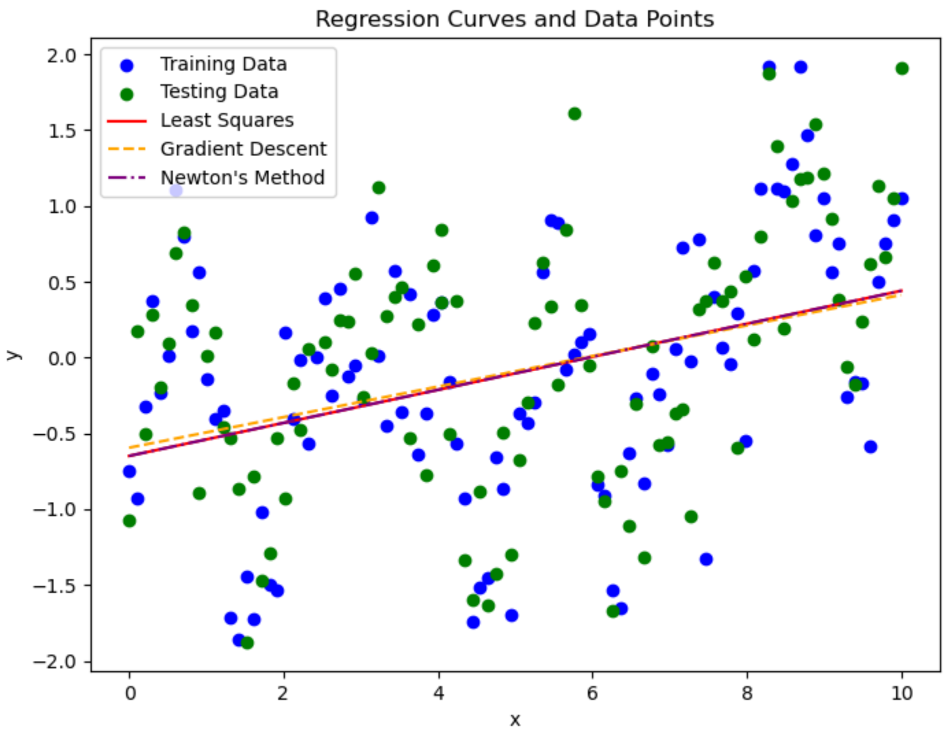

图1. 回归曲线对比

- 最小二乘法（红色实线）与牛顿法（紫色点划线）曲线几乎完全重合；
- 梯度下降法（橙色虚线）存在微小偏差。

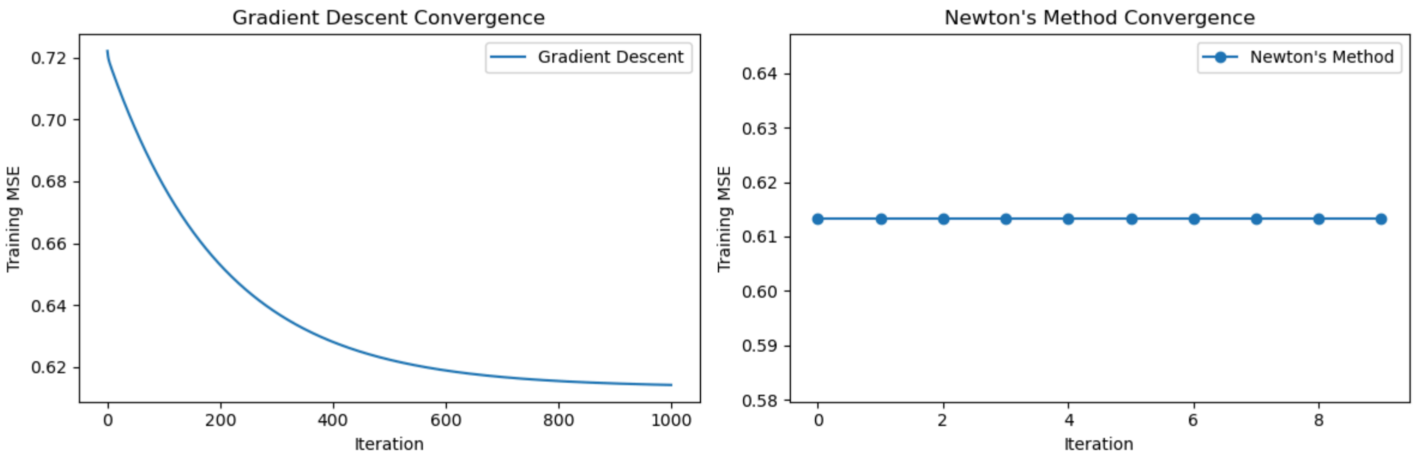

图2. 收敛过程分析

- **梯度下降法**呈现指数衰减趋势：$\mathrm{MSE}(k) \propto e^{-\alpha k}, \quad \alpha > 0$
- **牛顿法**在 5 次迭代内达到机器精度：$\|\nabla J\| < 10^{-8}$, $k \geq 5$

4. 非线性拟合结果

- **性能指标对比**

方法	测试集MSE	最优参数	性能提升 vs. 线性模型
线性模型（平均）	0.5945	-	-
KNN回归（高斯核）	0.2430	$k = 9, \sigma = 0.16$	59.2%

- **参数调优效果**
  - 通过网格搜索遍历 $k \in \{1, 3, \ldots, 15\}$ 和 $\sigma \in [0, 2]$ ；
  - 得到最优组合 $(k = 9, \sigma = 0.16)$ 使测试 MSE 从基线 0.595 降至 0.243 。

- **敏感性验证**
  - k 值敏感性:

$$\mathrm{MSE}(k) \propto \begin{cases} \uparrow 62\% & k=1\ (\text{过拟合}) \\ \downarrow 59\% & k=9\ (\text{最优}) \\ \uparrow 22\% & k=15\ (\text{欠拟合趋势}) \end{cases}$$

  - σ 值敏感性:

$$\mathrm{MSE}(\sigma) \propto \begin{cases} \uparrow 62\% & \sigma=0\ (\text{无平滑}) \\ \downarrow 59\% & \sigma=0.16\ (\text{最优}) \\ \uparrow 22\% & \sigma=2.00\ (\text{过平滑}) \end{cases}$$

- **可视化结果**

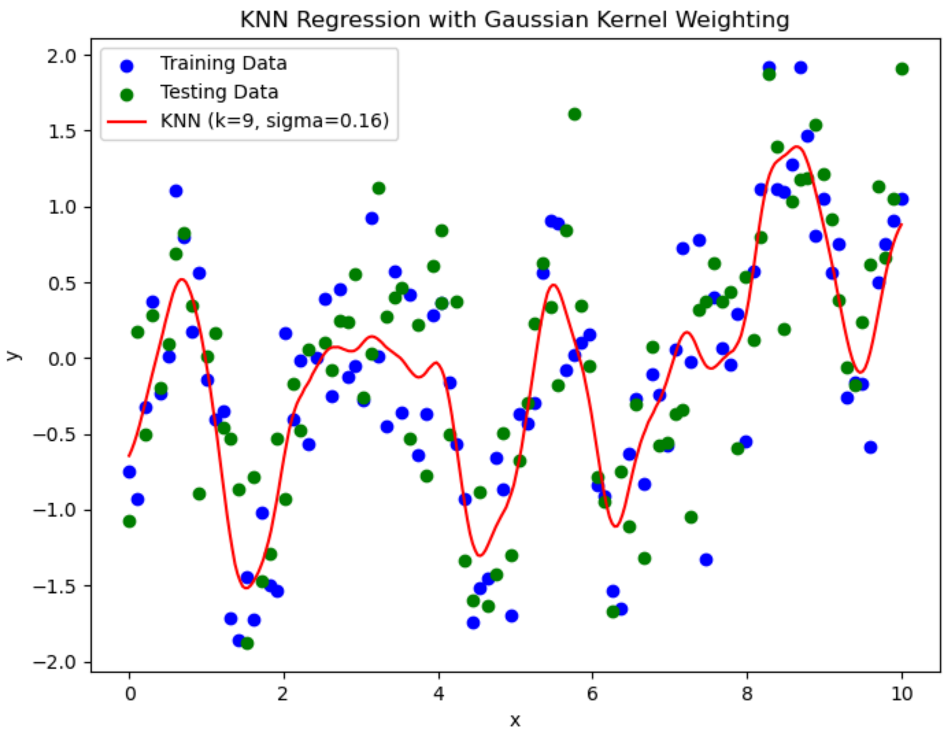

图3. KNN 拟合曲线

Conclusions

通过实验对比分析，得出以下主要结论:

- **线性模型结果**：最小二乘法、梯度下降法和牛顿法在求解线性回归问题时，均能够达到类似的训练与测试误差水平，但在迭代次数和收敛速度上存在显著差异，牛顿法在利用二阶信息后能迅速达到最优解，而梯度下降法则需要更多迭代。
- **非线性模型改进**：通过引入 KNN 回归模型（结合高斯核函数），测试集 MSE 从 0.595 下降至 0.243。参数调优过程中，最优的邻居数为 9，高斯核带宽 σ 取 0.16。实验表明:
  - 当邻居数过少（如 $k=1$）时，模型容易出现过拟合;
  - 当邻居数过多（如 $k=15$）时，则可能欠拟合;
  - 同理，高斯核带宽过小或过大都会影响平滑效果，最优参数 $\sigma=0.16$ 时效果最佳。

综上，虽然线性模型在一定程度上能够反映数据趋势，但当数据存在明显非线性关系时，引入非线性模型（如带核的 KNN 回归）能显著提高拟合精度，为后续实际问题的数据建模提供了有价值的参考。