



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA BACHAREL

LUIGI TEIXEIRA DE SOUSA

INTRODUÇÃO À GRAVITAÇÃO QUÂNTICA DE LAÇOS

LUIGI TEIXEIRA DE SOUSA

INTRODUÇÃO À GRAVITAÇÃO QUÂNTICA DE LAÇOS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Física Bacharel do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal de São Carlos como requisito para a obtenção do título de Física Bacharel.

Orientador: Prof. Dr. Fernando David Marmolejo Schmitt

LUIGI TEIXEIRA DE SOUSA

INTRODUÇÃO À GRAVITAÇÃO QUÂNTICA DE LAÇOS

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “Física Bacharel” e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Física Bacharel.

São Carlos, 26 de Junho de 2025.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando David Marmolejo Schidtt
Universidade Federal de São Carlos

Prof. Dr. Javier Fernando Ramos Caro
Universidade Federal de São Carlos

Prof. Dr. Rafael Santarelli
Universidade Federal de São Carlos

Este trabalho é dedicado às vítimas do genocídio em Gaza, além de todas as pessoas que sofrem diariamente com opressões, sejam elas por classe, cor, sexualidade/gênero ou qualquer outra forma de segregação/opressão. Sejam fortes e ocupemos os espaços que nos são de direito!

AGRADECIMENTOS

Não apenas este trabalho, mas esta graduação não teria sido possível sem o apoio de minha família e amigos, em particular minha falecida mãe Michèle Sato que sempre me incentivou a fazer o que mais me realizasse pessoalmente e demonstrava interesse no que eu decidisse estudar, meu pai Paulo Teixeira que me sustentou financeiramente durante toda essa jornada além de me aconselhar quando pertinente sobre assuntos diversos da vida adulta, meu amigo de graduação Mario que além de ter sido sempre cordial comigo também passara horas conversando sobre gravitação e relatividade, minha melhor amiga Maro que me apoiou em momentos difíceis e ajudou a ressignificar datas traumáticas com memórias positivas e por fim minha namorada Mazu, que trouxe alegria e conforto no meu dia a dia desde quando nos conhecemos, além de me aceitar incondicionalmente em minha integridade sem julgamentos.

O encorajamento de minha professora de física/matemática de ensino médio Suiane também foi muito importante nessa jornada, pois não só esta me encorajou, acreditou na minha capacidade e torceu por mim nessa trajetória como também fora um ombro para chorar durante meu tempo no ensino médio.

Por fim, gostaria de agradecer ao meu orientador David, que me acompanhou e orientou desde 2019 sem desistir de mim apesar do meu desempenho que por vezes deixou a desejar, e que aceitou me orientar neste TCC mesmo sendo fora de sua área de expertise.

RESUMO

No presente trabalho, a autora realizará uma introdução à Gravitação Quântica de Laços (LQG) através da quantização da Relatividade Geral (RG) discretizada em um 2-complexo em abordagem canônica (introduzindo operadores satisfazendo a álgebra de Poisson clássica) e covariante (via amplitudes de transição dadas por integrais de trajetória) resultando no formalismo de Redes de Spin e Espuma de Spin respectivamente, mostrando a disritude dos espectros de área de volume e utilizando estes resultados para derivar a entropia de Bekenstein-Hawking e analisar cosmologia do Big Bang.

Palavras-chave: gravitação quântica; gravitação; mecânica quântica; altas energias; relatividade; relatividade geral; teorias de calibre; teorias de Yang-Mills; geometria diferencial; geometria quântica; teoria de fibrados; teoria de campos.

ABSTRACT

In the present work, the author will introduce Loop Quantum Gravity (LQG) through the quantization of General Relativity (GR) discretized on a 2-complex via the canonical (introducing operators satisfying the classical Poisson algebra) and covariant (via transition amplitudes given by path integrals) approaches resulting on the Spin Network and Spin Foam formalisms respectively, showing the discreteness of the spectra of area and volume and using those results to derive the Bekenstein-Hawking entropy and analyse Big Bang cosmology.

Keywords: quantum gravity; gravity; quantum mechanics; high energy; relativity; general relativity; gauge theories; Yang-Mills theories; differential geometry; quantum geometry; fibre bundle theory; field theory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diferenças entre limites clássico $j, v \gg 1$ e contínuo $L \rightarrow \infty$	38
---	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	notação e denominação de elementos da discretização do interior de \mathcal{R}	19
Tabela 2	–	notação e denominação de elementos da discretização da borda $\partial\mathcal{R}$	19

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	2
2	FORMULAÇÃO DE TETRADAS-PALATINI E ANÁLISE CANÔNICA DA RG	3
2.1	FORMULAÇÃO DE EINSTEIN DA RG	3
2.2	TETRADAS E FÉRMIONS	4
2.2.1	Questão do Sinal do Determinante	6
2.2.2	Formulções de Primeira e Segunda Ordem	7
2.3	AÇÃO DE HOLST	8
2.3.1	Vínculo de Simplicidade Linear	9
2.4	ANÁLISE HAMILTONIANA DA RG	10
2.4.1	Termos de Fronteira	10
2.4.2	Variáveis ADM: Decomposição $3 + 1$	10
3	VARIÁVEIS DE ASHTEKAR E QUANTIZAÇÃO EM LAÇOS	14
3.1	VARIÁVEIS DE ASHTEKAR	14
3.2	DISCRETIZAÇÃO CLÁSSICA	17
3.2.1	Cálculo de Regge	17
3.2.2	Discretização da RG em um 2-complexo	18
3.2.2.1	<i>Discretização da Fronteira</i>	18
3.2.2.2	<i>Discretização das Variáveis</i>	19
3.2.2.3	<i>Ação Discretizada</i>	20
3.2.2.4	<i>Variáveis de Fronteira</i>	20
3.3	QUANTIZAÇÃO DA RG DISCRETIZADA	21
3.3.1	Mapa Y_γ	21
3.3.2	Operador de Área	23
3.3.3	Redes de Spin	23
3.3.3.1	<i>Fixação de Calibre</i>	23
3.3.3.2	<i>Base de Rede de Spin</i>	24
3.3.3.3	<i>Átomos de Geometria</i>	27
3.3.4	Introduzindo Dinâmica: Amplitudes de Transição	28
3.3.5	Limite Contínuo ($L \rightarrow \infty$)	30
3.3.6	Constante Cosmológica e Finitude IR	31
4	APLICAÇÕES TEÓRICAS	32
4.1	ENTROPIA DE BEKENSTEIN-HAWKING	32
4.2	COSMOLOGIA QUÂNTICA DE LAÇOS	33
5	ALGUMAS RESSALVAS IMPORTANTES	37
5.1	GRAFOS GERAIS	37
5.2	LIMITE CLÁSSICO ($j \gg 1$) VS LIMITE CONTÍNUO ($L \rightarrow \infty$)	37
6	CONCLUSÃO	39
	REFERÊNCIAS	41
	APÊNDICE A – Uma Breve Caminhada no Campo	43
A.1	AÇÃO, DERIVADA FUNCIONAL	43
A.1.1	Exemplos Básicos de Campos	44
A.1.1.1	<i>Campo Escalar Real</i>	44
A.1.1.2	<i>Campo de Dirac</i>	45
A.1.2	Análise Hamiltoniana de Campos	45

A.2	SEGUNDA QUANTIZAÇÃO	49
	APÊNDICE B – Teorias de Calibre e Fibrados	50
B.1	ORIGENS DA SIMETRIA DE CALIBRE	51
B.2	UMA BREVE INTRODUÇÃO AO FORMALISMO DE FIBRADOS	53
B.3	A AÇÃO DE YANG-MILLS	56
B.3.1	Ação BF	58
B.3.2	Teorias de Calibre na Rede	58
<i>B.3.2.1</i>	<i>Teoria Hamiltoniana na Rede</i>	<i>59</i>
	APÊNDICE C – Teoria de Representação do Grupo de Lorentz $SL(2, \mathbb{C})$. .	61
	APÊNDICE D – Cálculo explícito do espectro de Área em termos das	
	Variáveis de Ashtekar	63
	APÊNDICE E – Análise Harmônica no Grupo $SU(2)$	64
E.1	SÍMBOLOS $3j$ DE WIGNER	64
	APÊNDICE F – Demonstrações das equações	65
F.1	CAP 3 SEC 3.1:	65

PREFÁCIO

Neste trabalho, serão adotadas as seguintes convenções de notação: índices gregos como $\mu, \nu = t, x, y, z$ irão denotar direções em espaço-tempo 4-dimensional curvo; índices latinos maiúsculos do meio do alfabeto como $I, J = 0, 1, 2, 3$ irão denotar direções em espaço-tempo plano 4-dimensional (equivalentemente, índices referentes à álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{spin}(3, 1)$); índices latinos minúsculos do começo do alfabeto como $a, b = x, y, z$ irão denotar direções em espaço curvo 3-dimensional; índices latinos minúsculos do meio do alfabeto como $i, j = 1, 2, 3$ irão denotar direções em espaço plano 3-dimensional (equivalentemente, índices referentes à álgebra $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{spin}(3)$). Adicionalmente, será adotada a convenção de denotar por $\delta/\delta\phi$ a derivada funcional em relação ao campo ϕ de um funcional como a ação S , enquanto o operador de Euler-Lagrange do campo ϕ aplicado a uma função como a densidade Lagrangeana \mathcal{L} será denotado por $\mathfrak{d}/\mathfrak{d}\phi$, esquematicamente

$$\frac{\delta S}{\delta\phi} = \frac{\mathfrak{d}\mathcal{L}}{\mathfrak{d}\phi} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - D_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D_\mu\phi)}, \quad S = \int d^4x \mathcal{L},$$

onde a derivada parcial em relação a um campo $\partial\mathcal{L}/\partial\phi$ é formalmente a derivada funcional integrada em uma das variáveis,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}(x) \equiv \int d^3x' \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\phi(x')}.$$

O texto principal deste trabalho assume um nível de conhecimento equivalente ao da autora ao iniciar este, porém caso alguém que venha a ler este trabalho não possua a bagagem teórica necessária para acompanhar o mesmo, serão feitas breves introduções aos temas relevantes nos apêndices para familiarizar os leitores aos formalismos aqui presentes.

1 INTRODUÇÃO

A Gravitação Quântica de Laços (abreviado LQG do inglês "Loop Quantum Gravity") é o principal modelo atualmente quando se trata de abordagens não-perturbativas de quantização da Relatividade Geral (RG) de Albert Einstein (ROVELLI; VIDOTTO, 2015; BODENDORFER, 2016). Seu pontapé inicial se deu em 1986 quando Abhay Ashtekar (ASHTEKAR, 1986) introduziu suas "variáveis de Ashtekar" através de uma transformação canônica da RG no contexto Hamiltoniano. O termo "de Laços" no nome da teoria é uma herança histórica do desenvolvimento desta, em que o espaço de Hilbert foi descrito inicialmente em termos dos laços de Wilson (BODENDORFER, 2016; RODOLFO GAMBINI, 2011), e depois fora generalizado para grafos com elos abertos terminando em nódulos (ROVELLI; VIDOTTO, 2015). A teoria prevê que observáveis como área e volume possuem espectros discretos, portanto o espaço em si é discreto sendo feito de "átomos de geometria" (ROVELLI; VIDOTTO, 2015; VAID; BILSON-THOMPSON, 2014) e seu espaço de Hilbert possui um produto interno discreto, assim violando uma hipótese do Teorema de Stone-Von Neumann, permitindo que o modelo possa realizar previsões diferentes de outras tentativas mais usuais de quantização da RG (RODOLFO GAMBINI, 2011). Por fim, é possível utilizar o formalismo resultante para derivar a entropia de Bekenstein-Hawking, fazer análises de cosmologia do Big Bang e calcular espalhamentos de grávitons (ROVELLI; VIDOTTO, 2015; RODOLFO GAMBINI, 2011; BODENDORFER, 2016).

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: no capítulo 2 será feita uma revisão da RG clássica, sua dificuldade de trabalhar com férmions e a solução deste problema através da formulação de conexão-vierbein de Weyl-Cartan e a decomposição $3 + 1$ do formalismo ADM.

Em 3, será feito o desenvolvimento do modelo, através da introdução das variáveis de Ashtekar e da quantização realizada num espaço-tempo discretizado, inspirado nas técnicas de Cromodinâmica Quântica (CDQ) na Rede, mostrando a disritude dos espectros de área e volume e as amplitudes de transição finitas do modelo.

A seguir em 4 o modelo desenvolvido anteriormente será usado para realizar análises de interesse físico que perduram o debate quando se trata de "gravitação quântica", em particular na dedução da entropia de Bekenstein-Hawking e na análise da cosmologia do Big Bang.

O capítulo 5 será destinado para tratar de ressalvas, como o fato de o grafo Γ não precisar ser a borda de uma triangulação dual $\partial\Delta^*$, grafos com nódulos de valência diferente de 4 e a distinção entre o limite contínuo e o limite clássico.

Por fim, 6 é o capítulo de conclusão do trabalho, onde serão discutidos os principais resultados do modelo, sua relevância e possíveis direções de pesquisa futuras na área.

2 FORMULAÇÃO DE TETRADAS-PALATINI E ANÁLISE CANÔNICA DA RG

2.1 FORMULAÇÃO DE EINSTEIN DA RG

Nossa melhor teoria de gravitação atualmente é a RG (Relatividade Geral) de Albert Einstein, em que o campo gravitacional é reinterpretado como a geometria do próprio espaço-tempo, visto como uma variedade pseudo-Riemanniana (ROVELLI; VIDOTTO, 2015). O potencial gravitacional é dado pela *métrica* do espaço-tempo $g_{\mu\nu}(x)$, cuja dinâmica é encapsulada numa equação de estado, conhecida como *equação de Einstein*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

onde $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci, $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}[g_{\mu\nu}]$ é o tensor de Ricci obtido da contração do tensor de Riemann $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$ com $R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \partial_\beta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\delta}\Gamma^\delta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\delta}\Gamma^\delta_{\mu\beta}$, Λ é a constante cosmológica, G é a constante gravitacional de Newton, c é a velocidade da luz no vácuo e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da matéria. Esta equação pode ser obtida através do princípio variacional da *ação de Einstein-Hilbert* acoplada à matéria (com constante cosmológica), similar ao discutido no apêndice A

$$S[g] = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (2)$$

em que $g = \det(g_{\mu\nu})$, $\kappa = 8\pi G/c^4$ e \mathcal{L}_m é a densidade Lagrangeana da matéria em análise, assumida como minimamente acoplada (no sentido discutido em B) ao campo gravitacional. O tensor energia-momento surge da variação do segundo termo em relação à métrica,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} [\sqrt{-g} \mathcal{L}_m]. \quad (3)$$

Esta é a formulação de segunda ordem da RG, em que os símbolos de Christoffel são tratados como funções da métrica $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}[g]$. É possível também analisar essa ação como formalismo de primeira ordem, em que a conexão afim e a métrica são vistas como variáveis independentes,

$$S_{EH}[g, \Gamma] = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R[\Gamma], \quad (4)$$

no que variação em relação à conexão afim resulta no vínculo que nos permite expressar esta em termos da métrica,

$$\frac{\delta S_{EH}}{\delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}} = 0 \quad (5)$$

↓

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}), \quad (6)$$

assim retornando ao formalismo de segunda ordem. Isto é análogo a tratar q e \dot{q} como variáveis independentes na análise de uma partícula em mecânica clássica, em que a equação de Euler-Lagrange para \dot{q} vincula este a q , $\dot{q} = dq/dt$. A vantagem de realizar essa mudança de paradigma é que agora a ação é mais simples nas variáveis separadas, ao custo da introdução de mais um campo à teoria.

A formulação métrica-afim de Einstein para a RG, embora elegante e poderosa em suas previsões, possui um problema: não há mecanismos para acoplar férmions (campo de Dirac) ao campo gravitacional descrito em termos de métrica, pois esta é construída para lidar com vetores e tensores de ordem inteira, sendo assim incompatível com campos espinoriais, os quais são importantíssimos para a descrição microscópica de partículas como elétrons.

2.2 TETRADAS E FÉRMIONS

Como dito anteriormente, o formalismo métrica-afim da RG não permite acoplamento do campo de Dirac ao campo gravitacional. O campo de Dirac é um campo bi-espinorial que obedece a equação de Dirac (em unidades naturais $\hbar = c = 1$)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (7)$$

onde γ^μ são as matrizes gamma de Dirac que compõe uma representação da álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(1, 3)$ através de sua relação de anti-comutação $(\gamma^\mu, \gamma^\nu) = 2\eta^{\mu\nu}$ e ψ é o bi-espinor de Dirac, composto por um espinor de Weyl de quiralidade de mão direita e um de quiralidade de mão esquerda,

$$\psi = \begin{bmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{bmatrix}, \phi_i \in \mathbb{C}^2. \quad (8)$$

Aqui podemos ver dois problemas para acoplar a métrica ao campo de Dirac: o primeiro sendo que a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ requer índices de espaço-tempo para atuar, os quais estão ausentes no bi-espinor; o segundo sendo que as matrizes gamma formam uma representação da álgebra de Clifford do espaço-tempo plano de Minkowski.

Ambos problemas são solucionados ao trabalhar com a RG no formalismo tetradas-conexão de Weyl-Cartan: da mesma maneira que o espinor ψ é a “raiz quadrada” de um quadrivetor, nós introduzimos as tetradas (ou vierbein) $e_\mu^I(x)$, que são como a “raiz quadrada” da métrica

$$e_\mu^I(x)e_\nu^J(x)\eta_{IJ} = g_{\mu\nu}(x) \quad (9)a$$

$$e_\mu^I(x)e_\nu^J(x)g^{\mu\nu}(x) = \eta^{IJ} \quad (9)b$$

e suas inversas

$$e_I^\mu(x)e_\nu^I(x) = \delta_\nu^\mu \quad (10)a$$

$$e_J^\mu(x)e_\mu^I(x) = \delta_J^I \quad (10)b$$

satisfazendo

$$e_I^\mu(x)e_J^\nu(x)\eta^{IJ} = g^{\mu\nu}(x) \quad (11)a$$

$$e_I^\mu(x)e_J^\nu(x)g_{\mu\nu}(x) = \eta_{IJ}. \quad (11)b$$

No contexto da teoria de Fibrados abordada em B.2, as tetradas nos dão uma trivialização do fibrado (co)tangente de uma dada carta $U \subset M$ do espaço-tempo M^1 (um isomorfismo de fibrados vetoriais)

$$e : \mathbb{R}^{3+1} \times U \rightarrow TU \quad (12)$$

$$\mathbb{R}^{3+1} \times \{p\} \mapsto T_p U$$

$$e^{-1} : \mathbb{R}^{3+1} \times U \rightarrow T^*U \quad (13)$$

$$\mathbb{R}^{3+1} \times \{p\} \mapsto T_p^* U,$$

pois estes atuam como um mapa entre o espaço-tempo de Minkowski e o espaço tangente do espaço-tempo, mapeando a base canônica do primeiro à base de coordenadas do segundo. De maneira prática, esta trivialização do fibrado (co)tangente nos dá um jeito de descrever a ação do campo gravitacional atuando em campos vetoriais/tensoriais: dada uma métrica $g_{\mu\nu}$, pelo fato desta ser simétrica é relativamente

¹ Se a topologia de M for trivial, i.e M puder ser coberto por apenas uma carta, então essa trivialização será global, $e : \mathbb{R}^{3+1} \times M \rightarrow TM$.

simples achar um vierbein e_μ^I satisfazendo (9)a, e então se soubermos as componentes de um dado campo em espaço plano (por exemplo campo eletromagnético F_{IJ}), podemos usar as tetradas para achar as componentes deste campo sob influência da gravidade, $F_{\mu\nu} = e_\mu^I e_\nu^J F_{IJ}$.

Pela eq (9)a, vemos que os vierbein possuem uma simetria de Lorentz *local* interna (nos índices de espaço plano)

$$e_\mu^I(x) \rightarrow e'^I_\mu(x) = \Lambda^I_J(x) e_\mu^J(x), \quad \Lambda \in \text{SO}(1, 3) \quad (14)$$

pois $\Lambda^I_{I'} \Lambda^J_{J'} \eta_{IJ} = \eta_{I'J'}$ e os vierbein são campos dependendo da posição, logo as transformações de Lorentz internas também dependem. Esta simetria local implica na existência de uma conexão ω_μ^{IJ} , que define uma derivada covariante (como discutido em B, este termo é mais geral que apenas a derivada covariante da RG)

$$D_\mu V^I = \partial_\mu V^I + \omega_\mu^I{}_J V^J. \quad (15)$$

Compatibilidade desta derivada covariante com a métrica de Minkowski interna implica nesta conexão ser anti-simétrica em seus índices internos, tornando-a numa conexão do grupo de Lorentz $\text{SL}(2, \mathbb{C})$,

$$D_\mu \eta^{IJ} = 0 \quad (16a)$$

$$\omega_{\mu K}^I \eta^{KJ} + \omega_{\mu K}^J \eta^{IK} = 0 \quad (16b)$$

$$\omega_\mu^{IJ} + \omega_\mu^{JI} = 0 \quad (16c)$$

$$\omega_\mu^{IJ} = -\omega_\mu^{JI}. \quad (16d)$$

Por fim, condição de metricidade dessa derivada é equivalente ao requerimento que a derivada covariante do vierbein seja nula,

$$D_\nu e_\mu^I = \partial_\nu e_\mu^I + \omega_{\nu J}^I e_\mu^J - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha e_\alpha^I = 0, \quad (17)$$

de onde podemos extrair a conexão afim em termos da conexão spin ω_μ^{IJ} e das tetradas e_μ^I

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = e_I^\alpha \partial_\nu e_\mu^I + e_I^\alpha \omega_{\nu J}^I e_\mu^J, \quad (18)$$

isto é, enxergando as tetradas como um referencial inercial local, uma rotação infinitesimal seguida de uma translação infinitesimal de dito referencial, uma transformação afim como o nome sugere.

Agora, o bi-espinor é visto como um espinor na representação spin-1/2 do grupo local de Lorentz, então sua derivada covariante é dada por

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} \omega_\mu^{IJ} \gamma_{IJ} \psi, \quad (19)$$

em que $\gamma_{IJ} = \frac{1}{2}[\gamma_I, \gamma_J]$ são os geradores do grupo de Lorentz $\text{SL}(2, \mathbb{C}) = \text{Spin}(1, 3)$. Com isso, podemos enfim escrever a *equação de Dirac em espaço curvo*

$$(i\tilde{\gamma}^\mu D_\mu - m)\psi = 0, \quad (20)$$

onde $\tilde{\gamma}^\mu = \gamma^I e_I^\mu$ são matrizes gamma que agora geram a álgebra de Clifford do espaço curvo, $(\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu) = 2g^{\mu\nu}$.

As tetradas e conexão spin definem uma geometria de Cartan, que é mais geral que geometria Riemanniana por incluir torsão: a 2-forma de torsão é dada por

$$\mathcal{T} = de + \frac{1}{2}[\omega \wedge e] = De, \quad (21)$$

onde $e = e_\mu^I dx^\mu \gamma_I$ e $\omega = \omega_\mu^{IJ} dx^\mu \gamma_{IJ}$. Esta é a *primeira equação de Cartan*. A 2-forma de curvatura, ou tensor de força de campo, é dado pela derivada covariante exterior da conexão

$$F = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] = D\omega. \quad (22)$$

Esta é a *segunda equação de Cartan*. Dada uma tetrada e , a condição de torsão nula $\mathcal{T} = 0$ nos permite resolver para a conexão spin em termos das tetradas,

$$\omega_\mu^{IJ} = e^{I\nu} \nabla_\mu e_\nu^J = \frac{1}{2} e^{I\nu} \partial_{[\mu} e_{\nu]}^J - \frac{1}{2} e^{J\nu} \partial_{[\mu} e_{\nu]}^I - \frac{1}{2} e^{I\nu} e^{J\beta} \partial_{[\nu} e_{\beta]}^K e_{K\mu}, \quad (23)$$

onde ∇_μ denota a derivada covariante da métrica, esquematicamente $\nabla = D - \omega$, assim reduzindo o formalismo de Cartan para o de Riemann (com uma simetria de calibre adicional nos vierbein).

Quando a torsão é nula, as componentes do tensor de Riemann são relacionadas com as da curvatura da conexão spin através do pullback dos índices de espaço plano para espaço tangente dado pelo vierbein,

$$R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = F^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \equiv e_I^\alpha e_J^\beta F_{\mu\nu}^{IJ}, \text{ se } \mathcal{T} = De = 0, \quad (24)$$

permitindo assim expressar a ação de Einstein-Hilbert em termos das tetradas

$$\begin{aligned} S_{EH}[g] &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R = \\ &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x |\det e| e_J^\mu e_I^\nu F_{\mu\nu}^{IJ} = S_{EH}[e]. \end{aligned} \quad (25)$$

Por sua vez, esta pode ser expressa mais sucintamente em notação de formas diferenciais $e = e^I \gamma_I = e_\mu^I dx^\mu \gamma_I$

$$\begin{aligned} S_{EH}[e] &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x |\det e| e_J^\mu e_I^\nu F_{\mu\nu}^{IJ} = \\ &= \frac{1}{\kappa} \int \text{sign}(\det e) e^I \wedge e^J \wedge *F_{IJ} = \\ &= \frac{1}{4\kappa} \int \text{sign}(\det e) \text{Tr}(e \wedge e \wedge F), \end{aligned} \quad (26)$$

onde o traço é tomado nas matrizes gamma e $*$ denota o dual de Hodge nos índices internos de espaço plano I, J . A menos do sinal do determinante do vierbein, essa ação remete à ação BF de teorias de campos topológicos comentadas em B.3.1

$$S_{BF} = \frac{1}{4q} \int \text{Tr}(B \wedge F), \quad (27)$$

onde q é a constante de acoplamento do campo de calibre. Essa semelhança será explorada em mais detalhes mais à frente.

2.2.1 Questão do Sinal do Determinante

Na construção acima nós tratamos de uma ação equivalente à de Einstein-Hilbert no formalismo de tetradas, porém acabamos com um módulo do determinante do vierbein e consequentemente um fator de sinal do determinante na ação. Uma pergunta natural a se fazer é se esse sinal é de fato importante e se não poderíamos lidar com a ação

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \det e e_J^\mu e_I^\nu F_{\mu\nu}^{IJ} = \frac{1}{4\kappa} \int \text{Tr}(e \wedge e \wedge F). \quad (28)$$

Essas formulações acabam por não serem equivalentes, pois na dada em (28), a ação troca de sinal ante uma reversão temporal. Isso não gera nenhum efeito na matéria que acopla à métrica, porém como discutimos anteriormente, o campo de Dirac acopla às *tetradas*, portanto sua dinâmica é sensível ao sinal $\text{sign}(\det e)$, visto que a fase de férmions evolui ao contrário em regiões onde o sinal do determinante muda. Dado que experimentos de interferência são capazes de detectar mudanças relativas de fase, a princípio esse sinal é observável. A ação de partículas não-relativísticas muda de sinal ante reversão temporal, em

contra-partida a ação de Einstein-Hilbert em formulação métrica-afim não muda, então neste sentido a formulação de tetradas-conexão parece mais natural/fundamental.

Tudo isso tem pouco efeito na teoria clássica, porém é vital na teoria quântica: quando se constrói a integral de trajetória do campo gravitacional, haverá diferença se a integral for feita sobre métrica

$$W[g] \sim \int \mathcal{D}[g] e^{iS_{EH}[g]} \quad (29)$$

ou sobre vierbein

$$W[e] \sim \int \mathcal{D}[e] e^{iS_{EH}[e]}, \quad (30)$$

visto que a integração sobre tetradas inclui configurações onde o sinal é negativo, contribuindo com termos da forma

$$e^{-iS_{EH}} \quad (31)$$

além dos termos convencionais da forma

$$e^{+iS_{EH}}. \quad (32)$$

Nesse sentido, a contribuição de termos de expoente negativo são análogos aos caminhos de propagação para frente e para trás da partícula relativística, e pode-se até dizer que a região de sinal negativo é uma espécie de “anti-espaco-tempo”: uma região onde tem-se uma contribuição de ação negativa, como se revertido temporalmente. Portanto, trataremos da ação dada na eq (28), onde descartamos o sinal na integração.

2.2.2 Formulações de Primeira e Segunda Ordem

Assim como na formulação de Einstein, podemos tratar a formulação de Weyl-Cartan em primeira ordem, ao enxergar a conexão spin como independente do campo referencial e

$$S[e, \omega] = \frac{1}{4\kappa} \int \text{Tr}(e \wedge e \wedge F[\omega]). \quad (33)$$

Esta é uma ação polinomial em e e ω , chamada ação de tetradas-Palatini. Para gravitação pura (teoria de vácuo), ambas formulações são equivalentes, pois variação da ação (33) em relação à conexão spin leva à condição de torsão nula

$$\frac{\delta S}{\delta \omega_{\alpha}^{KL}} = 0 \quad (34)$$

$$\downarrow \times e_{\mu}^K e_{\nu}^L e_{\alpha}^I$$

$$D_{[\mu} e_{\nu]}^I = \mathcal{T}_{\mu\nu}^I = 0 \quad (35)$$

então reduzindo para a formulação de segunda ordem com $\omega = \omega[e]$. No entanto, quando consideramos essa ação acoplada à ação de Dirac

$$S'[e, \omega, \psi] = \frac{1}{4\kappa} \int \text{Tr}(e \wedge e \wedge F[\omega]) + S_D[e, \omega, \psi], \quad (36)$$

as duas formulações se tornam inequivalentes, em particular por quê agora variação com respeito à conexão spin gera um acoplamento spin-torsão

$$\frac{\delta S'}{\delta \omega_{\alpha}^{KL}} = 0 \quad (37)$$

$$\downarrow \times e_{\mu}^K e_{\nu}^L e_{\alpha}^I$$

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^I + \frac{1}{2} (e_{\mu}^I \mathcal{T}_{\alpha\nu}^K e_K^{\alpha} - e_{\nu}^I \mathcal{T}_{\alpha\mu}^K e_K^{\alpha}) = \kappa \sigma_{\mu\nu}^I \quad (38)$$

onde $\sigma_{\mu\nu}^I$ é o tensor de spin do campo de Dirac dado pela variação da ação de Dirac em relação à conexão spin,

$$\sigma_{\mu\nu}^I = \frac{1}{\det e} e_\mu^K e_\nu^L e_\alpha^I \frac{\delta S_D}{\delta \omega_{\alpha}^{KL}}. \quad (39)$$

Essa diferença entre as duas formulações pode ser expressa como um termo de interação de quatro férmions, pois a conexão de spin que soluciona (38) possui termos que dependem do férmion ψ , o qual se re-acopla com os mesmos através da derivada covariante D_μ . Esquemáticamente,

$$S[e, \psi] = S[e, \omega, \psi] + \int \bar{\psi} \psi \bar{\psi} \psi, \quad (40)$$

portanto mesmo as formulações de primeira e segunda ordem sendo inequivalentes quando acopladas ao campo de Dirac, sempre pode-se somar ou subtrair um termo de interação de quatro férmions, tornando-as equivalentes.

2.3 AÇÃO DE HOLST

A ação (33) é uma bela expressão polinomial nas variáveis e e ω , remetente à ação BF de teorias de campos topológicos. Além disso, ela admite formulação geométrica através de notação de formas diferenciais. Porém, ela não é a única ação que possui essas características. Outra ação que também possui essas mesmas características é

$$S = \frac{1}{4\kappa} \int \text{Tr}(e \wedge e \wedge *F) \quad (41)$$

com o dual de Hodge na curvatura F dentro do traço, então nós a adicionamos à ação de Einstein-Hilbert com uma constante de acoplamento γ , denominada parâmetro de Barbero-Immirzi

$$S_H = \frac{1}{4\kappa} \left(\int \text{Tr}(e \wedge e \wedge F) + \frac{1}{\gamma} \int \text{Tr}(e \wedge e \wedge *F) \right). \quad (42)$$

Esta é a *ação de Holst*. A adição deste termo não afeta as equações clássicas de movimento pois se trata de uma transformação canônica: variação em relação à conexão spin novamente nos dá a condição de torção nula, e com isso o novo termo se simplifica para

$$\frac{1}{4\kappa\gamma} \int \text{Tr}(e \wedge e \wedge *F) = \frac{1}{\kappa\gamma} \int d^4x R_{\mu\nu\theta\rho} \varepsilon^{\mu\nu\theta\rho} \equiv 0 \quad (43)$$

pelas simetrias do tensor de Riemann, em particular, sua parte completamente anti-simétrica é nula pois $R_{\mu\nu\theta\rho}$ é simétrico em ν, ρ enquanto $\varepsilon^{\mu\nu\theta\rho}$ é anti-simétrico nos mesmos. No caso particular de $\gamma = i$, esta ação é auto-dual nos índices de espaço plano I, J , isto é, $*S_H = iS_H$. A ação de Holst (42) pode ser reescrita mais compactamente

$$\begin{aligned} S_H &= \frac{1}{4\kappa} \left(\int \text{Tr}(e \wedge e \wedge F) + \frac{1}{\gamma} \int \text{Tr}(e \wedge e \wedge *F) \right) = \\ &= \frac{1}{4\kappa} \int \text{Tr} \left(e \wedge e \wedge F + \frac{1}{\gamma} e \wedge e \wedge *F \right) = \\ &= \frac{1}{4\kappa} \int \text{Tr} \left(e \wedge e \wedge \left(1 + \frac{1}{\gamma} * \right) F \right) = \\ &= \frac{1}{4\kappa} \int \text{Tr} \left(\left(e \wedge e + \frac{1}{\gamma} * (e \wedge e) \right) \wedge F \right), \end{aligned} \quad (44)$$

onde agora a ação na forma BF revela $B = (1 + \frac{1}{\gamma} *)e \wedge e$. Esta é a ação com a qual se trabalha em LQG, pois é a mais genérica polinomial e possuindo todas as simetrias relevantes, reduzindo à RG classicamente. A transformação canônica que leva à esta ação é a que fixa a conexão a ser

$$A_\mu^{IJ} = \frac{1}{2} \left(\omega_\mu^{IJ} - \frac{\gamma}{2} \varepsilon^{IJ}{}_{KL} \omega_\mu^{KL} \right), \quad (45)$$

que no caso de $\gamma = i$ se torna a parte auto-dual da conexão spin, $(*A)_\mu^{IJ} = iA_\mu^{IJ}$. Esta é a versão covariante do que virá a ser definido como conexão de Ashtekar (LEI LU, 2024).

Como dito anteriormente, o termo de Holst não possui efeito na teoria clássica, porém ele é substancial para a teoria quântica: o termo B é o momento canônico conjugado à conexão A ,

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A)} (B \wedge F) = \\ &= \frac{1}{\kappa} B = \frac{1}{\kappa} B_{\mu\nu}^{IJ} dx^\mu \wedge dx^\nu \gamma_{IJ},\end{aligned}\quad (46)$$

em particular, se a análise for restrita à fronteira de $t = 0$ de uma região compacta do espaço-tempo onde a restrição de $e \wedge e$ some nesta fronteira, temos que

$$\boxed{\Pi = \frac{1}{\kappa\gamma} * (e \wedge e)}.\quad (47)$$

Esta expressão define a versão covariante do que virá a ser chamado campo elétrico de Ashtekar (LEI LU, 2024).

2.3.1 Vínculo de Simplicidade Linear

Considere uma fronteira tipo espaço $\Sigma \subset M$. As tetradas são um mapa que levam os espaços tangente de M ao espaço de Minkowski \mathbb{R}^{3+1} , em particular, mapeiam o espaço tangente num ponto $\sigma \in \Sigma$ a um sub-espaço vetorial espacial de \mathbb{R}^{3+1} . O subgrupo de $\text{SO}(3, 1)$ que mantém esse espaço invariante é o grupo de rotações $\text{SO}(3)$, quebrando a simetria local $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ em uma simetria local $\text{SU}(2)$ nessa fronteira. Isto é, a fronteira Σ nos permite escolher um referencial de Lorentz preferido.

Em coordenadas, podemos visualizar isso ao escrever o vetor normal aos vetores tangentes à fronteira Σ ,

$$n_I \sim \varepsilon_{IJKL} e_\mu^I e_\nu^J e_\theta^K \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^2} \frac{\partial x^\theta}{\partial \sigma^3},\quad (48)$$

onde σ^a são as coordenadas de um ponto $\sigma \in \Sigma$ e $x^\mu(\sigma)$ são o mergulho de Σ em M , ou seja n_I é o pullback de três índices do símbolo de Levi-Civita em espaço plano ao espaço curvo e depois à fronteira. O motivo para considerarmos o vetor normal em espaço plano é devido ao fato de que iremos usá-lo para separar os índices internos da 2-forma de momento (46). Podemos usar n_I para fixar o calibre do grupo $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ ao $\text{SU}(2)$ que o preserva, ou seja, podemos orientar o referencial de Lorentz local de maneira que Σ seja uma hiper-superfície de tempo fixo, i.e $n_I = (1, 0, 0, 0)$.

A restrição da 2-forma de momento $B^{IJ} = B_{ab}^{IJ} d\sigma^a \wedge d\sigma^b$ à fronteira Σ pode ser decomposta em uma parte elétrica $K^I = n_J B^{IJ}$ e magnética $L^I = n_J (*B)^{IJ}$, da mesma maneira que o tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$ do eletromagnetismo pode ser decomposto uma vez que um referencial de Lorentz é escolhido, porém aqui a decomposição é nos índices internos do grupo $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ ao invés de nos índices de espaço-tempo. Pela natureza anti-simétrica de B^{IJ} , vemos que K^I e L^I não possuem componentes normais à Σ , i.e $n_I K^I = 0 = n_I L^I$ (pois $n_I K^I = n_I n_J B^{IJ} = (n_I n_J - n_J n_I) B^{IJ} = 0$ e analogamente para L^I), e portanto possuem apenas 3 componentes independentes, podendo ser escritos como vetores 3-dimensionais no espaço normal à n_I , denotados como \vec{K} e \vec{L} . No calibre onde $n_I = (1, 0, 0, 0)$ eles se tornam simplesmente

$$K^i = B^{i0}\quad (49)\text{a}$$

$$L^i = \frac{1}{2} \varepsilon^i_{jk} B^{jk}.\quad (49)\text{b}$$

Estas são relações análogas em forma às que relacionam os campos elétrico e magnético ao tensor de Faraday.

Um resultado simples porém importante para a teoria quântica é que (note que na fronteira Σ , $n_I e^I|_\Sigma \equiv 0$ pela definição de n_I)

$$K^I = n_J \left(*(e \wedge e)^{IJ} + \frac{1}{\gamma} (e \wedge e)^{IJ} \right) = n_J (*(e \wedge e))^{IJ} \quad (50a)$$

$$L^I = n_J \left((e \wedge e)^{IJ} + \frac{1}{\gamma} (*(e \wedge e))^{IJ} \right) = \frac{1}{\gamma} n_J (*(e \wedge e))^{IJ} \quad (50b)$$

\Downarrow

$$\boxed{\vec{K} = \gamma \vec{L}}. \quad (51)$$

Este é o *vínculo de simplicidade linear*, em palavras as partes elétricas e magnéticas da 2-forma de momento B^{IJ} são proporcionais uma a outra, com a constante de proporcionalidade sendo o parâmetro de Barbero-Immirzi γ . Esta relação é uma das equações mais importantes de LQG, como exploraremos na seção 3.3.

2.4 ANÁLISE HAMILTONIANA DA RG

Agora iremos dar um passo atrás e retornar à ação de Einstein-Hilbert convencional, pois historicamente a análise canônica da RG feita por Dirac e posteriormente por Arnowitt, Deser e Misner e a consequente introdução das variáveis de Ashtekar começou por dita ação, onde a transformação canônica que leva à ação de Holst foi feita por Ashtekar no contexto canônico.

2.4.1 Termos de Fronteira

Considere uma região compacta $\mathcal{R} \subset M$, com a topologia de uma 4-bola B^4 . A fronteira de \mathcal{R} é um espaço 3-dimensional com a topologia de uma 3-esfera S^3 , a qual denotaremos por Σ . Para obter um princípio variacional e uma função de Hamilton-Jacobi bem definidos, por vezes termos de fronteira podem ser necessários. Na formulação métrica-afim, o termo de fronteira é

$$S_{EH} \text{ (fronteira)} = \int_{\Sigma} d^3\sigma \sqrt{q} k^{ab} q_{ab}, \quad (52)$$

onde $q_{ab} = g_{ab}$ é a 3-métrica induzida na fronteira (o motivo para o uso da letra q é pela convenção de coordenadas generalizadas serem denotadas por essa letra, e como veremos adiante na seção 2.4.2, o espaço de fase da RG é parametrizado por essa 3-métrica), q é seu determinante, σ^a são as coordenadas de um ponto $\sigma \in \Sigma$ e k^{ab} é a *curvatura extrínseca* de Σ , cuja forma será definida adiante. Para o caso de gravidade pura sem constante cosmológica, visto que o escalar de Ricci é nulo nas soluções da equação de Einstein ($G_{\mu\nu} = 0$, tomando o traço temos $g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = -R = 0$), a ação para o interior de \mathcal{R} some, logo a ação de Hamilton-Jacobi será dada apenas pelo termo de fronteira

$$S_{EH}[q] = \int_{\Sigma} d^3\sigma \sqrt{q} k^{ab}[q] q_{ab}. \quad (53)$$

Esse funcional é bem não-trivial de se calcular, pois a curvatura extrínseca $k^{ab}[q]$ é determinada pela solução do interior de \mathcal{R} selecionado pela geometria intrínseca de Σ , logo k^{ab} é não-local. Saber a dependência geral de $k^{ab}[q]$ em termos de q_{ab} é equivalente a saber a solução geral da equação de Einstein.

2.4.2 Variáveis ADM: Decomposição 3 + 1

A análise Hamiltoniana da RG foi feita inicialmente por Dirac com o intuito de quantizar a teoria. A tarefa foi difícil por dois motivos: o primeiro era por se tratar de uma teoria com vínculos, o que levou Dirac a formular sua teoria de sistemas Hamiltonianos vinculados; a segunda dificuldade foi a intricância

horrenda da álgebra advinda da análise canônica da teoria usando as variáveis métricas convencionais. Esta segunda dificuldade foi aliviada por Arnowitt, Deser e Misner com a introdução de suas variáveis ADM: a partir da métrica $g_{\mu\nu}$, definimos 3 campos

$$q_{ab} = g_{ab}, \quad (54)a$$

$$N_a = g_{a0}, \quad (54)b$$

$$N = \sqrt{-g^{00}}, \quad (54)c$$

onde N_a é chamado *vetor deslocamento* e N de *função de lapso*. Note que na última expressão (54)c, N é definido pela componente $(0, 0)$ da métrica inversa $g^{\mu\nu}$ e não da covariante $g_{\mu\nu}$. Esta mudança de variáveis é conveniente pois, como veremos a seguir, quando a ação de Einstein-Hilbert é escrita em termos destas variáveis, descobre-se que a Lagrangeana não depende das derivadas \dot{N} e \dot{N}_a , simplificando a análise canônica pois agora o espaço de fase é parametrizado apenas pela 3-métrica q_{ab} .

Outra característica positiva destas variáveis são sua interpretação geométrica clara: assuma que o espaço-tempo é folheado por hiper-superfícies de $t = cte$. Neste contexto, q_{ab} é claramente a métrica induzida nessas superfícies espaciais, e pode ser usada para subir e descer índices espaciais $a, b = 1, 2, 3$. Agora, considere o vetor normal a essas hiper-superfícies n^μ e também considere $x^\mu \in \Sigma(t)$. Nesse caso, $y^\mu = x^\mu + Nn^\mu dt$ é o mesmo ponto na superfície $\Sigma(t + dt)$, por isso o nome lapso, pois N mede o tempo próprio elapsado de uma foliação para a próxima. Por fim, o vetor deslocamento mede, como o nome sugere, o deslocamento entre os pontos y^μ e $(t + dt, \vec{x})$, ou seja, a separação entre as coordenadas espaciais de um ponto em uma foliação em $t + dt$ e o ponto equivalente seguindo o vetor normal à superfície.

A função de lapso pode ser definida de outras duas maneiras equivalentes:

$$-N^2 q = g \quad (55)a$$

$$g_{00} = -N^2 + N_a N^a, \quad (55)b$$

de tal forma que o elemento de linha nessas variáveis pode ser escrito como

$$ds^2 = -(N^2 - N_a N^a) dt^2 + 2N_a dx^a dt + q_{ab} dx^a dx^b. \quad (56)$$

Com isso, podemos obter q^{ab} com índices contravariantes

$$q^{ab} = g^{ab} + \frac{1}{N^2} N^a N^b \quad (57)$$

A curvatura extrínica $K_{\mu\nu}$ da foliação Σ é dada pela derivada de Lie da métrica ao longo do vetor normal à foliação n^μ ,

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n g_{\mu\nu}. \quad (58)$$

Como n^μ é normal à foliação Σ , temos que $n^\mu K_{\mu\nu} = n^\nu K_{\mu\nu} = 0$, então podemos olhar apenas para a parte espacial da curvatura extrínica k_{ab} , que é um objeto vivendo na superfície de $t = cte$,

$$k_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{q}_{ab} - D_{(a} N_{b)}), \quad (59)$$

onde D_a é a derivada covariante da 3-métrica. Em termos destas variáveis, a ação de Einstein-Hilbert se torna

$$S_{EH}[N, \vec{N}, q] = \frac{1}{2\kappa} \int dt \int d^3x \sqrt{q} N (k^{ab} k_{ab} - k^2 + R[q]), \quad (60)$$

onde $k = k_a^a = q^{ab} k_{ab}$ e $R[q]$ é o escalar de Ricci da 3-métrica. Mais explicitamente em termos das variáveis principais, temos que a densidade Lagrangeana é

$$\mathcal{L}[N, \vec{N}, q] = \frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\sqrt{q}(q^{ac} q^{bd} - q^{ab} q^{cd})(\dot{q}_{ab} - D_{(a} N_{b)})(\dot{q}_{cd} - D_{(c} N_{d)})}{4N} + \sqrt{q} N R[q] \right). \quad (61)$$

Como dito anteriormente, a análise canônica agora é simplificada, pois como podemos ver não temos as derivadas temporais \dot{N} e \dot{N}_a , logo os momentos canônicos conjugados a essas variáveis são nulos e temos que o momento conjugado da 3-métrica é

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{ab}} = \frac{1}{2\kappa} \sqrt{q} G^{abcd} k_{cd} = \frac{1}{2\kappa} \sqrt{q} (k^{ab} - k q^{ab}), \quad (62)$$

onde G^{abcd} é a *super métrica de DeWitt* (contravariante) e é dada por

$$G_{abcd} = \frac{1}{2} (q_{ac} q_{bd} + q_{ad} q_{bc} - q_{ab} q_{cd}). \quad (63)$$

Com isso, podemos reescrever a ação em forma Hamiltoniana

$$S[N, \vec{N}, q, \pi] = \int dt \int d^3x \left(\pi^{ab} \dot{q}_{ab} - NC[\pi, q] - N_a C^a[\pi, q] \right), \quad (64)$$

em que

$$C = \frac{1}{\sqrt{q}} G_{abcd} \pi^{ab} \pi^{cd} - \sqrt{q} R[q] \quad (65)$$

é o *vínculo escalar* ou *vínculo Hamiltoniano* e

$$C^a = D_b \pi^{ab} \quad (66)$$

é chamado de *vínculo vetorial* ou *vínculo de diffeomorfismo*. Evidentemente, estes devem ser nulos pelas equações de movimento de N e N_a , visto que estas não possuem suas velocidades na ação. A razão dos nomes “Hamiltoniano” e “diffeomorfismo” é que estes geram evolução temporal² e diffeomorfismos espaciais, respectivamente, através de parenteses de Poisson

$$\{f, H[N]\} = N f \quad (67)a$$

$$\{f, H^a[N_a]\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} f, \quad (67)b$$

onde $H[N]$ e $H^a[N_a]$ são dados por

$$H[N] = \int d^3x N C \quad (68)a$$

$$H^a[N_a] = \int d^3x 2 N_a C^a. \quad (68)b$$

Portanto, a teoria Hamiltoniana é caracterizada pelo anulamento dos momentos do deslocamento e lapso, dos vínculos Hamiltonianos e de diffeomorfismo e de uma Hamiltoniana que é nula quando os vínculos são satisfeitos. Sucintamente,

$$H = H[N] + H^a[N_a] \quad (69)$$

$$H[N] \approx 0 \quad (70)a$$

$$H^a[N_a] \approx 0, \quad (70)b$$

onde \approx significa “fracamente igual a”, significando que o vínculo é igual a 0, porém seu parênteses de Poisson com uma dada função do espaço de fase pode não ser nula, em particular, estes devem ser vistos como geradores de simetrias de calibre por (67)a e (67)b, e significado físico só deve ser atribuído a funções que Poisson-comutam com ambos, denominadas *observáveis de Dirac*, pois estas seriam funções

² Mais especificamente, $H[N]$ engloba a dinâmica da teoria, e é o gerador de evolução temporal apenas na subvariedade do espaço de fase onde as equações de Einstein são satisfeitas.

invariantes a transformações de coordenadas. $H[N]$ e $H^a[N_a]$ geram uma álgebra sob comutação de Poisson, a *álgebra de deformação de hiper-superfícies* ou *álgebra de Dirac*,

$$\{H[N], H[M]\} = H^a[M\partial_a N - N\partial_a M] \quad (71)a$$

$$\{H^a[N_a], H[M]\} = H[\mathcal{L}_{\vec{N}}M] \quad (71)b$$

$$\{H^a[N_a], H^b[M_b]\} = -H^a[\mathcal{L}_{\vec{N}}M_a]. \quad (71)c$$

Um ponto a se notar aqui é que esta não é uma álgebra de Lie convencional, pois temos *funções de estrutura* ao invés de constantes. Isso trás complicações ao procurar por operadores que satisfaçam esta álgebra.

3 VARIÁVEIS DE ASHTEKAR E QUANTIZAÇÃO EM LAÇOS

Com a análise canônica da RG, mesmo na decomposição $3 + 1$ ADM ainda temos o problema da ação, Hamiltoniana e vínculos serem dados por expressões complicadas das variáveis em questão. É neste contexto que entram em cena as variáveis de Ashtekar, introduzidas em 1986 por Abhay Ashtekar que percebeu que há uma transformação canônica que pode ser feita na análise Hamiltoniana que simplifica as grandezas citadas anteriormente a expressões polinomiais, remetentes à teorias de Yang-Mills, e quando considera-se a formulação covariante coincide com a análise feita na seção 2.3.

3.1 VARIÁVEIS DE ASHTEKAR

Da mesma maneira que anteriormente tínhamos as tetradas como raiz quadrada da métrica, agora introduzimos as tríades (ou dreibein) como raiz quadrada da 3-métrica

$$e_a^i e_b^j \delta_{ij} = q_{ab} \quad (72)a$$

$$e_a^i e_b^j q^{ab} = \delta^{ij} \quad (72)b$$

e suas inversas

$$e_i^a e_b^i = \delta_b^a \quad (73)a$$

$$e_j^a e_a^i = \delta_j^i \quad (73)b$$

satisfazendo o esperado

$$e_i^a e_j^b \delta^{ij} = q^{ab} \quad (74)a$$

$$e_i^a e_j^b q_{ab} = \delta_{ij}. \quad (74)b$$

Da mesma maneira que a introdução do vierbein trouxe uma simetria $SL(2, \mathbb{C})$ local à teoria, o uso de tríades trás uma simetria $SU(2)$ local para nossa análise.

A primeira de nossas novas variáveis é a tríade inversa densitizada

$$\boxed{E_i^a := \sqrt{q} e_i^a}, \quad (75)$$

denominado *campo elétrico de Ashtekar*, onde a razão para este nome será explorada mais a frente. Pela fórmula de inversa usando os símbolos de Levi-Civita, vemos que o campo elétrico de Ashtekar pode ser visto como uma anti-simetrização de dois dreibein

$$e_i^a = \frac{1}{2 \det e} \varepsilon^{abc} \varepsilon_{ijk} e_b^j e_c^k \quad (76)$$

\Downarrow

$$E_i^a = \frac{1}{2} \varepsilon^{abc} \varepsilon_{ijk} e_b^j e_c^k, \quad (77)$$

com $\det e = \sqrt{q}$, portanto temos que este pode ser visto como uma 2-forma com valores na álgebra $\mathfrak{su}(2)$

$$\frac{1}{2} \varepsilon^i{}_{jk} e^j \wedge e^k = E^i = \kappa \gamma \Pi^i, \quad (78)$$

onde Π é o momento canônico à conexão discutido em 2.3.

A outra variável começa pelo pullback da curvatura extrínica

$$k_a^i := \frac{1}{\sqrt{q}} E^{ib} k_{ab} = e^{ib} k_{ab}, \quad (79)$$

e estes satisfazem parênteses de Poisson canônicos com E_i^a

$$\{k_a^i(x), E_j^b(y)\} = 2\kappa \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(x, y). \quad (80)$$

No entanto, agora nosso espaço de fase possui $9 + 9$ graus de liberdade em contraste aos $6 + 6$ das variáveis (q_{ab}, π^{cd}) , então precisamos de mais um vínculo para voltar à mesma dimensionalidade de antes. Este vínculo vem do fato de que a curvatura extrínseca é simétrica, logo $k_{[a}^i E_{b]}^j \delta_{ij} = \sqrt{q} k_{[ab]} = 0$, nos dando a *lei de Gauss* (este nome fará mais sentido adiante)

$$G_i = \varepsilon_{ijk} k_b^j E^{kb}. \quad (81)$$

A Hamiltoniana associada a este vínculo some fracamente e gera transformações de calibre $\text{SO}(3)$,

$$H_i[\lambda^i] = \int d^3x G_i \lambda^i \approx 0, \quad (82)$$

$$\{H_j[\lambda^j], k_a^i\} = \varepsilon^i_{jk} \lambda^j k_a^k \quad (83a)$$

$$\{H_j[\lambda^j], E_i^a\} = \varepsilon_{ij}^k \lambda^j E_k^a. \quad (83b)$$

Vamos verificar que isso de fato gera a mesma dinâmica que o formalismo ADM:

$$\begin{aligned} \{q_{ab}[E](x), \pi^{cd}[E, K](y)\} &= \int d^3x' d^3y' \frac{\delta q_{ab}(x)}{\delta E_{a'}^{i'}(x')} \left\{ E_{a'}^{i'}(x'), k_{j'}^{b'}(y') \right\} \frac{\delta \pi^{cd}(y)}{\delta k_{j'}^{b'}(y')} = \\ &= \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta^3(x, y), \end{aligned} \quad (84)$$

portanto vemos que de fato se trata da mesma dinâmica, pois o parêntese de Poisson canônico é preservado, se tratando de uma transformação canônica do sistema.

Embora tenhamos introduzido uma simetria $\text{SO}(3)$ interna na nossa análise, nenhuma de nossas variáveis canônicas se transforma como conexão, ambas se comportando como vetores (co)tangentes com valores na álgebra $\mathfrak{so}(3)$. Porém, isso pode ser corrigido ao perceber que a restrição 3-dimensional da conexão $\text{spin } \omega_a^i[e] = \frac{1}{2} \varepsilon^i_{jk} \omega_a^{jk}[e]$ não só já é uma conexão $\mathfrak{so}(3)$ como também satisfaz

$$\{\omega_a^i(x), E_j^b(y)\} = 0 \quad (85a)$$

$$\{\omega_a^i(x), k_b^j(y)\} = 2\kappa \delta^3(x, y) \nabla_a e^{ia'} e^{jb'} \varepsilon_{ba'b'}, \quad (85b)$$

portanto a combinação linear desta com a curvatura extrínseca k_a^i resultará numa conexão $\mathfrak{su}(2)$ (pois a soma de uma conexão com um covetor resulta em uma conexão, ver apêndices) canonicamente conjugada ao campo elétrico de Ashtekar E_i^a , denominada *conexão de Ashtekar*

$$\boxed{A_a^i = \omega_a^i + \gamma k_a^i}. \quad (86)$$

Ao comparar com a conexão de Ashtekar obtida da ação de Holst na seção 2.3, vemos que $k_a^i = \omega_a^{0i}$. Com essa mudança, nossos parenteses de Poisson se tornam

$$\{E_i^a(x), E_j^b(y)\} = 0 \quad (87a)$$

$$\{A_a^i(x), E_j^b(y)\} = 2\kappa \gamma \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(x, y) \quad (87b)$$

$$\{A_a^i(x), A_b^j(y)\} = 0 \quad (87c)$$

$$\{H_j[\lambda^j], A_a^i\} = D_a \lambda^i \quad (87d)$$

$$\{H_j[\lambda^j], E_i^a\} = \varepsilon_{ij}^k \lambda^j E_k^a. \quad (87e)$$

Um detalhe a se atentar é que (87)c não é trivial, pois A_a^i é formado por quantidades que não comutam e só é garantido pela antisimetria de (85)b.

Em termos destas variáveis, nossos vínculos se tornam

$$C = \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{\det(q)}} \left(\varepsilon^{ij}{}_k F_{ab}^k - (\gamma^2 + 1) k_{[a}^i k_{b]}^j \right) \approx 0 \quad (88)a$$

$$C_a = F_{ab}^i E_i^b \approx 0 \quad (88)b$$

$$G_i = D_a E_i^a \approx 0, \quad (88)c$$

onde $F_{ab}^k = \partial_{[a} A_{b]}^k + \varepsilon_{ij}^k A_a^i A_b^j$ é a curvatura da conexão de Ashtekar. Note que em (88)a o segundo termo se anula para $\gamma = i$, que é a mesma condição para obter a conexão auto-dual em 2.3. Por esta razão, durante muito tempo trabalhou-se com $\gamma = i$ em LQG, porém esta escolha foi abandonada por dois motivos: o primeiro é que a conexão complexa resulta em RG complexificada, e RG é uma teoria de variáveis reais; o segundo motivo é que $\gamma = i$ trás sérios problemas de realidade dos operadores após quantização (em particular, o parâmetro γ aparece nos espectros de operadores como o operador de área, então um valor complexo para este tornaria o operador de área em algo não-mensurável), então trabalharemos com $\gamma \in \mathbb{R}$. Quando escrito em termos das variáveis de Ashtekar, podemos enxergar o motivo dos nomes "campo elétrico" e "lei de Gauss": a tríade densitizada E_i^a é a variável canonicamente conjugada à conexão A_a^i assim como o campo elétrico no eletromagnetismo de Maxwell e a lei de Gauss $D_a E_i^a = 0$ é a mesma típica de teorias de Yang-Mills.

O campo elétrico de Ashtekar possui uma interpretação geométrica clara: este é um elemento de área. Para ver isso, utilizamos a fórmula para área de uma superfície S em termos da métrica induzida h_{sr} , com $s, r = 1, 2$:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_S d^2x \sqrt{\det(h)} = \\ &= \int_S d^2x \sqrt{\det(q) q^{33}} = \\ &= \int_S d^2x \sqrt{E_i^3 E^{i3}} = \\ &= \int_S d^2x \sqrt{E_i^a n_a E^{ib} n_b} = \\ &= \int_S \sqrt{dS_a dS_b E_i^a E^{ib}}, \end{aligned} \quad (89)$$

onde foram escolhidas coordenadas tais que $x^3 = 0 \leftrightarrow (n_a) = (0, 0, 1)$. Se a superfície S for suficientemente pequena, podemos usar a expressão do campo elétrico de Ashtekar como 2-forma para definir um elemento da álgebra $\mathfrak{su}(2)$ representando um vetor normal à superfície cuja norma dá a área da superfície, o *fluxo de tríade*

$$E^i(S) = \frac{1}{2} \varepsilon^i{}_{jk} \int_S e^j \wedge e^k. \quad (90)$$

Há uma importante ressalva a ser feita: o momento Π definido em (47) é conjugado à conexão e logo é o gerador canônico de transformações de Lorentz. Em particular, o gerador de um impulso na direção z por exemplo é dado por

$$\mathcal{K}^z = \frac{1}{2\kappa\gamma} K^z, \quad (91)$$

o qual usando o vínculo de simplicidade linear resulta em

$$\mathcal{K}^z = \frac{1}{2\kappa} L^z = \frac{1}{4\kappa} \varepsilon^z{}_{jk} e^j \wedge e^k, \quad (92)$$

e como abordado em (90), L^z é precisamente o elemento infinitesimal da superfície normal à coordenada x^3 , portanto temos que o gerador de um impulso na direção normal à uma superfície S com área infinitesimal $d\vec{A} = *(e \wedge e)^i \tau_i$ é dado por

$$\vec{K} = \frac{d\vec{A}}{2\kappa}. \quad (93)$$

Esta equação aparentemente simples engloba, como exploraremos mais adiante, toda a dinâmica da RG.

3.2 DISCRETIZAÇÃO CLÁSSICA

No que vem a seguir, iremos apresentar a discretização clássica (uma truncagem dos graus de liberdade da teoria) da RG em um 2-complexo, inspirada em métodos de análise de teorias Yang-Mills na rede (como CDQ na rede) em junção com cálculo de Regge, ambas as quais serão feitas uma breve revisão (do cálculo de Regge a seguir e de Teorias Yang-Mills na Rede nos apêndices), mas caso quem venha a ler este trabalho queira uma discussão mais aprofundada dos assuntos, recomenda-se consultar a bibliografia principal (ROVELLI; VIDOTTO, 2015) e as referências ali citadas. Esta truncagem é necessária pela natureza não-renormalizável da RG, a qual dificulta análises perturbativas nos regimes de interesse, portanto da mesma maneira que em CDQ é feita a análise da teoria num látice para fins de calcular massas de hádrons, será feita uma discretização do espaço-tempo para realizar uma análise não-perturbativa da RG vista como uma teoria de calibre.

3.2.1 Cálculo de Regge

O cálculo de Regge é uma técnica para discretização de variedades que se baseia em triangular uma variedade d -dimensional através de um conjunto de d -símplices, as quais possuem $(d + 1)$ vértices e $d(d + 1)/2$ segmentos de reta ligando os vértices, cujos comprimentos L_s completamente caracterizam a geometria - isto é, a métrica - da simplexe em questão. Mais especificamente, um **espaço de Regge** é um par (M, L_s) formado por uma variedade triangulável d -dimensional M e um conjunto de segmentos L_s caracterizando os triângulos da triangulação. No seguinte assumiremos que a triangulação é orientada.

Uma característica de triangulações é que, dada uma triangulação de uma d -variedade, a curvatura se concentrará nas $(d - 2)$ -símplices da triangulação, por exemplo: em $d = 2$, curvatura se concentra nos vértices, pois ângulos ao redor de vértices podem somar menos que 2π ; em $d = 3$, pode-se colar tetraedros ao redor de um segmento comum, de maneira que a soma dos ângulos dihedrais possa ser menor que 2π ; em $d = 4$, a curvatura se concentra em triângulos, ou seja, num *bivetor* ou *2-forma*. Os tetraedros $(d - 2)$ -dimensionais onde a curvatura se manifesta são chamadas de *dobradiças*.

Como a métrica de uma única simplexe pode ser unicamente determinada pelos comprimentos dos segmentos que a formam, temos que a métrica de um espaço resultante da colagem de múltiplas simplices é determinada pelos comprimentos de todos os segmentos de suas simplices. Com isso, podemos ver então que uma variedade Riemanniana (M, g) pode ser aproximada de maneira arbitrariamente precisa por uma variedade de Regge, ou seja, dada uma variedade Riemanniana (M, g) e um parâmetro arbitrário $\epsilon > 0$, sempre podemos achar uma variedade de Regge (M, L_s) tal que, para $x, y \in M$, $|d_g(x, y) - d_L(x, y)| < \epsilon$, onde d_g denota a distância calculada pela métrica de Riemann e d_L a distância calculada pelos segmentos da triangulação.

Para termos uma boa aproximação da RG em termos de cálculo de Regge, precisamos de uma noção de curvatura neste modelo. Como dito anteriormente, a curvatura se concentra nas dobradiças, baseado na soma dos ângulos dihedrais dos triângulos colados em torno da dobradiça: ou seja, denotando por h (do inglês "hinge") a dobradiça rodeada por símplices t , temos que a **curvatura de Regge** ou **déficit angular** na dobradiça h é

$$\delta_h(L_s) = 2\pi - \sum_t \theta_t(L_s). \quad (94)$$

Como exemplo, tome $d = 2$: neste caso, a dobradiça será um ponto P e θ_t será o ângulo da ponta que sai de P , que pode ser calculada apartir dos lados do triângulo como (supondo que o lado oposto a θ_t é c)

$$\theta_t(a, b, c) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}. \quad (95)$$

A relação entre a curvatura de Regge e a curvatura Riemanniana é dada pela interpretação geométrica do déficit angular: este mede a mudança na orientação de um vetor após realizar um transporte paralelo ao

longo de uma curva em torno da dobradiça h , isto é, o ângulo que o vetor após o transporte faria consigo mesmo antes de realizá-lo.

Apartir disso, a **ação de Regge** é dada em forma ângulo-ação como

$$S_M[L_s] := \sum_h A_h(L_s) \delta_h(L_s), \quad (96)$$

onde a soma é sobre as dobradiças da variedade e A_h denota o $(d-2)$ -volume (comprimento em $d=3$, área em $d=4$) da dobradiça em questão. A característica importante desta ação é que ela converge à ação de Einstein-Hilbert $S_{EH}[g]$ quando a variedade de Regge (M, L_s) converge à variedade Riemanniana (M, g) (CUZINATTO; MELO; SOUZA, 2019), ou seja, o cálculo de Regge é uma boa discretização da RG.

3.2.2 Discretização da RG em um 2-complexo

A discretização de Regge abordada acima possui dois problemas para a teoria quântica: o primeiro é que ela é baseada em variáveis métricas, as quais não são adequadas pela existência de férmions, indicando a necessidade de se trabalhar com vielbeins e conexão spin no nível fundamental. A segunda razão é pelo fato de que os segmentos da triangulação de Regge obedecem a desigualdade triangular, portanto o espaço de configuração será o espaço de comprimentos de segmentos sujeitos a ditas desigualdades, um espaço de alta complexidade com borda, tornando a busca por uma teoria quântica muito mais difícil.

Utilizando a formulação de tetradas-conexão, podemos construir uma alternativa muito mais semelhante à discretização de teorias Yang-Mills na rede, e ao mesmo tempo mantendo o caráter geral-covariante da discretização de Regge em que nenhum parâmetro da ação precisa ser ajustado no limite contínuo, apenas o número de passos da discretização. Esta discretização será dada em termos de um *2-complexo* que é um meio termo entre a rede de Teorias de Yang-Mills na Rede e uma triangulação de Regge, como definiremos a seguir, e será usada extensivamente daqui em diante.

A construção começa com uma triangulação Δ do espaço-tempo M em termos de 4-símplices¹ (tetraedros 4-dimensionais), e então construímos a triangulação *dual* Δ^* da seguinte forma: no centro geométrico de cada um destes colocamos um *vértice* \mathbf{v} , então conectamos dois vértices adjacentes por uma *linha* \mathbf{e} dual ao tetraedro fronteiro destas, estas por sua vez fecham uma *face* \mathbf{f} dual a um triângulo da triangulação original, que por sua vez formam poliedros duais aos segmentos de Δ , os quais por fim formam as fronteiras de 4-símplices duais aos pontos da triangulação original Δ . A orientação de Δ^* é herdada da orientação de Δ . O **2-complexo** Δ^* é definido como o conjunto destes vértices, linhas e faces da triangulação dual, junto com suas relações de fronteira. O que define o 2-complexo é a estrutura combinatória das relações de fronteira entre estes elementos.

3.2.2.1 Discretização da Fronteira

Considere uma região compacta $\mathcal{R} \subset M$ do espaço-tempo. A discretização do interior desta região induz uma discretização da sua fronteira $\partial\mathcal{R}$, a qual discutiremos pois a teoria quântica será baseada em amplitudes de transição entre estados definidos na fronteira de uma dada região (apenas se considera a "geometria inicial" e a "geometria final" da fronteira tipo-espaço), análogo a como no estudo de uma partícula considera-se apenas a amplitude de transição do ponto inicial ao ponto final, e não a trajetória inteira.

A fronteira $\partial\mathcal{R}$ é discretizada pelos tetraedros de fronteira da triangulação Δ , separados pelos triângulos de fronteira de Δ . Os pontos duais aos tetraedros de $\partial\Delta$ são denominados **nódulos** ou *vértices de fronteira* e denotados por \mathbf{n} , enquanto as linhas ligando os nódulos são chamados de **elos** ou *linhas*

¹ Visto que o espaço-tempo é Lorentziano, teremos arestas da triangulação com comprimentos nulos e até mesmo imaginários.

de *fronteira*, denotadas por ℓ . Juntos, os nódulos e os elos formam o **grafo** Γ da fronteira. O grafo é simultaneamente a borda de um 2-complexo e também o dual da borda de uma triangulação,

$$\Gamma = \partial(\Delta^*) = (\partial\Delta)^*. \quad (97)$$

Na verdade, o que é de fato importante é apenas o grafo, que é um conjunto de vértices ligados por elos orientados imerso na fronteira de uma região do espaço-tempo, mas com as restrições que veremos mais a frente, é possível sempre associar o grafo à fronteira de uma triangulação $\Gamma = (\partial\Delta)^*$. A notação para cada elemento desta construção está sumarizada nas tabelas abaixo.

Triangulação do interior Δ	2-complexo Δ^*
4-símplice (v)	vértice (\mathbf{v})
tetraedro (τ)	linha (\mathbf{e})
triângulo (t)	face (\mathbf{f})
segmento (s)	
ponto (p)	

Tabela 1 – notação e denominação de elementos da discretização do interior de \mathcal{R}

Triangulação da borda $\partial\Delta$	Grafo da borda Γ
tetraedro (τ)	nódulo/vértice de borda (\mathbf{n})
triângulo (t)	elo/linha de borda (ℓ)

Tabela 2 – notação e denominação de elementos da discretização da borda $\partial\mathcal{R}$

3.2.2.2 Discretização das Variáveis

A discretização das variáveis é feita da mesma maneira que a discutida nos apêndices B.3.2: a cada linha \mathbf{e} do 2-complexo associamos a holonomia da conexão de Ashtekar calculada ao longo de \mathbf{e} , enquanto às faces \mathbf{f} associamos a integral do bivetor de momento \mathbf{B} sobre a superfície do triângulo $t = \mathbf{f}^*$ dual a $\mathbf{f} \in \Delta^*$,

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{U}_{\mathbf{e}} = \mathcal{P} \mathbf{e} \int_{\mathbf{e}} \mathcal{A} \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \quad (98)\text{a}$$

$$e \rightarrow \mathbf{B}_{\mathbf{f}} = \int_{\mathbf{f}^*} \mathbf{B} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}). \quad (98)\text{b}$$

Na realidade, a definição (98)b é um tanto imprecisa: a definição acima é dada em um calibre onde a conexão \mathcal{A} é constante ao longo do polígono \mathbf{f}^* (ao custo de possivelmente ser distribucional na fronteira $\partial\mathbf{f}^*$). A definição mais geral seria o fluxo de \mathbf{B} arrastado por um escalar com valores na álgebra n^{IJ} ,

$$\mathbf{B}_{\mathbf{f}}[n] = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{f}^*} dx^\mu \wedge dx^\nu B_{\mu\nu}^{IJ} n_{IJ}, \quad (99)$$

porém como veremos mais a frente, fixar a conexão para ser constante nos polígonos \mathbf{f}^* e distribucional em suas fronteiras será algo que acontecerá naturalmente, pois depois de quantizada a teoria prevê que o espaço-tempo é de fato discreto, então variáveis contínuas se tornarão distribucionais, portanto seguiremos com a definição dada em (98)b.

No calibre descrito acima, $\mathcal{U}_{\mathbf{e}}$ se transforma por transformações de Lorentz nos vértices como em B.3.2. Esta truncagem se torna uma boa aproximação da teoria contínua quando a curvatura é pequena na escala da triangulação e os segmentos se tornam retas.

Em suma, as variáveis da teoria discretizada são:

- um elemento do grupo $\mathcal{U}_{\mathbf{e}} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ para cada linha \mathbf{e} do 2-complexo;
- um elemento da álgebra $\mathbf{B}_{\mathbf{f}} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ para cada face \mathbf{f} do 2-complexo.

² É importante ressaltar que "triangulação" não diz respeito apenas à símplices, uma triangulação pode ser formada por outras formas geométricas, podendo inclusive utilizar múltiplas formas simultaneamente, e.g tessalar o plano com triângulos e quadrados ao mesmo tempo.

3.2.2.3 Ação Discretizada

Para construir a ação, primeiro precisamos de uma noção de curvatura para nosso modelo. A ideia é simples: dada uma face \mathbf{f} do 2-complexo delimitada por linhas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, podemos associar um elemento do grupo à essa face "dando a volta" ao redor do perímetro,

$$\mathcal{U}_{\mathbf{f}} = \mathcal{U}_{\mathbf{e}_1} \mathcal{U}_{\mathbf{e}_2} \dots \mathcal{U}_{\mathbf{e}_n}, \quad (100)$$

e definimos a curvatura por este elemento: se $\mathcal{U}_{\mathbf{f}} \neq \mathbb{1}$, então há curvatura na face \mathbf{f} . Intuitivamente, dado um vetor $V \in \mathbb{R}^{3+1}$, podemos enxergar isso como o transporte paralelo de V ao redor do perímetro $\partial\mathbf{f}$: ao percorrer a linha \mathbf{e}_i , V será rotacionado por $\mathcal{U}_{\mathbf{e}_i}$, então ao fechar o perímetro, a rotação total será dada por $\mathcal{U}_{\mathbf{f}}$, e assim como em geometria Riemanniana, se o vetor muda orientação após ser transportado paralelamente em uma curva fechada, há curvatura na região delimitada pela curva.

Com isso, a ação discretizada no 2-complexo é dada por

$$S = \frac{1}{\kappa} \sum_{\mathbf{f}} \text{Tr}(\mathbf{B}_{\mathbf{f}} \mathcal{U}_{\mathbf{f}}). \quad (101)$$

Note que essa ação de fato se assemelha à ação de Holst: no limite contínuo, a soma sobre faces se torna uma integral e temos o bivector de momento B vezes a curvatura.

3.2.2.4 Variáveis de Fronteira

Como dito anteriormente, a teoria quântica considera apenas a transição entre estados na fronteira de uma região $\partial\mathcal{R}$ (as geometrias iniciais e finais de uma superfície de $t = cte$), então vamos analisar as variáveis discretizadas na borda. Escolhemos uma fronteira tipo espaço no calibre temporal $e^0 = dt$ e $e^i = e^i_a dx^a$, de maneira que a simetria de Lorentz se reduz à simetria de rotações do referencial inercial local da fronteira. Com isso, nossos elementos de grupo se tornam $\mathcal{U}_{\ell} \in \text{SU}(2)$ associados aos elos de fronteira, enquanto os elementos de álgebra que são associados a triângulos t da triangulação original também acabam associados a elos da borda, que são os elos que fazem parte do contorno de uma face $\mathbf{f} = t^*$ do 2-complexo que encosta na fronteira, $\ell \subset \partial\mathbf{f}$.

Os bivectores de álgebra \mathbf{B}_{ℓ} possuem interpretação geométrica clara: estes são elementos de plano coplanares aos triângulos de fronteira duais aos elos $\ell \subset \partial\mathbf{f}$, e como fixamos o calibre temporal, podemos definir um vetor normal a este plano cuja norma é sua área (lembre que no calibre temporal a restrição do primeiro termo do bivector de momento se anulava):

$$\begin{aligned} L_{\ell}^i &= \frac{1}{2} \varepsilon^i_{jk} \int_{\ell^*} B^{ij} = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^i_{jk} \int_{\ell^*} \left(*(e \wedge e)^{jk} + \frac{1}{\gamma} e^j \wedge e^k \right) = \\ &= \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^i_{jk} \int_{\ell^*} e^j \wedge e^k, \end{aligned} \quad (102)$$

$$|\vec{L}_{\ell}| = \frac{1}{\gamma} A(\ell^*), \quad (103)$$

portanto temos que a área dos polígonos duais aos elos da fronteira é proporcional ao fluxo de tríade sobre a superfície dual a este elo, com a constante de proporcionalidade sendo o parâmetro de Barbero-Immirzi γ . Desta forma, na borda temos um par de variáveis

$$(\vec{L}_{\ell}, \mathcal{U}_{\ell}) \in \mathfrak{su}(2) \times \text{SU}(2) \quad (104)$$

para cada elo $\ell \in \Gamma$. Como $\mathfrak{su}(2) \simeq T_{\mathbb{1}}\text{SU}(2) \simeq T_{\mathbb{1}}^*\text{SU}(2)$, podemos escrever $\mathfrak{su}(2) \times \text{SU}(2) \simeq T^*\text{SU}(2)$, portanto o espaço de fase clássico da fronteira é dado por $T^*\text{SU}(2)^L$, com L sendo o número de elos da

fronteira, o qual é precisamente o mesmo espaço de fase da teoria de Yang-Mills na rede discutida no apêndice B.3.2.

A menos de constante determinada pela ação, os parenteses de Poisson serão então os mesmos discutidos nos apêndices:

$$\{\mathcal{U}_\ell, \mathcal{U}_{\ell'}\} = 0 \quad (105)\text{a}$$

$$\{\mathcal{U}_\ell, L_{\ell'}^i\} = \kappa \delta_{\ell\ell'} \mathcal{U}_\ell \tau^i \quad (105)\text{b}$$

$$\{L_\ell^i, L_{\ell'}^j\} = \kappa \delta_{\ell\ell'} \varepsilon^{ij}_k L_\ell^k, \quad (105)\text{c}$$

sem soma em ℓ .

3.3 QUANTIZAÇÃO DA RG DISCRETIZADA

A estratégia de quantização do modelo é análogo à quantização de uma partícula: para esta, sabe-se os estados inicial $|q(t_i)\rangle$ e final $|q(t_f)\rangle$, e nos é de interesse a amplitude de transição de um estado ao outro

$$W_{i-f} = \langle q(t_f) | q(t_i) \rangle \sim \int_{q(t_i)}^{q(t_f)} d[q] e^{\frac{i}{\hbar} S[q]}, \quad (106)$$

em que $S[q]$ é a função de Hamilton-Jacobi da partícula entre os tempos t_i e t_f . A ideia do nosso modelo é completamente análoga: dada uma região compacta do espaço-tempo, teremos um espaço de Hilbert de fronteira dessa região (pense nas bordas tipo-espaço como "estado (geometria) inicial e final" da parte espacial desta região) e queremos calcular a amplitude de transição de uma geometria inicial a uma final, ou seja,

$$W_{i-f} = \langle e_{(f)}, \omega_{(f)} | e_{(i)}, \omega_{(i)} \rangle \sim \int D[e] D[\omega] e^{\frac{i}{\hbar} S_{EH}[e, \omega]}, \quad (107)$$

onde agora as medidas são denotadas com D maiúsculo para enfatizar a invariância de calibre.

Nós começamos construindo o espaço de Hilbert da fronteira: antes de fixar o calibre, temos como variáveis um elemento de grupo $\mathcal{U}_\ell \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ e um (bi)veto de álgebra $\mathbf{B}_\ell \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ para cada elo $\ell \in \Gamma$. A maneira mais "óbvia" de quantizar este modelo aparenta ser então estabelecer o espaço de Hilbert como $\mathcal{H} = L_2[\text{SL}(2, \mathbb{C})^L]$, com o elemento de grupo sendo um operador multiplicativo $\hat{\mathcal{U}}_\ell |\psi\rangle = \mathcal{U}_\ell |\psi\rangle$ e o biveto de álgebra \mathbf{B}_ℓ sendo o campo (bi)vetorial invariante à esquerda, ou seja, o operador de Casimir de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$,

$$\hat{B}_\ell^{IJ} \psi(\mathcal{U}_\ell) = -i\hbar \frac{d}{dt} \psi(\mathcal{U}_1, \dots, e^{tJ^{IJ}} \mathcal{U}_\ell, \dots, \mathcal{U}_L), \quad (108)$$

com J^{IJ} sendo os geradores do grupo de Lorentz $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. No entanto, precisamos também manter em mente o vínculo de simplicidade linear $\vec{K} = \gamma \vec{L}$. Para tal, precisamos introduzir o mapa Y_γ , que é um jeito de incluir o espaço de Hilbert \mathcal{H}_j de $\text{SU}(2)$ no espaço de Hilbert $V^{p,k}$ de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$.

3.3.1 Mapa Y_γ

Baseado na teoria representações unitárias de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ encontrada no apêndice C, queremos selecionar as representações que no limite clássico obedecem o vínculo de simplicidade linear $\vec{K} = \gamma \vec{L}$, isto é, os operadores de Casimir devem satisfazer

$$\vec{K}^2 - \vec{L}^2 = (\gamma^2 - 1) \vec{L}^2 \quad (109)\text{a}$$

$$\vec{K} \cdot \vec{L} = \gamma \vec{L}^2. \quad (109)\text{b}$$

Em termos de números quânticos, temos

$$p^2 - k^2 + 1 = (\gamma^2 - 1)j(j+1) \quad (110)\text{a}$$

$$pk = \gamma j(j+1). \quad (110)b$$

No limite assintótico de spins largos $j \gg 1$, $j+1 \approx j$, logo o sistema de equações acima se torna

$$p^2 - k^2 + 1 = (\gamma^2 - 1)j^2 \quad (111)a$$

$$pk = \gamma j^2, \quad (111)b$$

o qual possui como solução

$$p = \gamma k \quad (112)a$$

$$k = j. \quad (112)b$$

Note que a escolha de $k = j$ anula o coeficiente $\alpha_{(j)}$ em (330)a, fazendo com que os geradores de empurrões também preservem a representação de $SU(2)$. Esta é a condição para que o vínculo de simplicidade linear seja satisfeito no limite clássico de spins largos, porém há também a possibilidade de escolher $p = \gamma(j+1)$ com $k = j$, de maneira que o coeficiente $\beta_{(j)}$ seja 1 e consequentemente os geradores K_z , K_+ e K_- tenham apenas um sinal de diferença em relação aos L 's nos autovalores, e esta escolha também resolve o vínculo fracamente de maneira exata para quaisquer spins, sendo assim possivelmente uma melhor escolha para o mapa Y_γ . Não há consenso ainda sobre qual escolha de p usar, porém o mais comum (e usado pela referência principal) é o dado em (112)a. Os estados que satisfazem as relações (112)a-(112)b são da forma

$$|p, k; j, m\rangle = |\gamma j, j; j, m\rangle. \quad (113)$$

Há de se notar que estes estados estão em correspondência de um-para-um com os estados das representações de $SU(2)$, então nós introduzimos o mapa Y_γ como

$$\begin{aligned} Y_\gamma : \mathcal{H}_j &\rightarrow V^{(\gamma j, j)} \\ |j; m\rangle &\mapsto |\gamma j, j; j, m\rangle, \end{aligned} \quad (114)$$

e todos os estados no contra-domínio deste satisfazem fracamente o vínculo de simplicidade linear

$$\langle Y_\gamma \psi | \hat{\vec{K}} - \gamma \hat{\vec{L}} | Y_\gamma \phi \rangle = 0 \quad (115)$$

no limite assintótico de $j \rightarrow \infty$. Espera-se portanto que os estados de gravitação quântica sejam construídos apenas pelos estados $|\gamma j, j; j, m\rangle$.

Este mapa cria uma correspondência um-para-um entre os estados de $SU(2)$ e os de $SL(2, \mathbb{C})$, e pode ser estendido para os respectivos espaços de funções sobre os grupos

$$\begin{aligned} Y_\gamma : L_2[SU(2)] &\rightarrow F[SL(2, \mathbb{C})] \\ \psi(h) = \sum_{j, m, n} C_{jmn} D_{mn}^{(j)}(h) &\rightarrow \psi(g) = \sum_{j, m, n} C_{jmn} D_{jm\ jn}^{(\gamma j, j)}(g), \end{aligned} \quad (116)$$

em que $D_{mn}^{(j)}$ são os elementos das matrizes Wigner da representação de spin j de $SU(2)$ (e $D_{mn}^{p, k}$ são elementos de matriz Wigner de $SL(2, \mathbb{C})$), as quais formam uma base ortogonal sob a medida de Haar (Teorema de Peter-Weyl)

$$\int_{SU(2)} d\mathcal{U} (D_{mn}^{(j)}(\mathcal{U}))^* D_{m'n'}^{(j')}(\mathcal{U}) = \frac{1}{d_j} \delta^{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \quad (117)$$

onde $d_j = 2j+1$ é a dimensão da representação.

O espaço induzido por este mapa possui um produto escalar bem definido: este é dado pela medida de Haar de $SU(2)$ (117). O fato do produto escalar ser $SU(2)$ -invariante e apenas $SL(2, \mathbb{C})$ -covariante reflete o fato deste produto escalar estar associado a uma fronteira, a qual fixa um referencial de Lorentz.

O fato do espaço de Hilbert físico do modelo físico 4d ser formado por funções de onda de $SU(2)$ não é nenhuma surpresa: isso é completamente consistente com a análise realizada em 2.4.2 onde vimos que o espaço de fase da RG é completamente parametrizado pela 3-métrica q_{ab} , a qual pode ser reescrita em termos de triádes com simetria interna local de rotações $SO(3)$, culminando no par canônico de Ashtekar (A_a^i, E_j^b) , o qual forma o exato mesmo espaço de fase cinemático de uma teoria de Yang-Mills $SU(2)$.

3.3.2 Operador de Área

Como visto anteriormente em (103), a restrição de borda do bivector de álgebra $L_{\mathbf{f}}^i$ é proporcional a $1/\gamma$ vezes o fluxo do campo elétrico de Ashtekar, portanto ao considerar todas as constantes temos o operador

$$\vec{E}_\ell = \hbar c \kappa \gamma \vec{L}_\ell \quad (118)$$

associado a cada elo ℓ do grafo de fronteira como vetor normal a um triângulo (polígono) da fronteira, normalizado tal que a área deste triângulo seja

$$A_{\ell^*} = \hbar c \kappa \gamma |\vec{L}_\ell| = 8\pi \gamma l_P^2 |\vec{L}_\ell|. \quad (119)$$

Disso podemos tirar então o espectro do *operador de área* \hat{A}_j de uma superfície perfurada por apenas um elo ℓ do grafo Γ como sendo (este é proporcional ao Casimir de $SU(2)$, o qual é um espaço compacto com espectro conhecido: o espectro do operador de momento angular)

$$\hat{A}_{j_\ell} |\psi\rangle = 8\pi \gamma l_P^2 \sqrt{j_\ell(j_\ell + 1)} |\psi\rangle. \quad (120)$$

Para superfícies furadas por N elos com spins j_n , temos

$$\hat{A}_{j_N} |\psi\rangle = 8\pi \gamma l_P^2 \sum_n \sqrt{j_n(j_n + 1)} |\psi\rangle. \quad (121)$$

Com isso, podemos então definir a escala fundamental da LQG como sendo proporcional à escala de Planck

$$l_0^2 = 8\pi \gamma l_P^2, \quad (122)$$

onde vemos uma dependência explícita no parâmetro de Barbero-Immirzi γ , o único parâmetro livre em LQG pura, determinado pela ação de Holst da RG.

3.3.3 Redes de Spin

3.3.3.1 Fixação de Calibre

Nosso espaço de Hilbert ainda não está propriamente definido. A teoria deve ser invariante ante transformações de calibre $SU(2)$, e nós ainda não levamos essa simetria em consideração. Fixar o calibre é importante pois por exemplo em eletrodinâmica, deixar de considerar a simetria de calibre nos levaria a definir 3 possíveis polarizações para o fóton, invés de 2. Os estados físicos (invariantes de calibre) devem satisfazer, para cada elo ℓ ,

$$\psi(\mathcal{U}_\ell) = \psi(\Lambda_{s_\ell} \mathcal{U}_\ell \Lambda_{s_\ell}^{-1}), \quad \Lambda_n \in SU(2). \quad (123)$$

Uma forma mais frutífera de realizar esta análise é olhar para a versão infinitesimal de (123)

$$\hat{C}_n \psi = 0, \quad (124)$$

onde \hat{C}_n é o gerador da transformação de calibre no nóculo $n = s_\ell$,

$$e^{i\hat{C}_n} \psi(\mathcal{U}_\ell) = \psi(\Lambda_{s_\ell} \mathcal{U}_\ell) \quad (125)a$$

$$\hat{C}_n = \hat{L}_{\ell_1} + \hat{L}_{\ell_2} + \hat{L}_{\ell_3} + \hat{L}_{\ell_4}, \quad (125)b$$

em que ℓ_i são os elos entrando/saindo do nóculo n . O vínculo (124) é chamado de *vínculo de fechamento* (em inglês *closure constraint*), *vínculo de calibre* ou *vínculo de Gauss*. A razão desta análise ser mais vantajosa é que, ao olharmos a versão clássica deste vínculo,

$$\vec{C}_n = \vec{L}_{\ell_1} + \vec{L}_{\ell_2} + \vec{L}_{\ell_3} + \vec{L}_{\ell_4} = 0, \quad (126)$$

onde ao vermos os geradores \vec{L}_{ℓ_i} como vetores normais aos triângulos t da triangulação da fronteira $\partial\Delta$, temos que (126) é a constatação de que o tetraedro formado pelos triângulos normais aos elos ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 e ℓ_4 é fechado, por isso o nome "fechamento".

Por $SU(2)$ ser um espaço compacto, o subespaço de \mathcal{H}_Γ onde o vínculo (124) se verifica é um subespaço próprio, denotado \mathcal{K}_Γ , ou seja,

$$\mathcal{K}_\Gamma := L_2 [SU(2)^L / SU(2)^N]_\Gamma, \quad (127)$$

onde L é o número de elos do grafo Γ e N o número de nós deste.

Os operadores de área \hat{L}_ℓ são invariantes de calibre (as componentes dos campos vetoriais invariantes à esquerda \hat{L}_ℓ^i se transformam como vetores em espaço de grupo), portanto estes são bem definidos no espaço de Hilbert físico \mathcal{K}_Γ . Além disso, é demonstrável que juntamente do operador de volume \hat{V}_n que será introduzido mais a frente, $(\hat{A}_\ell, \hat{V}_n)$ formam um conjunto comutante maximal para a RG pura, logo podemos achar a base que diagonaliza ambos e esta será uma base que descreve completamente nosso espaço de Hilbert físico. Esta base é a *rede de spin*, denotada como $|\Gamma, j_\ell, v_n\rangle$, onde Γ denota o grafo de fronteira, j_ℓ os spins (consequentemente as áreas) associados a cada elo ℓ do grafo e v_n os volumes das regiões englobando os nós n do grafo.

Geometricamente, a rede de spin é um grafo Γ (um conjunto de elos orientados se encontrando em nós) com spins $j_\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ associados a cada elo $\ell \in \Gamma$. A descrição algébrica da rede de spin será dada na seguinte seção.

3.3.3.2 Base de Rede de Spin

No seguinte mostraremos, de maneira um tanto abstrata, que de fato os spins j_ℓ juntamente com outra família de números quânticos são suficientes para rotular uma base de \mathcal{K}_Γ . O Teorema de Peter-Weyl enuncia que os elementos das matrizes de Wigner $D_{mn}^j(\mathcal{U})$ formam uma base ortogonal com respeito à medida de Haar de $SU(2)$, mais especificamente,

$$\int d\mathcal{U} (D_{mn}^j(\mathcal{U}))^* D_{m'n'}^{j'}(\mathcal{U}) = \frac{1}{d_j} \delta^{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}. \quad (128)$$

Dito de outra forma, o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = L_2[SU(2)]$ pode ser decomposto como soma direta de representações de dimensão finita, rotulados por spins j . A dimensão de cada sub-espaço é $(2j+1)^2$, ou seja, a quantidade de elementos na matriz de Wigner $D^j(\mathcal{U})$. Estas por sua vez são vistas como mapas

$$D^j : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j \quad (129a)$$

↓

$$D^j \in \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j, \quad (129b)$$

permitindo-nos reenunciar o Teorema de Peter-Weyl na forma

$$L_2[SU(2)] = \bigoplus_j (\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j). \quad (130)$$

No nosso caso, temos L cópias disso no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\Gamma = L_2[SU(2)^L]$, nos dando

$$L_2[SU(2)^L] = \bigotimes_\ell \bigoplus_j (\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j) = \bigoplus_{j_\ell} \bigotimes_\ell (\mathcal{H}_{j_\ell} \otimes \mathcal{H}_{j_\ell}). \quad (131)$$

Cada espaço de Hilbert \mathcal{H}_{j_ℓ} de cada elo ℓ pertencem, naturalmente, a uma das duas pontas s_ℓ e t_ℓ de dito elo, cada um transformando de acordo com a transformação de calibre de sua respectiva ponta. Dito

isso, reescrevemos então (131) agrupando os espaços de Hilbert entrando/saindo do mesmo nóculo, os quais transformam sob a mesma transformação de calibre, resultando em

$$L_2 [\text{SU}(2)^L] = \bigoplus_{j_\ell} \bigotimes_n (\mathcal{H}_{j_{\ell_1}} \otimes \mathcal{H}_{j_{\ell_2}} \otimes \mathcal{H}_{j_{\ell_3}} \otimes \mathcal{H}_{j_{\ell_4}}), \quad (132)$$

em que j_{ℓ_i} são os spins dos elos que entram/saem do nóculo n . Nós fazemos este reagrupamento pois o que estamos buscando é na verdade o espaço de funções invariantes de calibre nos nóculos, $L_2[\text{SU}(2)^L/\text{SU}(2)^N]$, portanto obtemos

$$L_2 [\text{SU}(2)^L/\text{SU}(2)^N] = \bigoplus_{j_\ell} \bigotimes_n \text{Inv}_{\text{SU}(2)}(\mathcal{H}_{j_{\ell_1}} \otimes \mathcal{H}_{j_{\ell_2}} \otimes \mathcal{H}_{j_{\ell_3}} \otimes \mathcal{H}_{j_{\ell_4}}), \quad (133)$$

com $\text{Inv}_{\text{SU}(2)}(\mathcal{H}_{j_{\ell_1}} \otimes \mathcal{H}_{j_{\ell_2}} \otimes \mathcal{H}_{j_{\ell_3}} \otimes \mathcal{H}_{j_{\ell_4}})$ denotando a parte $\text{SU}(2)$ -invariante do quádruplo produto tensorial $\mathcal{H}_{j_{\ell_1}} \otimes \mathcal{H}_{j_{\ell_2}} \otimes \mathcal{H}_{j_{\ell_3}} \otimes \mathcal{H}_{j_{\ell_4}}$. Tensores invariantes linearmente independentes neste espaço podem ser construídos como

$$i_k^{m_1 m_2 m_3 m_4} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & k \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} g_{mn} \begin{pmatrix} k & j_3 & j_4 \\ n & m_3 & m_4 \end{pmatrix}, \quad (134)$$

onde os objetos entre parênteses grandes são os símbolos $3j$ de Wigner, abordados brevemente nos apêndices, e g_{mn} é uma contração destes símbolos dada por

$$g_{mn} = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & n & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \delta_{m,-n}, \quad (135)$$

onde $\delta_{m,-n}$ possui simples interpretação como conservação do momento angular na direção de medição, enquanto a fase é advinda de tensoramentos do objeto anti-simétrico invariante ϵ^{AB} . O valor de k em (134) deve satisfazer desigualdades triangulares com ambos pares de spins (j_1, j_2) e (j_3, j_4) ao mesmo tempo, ou seja,

$$\max[|j_1 - j_2|, |j_3 - j_4|] \geq k \leq \min[j_1 + j_2, j_3 + j_4]. \quad (136)$$

Temos então o espaço

$$\mathcal{K}_{j_1 j_2 j_3 j_4} = \text{Inv}_{\text{SU}(2)}(\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} \otimes \mathcal{H}_{j_4}) \quad (137)$$

cujas dimensão é dada por

$$\dim(\mathcal{K}_{j_1 j_2 j_3 j_4}) = \min(j_1 + j_2, j_3 + j_4) - \max(|j_1 - j_2|, |j_3 - j_4|) + 1, \quad (138)$$

que é um reflexo da liberdade geométrica residual de cada tetraedro quando as áreas de suas faces são bem definidas.

Com isso, podemos escrever os estados invariantes de calibre do nosso espaço de Hilbert na base de configuração (grupo) como

$$\psi(\mathcal{U}_\ell) = \sum_{j_\ell, k_n} C_{j_\ell k_n} \psi_{j_\ell k_n}(\mathcal{U}_\ell), \quad (139)$$

onde a base de estados invariantes é dada por

$$\psi_{j_\ell k_n}(\mathcal{U}_\ell) = i_{k_1}^{m_1 m_2 m_3 m_4} \dots i_{k_N}^{m_{L-3} m_{L-2} m_{L-1} m_L} D_{m_1 n_1}^{(j_1)}(\mathcal{U}_1) \dots D_{m_L n_L}^{(j_L)}(\mathcal{U}_L). \quad (140)$$

Ou seja, nossos estados de rede de spin são especificados por dois números quânticos: um spin j_ℓ associado aos elos ℓ e um número quântico dito "entrelaçado" (em inglês "intertwined") k_n associado aos nóculos n , e podemos escrever isto de maneira mais abstrata como

$$\psi_{j_\ell k_n}(\mathcal{U}_\ell) = \langle \mathcal{U}_\ell | j_\ell, k_n \rangle = \bigotimes_n i_{k_n} \cdot \bigotimes_\ell D^{(j_\ell)}(\mathcal{U}_\ell), \quad (141)$$

ou seja, a contração do tensoramento de N invariantes de calibre nos nódulos com o tensoramento de L matrizes de Wigner. Estes são os estados de rede de spin descritos em termos dos números quânticos k_n na representação de grupo.

Clássicamente, a liberdade geométrica residual em (138) é descrita pelo espaço de fase de um tetraedro, em particular o espaço de possíveis formatos de um tetraedro cujas áreas das faces estão fixas, o qual é um espaço 2-dimensional, podendo ser coordenado por exemplo por ângulos diedrais opostos. Uma maneira equivalente de enxergar este espaço é como o espaço de quadruplas de vetores satisfazendo a relação de fechamento (126), com normas definidas, a menos de rotações globais. Um observável notável neste espaço é o volume (orientado) do tetraedro, o qual pode ser escrito como

$$V(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\varepsilon_{ijk} E_{\ell_1}^i E_{\ell_2}^j E_{\ell_3}^k}, \quad (142)$$

onde E_ℓ^i são os fluxos de tríade (90) nas faces do tetraedro (apenas 3 fluxos são necessários visto que o quarto é especificado pelos outros 3 no vínculo de fechamento (126)). O operador de volume

$$\hat{V}_n = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\varepsilon_{ijk} \hat{E}_{\ell_1}^i \hat{E}_{\ell_2}^j \hat{E}_{\ell_3}^k} \quad (143)$$

envolve a raiz de um operador, porém assim como nos apêndices D, podemos calcular seu espectro ao considerar seu quadrado \hat{V}_n^2 , pois este é auto-adjunto e diagonalizável, logo podemos calcular seu espectro e usar o Teorema Espectral para extrair a raiz deste³. Com isso, podemos escrever a rede de spin em termos de observáveis de área \hat{A}_ℓ e volume \hat{V}_n e seus respectivos números quânticos (j_ℓ, v_n) , e temos então um estado de rede de spin (agora explicitaremos o grafo)

$$|\psi\rangle = \sum_{\Gamma, j_\ell, v_n} C_{\Gamma, j_\ell, v_n} |\Gamma, j_\ell, v_n\rangle, \quad (144)$$

com produto interno entre dois estados de rede de spin dado pela medida de Ashtekar-Lewandowski (RODOLFO GAMBINI, 2011; BODENDORFER, 2016)

$$\langle \Gamma', j_{\ell'}, v_{n'} | \Gamma, j_\ell, v_n \rangle = \delta_{\Gamma', \Gamma} \int_{\text{SU}(2)^L} d^L \mathcal{U} (\psi_{j_{\ell'} v_{n'}}(\mathcal{U}))^* \psi_{j_\ell v_n}(\mathcal{U}), \quad (145)$$

onde δ é 1 se $\Gamma' \simeq \Gamma$, ou seja, quando os grafos forem diffeomórficos, e 0 se $\Gamma' \not\simeq \Gamma$, ou seja, quando os grafos não forem diffeomórficos. Esta medida parece arbitrária, mas Ashtekar e Lewandowski mostraram que não só ela é consistente, como é a *única* medida possível para este modelo (ASHTEKAR; LEWANDOWSKI, 1997). Essa δ também revela a natureza discreta do espaço-tempo: ela nos diz que pequenas deformações do grafo irão manter o produto interno igual ou alterá-lo bruscamente, e como as variáveis no grafo são dadas por holonomias ao longo das linhas deste, temos então que ao calcular a integral da conexão pela linha γ e pela linha deformada $\gamma + \delta\gamma$, o resultado ou é o mesmo ou varia abruptamente, revelando que a conexão não é uma função contínua do espaço-tempo mas na verdade possui caráter distribucional.

O fato de nosso produto interno envolver explicitamente uma δ de Kronecker é importantíssimo para a teoria: isto faz o produto interno ser discreto, violando uma das hipóteses do Teorema de Stone-Von Neumann, o qual garante que diferentes representações de uma teoria quântica devem ser unitariamente equivalentes, em outras palavras, diferentes quantizações de um sistema devem ter resultados físicos equivalentes, porém este teorema assume um produto interno contínuo. Como o produto interno no espaço de redes de spin é discreto, este teorema não se aplica, então LQG pode produzir resultados físicos diferentes de outras tentativas de quantização da RG. Isto é ao mesmo tempo um ponto a favor e um ponto contra LQG: por um lado, isto permite que LQG possa fazer previsões em desacordo com outras abordagens de gravitação quântica; por outro lado, como apontado por Helling e Policastro (HELLING;

³ Não só seu espectro, mas é possível calcular explicitamente seus elementos de matriz na base descrita pelos invariantes i_k utilizando teoria de momento angular.

POLICASTRO, 2004), o esquema de quantização em laços aplicado a um sistema familiar como o oscilador harmônico não resulta na física conhecida, embora Thiemann tenha rebatido este argumento (THIEMANN, T., 2007) mostrando que a quantização em laços pode aproximar arbitrariamente bem os resultados usuais do oscilador harmônico, porém nunca reproduz exatamente a quantização usual.

3.3.3.3 Átomos de Geometria

Os estados de rede de spin $|\Gamma, j_\ell, v_n\rangle$ discutidos acima possuem uma interpretação física imediata por diagonalizarem os operadores de área \hat{A}_ℓ e volume \hat{V}_n : estes são estados quânticos do campo gravitacional, e formam um espaço granular/discreto, no entanto é bom fazer algumas ressalvas quanto a esta interpretação intuitiva.

- É importante distinguir a estrutura granular física prevista pela quantização da truncagem clássica dos graus de liberdade advinda de trabalharmos num grafo. A segunda é uma truncagem *clássica* dos graus de liberdade da teoria, análogo a expandir um campo confinado (em uma caixa, por exemplo) em modos vibracionais discretos e truncar a solução considerando apenas uma quantidade finita de modos de vibração. Não há nada quântico nesta truncagem, por exemplo no nosso modelo clássico, as áreas das faces da triangulação podem ser arbitrariamente pequenas, logo a geometria discretizada pode descrever uma geometria contínua com precisão arbitrária. Em contrapartida, a estrutura granular da rede de spin é uma discritude *quântica* devido ao espectro discreto de área e volume. Isto é análogo ao fato da energia de um oscilador harmônico (como os modos individuais de um campo) ser discretizada, ou seja, observáveis físicos vêm em pacotes discretos.
- Os estados de rede de spin não especificam completamente a geometria da fronteira: a geometria de um tetraedro é especificada por 6 números (os comprimentos de suas arestas, por exemplo), no entanto os autovalores de área e volume especificam apenas 5 números (as áreas das 4 faces e o volume). Isso é análogo à situação do momento angular em Mecânica Quântica ordinária, onde para especificar completamente o momento angular \vec{L} são necessários 3 números (L_x, L_y, L_z), porém só é possível diagonalizar simultaneamente \hat{L}^2 e \hat{L}_z , fazendo com que o momento angular não possa ser conhecido com precisão total. No nosso modelo ocorre o mesmo, a geometria 3d da fronteira nunca pode ser conhecida perfeitamente, resultando portanto em um "borrão" quântico perto da escala de Planck. Como consequência, a imagem pictórica de "tetraedros" e "triângulos" faz sentido apenas em um limite clássico, não na escala quântica do campo gravitacional, e pensar em tetraedros quânticos é como pensar no elétron como uma esfera rígida rodando, ou seja, é uma analogia clássica que descreve apenas um dos estados que constituem a base de estados descrevendo um estado físico, e estes estados descrevem uma geometria Riemanniana no limite de números quânticos grandes $j_\ell, v_n \gg 1$.
- O quanta de espaço descrito pela rede de spin $|\Gamma, j_\ell, v_n\rangle$ não é um quanta que se move *no espaço*. Não, estes estados *são o espaço* em si. Isso contrasta com outras teorias de calibre como a Eletrodinâmica Quântica por exemplo, onde um estado pode ser caracterizado por exemplo pelos momentos dos fótons $|p_1, \dots, p_n\rangle$, que são transformadas de Fourier de variáveis de *posição*, que são dadas em relação a um espaço de fundo onde os fótons existem e se movem. Em LQG, os números quânticos não incluem relação à posição em relação a um espaço de fundo: aqui, estes descrevem propriedades do próprio espaço como área e volume, e o grafo Γ encode a relação de adjacência entre estes, portanto os quanta de espaço (ou átomos de geometria) estão localizados *em relação uns aos outros*, com essa relação dada pela natureza combinatória do grafo Γ . Isto é o análogo quântico em LQG da invariância de fundo da RG, onde o campo gravitacional não existe *no espaço-tempo*: a gravidade *é o próprio espaço-tempo*.

3.3.4 Introduzindo Dinâmica: Amplitudes de Transição

As amplitudes de transição são, assim como para uma partícula, funções dos estados de fronteira. Por exemplo, podemos considerar uma região compacta delimitada por uma fronteira espacial formada por duas componentes desconexas, tomadas como "passado" e "futuro" da nossa geometria, porém é possível generalizar isso para estados de fronteira mais gerais, possivelmente conexos, e considerar amplitudes de transição entre quaisquer dois estados definidos nesta fronteira.

Considere uma dada triangulação Δ do espaço-tempo, fixa. As amplitudes de transição são então funções dos estados definidos na borda dual $\Gamma = (\partial\Delta)^*$, o grafo de fronteira. Esta pode ser expressa como função das "coordenadas" (\mathcal{U}) ou dos "momentos" (\vec{L}). Mais explicitamente,

$$W_\Delta(\mathcal{U}_\ell) = \langle \mathcal{U}_\ell | W_\Delta \rangle \quad (146)$$

para variáveis de configuração e

$$W_\Delta(\Gamma, j_\ell, v_n) = \langle \Gamma, j_\ell, v_n | W_\Delta \rangle \quad (147)$$

para amplitudes na base de rede de spin. O subscrito Δ serve apenas para ressaltar a discretização onde as amplitudes são calculadas. Note que como \vec{L} possui espectro discreto, as amplitudes são funções dos números quânticos (j_ℓ, v_n) invés dos momentos em si (assim como em Mecânica Quântica ordinária, onde as amplitudes são dadas em termos dos spins ao invés dos operadores de momento angular). Podemos trocar entre as representações conforme for conveniente, visto que a base de rede de spin nos dá a matriz de mudança de base de $|\mathcal{U}_\ell\rangle$ para $|\Gamma, j_\ell, v_n\rangle$.

Vamos recobrar brevemente as propriedades essenciais que as amplitudes de transição devem possuir:

- **Princípio de superposição:** uma propriedade básica de qualquer modelo quântico, as amplitudes de transição são dadas como combinação linear de amplitudes fundamentais (no contexto de Mecânica Quântica convencional, isto seria a "soma sobre trajetórias" $\int d[q]$ de Feynman)

$$\langle \psi | W \rangle = \sum_{\sigma} W(\sigma). \quad (148)$$

- **Localidade:** uma importante contribuição dos séculos XIX e XX de que interações físicas são locais no espaço-tempo, ou seja, um ponto só pode influenciar sua vizinhança imediata, como consequência as amplitudes elementares $W(\sigma)$ podem ser expressas como um produtório de amplitudes em cada vértice (no caso contínuo das Teorias Quânticas de Campos convencionais, este seria um produtório sobre todos os pontos do espaço-tempo, traduzido como a exponencial de uma integral sobre todo o espaço-tempo $e^{i \int d^4x \mathcal{L}}$ visto que a exponencial mapeia uma soma em um produto)

$$W(\sigma) \sim \prod_{\mathbf{v}} W_{\mathbf{v}}. \quad (149)$$

- **Invariância de Lorentz local:** uma teoria de calibre deve possuir amplitudes de transição que são invariantes ante transformações locais de seu grupo de simetria (tradicionalmente refletido no fato da ação ser invariante de calibre e a medida de integração ser uma derivada (funcional) covariante exterior $D[A]$ invés da medida funcional normal $d[q]$). Isso se traduz nas amplitudes de vértices $W_{\mathbf{v}}$ serem dados pela projeção da componente $SL(2, \mathbb{C})$ -invariante de um estado de fronteira no vértice

$$W_{\mathbf{v}} = (P_{SL(2, \mathbb{C})} \circ Y_{\gamma} \psi_{\mathbf{v}})(\mathbb{1}), \quad (150)$$

onde $P_{SL(2, \mathbb{C})}$ é o operador que projeta a parte $SL(2, \mathbb{C})$ -invariante do estado de fronteira ψ , tomado na identidade do grupo $\mathbb{1}$.

Para calcular a amplitude de transição $W_\Delta(\mathcal{U}_\ell)$ no modelo discretizado, nós recorremos às integrais de trajetória de Feynman. Neste formalismo, as amplitudes são dadas pela soma (integral) das contribuições de todas as configurações clássicas (im)possíveis, com um fator de fase dado pela ação clássica, ou seja,

$$W_\Delta(\mathcal{U}_\ell) = \mathcal{N} \int D[\mathcal{U}_e] D[\mathbf{B}_f] e^{\frac{i}{\hbar\kappa} \sum_f \text{Tr}(\mathbf{B}_f \mathcal{U}_f)} = \mathcal{N} \int D[\mathcal{U}_e] D[\mathbf{B}_f] \prod_f e^{\frac{i}{\hbar\kappa} \text{Tr}(\mathbf{B}_f \mathcal{U}_f)}, \quad (151)$$

em que \mathcal{N} é um fator de normalização onde várias contribuições constantes serão absorvidas por simplicidade. A integral sobre $D[\mathbf{B}_f]$ é "fácil" de se calcular: esta é a generalização da representação integral do funcional $\delta(x)$ para o grupo $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, ou seja, o análogo de

$$\delta(x) \sim \int dp e^{ipx} \quad (152)$$

de variáveis reais para variáveis $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, nos deixando com

$$W_\Delta(\mathcal{U}_\ell) = \mathcal{N} \int D[\mathcal{U}_e] \prod_f \delta(\mathcal{U}_f) = \mathcal{N} \int D[\mathcal{U}_e] \prod_f \delta(\mathcal{U}_{\mathbf{e}_{f_1}} \dots \mathcal{U}_{\mathbf{e}_{f_n}}). \quad (153)$$

Nós reescrevemos esta expressão ao separar as variáveis $\mathcal{U}_{\mathbf{e}_{f_i}}$ em um elemento de grupo $g_{\mathbf{v}_{f_i} \mathbf{e}_{f_i}}$ associado ao vértice fonte \mathbf{v}_{f_i} e a uma porção da linha \mathbf{e}_{f_i} e da face \mathbf{f} , transformando à esquerda, e um elemento $g_{\mathbf{v}_{f_i} \mathbf{e}_{f_i}}$ associado à outra porção da linha \mathbf{e}_{f_i} e ao vértice alvo $\mathbf{v}_{f_{i+1}}$ transformando à direita:

$$W_\Delta(\mathcal{U}_\ell) = \mathcal{N} \int D[g_{\mathbf{ve}}] \prod_f \delta(g_{\mathbf{v}_{f_1} \mathbf{e}_{f_1}} g_{\mathbf{e}_{f_1} \mathbf{v}_{f_2}} \dots g_{\mathbf{v}_{f_n} \mathbf{e}_{f_n}} g_{\mathbf{e}_{f_n} \mathbf{v}_{f_1}}). \quad (154)$$

A seguir, reagrupamos estes elementos de grupo por vértices ao invés de linhas, $h_{\mathbf{v}_{f_i}} \equiv g_{\mathbf{e}_{f_i} \mathbf{v}_{f_i}} g_{\mathbf{v}_{f_i} \mathbf{e}_{f_{i+1}}}$, e introduzindo estrategicamente

$$1 = \int D[h_{\mathbf{v}_f}] \prod_{\mathbf{v}_f} \delta(g_{\mathbf{e}_{f_{i+1}} \mathbf{v}_{f_i}} g_{\mathbf{v}_{f_i} \mathbf{e}_{f_i}} h_{\mathbf{v}_{f_i}}) \quad (155)$$

obtemos então

$$W_\Delta(\mathcal{U}_\ell) = \mathcal{N} \int D[h_{\mathbf{v}_f}] D[g_{\mathbf{ve}}] \prod_f \delta(h_{\mathbf{v}_{f_1}} \dots h_{\mathbf{v}_{f_n}}) \prod_{\mathbf{v}_f} \delta(g_{\mathbf{e}_{f_{i+1}} \mathbf{v}_{f_i}} g_{\mathbf{v}_{f_i} \mathbf{e}_{f_i}} h_{\mathbf{v}_{f_i}}). \quad (156)$$

Podemos então reorganizar esta integral como uma amplitude de vértice onde uma δ junta elementos de grupo em cada face,

$$W_\Delta(\mathcal{U}_\ell) = \int D[h_{\mathbf{v}_f}] \prod_f \delta(h_f) \prod_{\mathbf{v}} A_{\mathbf{v}}(h_{\mathbf{v}_f}), \quad (157)$$

onde $h_f = h_{\mathbf{v}_{f_1}} \dots h_{\mathbf{v}_{f_n}}$ é o elemento de grupo que dá a volta no perímetro da face \mathbf{f} , e caso a face seja delimitada por um elo ℓ da fronteira, $h_f = (h_{\mathbf{v}_{f_1}} \dots h_{\mathbf{v}_{f_n}}) h_\ell$. As amplitudes de vértice são dadas então pelas integrais sobre $D[g]$,

$$A_{\mathbf{v}}(h_{\mathbf{v}_f}) = \mathcal{N} \int D[g_{\mathbf{ve}}] \prod_f \delta(g_{\mathbf{e}_{f_{i+1}} \mathbf{v}_{f_i}} g_{\mathbf{v}_{f_i} \mathbf{e}_{f_i}} h_{\mathbf{v}_{f_i}}). \quad (158)$$

Como estamos trabalhando em um 2-complexo dual a uma triangulação de 4-simplices, a integral funcional em (158) é na verdade 5 integrais no grupo, uma para cada linha \mathbf{e} saindo do vértice \mathbf{v} ,

$$\int D[g_{\mathbf{ve}}] = \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})^5} Dg_{\mathbf{ve}_1} \wedge \dots \wedge Dg_{\mathbf{ve}_5}. \quad (159)$$

Como as 4-simplices são fechadas nesta triangulação e cada linha \mathbf{e} é dual a um tetraedro de fronteira de uma 4-simplex, integrar sobre as 5 linhas é redundante pelo vínculo de fechamento, então a integral acima é invariante à última variável integrada. Dito isso, podemos então descartar a última integral em (159) e denotamos isto colocando um apóstrofe ' na medida

$$\int D[g_{\mathbf{ve}}]' = \int_{\text{SL}(2, \mathbb{C})^4} Dg_{\mathbf{ve}_1} \wedge \dots \wedge Dg_{\mathbf{ve}_4}. \quad (160)$$

A remoção desta redundância é importante pois pela natureza não-compacta do grupo de Lorentz $SL(2, \mathbb{C})$, esta integral extra introduziria uma divergência na nossa amplitude de vértice. O próximo passo é reescrever a δ em (158) como soma de representações, lembrando que nosso espaço de representação do grupo de Lorentz é restrito pelo mapa Y_γ mapeando $SU(2) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$,

$$A_{\mathbf{v}}(h_{\mathbf{v}_f}) = \mathcal{N} \int D[u_{\mathbf{ve}}]' \prod_{\mathbf{f}} \sum_{j_{\mathbf{f}}} (2j_{\mathbf{f}} + 1) \text{Tr}_{j_{\mathbf{f}}} (Y_\gamma^\dagger u_{\mathbf{e}_{f_{i+1}}} \mathbf{v}_{f_i} u_{\mathbf{v}_{f_i}} \mathbf{e}_{f_i} Y_\gamma h_{\mathbf{v}_f}), \quad (161)$$

com $u, v \in SU(2)$. Esta expansão da δ é o análogo no grupo $SL(2, \mathbb{C})$ da mais conhecida expressão

$$\delta(\theta) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\theta} \quad (162)$$

de variáveis $U(1)$. A notação Tr_j significa que o traço é tomado sobre as matrizes Wigner da representação de spin j junto com suas imagens ante o mapa Y_γ ,

$$\text{Tr}_j(Y_\gamma^\dagger u Y_\gamma v) \equiv \text{Tr}(Y_\gamma^\dagger D^{(j)}(u) Y_\gamma D^{(j)}(v)) = \sum_{m,n} D_{jm,jn}^{(\gamma j,j)}(u) D_{m,n}^{(j)}(v). \quad (163)$$

A amplitude de vértice $A_{\mathbf{v}}$ é então um funcional de variáveis $SU(2)$, uma para cada face \mathbf{f} englobando um vértice \mathbf{v} . Podemos realizar isso como um grafo: imagine uma 3-esfera que engloba apenas o vértice \mathbf{v} , então a interseção desta esfera com o 2-complexo Δ^* será um grafo $\Gamma_{\mathbf{v}}$, o grafo de fronteira do vértice \mathbf{v} . A amplitude de vértice será então um funcional dos estados no espaço de Hilbert deste grafo,

$$\mathcal{H}_{\Gamma_{\mathbf{v}}} = L_2[SU(2)^{10}/SU(2)^5]_{\Gamma_{\mathbf{v}}} \quad (164)$$

e este é um grafo completo com 5 nódulos (com todos os nódulos conectados). Em suma, temos nossa amplitude de transição dada em termos de amplitudes de vértice

$$W_\Delta(\mathcal{U}_\ell) = \int D[h_{\mathbf{v}_f}] \prod_{\mathbf{f}} \delta(h_{\mathbf{f}}) \prod_{\mathbf{v}} A_{\mathbf{v}}(h_{\mathbf{v}_f}), \quad (165)a$$

$$A_{\mathbf{v}}(h_{\mathbf{v}_f}) = \mathcal{N} \sum_{j_{\mathbf{f}}} \int_{SL(2,\mathbb{C})} D[u_{\mathbf{ve}}]' \prod_{\mathbf{f}} (2j_{\mathbf{f}} + 1) \text{Tr}_{j_{\mathbf{f}}} (Y_\gamma^\dagger u_{\mathbf{e}_{f_{i+1}}} \mathbf{v}_{f_i} u_{\mathbf{v}_{f_i}} \mathbf{e}_{f_i} Y_\gamma h_{\mathbf{v}_f}), \quad (165)b$$

$$\int_{SL(2,\mathbb{C})} D[g_{\mathbf{ve}}]' = \int_{SL(2,\mathbb{C})^4} Dg_{\mathbf{ve}_1} \wedge \dots \wedge Dg_{\mathbf{ve}_4}. \quad (165)c$$

Como removemos a integral sobre a variável redundante, nós prevenimos uma divergência na nossa amplitude de vértice, e é demonstrável que a amplitude resultante (165)a é finita (ENGLE; PEREIRA, 2009; KAMINSKI, 2011).

Isso conclui nossa análise da formulação covariante da LQG em um dado 2-complexo. Características notáveis do modelo incluem:

- o modelo é relacionado à RG no limite clássico;
- é UV-finito;
- com a deformação adequada do grupo que inclui a constante cosmológica também é IR-finito;
- resulta em funções de n -pontos da RG perturbativa (grávitons), nas equações de Friedmann da cosmologia e também na entropia de Bekenstein-Hawking para buracos negros.

3.3.5 Limite Contínuo ($L \rightarrow \infty$)

O modelo descrito acima é definido no espaço de fase de um dado grafo $\Gamma = \partial\Delta^*$ com amplitudes em um 2-complexo Δ^* . Este modelo possui um número finito de graus de liberdade, e corresponde a uma truncagem da RG clássica, a qual possui infinitos graus de liberdade. A teoria completa é então obtida

pelo refinamento da discretização Δ^* e $\Gamma = \partial\Delta^*$, porém há uma escala mínima onde o refinamento deve cessar devido à quantização de área e volume vistas anteriormente.

O procedimento de truncagem dos graus de liberdade é prática comum em Teorias Quânticas de Campo (TQC): cálculos físicos são sempre feitos em latices *finitos* em CDQ na Rede, leia-se com número finito N de nódulos do lattice, e em ordem *finita* de perturbação em Eletrodinâmica Quântica (EDQ), ou seja para diagramas de Feymann de até N partículas. Em ambos os casos, formalmente é considerado o limite $N \rightarrow \infty$, mas na prática os cálculos são realizados com N finito e "suficientemente grande", significando que pode-se argumentar que as contribuições de $N + 1$ em diante são desprezíveis para o regime em consideração.

Nosso modelo de gravitação quântica é realizado da mesma maneira: considera-se estados e amplitudes de uma teoria truncada, e escolhe-se um 2-complexo Δ^* e grafo $\Gamma = \partial\Delta^*$ suficientemente refinados para a precisão desejada, levando em conta que há um limite superior para o refinamento do grafo. Isso é relevante pois, ao analisar o regime de validade da aproximação introduzida por um dado grafo Γ , que vem do limite em que a teoria discreta aproxima a teoria contínua no regime clássico, sabe-se que o limite em que uma discretização da RG é bom é quando a curvatura nas faces \mathbf{f} é pequena, ou na linguagem do cálculo de Regge 3.2.1, quando os déficits angulares nas dobradiças são pequenos, portanto a expansão em grafos Γ é boa em torno da métrica plana. Isso pode parecer problemático, pois é precisamente esta expansão em torno da métrica plana que gera problemas na quantização convencional de teorias de campos da RG, que é *não-renormalizável*. No nosso caso nós evitamos encontrar as mesmas dificuldades pois no formalismo aqui desenvolvido, nós levamos em conta a discritude do espaço-tempo próximo à escala de Planck, e o fato do espaço-tempo não ser contínuo elimina as divergências UV comumente advindas em teorias de campos que consideram um espaço-tempo infinitamente divisível.

3.3.6 Constante Cosmológica e Finitude IR

Para incluir constante cosmológica no nosso modelo, é necessário realizar uma "deformação quântica" (ou q -deformação) do grupo de Lorentz $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})_q$, cuja definição precisa excede o escopo deste trabalho, mas os detalhes relevantes desta deformação foram derivados por Buffenoir e Roche (BUFFENOIR; ROCHE, Ph., 1999) e Noui e Roche (NOUI; ROCHE, Ph, 2003), com a teoria sendo construída por Fairbairn e Meusburger (FAIRBAIRN; MEUSBURGER, 2012) e Han (HAN, 2011), caso quem venha a ler este trabalho tenha interesse nos detalhes deste formalismo. Aqui iremos enunciar os resultados importantes destes trabalhos:

- as amplitudes de transição do modelo q -deformado são UV e IR-finitos;
- o limite clássico da amplitude de vértice está ligada à ação de Regge com constante cosmológica positiva.

A priori, a teoria com constante cosmológica depende de 2 parâmetros dimensionais: a escala fundamental $l_0^2 = 8\pi\gamma l_P^2$ e da constante cosmológica Λ . Podemos escolher nossas unidades tais que um desses seja 1 ($\hbar = c = 8\pi G = 1$ por exemplo), portanto temos que a gravitação quântica depende de uma constante adimensional muito pequena (pois é a razão da menor escala pela maior escala observável):

$$\Lambda l_0^2 \sim 10^{-120}. \quad (166)$$

4 APLICAÇÕES TEÓRICAS

Neste capítulo, iremos tratar sobre as principais aplicações (de caráter teórico) do modelo desenvolvido anteriormente para situações de interesse físico. Resultados relevantes foram obtidos em três ramos principais (ROVELLI; VIDOTTO, 2015):

- termodinâmica de buracos negros;
- cosmologia do Big Bang;
- espalhamento de grávitons.

Aqui, iremos explorar os dois primeiros, pois a análise de espalhamento de grávitons está além do escopo deste trabalho, porém leitores interessados podem consultar (ROVELLI; VIDOTTO, 2015) para ver a análise em detalhes.

4.1 ENTROPIA DE BEKENSTEIN-HAWKING

Por simplicidade, consideraremos um buraco negro sem rotação nem carga (BN de Schwarzschild). Visto que o horizonte de eventos separa o espaço-tempo em duas regiões causalmente desconexas, um observador externo ao buraco negro não tem acesso aos graus de liberdade dentro do buraco negro, portanto enxergando-o como uma superfície 2-dimensional evoluindo no tempo. Como o interior não afeta o exterior, o horizonte pode ser tratado como um sistema dinâmico independente interagindo com o lado de fora.

No equilíbrio, tal sistema é formado por uma superfície esférica de área A . Termodinamicamente, o sistema irá experimentar flutuações estatísticas, ou seja, o horizonte irá tremular térmicamente devido ao Princípio da Incerteza de Heisenberg.

Nós podemos abordar este problema por uma abordagem micro-canônica, ao calcular a entropia contando os estados compatíveis com uma dada energia. A energia que nos interessa não é a energia medida no infinito, pois esta inclui contribuições do espaço-tempo exterior ao buraco negro, então o que é relevante para nós é a energia medida na vizinhança do horizonte.

A energia que um observador estacionário acima do horizonte com aceleração $a = c^2/d$, em que d é a distância até o horizonte medida no referencial do observador é dada por (ROVELLI; VIDOTTO, 2015)

$$E = \frac{ac^2 A}{8\pi G}. \quad (167)$$

Com isso, temos então que computar a entropia de um buraco negro reduz a contar o número de estados de uma superfície com área A .

Classicamente, esse número diverge assim como a radiação de corpo negro, mas em LQG este é finito pois agora levamos em consideração a discritude da geometria. Considere um buraco negro em equilíbrio térmico com temperatura T . O ansatz de Gibbs nos diz então que a probabilidade p_n de um sistema estar em um estado de energia E_n é proporcional ao fator de Boltzman

$$p_n \propto e^{-E_n/k_B T}. \quad (168)$$

Sabemos por (167) que a energia é proporcional à área, e como vimos em 3.3.2 a contribuição de área de um elo do grafo de spin j cruzando a superfície é proporcional ao autovalor de spin

$$A_j = 8\pi l_P^2 \gamma \sqrt{j(j+1)}. \quad (169)$$

Como esse elo carrega uma representação spin- j do grupo $SU(2)$, temos $d_j = 2j + 1$ estados ortogonais que o sistema pode estar. Portanto, a probabilidade de o sistema possuir spin j a uma temperatura T é dada por

$$p_j(T) = \frac{(2j+1)}{Z(T)} e^{-\frac{a\hbar\gamma}{ck_B T} \sqrt{j(j+1)}}, \quad (170)$$

onde $Z(T)$ é a função de partição fixa pela condição $\sum_j p_j = 1$

$$Z(T) = \sum_j (2j+1) e^{-\frac{a\hbar\gamma}{ck_B T} \sqrt{j(j+1)}}. \quad (171)$$

Esta é a função de partição que descreve o estado de Gibbs de um único elo a uma temperatura T , quando o sistema está em equilíbrio com respeito ao fluxo de partículas do observador acelerado. Por definição (ROVELLI; VIDOTTO, 2015), a entropia estatística do estado de Gibbs é

$$S = - \sum_j p_j \ln(p_j) \quad (172)$$

e esta satisfaz a relação termodinâmica esperada

$$E = TS + F, \quad (173)$$

em que F é a energia livre de Helmholtz dada por

$$F = -T \ln(Z). \quad (174)$$

Como o observador precisa manter aceleração constante para se manter estacionário, este está sujeito ao efeito Unruh (UNRUH, 1976). Assumindo-se então que o sistema se encontra na temperatura de Unruh $T = a\hbar/2\pi k_B c$ (a qual é um dado independente), temos então que o fator de Boltzman se torna

$$e^{-2\pi\gamma\sqrt{j(j+1)}} \quad (175)$$

e podemos isolar a entropia em (173) usando E dado por (167) para encontrar

$$S = \frac{E}{T} + \ln(Z) = \frac{k_B c^3 A}{4\hbar G} + \ln \left(\sum_j (2j+1) e^{-2\pi\gamma\sqrt{j(j+1)}} \right). \quad (176)$$

Esta é a nossa entropia estatística para o buraco negro de Schwarzschild, e podemos ver que ela é precisamente a entropia de Bekenstein-Hawking mais uma correção. Essa correção some para $\gamma \approx 0,274$, e esse valor é denotado na literatura de LQG por γ_0 (γ_0 é o valor de γ que faz a função de partição ser unidade $Z = 1$).

Como γ é o parâmetro livre do modelo, ao invés de fixar $\gamma = \gamma_0$, podemos usar uma forma fechada da função de partição sendo (BIANCHI; MYERS, 2012)

$$Z = e^{-\frac{c^3 A}{8\pi G \hbar} \left(\frac{a\hbar}{ck_B T} - 2\pi \frac{\gamma_0}{\gamma} \right)}, \quad (177)$$

de maneira que a entropia se torna

$$S = \frac{\gamma_0}{\gamma} \frac{k_B c^3 A}{4\hbar G}. \quad (178)$$

Este é o resultado geral encontrado na literatura de LQG (ROVELLI; VIDOTTO, 2015).

Caso quem venha a ler este trabalho tenha interesse, a bibliografia principal (ROVELLI; VIDOTTO, 2015) realiza também uma derivação dinâmica mais rigorosa da entropia de Bekenstein-Hawking a partir do formalismo covariante de Espuma de Spin.

4.2 COSMOLOGIA QUÂNTICA DE LAÇOS

Cosmologia Quântica de Laços (abreviada LQC do inglês "Loop Quantum Cosmology") é a aplicação dos métodos de quantização em laços como os desenvolvidos neste trabalho no contexto do estudo de cosmologia. O tratamento canônico começa pela métrica de Friedmann-Lemaître

$$ds^2 = -N(t)^2 c^2 dt^2 + a(t)^2 \delta_{ab} dx^a dx^b \quad (179)$$

seguindo pela introdução das variáveis de Ashtekar que descrevem essa geometria

$$A_a^i = \gamma \dot{a} \delta_a^i \equiv q \delta_a^i \quad (180)a$$

$$E_i^a = a^2 \delta_i^a \equiv p \delta_i^a, \quad (180)b$$

as quais satisfazem os parênteses de Poisson (87)b

$$\{q, p\} = \frac{\kappa \gamma}{3V_0}, \quad (181)$$

onde o fator $6V_0$ no denominador vem da contração das δ 's de Kronecker e da integração da δ de Dirac sobre o volume da região em consideração, V_0 . Inserindo estas variáveis no vínculo Hamiltoniano (88)a resulta, a menos de uma constante, em

$$C = 2\Lambda c^2 p^{3/2} - \frac{6q^2 \sqrt{p}}{\gamma^2}. \quad (182)$$

Retornando para a variável $a(t)$ e impondo o vínculo $C = 0$ retorna a equação de Friedmann para universo vazio

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (183)$$

Se invés de considerarmos um universo vazio considerarmos a presença de matéria (aqui na forma de um campo escalar homogêneo), devido à homogeneidade, o vínculo de diffeomorfismo é nulo, e a contribuição ao vínculo Hamiltoniano $H = C + H_\phi$ é da forma

$$H_\phi = \kappa \frac{\pi_\phi^2}{p^{3/2}}. \quad (184)$$

Como ϕ não aparece na Hamiltoniana, temos imediatamente que π_ϕ é uma constante do movimento. Se escolhermos o lapso unitário $N = 1$ e escrevermos em termos da densidade de energia $\rho = \pi_\phi^2/2p^3$, ao impor o vínculo $H = 0$ obtemos

$$\frac{q^2}{\gamma^2 p} = \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{\kappa \rho}{3}. \quad (185)$$

A quantização segue a mesma ideia central da discutida em 3: os operadores elementares serão a holonomia e o fluxo de triade, visto que a conexão não é mais uma função contínua. Pela hipótese de homogeneidade do espaço, podemos considerar este sendo formado por uma "célula elementar" que se repete por todo o espaço, e podemos nos concentrar apenas na dinâmica desta única célula. Como a conexão $A_a^i = q \delta_a^i$ é proporcional à identidade, esta é uma conexão Abelian, portanto a holonomia será apenas a exponencial usual de uma integral de linha. Novamente devido à homogeneidade, esta integral da conexão q sobre a curva que engloba a célula elementar será apenas o comprimento desta, denotado λ , vezes q ou seja¹

$$h_\lambda = e^{i\lambda q}. \quad (186)$$

Quem vier a ler este trabalho pode se perguntar se não seria plausível definir um operador \hat{q} ao derivar em relação a λ . Isso não seria possível, pois em paralelo ao que acontece no modelo completo de LQG, em LQC λ não é um parâmetro contínuo passível de ter uma derivada.

Agora iremos construir o espaço de Hilbert cinemático. Na representação usual da quantização em laços, o operador \hat{p} associado ao fluxo de triade é multiplicativo e naturalmente auto-adjunto, e podemos descrever um estado gravitacional em termos de autoestados de \hat{p} na forma

$$|\Psi\rangle = \sum_i \psi_i |p_i\rangle, \quad (187)$$

¹ Na literatura, alguns autores deixam explícito o volume da célula elementar pois este é tecnicamente um parâmetro livre, mas aqui trabalhamos com as variáveis renormalizadas tal que este volume seja unitário e as expressões assumam suas formas mais simples.

com $|p_i\rangle$ sendo uma base ortonormal

$$\langle p_i | p_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (188)$$

O que difere essa representação de algo familiar, como o oscilador harmônico por exemplo, é o fato da soma em (187) é discreta e não uma integral contínua e a δ em (188) é uma δ de Kronecker e não de Dirac, portanto este espaço não possui o produto interno usual do espaço de funções quadrado integráveis. A ação dos operadores elementares é dada por

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \quad (189)a$$

$$\hat{h}_\lambda|p\rangle = |p + \lambda\rangle, \quad (189)b$$

assim como os operadores \hat{p} e e^{ixp} em Mecânica Quântica ordinária, porém com uma diferença chave: esta ação não é contínua, pois $|p + \lambda\rangle$ e $|p + \lambda'\rangle$ são ortogonais para todos $\lambda \neq \lambda'$, portanto não é possível diferenciar em relação a λ , que seria o que permitira definir um operador \hat{q} .

Agora, precisamos definir um operador correspondendo ao vínculo Hamiltoniano (sem constante cosmológica Λ)

$$H = \frac{\kappa\pi_\phi^2}{p^{3/2}} - \frac{6}{\gamma^2}\sqrt{p}q^2, \quad (190)$$

porém temos um problema: como dito anteriormente, não podemos definir um operador \hat{q} . Precisamos então de uma expressão equivalente, porém em termos de holonomias h_λ . Uma maneira de obter isso seria substituir $q \rightarrow \sin(\mu_0 q)/\mu_0$, pois o seno pode ser expandido em termos de holonomias

$$\sin(\mu_0 q) = \frac{e^{i\mu_0 q} - e^{-i\mu_0 q}}{2i}, \quad (191)$$

e no limite $\mu_0 \rightarrow 0$ temos a identidade

$$\lim_{\mu_0 \rightarrow 0} \frac{\sin(\mu_0 q)}{\mu_0} = q, \quad (192)$$

portanto a expressão

$$H_{eff} = \frac{\kappa\pi_\phi^2}{p^{3/2}} - \frac{6}{\gamma^2}\sqrt{p}\frac{\sin^2(\mu_0 q)}{\mu_0^2} \quad (193)$$

tende à Hamiltoniana clássica (190) quando $\mu_0 \rightarrow 0$. O problema deste truque, no entanto, é que no modelo quântico não podemos tomar o limite $\mu_0 \rightarrow 0$ devido à discrição do espaço prevista pela representação de laços. Para entender a raiz deste problema, vamos analisar com calma o que estamos fazendo: a introdução do seno é a troca da conexão q pela sua holonomia h_{μ_0} . O limite $\mu_0 \rightarrow 0$ seria o equivalente a contrair a curva sobre a qual a holonomia é calculada até um ponto. Isso não é possível pois, ao chegar perto da escala de Planck, sabemos que temos átomos de geometria, portanto o mínimo que o comprimento da curva poderia possuir é o perímetro do quanta de área mínimo $A_{1/2} = 4\sqrt{3}\pi\gamma l_P^2$, o que nos daria $\mu_0 = \sqrt{A_{1/2}}/4 = l_P\sqrt{\sqrt{3}\pi\gamma}/2$.

Agora, iremos realizar uma análise semi-clássica baseada na Hamiltoniana efetiva H_{eff} , que nos dará uma ideia do que o modelo quântico completo prevê. Pessoas interessadas no tratamento quântico completo podem verificar o artigo por Ashtekar, Pawłowski e Singh (ASHTEKAR; PAWŁOWSKI; SINGH, 2006). A equação de movimento para a triáde p se torna

$$\dot{p} = \{p, H_{eff}\} = -\frac{\partial H_{eff}}{\partial q} = \frac{12}{\gamma^2\mu_0}\sqrt{p}\sin(\mu_0 q)\cos(\mu_0 q). \quad (194)$$

Podemos reorganizar isso como uma equação de Friedmann modificada

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\dot{p}^2}{4p^2} = \frac{\kappa}{3}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{crit}}\right), \quad (195)$$

em que a densidade crítica ρ_{crit} é dada por

$$\rho_{crit} = \frac{3}{\kappa\gamma^2\mu_0^2p}. \quad (196)$$

Vemos então que o parâmetro de Hubble \mathcal{H}^2 não é sempre positivo: em particular, quando $\rho = \rho_{crit}$ temos $\mathcal{H}^2 = 0$, e se continuarmos a rebobinar o relógio do universo este se torna negativo, logo o universo temporalmente revertido passa a expandir, então o Big Bang é substituído por um "Big Bounce" (Grande Rebote), assim eliminando a singularidade do Big Bang. Fisicamente isso pode ser interpretado como a matéria colapsando rumo a um quanta de volume, atingindo então uma densidade crítica neste mínimo de volume onde o espaço quântico em si se recusa a ceder, gerando um rebote enviando a matéria para longe novamente, análogo ao que acontece em uma supernova. É claro que isso é uma interpretação de uma análise semi-clássica fora do regime onde efeitos quânticos dominariam, mas a análise quântica completa está de acordo com os resultados obtidos aqui.

5 ALGUMAS RESSALVAS IMPORTANTES

Neste penúltimo capítulo discutiremos algumas ressalvas sobre o modelo trabalhado anteriormente, em particular:

- generalização do grafo como borda do 2-complexo para grafos gerais e consequentemente nódulos com valência diferente de 4;
- distinção entre limite clássico ($j \gg 1$) e limite contínuo ($L \rightarrow \infty$).

5.1 GRAFOS GERAIS

Como ressaltado algumas vezes durante o desenvolvimento do modelo, o ingrediente importante para construir o espaço de Hilbert da LQG é apenas o grafo Γ e não o 2-complexo Δ^* , portanto o grafo Γ não precisa ser a fronteira de um 2-complexo, $\Gamma \neq \partial\Delta^*$. Em geral, um grafo Γ é apenas um conjunto de elos orientados ℓ se encontrando em nódulos n , com a disposição específica entre estes dada de maneira combinatória. Como consequência, teremos nódulos com variadas valências (apenas 1 elo, 2 elos, 3 elos...), de maneira que a decomposição do espaço de Hilbert físico ficará

$$L_2[\text{SU}(2)^L/\text{SU}(2)^N]_\Gamma = \bigoplus_{j_\ell} \bigotimes_n \text{Inv}_{\text{SU}(2)}(\mathcal{H}_n), \quad (197)$$

onde \mathcal{H}_n é o tensoramento dos espaços de Hilbert dos elos que entram/saem do nódulo n

$$\mathcal{H}_n = \bigotimes_{k=1}^{l_n} \mathcal{H}_{j_{\ell_k}}, \quad (198)$$

com l_n sendo a valência do nódulo n (a quantidade de elos que entram/saem deste).

Para $l_n = 1, 2, 3$ o espaço $\text{Inv}_{\text{SU}(2)}(\mathcal{H}_n)$ é 1-dimensional, portanto estes nódulos não contribuem nenhum número quântico. Isto pode ser interpretado geometricamente ao enxergar cada elo como dual à face de um polígono, e para fechar um sólido é necessário pelo menos 4 faces (tetraedro), portanto nódulos de valência inferior a 4 não possuem volume por não fecharem um polígono. Já para $l_n \geq 4$, é sempre possível construir tensores invariantes usando os entrelaçadores (símbolos $3j$ de Wigner)

$$i_{\mathbf{k}}^{m_1 \dots m_{l_n}} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & k_1 \\ m_1 & m_2 & p_1 \end{pmatrix} g_{p_1 q_1} \begin{pmatrix} k_1 & j_3 & k_2 \\ q_1 & m_3 & p_2 \end{pmatrix} g_{p_2 q_2} \dots g_{p_{l_n-3} q_{l_n-3}} \begin{pmatrix} k_{l_n-3} & j_{l_n-1} & j_{l_n} \\ q_{l_n-3} & m_{l_n-1} & m_{l_n} \end{pmatrix}, \quad (199)$$

com $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{l_n-3})$, de modo que os estados de rede de spin são dados por

$$\psi_{j_\ell, \mathbf{k}_n}(\mathcal{U}_\ell) = i_{\mathbf{k}_1}^{m_1 \dots m_{l_1}} \dots i_{\mathbf{k}_N}^{m_{L-l_N} \dots m_L} D_{m_1 n_1}^{(j_1)}(\mathcal{U}_1) \dots D_{m_L n_L}^{(j_L)}(\mathcal{U}_L). \quad (200)$$

Pode-se então usar a base gerada por estes para calcular os elementos de matriz do operador de volume pois com 4 ou mais faces é possível fechar um polígono, portanto sendo possível atribuir volume ao nódulo n . Em resumo, apenas nódulos de valência 4 ou superior possuem autovalor de volume que depende dos spins de todos os elos que se encontram no nódulo n , $v_n = v_n(j_1, \dots, j_{l_n})$, enquanto os de valência 3 ou inferior não o possuem.

5.2 LIMITE CLÁSSICO ($j \gg 1$) VS LIMITE CONTÍNUO ($L \rightarrow \infty$)

Como discutido em 3.3.5, o limite contínuo trata-se do refinamento do grafo, no limite em que se recupera uma variedade Riemanniana contínua (embora na prática isso não aconteça devido à disritude do espaço prevista pelo modelo). O limite clássico em contrapartida diz respeito ao regime onde os números quânticos são muito grandes $j, v \gg 1$, de maneira que efeitos quânticos se tornam irrelevantes.

A diferença entre os dois limites é que partindo da LQG e tomando o limite clássico retorna-se ao cálculo de Regge, enquanto se mantivermos os números quânticos pequenos e tomarmos o limite contínuo (assumindo que fosse possível e não houvesse um limite superior para o refinamento do grafo) deveríamos recobrar a RG quantizada tradicionalmente. Para voltar à RG clássica, é necessário tomar ambos os limites clássico $j \gg 1$ e contínuo $L \rightarrow \infty$.

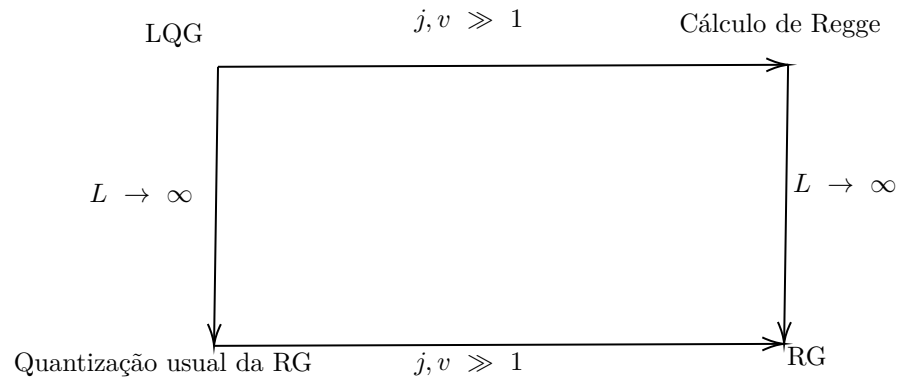


Figura 1 – Diferenças entre limites clássico $j, v \gg 1$ e contínuo $L \rightarrow \infty$

6 CONCLUSÃO

Chegamos enfim ao final deste trabalho, onde discutiremos os principais resultados, suas conclusões, a relevância do modelo aqui discutido e possíveis direções futuras de pesquisa na área.

Antes mesmo de quantizar o modelo, já foram obtidos resultados interessantes como por exemplo o vínculo de simplicidade linear (51), que nos diz que as partes elétrica e magnética da 2-forma de momento \mathbf{B} não são independentes, e na verdade são proporcionais uma a outra, com a constante de proporcionalidade sendo o parâmetro de Barbero-Immirzi γ , o que nos permitiu associar o gerador de um empurrão com a área normal à direção em que o empurrão ocorre. Ainda na análise clássica, vimos que as variáveis de Ashtekar permitem reescrever os vínculos da RG de maneira a se tornarem expressões polinomiais que remetem às teorias de Yang-Mills, com um espaço de fase da teoria discretizada igual ao de ditas teorias na rede.

Ao quantizar o modelo, notamos que devido ao vínculo de simplicidade linear (51), o espaço de Hilbert cinemático da RG seria descrito em termos de representações irredutíveis de $SU(2)$ através do mapa Y_γ , em acordo com a análise clássica onde o espaço de fase era parametrizado completamente pela 3-métrica, com as componentes temporais sendo "calibre puro". Com o espaço de fronteira definido, pudemos então definir operadores de área \hat{A}_ℓ e volume \hat{V}_n , e vimos que estes possuem espectro discreto, portanto o modelo conclui que o espaço em si é discreto e formado pelos ditos "átomos de geometria". Vimos também como a decomposição do espaço de Hilbert físico naturalmente nos trazia a estrutura de tetraedros quânticos no caso de grafos vindos de um 2-complexo, e como a medida de Ashtekar-Lewandowski viola o Teorema de Stone-Von Neumann, permitindo que LQG produza resultados diferentes de outras tentativas de quantização da RG. Também foi explorado que as amplitudes de transição deste modelo são UV-finitas e podem ser IR-finitas com inclusão de constante cosmológica positiva $\Lambda > 0$, que é o sinal de dita constante que é observada atualmente.

Também vimos que o modelo, quando aplicado à análise de termodinâmica de buracos negros e à cosmologia do Big Bang trás correções para as conhecidas entropia de Bekenstein-Hawking (178) e equações de Friedmann (195), resolvendo assim o problema da singularidade através da introdução de uma densidade crítica onde o espaço em si se recusa a ceder, gerando um rebote.

Dito tudo isso, vemos que se trata de um modelo robusto, matematicamente consistente e que é capaz de reproduzir (com correções) os resultados conhecidos de gravitação semi-clássica, sem depender de métodos perturbativos como a expansão em diagramas de Feynmann, que trazem obstáculos às outras tentativas de quantização da RG, e também prevê resoluções para o problema de singularidades, portanto sua relevância se dá no fato de ser o principal modelo atualmente com estas características, em contraste à mais conhecida Teoria de Cordas que aposta na abordagem perturbativa, com o preço sendo que é necessário repensar como pensamos sobre a gravidade (ZWIEBACH, 2009; GREEN; SCHWARZ; WITTEN, 2012).

Por fim, direções possíveis de pesquisa na área incluem tentar mostrar que o formalismo de Rede de Spin é capaz de reproduzir as geometrias conhecidas como soluções das Equações de Einstein (VAID; BILSON-THOMPSON, 2014) no limite clássico; há trabalhos (VAID; SOUSA, 2024; THIEMANN, Thomas, 2004) tentando considerar LQG e Teoria de Cordas em conjunto num modelo unificado, visto que uma é capaz de cobrir algumas falhas da outra (em particular, a emergência de cordas do esqueleto de geometria quântica de LQG trás um mecanismo natural para adição de matéria ao modelo, enquanto considerar uma corda se propagando em uma geometria discreta elimina as anomalias na álgebra de vínculos desta, permitindo uma Teoria de Cordas consistente em 4 dimensões (VAID; SOUSA, 2024; THIEMANN, Thomas, 2004)); e por fim trabalhos recentes como o de Altaisky (ALTAISKY, 2024) mostram que, ao expandir o grupo de simetria de $SL(2, \mathbb{C})$ para o grupo de Poincaré $\mathcal{P} = SL(2, \mathbb{C}) \ltimes \mathbb{R}^{3+1}$ é possível associar não só momento angular mas também momento linear aos elos da Rede de Spin, e com

isso reproduzir diagramas de Feymann com estes.

REFERÊNCIAS

- ALTAISKY, M. V. Poincaré Group Spin Networks. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 63, n. 6, p. 145, jun. 2024. ISSN 1572-9575. arXiv: [2311.06328 \[gr-qc\]](#).
- ASHTEKAR, Abhay. New Variables for Classical and Quantum Gravity. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 57, n. 18, p. 2244–2247, nov. 1986. ISSN 00319007.
- ASHTEKAR, Abhay; LEWANDOWSKI, Jerzy. **Quantum Theory of Geometry II: Volume operators**. [*S.l.: s.n.*], 1997. arXiv: [gr-qc/9711031 \[gr-qc\]](#). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9711031>.
- ASHTEKAR, Abhay; PAWLOWSKI, Tomasz; SINGH, Parampreet. Quantum Nature of the Big Bang. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 96, n. 14, abr. 2006. ISSN 1079-7114.
- BIANCHI, Eugenio; MYERS, Robert C. **On the Architecture of Spacetime Geometry**. [*S.l.: s.n.*], 2012. arXiv: [1212.5183 \[hep-th\]](#). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1212.5183>.
- BODENDORFER, Norbert. **An elementary introduction to loop quantum gravity**. [*S.l.: s.n.*], 2016. arXiv: [1607.05129 \[gr-qc\]](#). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1607.05129>.
- BUFFENOIR, E.; ROCHE, Ph. Harmonic Analysis on the Quantum Lorentz Group. **Communications in Mathematical Physics**, Springer Science e Business Media LLC, v. 207, n. 3, p. 499–555, nov. 1999. ISSN 1432-0916.
- CUZINATTO, R. R.; MELO, C. A. M. de; SOUZA, C. Naldoni de. **Introduction to Regge Calculus for Gravitation**. [*S.l.: s.n.*], 2019. arXiv: [1904.01966 \[gr-qc\]](#). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1904.01966>.
- ENGLE, Jonathan; PEREIRA, Roberto. Regularization and finiteness of the Lorentzian loop quantum gravity vertices. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 79, n. 8, abr. 2009. ISSN 1550-2368.
- FAIRBAIRN, Winston J.; MEUSBURGER, Catherine. Quantum deformation of two four-dimensional spin foam models. **Journal of Mathematical Physics**, AIP Publishing, v. 53, n. 2, fev. 2012. ISSN 1089-7658.
- GREEN, Michael B.; SCHWARZ, John H.; WITTEN, Edward. **Superstring Theory: 25th Anniversary Edition**. [*S.l.*]: Cambridge University Press, 2012. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- HAN, Muxin. Cosmological constant in loop quantum gravity vertex amplitude. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 84, n. 6, set. 2011. ISSN 1550-2368.
- HELLING, Robert C.; POLICASTRO, Giuseppe. **String quantization: Fock vs. LQG Representations**. [*S.l.: s.n.*], 2004. arXiv: [hep-th/0409182 \[hep-th\]](#). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/hep-th/0409182>.

- KAMINSKI, Diana. **Algebras of Quantum Variables for Loop Quantum Gravity, I. Overview**. [S.l.: s.n.], 2011. arXiv: [1108.4577 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1108.4577). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1108.4577>.
- KOGUT, John; SUSSKIND, Leonard. Hamiltonian formulation of Wilson's lattice gauge theories. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 11, p. 395–408, 2 jan. 1975.
- LEI LU, Philip A. May. Step-by-Step Canonical Quantum Gravity – Part I: Ashtekar's New Variables, 2024.
- NAKAHARA, Mikio. **Geometry, Topology and Physics, Second Edition**. [S.l.: s.n.], 2002.
- NOUI, K; ROCHE, Ph. Cosmological deformation of Lorentzian spin foam models. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 20, n. 14, p. 3175–3213, jul. 2003. ISSN 1361-6382.
- RODOLFO GAMBINI, Jorge Pullin. **A First Course in Loop Quantum Gravity**. Oxford: Oxford University Press, 2011. ISBN 9780191774980.
- ROVELLI, Carlo; VIDOTTO, Francesca. **Covariant Loop Quantum Gravity: An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2015. ISBN 978-1-107-70691-0.
- THIEMANN, T. Loop Quantum Gravity: An Inside View. In: APPROACHES to Fundamental Physics. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2007. P. 185–263. ISBN 9783540711179.
- THIEMANN, Thomas. **The LQG-String: Loop Quantum Gravity Quantization of String Theory I. Flat Target Space**. [S.l.: s.n.], jan. 2004. eprint: [hep-th/0401172](https://arxiv.org/abs/hep-th/0401172). Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0401172>.
- UNRUH, W. G. Notes on black-hole evaporation. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 14, p. 870–892, 4 ago. 1976.
- VAID, Deepak; BILSON-THOMPSON, Sundance. **LQG for the Bewildered**. Edição: Christian Caron. [S.l.]: Springer Nature, fev. 2014. eprint: [1402.3586](https://arxiv.org/abs/1402.3586).
- VAID, Deepak; SOUSA, Luigi Teixeira de. Quantizing the Bosonic String on a Loop Quantum Gravity Background, 2024.
- ZWIEBACH, Barton. **A First Course in String Theory**. 2nd. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. ISBN 9780521880329, 0521880327.

APÊNDICE A – Uma Breve Caminhada no Campo

Matematicamente falando, um campo é uma função definida sobre o espaço-tempo, ou seja, a atribuição de certas propriedades (massa, carga, spin) a cada ponto do espaço-tempo de maneira contínua. Fisicamente falando, um campo é um meio permeando todo o espaço-tempo através do qual energia e momento podem se propagar em forma de pulsos (ondas).

Existem vários tipos de campos possíveis: escalares (spin 0, campo de Higgs, átomos de hélio-4), vetoriais (spin 1, campos de calibre como o eletromagnético), tensoriais (spin 2, campo gravitacional)¹, e até mesmo campos mais exóticos como os espinoriais (spin 1/2, elétrons, quarks, neutrinos, átomos de prata). Existem fortes argumentos matemáticos para a não existência de campos de spin ≥ 3 e para a existência de apenas espinores de spin 1/2, além de estes nunca terem sido observados na natureza como partículas fundamentais (o gráviton, hipotética partícula de quanta de campo gravitacional também não foi observado até o presente momento, porém sabemos que o campo tensorial de ordem 2 clássico existe).

Note que todos os tipos de campos citados dizem respeito ao spin do mesmo, ou seja, como este transforma ante transformações do espaço-tempo, então um campo escalar não é necessariamente descrito por um número, podendo ser descrito por um "vetor de grupo" (é o caso do campo de Higgs) desde que ele se *transforme* como um escalar de Lorentz (em outras palavras, o campo escalar não possui índices de espaço-tempo, mas pode possuir índices de grupo, o campo vetorial possui exatamente 1 índice de espaço-tempo, etc), como veremos mais adiante.

A.1 AÇÃO, DERIVADA FUNCIONAL

Em Mecânica Clássica, a ação funcional é definida como a integral da Lagrangeana L , uma função dos graus de liberdade da partícula,

$$S = \int dt L[q, \dot{q}, t], \quad (201)$$

porém agora lidamos com campos que estão distribuídos por todo o espaço, $\phi = \phi(t, \vec{x})$, então a Lagrangeana será dada pela integral sobre um volume da *densidade Lagrangeana* \mathcal{L}

$$L = \int d^3x \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi], \quad (202)$$

tal que a ação agora será uma integral sobre o espaço-tempo

$$S = \int dt L[\phi, \partial_\mu \phi] = \int d^4x \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi]. \quad (203)$$

Visto que agora lidamos com graus de liberdade contínuos $\phi(t, x)$ (a partir daqui, iremos abandonar a seta de vetor na variável espacial, a não ser que isto possa causar confusão) em diferentes pontos do espaço, precisamos de uma derivada que reflita essa dependência. Este é o papel da **derivada funcional**, definida formalmente como

$$\frac{\delta F[\phi, \partial_\mu \phi](x)}{\delta \phi(y)} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\phi(x) + \epsilon \delta^3(x, y), \partial_\mu \phi + \epsilon \partial_\mu \delta^3(x, y)] - F[\phi(x), \partial_\mu \phi]}{\epsilon}. \quad (204)$$

De maneira prática, isso se reduz à derivada parcial em relação ao campo vezes uma delta 3d, quando F for um campo funcional

$$\frac{\delta F(x)}{\delta \phi(y)} = \frac{\partial F}{\partial \phi} \delta^3(x, y), \quad (205)$$

ou de maneira mais formal, podemos definir a derivada parcial em relação a um campo como a integral sobre um volume da derivada funcional,

$$\frac{\partial F}{\partial \phi}(x) := \int d^3y \frac{\delta F(x)}{\delta \phi(y)}. \quad (206)$$

¹ Existem teoremas que garantem que todo e qualquer campo tensorial simétrico será necessariamente acoplado ao tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$, logo só podendo descrever a gravidade.

Para achar as equações de movimento do campo ϕ , nós procuramos por configurações do campo que extremizem a ação funcional:

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int d^4x \mathcal{L} = \\ &= \int d^4x \delta \mathcal{L} = \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right) = \\ &= \int d^4x \left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] \right) \stackrel{!}{=} 0,\end{aligned}\quad (207)$$

em que o segundo termo se anula quando as condições de contorno são satisfeitas. Com isso, as equações de Euler-Lagrange podem ser escritas como o sumiço da derivada funcional da ação ao "dividir por $\delta \phi(y)$ " (como em cálculo 1, para extremizar uma função buscamos o sumiço da primeira derivada desta):

$$\frac{\delta S[\phi, \partial_\mu \phi]}{\delta \phi} = 0 \iff \frac{\mathfrak{d} \mathcal{L}}{\mathfrak{d} \phi} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0, \quad (208)$$

onde denotaremos, quando conveniente, o operador de Euler-Lagrange por $\mathfrak{d}/\mathfrak{d}\phi$. Portanto, vemos que a derivada funcional aplicada a um funcional integral como a ação resulta nas equações de Euler-Lagrange para o integrando.

A.1.1 Exemplos Básicos de Campos

A.1.1.1 Campo Escalar Real

Como primeiro exemplo de uma teoria de campos, trataremos de um campo escalar real $\phi(x)$, que obedece a *equação de Klein-Gordon*

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi - \mu^2 \phi = 0, \quad (209)$$

em que $\mu = mc/\hbar$ é a "massa reduzida" do campo. Esta equação é obtida ao tentar "quantizar" a relação de dispersão relativística $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ com as regras básicas de quantização em que energia e momento viram operadores Hermitianos

$$E \rightarrow \hat{E} = i\hbar \partial_t \quad (210)a$$

$$\vec{p} \rightarrow \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (210)b$$

atuando em alguma função de onda. Esta foi a primeira tentativa de Schrodinger de escrever uma equação de onda quântica, porém ela foi abandonada por não servir como modelo de equação para a função de onda $|\psi\rangle$, visto que as soluções desta permitem energias negativas por se tratar de uma equação de segunda ordem nas derivadas temporais. Não, ao invés de achar a equação quântica, esta "primeira quantização" levou à equação de movimento do campo escalar $\phi(x)$. A verdadeira quantização relativística viria a ser a "segunda quantização", onde o campo $\phi(x)$ em si seria promovido a operador $\hat{\phi}(x)$, com a equação que governa a dinâmica quântica ainda sendo a equação de Schrodinger, porém com a Hamiltoniana do campo que será apresentada mais a frente em A.1.2.

A equação de Klein-Gordon (209) pode ser obtida através da Lagrangeana de Klein-Gordon

$$\mathcal{L}_{KG}[\phi, \partial_\mu \phi] = -\frac{\hbar^2 c^2}{2} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \mu^2 \phi^2). \quad (211)$$

Esta é a teoria do campo escalar "livre", ou seja, sem interações. Podemos modelar um campo escalar que possui auto-interação através de uma modificação nesta Lagrangeana: adicionamos um termo $\lambda \phi^4/4!$,

$$\mathcal{L}_{KGI}[\phi, \partial_\mu \phi] = -\frac{\hbar^2 c^2}{2} \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right). \quad (212)$$

Este modelo é chamado de " $\lambda\phi^4$ " (ou $\lambda\phi^4$), e dizemos que é uma teoria com auto-interação pois o termo quártico na Lagrangeana faz com que a equação de movimento possua um termo de ordem cúbica no campo, ou seja, o campo se reacopla consigo mesmo (como se um oscilador harmônico reacoplasse consigo mesmo na forma de um termo x^3 na equação de movimento, de maneira que uma oscilação provocasse outra). Este modelo é de extrema relevância pois, além de ser um caso que pode ser resolvido através de Teoria de Perturbação, o campo de Higgs do Modelo Padrão possui como Lagrangeana uma generalização deste modelo para campo complexo com valores na álgebra $\mathfrak{su}(2)$ e sinal trocado no termo de massa, se tratando de um *campo taquíônico* (um campo taquíônico mesmo possuindo massa quadrática negativa ainda pode gerar partículas que viajam abaixo de c após quebra espontânea de simetria).

A.1.1.2 Campo de Dirac

Outro exemplo importante de uma teoria de campos é a do campo bi-espinorial de Dirac, o qual obedece a *equação de Dirac*

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0, \quad (213)$$

onde γ^μ são as matrizes γ de Dirac, as quais compõem uma representação matricial da álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(1, 3)$ através de suas relações de anti-comutação $(\gamma^\mu, \gamma^\nu) = 2\eta^{\mu\nu}$. Esta veio da procura de uma equação de onda que fosse de primeira ordem no tempo e no espaço ao tentar "tirar a raiz" (mais especificamente, fatorar) da equação de Klein-Gordon (209) escrita classicamente como a relação de quadrimomento-massa $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$:

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= m^2 c^2 \\ \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2 c^2 &= 0 \\ \downarrow? \\ (\gamma^\mu p_\mu - mc)(\gamma^\nu p_\nu + mc) &= 0, \end{aligned} \quad (214)$$

onde Dirac chegou em um empasse na passagem final: os objetos γ^μ não poderiam ser números ordinários, pois o requerimento que o produto retornasse à passagem anterior impunha que os γ^μ deveriam *anti-comutar* resultando na métrica de Minkowski. Resolvido este problema, escolheu-se o fator da direita para representar o elétron pois este possui massa positiva, aplicou-se as regras de quantização (210)a e (210)b e obteve-se a equação de Dirac (213), onde visto que os γ 's são matrizes, a função de onda em que a equação opera deve ser um objeto complexo de 4 componentes, o bi-espinor.

A equação de Dirac (213) pode ser obtida através de variação da Lagrangeana de Dirac

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi, \quad (215)$$

onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ é o bi-espinor conjugado e equivale à anti-matéria, com o operador entre parenteses entendido como atuando à esquerda e à direita. O acoplamento deste campo com campos de força será tratado mais a frente no apêndice B.

A.1.2 Análise Hamiltoniana de Campos

Assim como a Lagrangeana, a Hamiltoniana agora passa a ser uma densidade integrada no volume,

$$H = \int d^3x \mathcal{H}, \quad (216)$$

em que a densidade Hamiltoniana \mathcal{H} é dada pela transformada de Legendre da densidade Lagrangeada \mathcal{L}

$$\mathcal{H}[\phi, \pi] = \pi\partial_0\phi - \mathcal{L}, \quad (217)$$

com π sendo o momento canônico conjugado ao campo ϕ em um dado referencial inercial

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \quad (218)$$

e a Hamiltoniana H gerando evolução temporal no referencial em questão através dos parenteses de Poisson apresentados a seguir.

Dados dois funcionais do espaço de fase $F[\phi, \pi]$ e $G[\phi, \pi]$, seus parenteses de Poisson em tempos iguais são dados pela soma (integral) sobre todos os pontos do espaço, isto é,

$$\{F(x), G(y)\} = \int d^3 z \left(\frac{\delta F(x)}{\delta \phi(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \phi(z)} \right), \quad (219)$$

com os parenteses canônicos sendo um funcional δ ,

$$\{\phi(x), \pi(y)\} = \delta^3(x, y). \quad (220)$$

Isto pode ser entendido ao enxergar o parenteses de Poisson como um braquete de Lie, que por sua vez pode ser visto como uma derivação, uma vez que este obedece a regra de Leibniz em ambas entradas:

$$\{F.G, H\} = F \{G, H\} + \{F, H\} G \quad (221)a$$

$$\{F, G.H\} = G \{F, H\} + \{F, G\} H, \quad (221)b$$

logo o parenteses $\{\phi, \pi\}$ é como a "derivada (direcional) de ϕ ao longo de π ", e como vimos em (205), a derivada de um campo em relação a outro resulta em distribuições δ .

Uma fórmula conveniente é a regra da cadeia para parenteses de Poisson: digamos que queremos calcular $\{F(x), G(y)\}$, porém suas derivadas em relação às variáveis canônicas (ϕ, π) são muito complicadas de se calcular, mas nós sabemos calcular suas derivadas em relação a outro par de variáveis (α, β) cujos parenteses de Poisson $\{\alpha(x), \beta(y)\}$ são conhecidos, então vale a identidade

$$\{F(x), G(y)\} = \int d^3 x' d^3 y' \frac{\delta F(x)}{\delta \alpha(x')} \{\alpha(x'), \beta(y')\} \frac{\delta G(y)}{\delta \beta(y')}. \quad (222)$$

As equações de Hamilton para campos são dadas por

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \{\phi, H\} = \frac{\delta H}{\delta \pi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \partial_a \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_a \pi)} \quad (223)a$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = \{\pi, H\} = -\frac{\delta H}{\delta \phi} = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} - \partial_a \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_a \phi)} \right). \quad (223)b$$

Retornando ao exemplo do campo escalar livre tratado anteriormente em A.1.1.1, seu momento e sua Hamiltoniana (e densidade) ficam então

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \hbar^2 c^2 \partial_0 \phi(x) \quad (224)$$

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 x (\pi \partial_0 \phi - \mathcal{L}_{KG}) = \\ &= \frac{\hbar^2 c^2}{2} \int d^3 x \left((\partial_0 \phi)^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + \mu^2 \phi^2 \right) = \\ &= \frac{\hbar^2 c^2}{2} \int d^3 x \left(\frac{1}{\hbar^4 c^4} \pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + \mu^2 \phi^2 \right), \end{aligned} \quad (225)$$

de modo que suas equações canônicas serão

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \pi} = \frac{1}{\hbar^2 c^2} \pi \quad (226)a$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \phi} = \hbar^2 c^2 \left(\vec{\nabla}^2 \phi - \mu^2 \phi \right). \quad (226)b$$

Algo interessante de se analisar são os modos de vibração de um campo. Para isso, precisamos achar então a solução da eq (209). Por se tratar de uma equação de onda, a solução será uma combinação linear (neste caso por se tratar de um espaço não-compacto, uma integral) de ondas planas de diferentes momentos (transformada de Fourier)

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^4 p e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} \tilde{\phi}(p), \quad (227)$$

porém precisamos também impor a relação de dispersão relativística

$$(p_0)^2 = \frac{E^2}{c^2} = \vec{p}^2 + m^2 c^2. \quad (228)$$

Fazemos isso ao reescrever $\tilde{\phi}(p) = C(p)\delta((p_0)^2 - E^2/c^2)$, com $E = E(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^4 p \delta((p_0)^2 - E^2/c^2) e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} C(p) = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^4 p \frac{c}{2E} (\delta(p_0 - E/c) + \delta(p_0 + E/c)) e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} C(p) = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3 p \frac{c}{2E} \left(A(p) e^{-\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} + B(p) e^{\frac{i}{\hbar} (Et + \vec{p} \cdot \vec{x})} \right), \end{aligned} \quad (229)$$

onde os coeficientes $A(p)$ e $B(p)$ são dados por

$$A(p) e^{-\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp_0 e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} C(p) \delta(p_0 - E/c) \quad (230)a$$

$$B(p) e^{\frac{i}{\hbar} (Et + \vec{p} \cdot \vec{x})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp_0 e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} C(p) \delta(p_0 + E/c). \quad (230)b$$

Podemos absorver um fator $c/2\sqrt{E}$ nos coeficientes A e B , ficando com

$$a(p) = \frac{cA(p)}{2\sqrt{E(p)}} \quad (231)a$$

$$b(p) = \frac{cB(p)}{2\sqrt{E(p)}} \quad (231)b$$

↓

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3 p \frac{1}{\sqrt{E(p)}} \left(a(p) e^{-\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} + b(p) e^{\frac{i}{\hbar} (Et + \vec{p} \cdot \vec{x})} \right). \quad (232)$$

Esta é a solução geral para a equação de Klein-Gordon (209) (como podemos ver, possuindo um termo de energia positiva e um de energia negativa), porém ainda temos uma coisa a fazer: como estamos lidando com o campo escalar real, precisamos impor a condição de realidade $\phi(x) = \phi^*(x)$ em nossa solução,

$$\begin{aligned} \phi^*(x) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3 p \frac{1}{\sqrt{E(p)}} \left(a(p) e^{-\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} + b(p) e^{\frac{i}{\hbar} (Et + \vec{p} \cdot \vec{x})} \right)^* = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3 p \frac{1}{\sqrt{E(p)}} \left(a^*(p) e^{\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} + b^*(p) e^{-\frac{i}{\hbar} (Et + \vec{p} \cdot \vec{x})} \right) \stackrel{!}{=} \phi(x) \end{aligned} \quad (233)$$

⇕

$$b(p) = a^*(-p), \quad (234)$$

e então ao substituir (234) na solução geral (232) e trocar $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ no segundo termo, obtemos então

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3 p \frac{1}{\sqrt{E(p)}} \left(a(p) e^{-\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} + a^*(p) e^{\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \right). \quad (235)$$

A partir de agora trabalharemos em unidades naturais $c = \hbar = 1$. O momento canônico conjugado $\pi(x)$ é então

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \partial_0 \phi(x) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \frac{(-iE(p))}{\sqrt{E(p)}} \left(a(p) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} - a^*(p) e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \right) = \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \sqrt{E(p)} \left(a(p) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} - a^*(p) e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \right).\end{aligned}\quad (236)$$

Podemos usar (235) e (236) para encontrar os modos de vibração $a(p)$ e $a^*(p)$ em função do par canônico (ϕ, π) :

$$a(p) = \int d^3x \left(\sqrt{E(p)} \phi(x) e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} + \frac{i}{\sqrt{E(p)}} \pi(x) e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \right) \quad (237a)$$

$$a^*(p) = \int d^3x \left(\sqrt{E(p)} \phi(x) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} - \frac{i}{\sqrt{E(p)}} \pi(x) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \right). \quad (237b)$$

Isso nos permite então calcular os parenteses de Poisson entre os modos de vibração do campo:

$$\{a(p), a(k)\} = 0 \quad (238a)$$

$$\{a^*(p), a^*(k)\} = 0 \quad (238b)$$

$$\begin{aligned}\{a(p), a^*(k)\} &= \int d^3z \left(\frac{\delta a(p)}{\delta \phi(z)} \frac{\delta a^*(k)}{\delta \pi(z)} - \frac{\delta a(p)}{\delta \pi(z)} \frac{\delta a^*(k)}{\delta \phi(z)} \right) = \\ &= \int d^3z \left(\sqrt{E(p)} \int d^3x \delta(x, z) e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \frac{-i}{\sqrt{E(k)}} \int d^3y \delta(y, z) e^{-i(Et - \vec{k} \cdot \vec{y})} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{\sqrt{E(p)}} \int d^3x \delta(x, z) e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \sqrt{E(k)} \int d^3y \delta(y, z) e^{-i(Et - \vec{k} \cdot \vec{y})} \right) \Big|_{t=0} = \\ &= -i \left(\frac{\sqrt{E(p)}}{\sqrt{E(k)}} + \frac{\sqrt{E(k)}}{\sqrt{E(p)}} \right) \int d^3z e^{-i(\vec{p} - \vec{k}) \cdot \vec{z}} = \\ &= -i \delta^3(p, k).\end{aligned}\quad (238c)$$

Com isso, podemos ver então por quê os coeficiente $a(p)$ e $a^*(p)$ são chamados "modos de vibração normais": estes são parenteses de Poisson de osciladores harmônicos simples infinitesimais em cada ponto do espaço de fase! Vamos agora reescrever a Hamiltoniana em termos dos modos de vibração

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2} \int d^3x \left(\pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \left((\partial_t \phi)^2 + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi + m^2 \phi^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3p E(p) \left(a(p) a^*(p) + a^*(p) a(p) \right),\end{aligned}\quad (239)$$

em que classicamente este seria igual à integral do módulo quadrado dos modos de vibração, porém manteremos esta forma (239) pois após quantizar há uma sutileza extra (em particular, os modos de vibração deixarão de ser números que comutam e serão substituídos por operadores cujas relações de comutação são dadas pelos parenteses de Poisson clássicos). Com isto, podemos então calcular os parenteses de Poisson entre a e a^* com a Hamiltoniana H :

$$\begin{aligned}\{a(p), H\} &= \int d^3k \{a(p), a^*(k)\} \frac{\delta H}{\delta a^*(k)} = \\ &= -i \int d^3k \delta(p, k) E(k) a(k) = \\ &= -i E(p) a(p)\end{aligned}\quad (240a)$$

$$\begin{aligned}
\{a^*(p), H\} &= \int d^3k \{a^*(p), a(k)\} \frac{\delta H}{\delta a(k)} = \\
&= i \int d^3k \delta(p, k) E(k) a^*(k) = \\
&= iE(p) a^*(p).
\end{aligned} \tag{240}b$$

A.2 SEGUNDA QUANTIZAÇÃO

Como dito anteriormente, a primeira quantização onde energia e momento foram trocados por operadores Hermitianos na relação de dispersão relativística não resultaram em uma equação quântica, mas sim nas equações *clássicas* de movimento para campos escalares (ou espinoriais ao tentar-se fatorar a relação de dispersão). A equação de movimento quântica continua sendo de fato a equação de Schrodinger

$$\hat{H}|\psi\rangle = i\hbar\partial_t|\psi\rangle, \tag{241}$$

onde o (operador) Hamiltoniano \hat{H} é a quantização da Hamiltoniana $H[\phi, \pi]$ do campo $\phi(x)$, portanto o campo em si deve ser promovido a operador atuando em estados $|\psi\rangle$ de algum espaço de Hilbert \mathcal{H}

$$\phi(x) \rightarrow \hat{\phi}(x)|\psi\rangle. \tag{242}$$

Voltando ao exemplo do campo escalar real, como os modos de vibração satisfazem parenteses de Poisson de osciladores harmônicos, podemos usar estes para expressar nosso espaço de Hilbert \mathcal{H} em função de estados de oscilador harmônico

$$\mathcal{H} \ni |\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \tag{243}$$

onde os estados $|n\rangle$ são estados excitados

$$|n\rangle = \prod_{p=1}^n \hat{a}^\dagger(p) |0\rangle, \tag{244}$$

em que o estado fundamental $|0\rangle$ é tal que

$$\hat{a}(p)|0\rangle = 0. \tag{245}$$

Técnicamente, na notação acima omitimos que o estado $|n\rangle$ é na verdade um tensoramento entre a base de oscilador harmônico e a de momento, e na realidade temos

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n; p\rangle, \quad |n; p\rangle = \prod_{p=1}^n \hat{a}^\dagger(p) |0; p\rangle. \tag{246}$$

Podemos também analisar o espaço de Hilbert em representação de posição $|n; x\rangle$ através de transformada de Fourier

$$|n; x\rangle = \frac{1}{(2p\hbar)^{3/2}} \int d^3p e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} |n; p\rangle, \tag{247}$$

e nessa representação temos operadores $\hat{a}^\dagger(x)$ e $\hat{a}(x)$ dados também por transformada de Fourier

$$\hat{a}^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}^\dagger(p) \tag{248}a$$

$$\hat{a}(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}(p). \tag{248}b$$

Vemos então que os operadores \hat{a}^\dagger e \hat{a} são operadores de criação e aniquilação, pois estes criam/aniquilam uma partícula de momento p (em representação de momento) ou na posição x (em base de posição).

APÊNDICE B – Teorias de Calibre e Fibrados

Aqui será feita uma breve introdução às teorias de calibre (do inglês "gauge theories") e sua formulação em termos da geometria diferencial de Fibrados Principais.

Começaremos com a Eletrodinâmica de Maxwell: as equações de Maxwell regem a dinâmica dos campos elétrico e magnético, e em termos apenas de campos microscópicos elas assumem a forma (em unidades tais que $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (249)a$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (249)b$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (249)c$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (249)d$$

Os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} podem ser expressos em termos de um potencial escalar ϕ e vetorial \vec{A} :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (250)a$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (250)b$$

Das identidades acima, podemos enxergar uma redundância nos campos \vec{E} e \vec{B} : se no lugar de ϕ e \vec{A} usarmos novos potenciais relacionados aos originais através de

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (251)a$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\varepsilon, \quad (251)b$$

onde $\varepsilon = \varepsilon(t, \vec{r})$ é um campo escalar arbitrário chamado *parâmetro de calibre* (em inglês "gauge parameter"), os campos físicos \vec{E} e \vec{B} se mantêm invariantes

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \\ &= -\vec{\nabla}\left(\phi - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \vec{\nabla}\varepsilon) = \\ &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \vec{\nabla}\varepsilon}{\partial t} = \\ &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \equiv \vec{E} \end{aligned} \quad (252)a$$

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \\ &= \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\varepsilon) = \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varepsilon = \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv \vec{B}. \end{aligned} \quad (252)b$$

Esta redundância é denominada *simetria de calibre* (do inglês "gauge symmetry") e é a base por trás do nosso entendimento das forças que regem nosso universo.

Podemos utilizar notação relativística de índices para enxergar os campos elétrico e magnético como facetas do mesmo objeto: se definirmos o quadri-potencial eletromagnético como

$$(A_\mu) = (-c\phi, \vec{A}), \quad (253)$$

então a derivada anti-simétrica deste nos dá o tensor de força de campo, ou tensor de Faraday, isto é, o campo eletromagnético:

$$\begin{aligned} [\partial_{[\mu} A_{\nu]}] &\equiv [\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}] = \\ &= [F_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (254)$$

onde agora a simetria de calibre assume a forma simplificada

$$A'_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu} \varepsilon, \quad (255)$$

já que derivadas parciais comutam:

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_{[\mu} A'_{\nu]} = \\ &= \partial_{[\mu} (A_{\nu]} + \partial_{\nu]} \varepsilon) = \\ &= \partial_{[\mu} A_{\nu]} + \partial_{[\mu} \partial_{\nu]} \varepsilon = \\ &= \partial_{[\mu} A_{\nu]} \equiv F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (256)$$

Agora uma última abstração em notação antes de prosseguirmos: utilizando o formalismo de formas diferenciais da geometria diferencial (ver por exemplo (NAKAHARA, 2002)), podemos definir a 1-forma potencial

$$\mathcal{A} = i A_{\mu} dx^{\mu}, \quad (257)$$

onde por ora podemos entender a constante imaginária i sendo inclusa por conveniência futura. Então definimos a 2-forma de curvatura (ou força de campo) \mathcal{F} como

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A}, \quad (258)$$

em que o operador d é a derivada exterior no contexto de formas diferenciais (a derivada anti-simétrica em (254) é a representação em componentes deste operador), e a simetria de calibre se torna então

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} + d\varepsilon, \quad (259)$$

visto que a derivada exterior é nilpotente de ordem 2 (i.e $d^2 = 0$)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' &= d\mathcal{A}' = \\ &= d(\mathcal{A} + d\varepsilon) = \\ &= d\mathcal{A} + d^2\varepsilon = \\ &= d\mathcal{A} \equiv \mathcal{F}. \end{aligned} \quad (260)$$

B.1 ORIGENS DA SIMETRIA DE CALIBRE

As origens teóricas da simetria de calibre apresentada anteriormente vem da análise das simetrias de campos de matéria: por exemplo, considere a equação de Dirac para o elétron livre

$$(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc)\psi = 0, \quad (261)$$

onde γ^{μ} são as matrizes γ (gamma) de Dirac que compõem uma representação da álgebra de Clifford do espaço de Minkowski através de suas relações de anti-comutação $(\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}) = 2\eta^{\mu\nu}$ e ψ é o bi-espinor

de Dirac composto pela soma direta de um espinor de Weyl de quiralidade de mão direita e um de mão esquerda

$$\psi = \begin{bmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{bmatrix}, \quad \phi_i \in \mathbb{C}^2. \quad (262)$$

A equação de Dirac (261) é uma das equações de Euler-Lagrange da Lagrangeana de Dirac livre

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi, \quad (263)$$

em que $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$. Desta Lagrangeana podemos ver então uma simetria do sistema: se fizermos uma mudança *global* na fase do espinor

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-iq\theta} \quad (264)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{iq\theta}, \quad (265)$$

onde q é a carga do elétron, a Lagrangeana não irá mudar pela fase ser global (constante)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_D &= \bar{\psi}'(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi' = \\ &= \bar{\psi}e^{iq\theta}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi e^{-iq\theta} = \\ &= \bar{\psi}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi e^{iq\theta}e^{-iq\theta} = \\ &= \bar{\psi}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi \equiv \mathcal{L}_D. \end{aligned} \quad (266)$$

No entanto, o campo de Dirac ψ é uma função do espaço-tempo (campo), logo espera-se que quaisquer transformações feitas neste possam ser locais, ou seja, mudar a fase por um valor diferente em cada ponto do espaço-tempo,

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-iq\varepsilon(x)} \quad (267)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{iq\varepsilon(x)}, \quad (268)$$

mas se fizermos essa mudança local a Lagrangeana irá mudar devido a um termo advindo da derivada atuando no fator de fase local:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_D &= \bar{\psi}'(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi' = \\ &= \bar{\psi}e^{iq\varepsilon(x)}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)[\psi e^{-iq\varepsilon(x)}] = \\ &= \bar{\psi}e^{iq\varepsilon(x)}e^{-iq\varepsilon(x)}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi + \bar{\psi}q\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\varepsilon(x)e^{iq\varepsilon(x)}e^{-iq\varepsilon(x)}\psi = \\ &= \bar{\psi}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi + \bar{\psi}q\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\varepsilon(x)\psi. \end{aligned} \quad (269)$$

Mas há uma maneira de corrigir este problema, ao introduzirmos um campo "novo" A_μ acoplado à derivada $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ que se transforme de uma maneira específica

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\varepsilon, \quad (270)$$

a simetria de fase da Lagrangeana de Dirac será estabelecida localmente: primeiro, veremos que o operador $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ transforma "covariantemente" ante a transformação de calibre, isto é, $D'_\mu\psi' = e^{-iq\varepsilon}D_\mu\psi$ portanto será chamado de *derivada covariante de calibre* (ou apenas derivada covariante)

$$\begin{aligned} D'_\mu\psi' &= (\partial_\mu + iqA'_\mu)\psi' = \\ &= (\partial_\mu + iq(A_\mu + \partial_\mu\varepsilon))[\psi e^{-iq\varepsilon}] = \\ &= \partial_\mu\psi e^{-iq\varepsilon} - iq\partial_\mu\varepsilon e^{-iq\varepsilon}\psi + iqA_\mu e^{-iq\varepsilon}\psi + iq\partial_\mu\varepsilon e^{-iq\varepsilon}\psi = \\ &= e^{-iq\varepsilon}(\partial_\mu\psi + iqA_\mu\psi) = \\ &= e^{-iq\varepsilon}(\partial_\mu + iqA_\mu)\psi \equiv e^{-iq\varepsilon}D_\mu\psi, \end{aligned} \quad (271)$$

portanto vemos que, ao substituir ∂_μ por D_μ na Lagrangeana de Dirac, mesmo com transformações de fase *locais* a Lagrangeana permanecerá invariante

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{DA} &= \bar{\psi}'(i\hbar\gamma^\mu D'_\mu - mc)\psi' = \\ &= \bar{\psi}e^{iq\varepsilon(x)}(i\hbar\gamma^\mu D'_\mu - mc)\psi e^{-iq\varepsilon(x)} = \\ &= \bar{\psi}e^{iq\varepsilon(x)}e^{-iq\varepsilon(x)}(i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc)\psi = \\ &= \bar{\psi}(i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc)\psi \equiv \mathcal{L}_{DA}.\end{aligned}\tag{272}$$

A lei de transformação (270) não é nada novo: ela é precisamente a mesma do campo eletromagnético discutida em (255)! Portanto, vemos que ao impor a simetria de fase *local* na Lagrangeana de Dirac, nós "redescobrimos" o campo eletromagnético. Este é o exato procedimento que levou às formulações das interações nucleares forte e fraca, impondo que certas simetrias que foram observadas fossem válidas localmente.

De maneira geral, o procedimento é: dada uma Lagrangeana com uma simetria *global* de algum grupo de Lie G (um grupo de Lie é, em poucas palavras, uma variedade diferenciável com estrutura de grupo, ver (NAKAHARA, 2002)), isto é, onde o campo dinâmico ψ admite uma transformação do tipo

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi, \quad U \in G\tag{273}$$

que não altera a Lagrangeana,

$$\mathcal{L}[U\psi, \partial_\mu[U\psi]] = \mathcal{L}[\psi, \partial_\mu\psi],\tag{274}$$

será então imposto invariância para a transformação agora sendo *local*, $U = U(x)$, e para tal serão adicionados quaisquer campos necessários \mathcal{A}_μ , os quais terão valores na álgebra de Lie \mathfrak{g} (a álgebra de Lie \mathfrak{g} de um grupo de Lie G pode ser entendida como o espaço tangente na identidade do grupo, $\mathfrak{g} = T_1G$, com produto entre os vetores dado pela derivada/braquete de Lie), $\mathcal{A}_\mu = A_\mu^I T_I$, onde T_I são os geradores do grupo (base da álgebra) na representação adjunta. Neste sentido, o quadri-potencial eletromagnético é o caso mais simples de tal construção: o grupo é o círculo $U(1)$ com gerador sendo a constante imaginária i (o mapa exponencial relaciona a álgebra \mathfrak{g} com o grupo G , $U = e^{n^I T_I}$, $U \in G$ e $T_I \in \mathfrak{g}$, no caso do círculo $U(1)$, $T_I = i$ e $n^I = \theta$). O campo com valores na álgebra \mathcal{A}_μ é chamado de *conexão de calibre*, e sua lei de transformação geral é

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}'_\mu = \mathcal{A}_\mu + D_\mu \mathcal{E} = U\mathcal{A}_\mu U^{-1} - \frac{1}{g}\partial_\mu U^{-1}U,\tag{275}$$

em que $U = U(\mathcal{E}) = e^{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} = \varepsilon^I T_I$ é o gerador da transformação de calibre e $D_\mu = \partial_\mu + g\mathcal{A}_\mu$ é a derivada covariante de calibre, com g sendo uma constante de acoplamento (a "carga" da interação em questão). A ação deste operador em objetos na representação adjunta é dada por

$$D_\mu \mathcal{E} = \partial_\mu \mathcal{E} + g[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{E}] = \partial_\mu \mathcal{E}^I T_I + g c^I_{JK} A_\mu^J \mathcal{E}^K T_I,\tag{276}$$

onde $[\cdot, \cdot]$ é o braquete/derivada de Lie (comutador) e c^I_{JK} são as constantes de estrutura do grupo.

B.2 UMA BREVE INTRODUÇÃO AO FORMALISMO DE FIBRADOS

Iremos agora apresentar a formulação matematicamente rigorosa da construção discutida anteriormente e clarificar que o termo "derivada covariante" é mais que apenas uma analogia com Geometria Riemanniana, e na verdade é a derivada covariante desta que é um caso particular da formulação mais geral de fibrados.

Primeiramente, introduzimos o **fibrado tangente** de uma variedade diferenciável M , denotado TM como a união disjunta de seus espaços tangentes

$$\begin{aligned} TM &:= \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \\ &= \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M = \\ &= \bigcup_{p \in M} \{(p, v|_p) \mid v|_p \in T_p M\} \end{aligned} \quad (277)$$

que dada uma carta local U de topologia trivial é diffeomórfico ao produto direto de M pelo espaço tangente $T_p U$,

$$\begin{aligned} TU &= \bigcup_{p \in U} \{(p, v|_p) \mid v|_p \in T_p U\} \simeq \\ &\simeq \{(p, v|_p) \mid p \in U, v|_p \in T_p U\} = U \times T_p U, \end{aligned} \quad (278)$$

no entanto esta igualdade é apenas local, globalmente a estrutura será diferente de apenas um produto direto. Difeomorfismos de M em M (como mudanças de coordenadas) são traduzidos a transformações do grupo geral linear nos espaços tangentes (as matrizes Jacobianas),

$$\phi : M \rightarrow M \quad (279)$$

↓

$$GL(T_p M) \ni d\phi|_p : T_p M \rightarrow T_p M. \quad (280)$$

A estrutura ponto-a-ponto do fibrado nos permite definir uma sobrejeção denominada *projeção* $\pi : TM \rightarrow M$ que retorna apenas o ponto da variedade M ,

$$\pi : TM \rightarrow M \quad (281)$$

$$(p, v|_p) \mapsto p, \quad (282)$$

cuja imagem inversa será o espaço tangente naquele ponto, $\pi^{-1}(p) = T_p M$. Uma construção completamente análoga pode ser realizada para o espaço cotangente, gerando o fibrado cotangente

$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M, \quad (283)$$

e pode ser extendido para os espaços tensoriais também através de

$$\mathcal{T}_n^m(M) := \bigsqcup_{p \in M} \mathcal{T}_n^m(T_p M), \quad (284)$$

onde $\mathcal{T}_n^m(T_p M)$ denota o espaço tensorial de ordem (m, n) do espaço tangente. Esta construção nos permite definir campos (co)vetoriais (tensoriais) como *seções* do fibrado: a seção é um mapa $s : M \rightarrow \mathcal{T}_n^m(M)$ satisfazendo $\pi \circ s = \text{id}_M$, o mapa identidade em M . Com isso, o requerimento que derivadas de campos tensoriais sejam também campos tensoriais, ou equivalentemente que derivadas transformem *covariantemente* ante diffeomorfismos,

$$\partial_\mu T'^\alpha_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \partial_\mu T^{\alpha'}_{\beta'} \quad (285)$$

leva à introdução da *derivada covariante* $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \partial_\alpha \otimes dx^\beta$, com a conexão afim tendo valores na álgebra $\mathfrak{gl}(T_p M)$. O tensor de curvatura de Riemann é extraído deste operador diferencial pela sua falha em ser comutativo: sejam $V^\alpha(x)$ as componentes de um campo vetorial em M , temos então

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta \quad (286)$$

↓

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\alpha_{\rho\beta} - \Gamma^\rho_{\beta\mu} \Gamma^\alpha_{\rho\nu}. \quad (287)$$

Matematicamente, os formalismos apresentados anteriormente em B.1 e no parágrafo acima são descritos pela Geometria Diferencial através de Fibrados Principais: um **fibrado principal** é uma quintupla (E, π, M, F, G) (por vezes denotado apenas como E ou pelo diagrama $G \rightarrow E \xrightarrow{\pi} M$) consistindo de

- uma variedade diferenciável E chamada de *espaço total*;
- uma variedade diferenciável M denominada *espaço base*;
- uma variedade diferenciável F referida por *fibra* (ou *fibra típica*);
- um grupo de Lie G dito *grupo de estrutura*, atuando em F pela esquerda;
- um mapa sobrejetor $\pi : E \rightarrow M$ definindo a *projeção*, cuja imagem inversa $\pi^{-1}(p) = F_p \simeq F$ é a *fibra em p* .

Um *campo* pode ser definido sobre o espaço base como sendo uma seção do fibrado principal: um mapa $s : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = \text{id}_M$. O grupo de estrutura induz uma 1-forma com valores na álgebra \mathfrak{g} , a *1-forma de conexão* (ou potencial de calibre)

$$\mathcal{A} = A^I_\mu T_I \otimes dx^\mu \in \mathfrak{g} \otimes T^*M, \quad (288)$$

que quando acoplado à derivada exterior da variedade define a *derivada exterior covariante* $D = d + g\mathcal{A}$, operador diferencial que transforma covariantemente quando o grupo de estrutura atua localmente na fibra: seja $s = \psi(x) = \psi : M \rightarrow E$ e $U(x) = U \in G$ tais que $\psi' = U\psi$

$$D'\psi' = UD\psi. \quad (289)$$

Por sua vez, a falha desta derivada exterior covariante em ser nilpotente dá origem à *2-forma de curvatura* (ou tensor de força de campo)

$$DD\psi =: \mathcal{F}\psi, \quad \mathcal{F} = F^I_{\mu\nu} T_I \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^2(M) \quad (290)$$

↓

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + g[\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}] = D\mathcal{A}. \quad (291)$$

Como exemplo desta construção, temos como tratado anteriormente a própria geometria Riemanniana, onde o espaço base é a variedade em questão M , as fibras são os espaços tensoriais do espaço tangente $\mathcal{T}^m_n(T_p M)$, o grupo de estrutura é o (tensoramento do) grupo geral linear $\text{GL}(T_p M)^{m+n}$ e o espaço total é o tensorial do fibrado tangente $\mathcal{T}^m_n(M)$, $(TM, \pi, M, T_p M, \text{GL}(T_p M))$, e portanto vemos que a derivada covariante da geometria Riemanniana é um caso particular das derivadas covariantes de fibrados, e não são estas apenas analogias à derivada covariante Riemanniana.

Outro exemplo de fibrado principal são teorias de calibre de Yang-Mills como o eletromagnetismo de Maxwell: o espaço base é o espaço-tempo M , a fibra é o espaço de espinores de Dirac S , o grupo de estrutura é o círculo $U(1)$, e o espaço total parece localmente com $M \times S$, $(E \simeq M \times S, \pi, M, S, U(1))$. Note que, pelo fato desta construção para o eletromagnetismo adicionar um círculo $U(1)$ a cada ponto do espaço-tempo, ela é muito similar à visão da teoria de Kaluza-Klein: nesta, os autores verificaram que ao trabalhar com a RG em $D = 5$ e separar o setor $(3+1)$ -d da RG convencional, as equações restantes reproduziam precisamente o eletromagnetismo de Maxwell, onde ao compactificar a dimensão nova em um círculo, momento nesta dimensão se comportava como carga elétrica, e agora podemos ver o porquê desta "coincidência", visto que pictoricamente eles estavam a um passo de formular a teoria de fibrados, faltando enxergar a dimensão circular extra como um grupo de estrutura invés de um dimensão espacial literal.

B.3 A AÇÃO DE YANG-MILLS

A Lagrangeana de Dirac acoplada ao campo de calibre dada em (272) está incompleta: esta só reflete o termo potencial do campo de calibre \mathcal{A}_μ , visto que possui apenas o termo de acoplamento deste com a matéria descrita pelo campo de Dirac. Ainda falta o termo cinético do campo de calibre \mathcal{A}_μ . Este deve ser quadrático nas derivadas de \mathcal{A}_μ . Como candidatos imediatos temos $(\mathcal{F}_\mu^\mu)^2$, $\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}$ e $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\mu\nu}$. O primeiro é idêntico a 0 pois $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ é anti-simétrico, então sobram a segunda e terceira possibilidades. A terceira representa um acoplamento das partes elétricas e magnéticas da curvatura, e geralmente não contribui na ação, porém existem modelos de cromodinâmica em que este termo também é considerado, mas em geral não é o caso e portanto ficamos com a segunda possibilidade, pois esta é a generalização do termo de quadri-gradiente ao quadrado do campo escalar. No entanto, em geral este termo é um elemento de uma álgebra \mathfrak{g} , e a ação deve resultar em um número. Isso é retificado ao tomarmos o traço (enxergando os geradores do grupo como matrizes), devido à identidade

$$\text{Tr}(T_I T_J) = dG_{IJ}, \quad (292)$$

onde d é a dimensão da representação do grupo e G_{IJ} é a métrica do grupo. Se a ação for construída com \mathcal{F} na representação fundamental, podemos redefinir os geradores como $\tilde{T}_I = T_I/\sqrt{d}$, de maneira que $\text{Tr}(\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}) = F_I^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^I$, e então temos a ação de Yang-Mills como

$$S_{YM} = -\frac{1}{4q^2} \int d^4x \sqrt{-g} F_I^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^I, \quad (293)$$

a qual pode ser reescrita em notação de formas diferenciais ao desfazer algumas identidades,

$$\begin{aligned} S_{YM} &= -\frac{1}{4q^2} \int d^4x \sqrt{-g} F_I^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^I = \\ &= -\frac{1}{4q^2} \int \frac{1}{4!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta \sqrt{-g} \text{Tr}(\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}) = \\ &= -\frac{1}{4q^2} \int \frac{1}{4!} \text{Tr}(\sqrt{-g} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \eta^{\mu\mu'} \eta^{\nu\nu'} \mathcal{F}_{\mu'\nu'} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta) = \\ &= -\frac{1}{4q^2} \int \frac{1}{2 \cdot 4!} \text{Tr}(\sqrt{-g} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\rho\theta} \varepsilon^{\mu'\nu'\rho\theta} \mathcal{F}_{\mu'\nu'} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta) = \\ &= -\frac{1}{4q^2} \int \frac{1}{2 \cdot 4!} \text{Tr}(\sqrt{-g} \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\rho\theta} \delta^{\mu'\nu'\rho\theta}_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{F}_{\mu'\nu'} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta) = \\ &= -\frac{1}{4q^2} \int \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{F}_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta) = \\ &= -\frac{1}{4q^2} \int \text{Tr}((\mathcal{F}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta) \wedge \star(\mathcal{F}_{\gamma\delta} dx^\gamma \wedge dx^\delta)) = \\ &= \frac{1}{4q^2} \int \text{Tr}(\star\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}), \end{aligned} \quad (294)$$

de maneira que a ação total do campo de calibre acoplado à matéria se torna

$$S_{YM-M} = S_M + \frac{1}{4q^2} \int \text{Tr}(\star\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}), \quad (295)$$

com S_M sendo a ação da matéria em questão (por exemplo, a ação do campo de Dirac).

A equação de movimento do campo de Yang-Mills é a equação de Procca covariante, generalizando a equação de Procca do eletromagnetismo de Maxwell

$$D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = -\mathcal{J}^\nu, \quad (296)$$

onde \mathcal{J}^ν é a densidade de corrente (com valores na álgebra \mathfrak{g}) advinda do acoplamento do campo de Yang-Mills com a matéria. Esta equação contempla as duas equações de Maxwell com fontes (lei de

Gauss-Ampère). Pela natureza associativa da álgebra \mathfrak{g} , temos que a identidade de Jacobi é válida para a derivada covariante,

$$[D_\mu, [D_\nu, D_\lambda]] + [D_\lambda, [D_\mu, D_\nu]] + [D_\nu, [D_\lambda, D_\mu]] = 0, \quad (297)$$

onde substituindo que a curvatura pode ser expressa como comutador de derivadas covariantes $\mathcal{F}_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$, isto resulta na identidade de Bianchi covariante

$$D_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda} + D_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} + D_\nu \mathcal{F}_{\lambda\mu} = 0, \quad (298)$$

a qual pode ser escrita mais sucintamente e de maneira mais similar à equação de Procca

$$D_\mu (\star \mathcal{F})^{\mu\nu} = 0, \quad (299)$$

sendo esta a equação contemplando as equações de Maxwell sem cargas/correntes (lei de Gauss-Faraday).

Na maioria dos casos, trabalhamos com ações S_M ditas *minimamente acopladas* ao campo de calibre, significando que os termos de acoplamento entre a matéria e o campo de força são lineares em \mathcal{A}_μ , sem termos quadráticos e nem derivadas deste. Nestes casos, as derivadas parciais ∂_μ nas equações de Euler-Lagrange podem ser substituídas por derivadas covariantes D_μ (mas utilizar ambos resulta nas mesmas equações): por construção, a derivada covariante segue a lei de Leibniz, ou seja,

$$D_\mu [\psi \phi] = D_\mu \psi \phi + \psi D_\mu \phi, \quad (300)$$

portanto termos com derivada covariante podem ser integrados por partes, então ao extremizar uma ação $S = S[\phi, D_\mu \phi] = S_M[\phi, \partial_\mu \phi] + S_{int}[\phi, \mathcal{A}_\mu \phi]$ temos

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int d^4x \mathcal{L} = \\ &= \int d^4x \delta \mathcal{L} = \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\mu \phi)} \delta (D_\mu \phi) \right) = \\ &= \int d^4x \left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - D^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\mu \phi)} \right) \delta \phi + D_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\mu \phi)} \delta \phi \right] \right), \end{aligned} \quad (301)$$

onde agora as condições de contorno são com respeito à derivadas covariantes.

A ação de Yang-Mills resulta em uma expressão mais convencional: fixando um referencial de Lorentz $(t_\mu) = (1, 0, 0, 0)$, a 2-forma de curvatura pode ser decomposta em uma parte elétrica

$$E_a^I = F_{0a}^I \quad (302)$$

e uma componente magnética

$$B_a^I = \frac{1}{2} \varepsilon_a^{bc} F_{bc}^I, \quad (303)$$

de maneira que a Lagrangeana de Yang-Mills se reduz a

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4q^2} (E_a^I E_I^a - B_a^I B_I^a) = -\frac{1}{4q^2} \text{Tr}(\vec{\mathcal{E}}^2 - \vec{\mathcal{B}}^2). \quad (304)$$

Esta forma é conveniente pois nela fica manifesto o fato de que o momento canônico conjugado à parte espacial da conexão (o potencial vetor A_a^I) é precisamente o campo elétrico: a parte magnética possui apenas derivadas espaciais, e a derivada em relação à derivada temporal do potencial vetor retorna apenas o campo elétrico

$$\Pi_a^I = \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial (\partial_0 A_a^I)} = -\frac{1}{2q^2} E_a^I. \quad (305)$$

A densidade Hamiltoniana é então a (generalização da) familiar densidade de energia eletromagnética:

$$\mathcal{H}_{YM} = -\frac{1}{4q^2} \text{Tr}(\vec{\mathcal{E}}^2 + \vec{\mathcal{B}}^2). \quad (306)$$

Como as componentes do potencial de calibre A_μ^I são campos independentes, os parenteses de Poisson canônicos refletem isso pela aparição da métrica:

$$\{A_\mu^I(x), A_\nu^J(y)\} = 0 \quad (307a)$$

$$\{\Pi_\mu^I(x), \Pi_\nu^J(y)\} = 0 \quad (307b)$$

$$\{A_\mu^I(x), \Pi_\nu^J(y)\} = \eta_{\mu\nu} G^{IJ} \delta^3(x, y). \quad (307c)$$

B.3.1 Ação BF

Existe uma extensão do modelo discutido acima, que é o *modelo BF* (um caso particular das mais gerais *teorias de campos topológicas*), onde na ação de Yang-Mills há a substituição do dual da curvatura $\star\mathcal{F}$ por uma 2-forma com valores na álgebra $\mathcal{B} = B_{\mu\nu}^I T_I \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu$,

$$S_{BF} = \frac{1}{4q} \int \text{Tr}(\mathcal{B} \wedge \mathcal{F}). \quad (308)$$

Estas são chamadas de topológicas pois suas equações de Euler-Lagrange são

$$\delta\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F} = 0 \quad (309)$$

isto é, curvatura nula e

$$\delta\mathcal{F} \rightarrow D\mathcal{B} = 0, \quad (310)$$

de maneira que todos os graus de liberdade locais podem ser eliminados no modelo de "vácuo" (apenas a ação descrita acima, sem acoplamento com outros campos) por uma transformação de calibre, por isso o termo "topológico". Neste modelo, o momento canônico conjugado à conexão \mathcal{A} é a 2-forma \mathcal{B} ,

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}_{BF}}{\partial(\partial_0 \mathcal{A})} = \frac{1}{4q} \mathcal{B}. \quad (311)$$

Como tratado no texto principal deste trabalho, a RG descrita em termos de vierbein e conexão spin em formulação de primeira ordem é um exemplo de modelo BF, com \mathcal{B} dado pelo produto exterior de duas tetradas $\mathcal{B} = e \wedge e$, $e = e_\mu^I \gamma_I dx^\mu$.

B.3.2 Teorias de Calibre na Rede

A seguir, será feita de maneira resumida uma introdução à análise de Teorias de Yang-Mills discretizadas na rede, a qual servirá de base no texto principal para a discretização da RG em um 2-complexo.

Consideremos por conveniência uma teoria Yang-Mills do grupo $SU(2)$ em um espaço-tempo $(3+1)$ -dimensional. A variável de configuração da teoria contínua é uma conexão

$$\mathcal{A}(x) = A_\mu^i(x) \tau_i \otimes dx^\mu, \quad (312)$$

onde $\tau_i = \frac{i}{2} \sigma_i \in \mathfrak{su}(2)$ são os geradores do grupo.

A maneira como definimos a variável de configuração discretizada é relacionando a conexão $\mathcal{A}(x)$ com uma família de elementos do grupo: fixemos um látice cúbico de N vértices, conectados por E linhas imerso no espaço-tempo. Então, associamos a uma linha orientada \mathbf{e} do látice um elemento do grupo $\mathcal{U}_{\mathbf{e}}$ (e seu inverso $\mathcal{U}_{\mathbf{e}}^{-1}$ à mesma linha com a orientação oposta), definido formalmente como

$$\mathcal{U}_{\mathbf{e}} := \mathcal{P} e^{\int_{\mathbf{e}} \mathcal{A}}, \quad (313)$$

onde \mathcal{P} denota a "exponencial ordenada por caminho"¹. Na literatura de gravitação quântica esta exponencial ordenada por caminho é denominada *holonomia*. O conjunto de elementos do grupo $\{\mathcal{U}_{\mathbf{e}}\}$ para todas as linhas \mathbf{e} do látice nos dá, então, uma discretização natural da variável contínua $\mathcal{A}(x)$. A ideia de Wilson é que a teoria quântica é melhor definida em termos destas variáveis de grupo $\mathcal{U}_{\mathbf{e}}$ do que através da variável contínua de álgebra $\mathcal{A}(x)$. Grandezas físicas devem então ser estudadas no limite $N \rightarrow \infty$ e $a \rightarrow 0$.

A holonomia definida acima é invariante a transformações de calibre locais $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} + \mathcal{D}\lambda$, exceto pelas realizadas nos vértices da fronteira de \mathbf{e} . Portanto, ao truncar a teoria desta maneira, a simetria de calibre local $SU(2)$ é reduzida a uma simetria ante rotações $SU(2)$ nos vértices do látice. Mais especificamente, o grupo de calibre da teoria de látice é $SU(2)^V$, com V sendo o número de vértices, e os elementos de grupo se transformam de acordo com

$$\mathcal{U}_{\mathbf{e}} \rightarrow \mathcal{U}'_{\mathbf{e}} = \lambda_{s_{\mathbf{e}}} \mathcal{U}_{\mathbf{e}} \lambda_{t_{\mathbf{e}}}^{-1}, \quad \lambda_v \in SU(2), \quad (314)$$

onde $s_{\mathbf{e}}$ e $t_{\mathbf{e}}$ denotam, respectivamente, os vértices inicial e final da linha ("source" e "target" em inglês). O produto dos elementos de grupo ao redor de uma "plaqueta" (uma célula do látice)

$$\mathcal{U}_{\mathbf{f}} = \mathcal{U}_{\mathbf{e}_1} \mathcal{U}_{\mathbf{e}_2} \mathcal{U}_{\mathbf{e}_3} \mathcal{U}_{\mathbf{e}_4} \quad (315)$$

nos dá a versão discreta da curvatura, e seu traço é um invariante de calibre. Wilson mostrou que a ação discreta

$$S = \beta \sum_{\mathbf{f}} (\text{Tr}(\mathcal{U}_{\mathbf{f}}) + \text{Tr}(\mathcal{U}_{\mathbf{f}}^{\dagger})) \quad (316)$$

é uma boa aproximação para a ação de Yang-Mills

$$S = \frac{1}{4g^2} \int \text{Tr}(\star \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \quad (317)$$

no limite em que o parâmetro de rede tende a zero $a \rightarrow 0$ e a constante de acoplamento (que depende de a) também $\beta \rightarrow 0$.

Consideremos agora a fronteira do látice, em que chamaremos uma linha nesta fronteira de "elo" e denotaremos por l . Se fixarmos dois elos distintos e integrarmos a exponencial da ação sobre os elementos de grupo do interior do látice de um elo a outro

$$W(\mathcal{U}_l; \mathcal{U}_{l'}) = \int_{\mathcal{U}_l}^{\mathcal{U}_{l'}} d\mathcal{U}_{\mathbf{e}} e^{\frac{i}{\hbar} S[\mathcal{U}]} \quad (318)$$

teremos então a amplitude de transição do elo l ao elo l' da teoria truncada. Esta integral define completamente a teoria quântica, e sua versão em tempo imaginário pode ser computada numericamente pois o integrando se torna positivo-definido. Para se obter as amplitudes de transição da teoria contínua, deve-se estudar o limite $\beta \rightarrow 0$ $N \rightarrow \infty$ da amplitude acima.

B.3.2.1 Teoria Hamiltoniana na Rede

Nos é de particular interesse a formulação Hamiltoniana do modelo descrito acima, explorada por Kogut e Susskind (KOGUT; SUSSKIND, 1975). A formulação Hamiltoniana reside numa fronteira

¹ Resumidamente, devido ao grupo ser não-abeliano, precisa-se definir uma ordenação para os termos de ordem quadrática e superiores, a qual é tomada por convenção como: seja $\lambda \in [0, 1]$ a variável que parametriza a linha \mathbf{e} , então no termo de ordem n da expansão teremos n integrais, e convencionando-se que, de acordo com a orientação da linha, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$, a ordem do produto será escolhida de maneira que os termos que estiverem "avançados" no caminho venham à esquerda, $\mathcal{A}(\lambda_1)\mathcal{A}(\lambda_2)\dots\mathcal{A}(\lambda_n)$,

$$\mathcal{P}e^{\int_{\mathbf{e}} \mathcal{A}} = \mathbb{1} + \int_0^1 d\lambda \mathcal{A}_{\mu}(\lambda) \dot{x}^{\mu} + \int_0^1 d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 \mathcal{A}_{\mu_1}(\lambda_1) \mathcal{A}_{\mu_2}(\lambda_2) \dot{x}^{\mu_1} \dot{x}^{\mu_2} + \dots,$$

onde $\dot{x}^{\mu} = dx^{\mu}/d\lambda$.

do látice, a qual assumimos ser tipo-espaço. As variáveis de configuração são os elementos de grupo \mathcal{U}_l nos elos da fronteira. Além de chamarmos as linhas da fronteira de elos denotados por l , também chamaremos os vértices na fronteira de "nódulos" e os denotaremos por n . Estes elementos correspondem às componentes espaciais da conexão na fronteira, ou seja (no calibre temporal) o campo magnético. Na formulação Lagrangeana, a parte elétrica é codificada pelos elementos de grupo associados a linhas normais à fronteira, enquanto na Hamiltoniana quem codifica o campo elétrico é o momento conjugado aos elementos de grupo dos elos.

Temos então que a o espaço de configuração da teoria discretizada reduz do fibrado principal $SU(2) \rightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ com grupo de estrutura local $SU(2)$ para L cópias do grupo de simetria $SU(2)^L$, onde L é o número de elos na fronteira, e as transformações de calibre reduzidas são dadas por transformações de calibre nos nódulos. Logo, o espaço de fase do modelo será o fibrado cotangente $T^*SU(2)^L$. Há um momento canônico L_l^i na álgebra $\mathfrak{su}(2)$ correspondente a cada elo, que é identificado com o campo elétrico. Os parenteses de Poisson destas variáveis são portanto

$$\{\mathcal{U}_l, \mathcal{U}_{l'}\} = 0 \quad (319)a$$

$$\{\mathcal{U}_l, L_{l'}^i\} = \delta_{ll'} \mathcal{U}_l \tau^i \quad (319)b$$

$$\{L_l^i, L_{l'}^j\} = \delta_{ll'} \varepsilon^{ij}_k L_l^k, \quad (319)c$$

sem soma em l . O espaço de Hilbert da teoria discreta é portanto formado por funções quadrado-integráveis de $SU(2)^L$,

$$\begin{aligned} L_2[SU(2)^L] \ni \psi : SU(2)^L &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{U}_l &\longmapsto \psi(\mathcal{U}_l) \end{aligned} \quad (320)$$

com o produto interno induzido naturalmente pela medida de Haar em $SU(2)$,

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{SU(2)^L} d^L \mathcal{U} \phi^*(\mathcal{U}_l) \psi(\mathcal{U}_l). \quad (321)$$

A transformação de calibre restrita à fronteira atua nos nódulos e transforma os estados em

$$\psi(\mathcal{U}_l) \rightarrow \psi(\lambda_{s_l} \mathcal{U}_l \lambda_{t_l}^{-1}). \quad (322)$$

Os estados invariantes a essa transformação formam o espaço de Hilbert dos estados invariantes de calibre e possui a estrutura $\mathcal{H} \sim L_2[SU(2)^L/SU(2)^N]$, onde L é o número de elos e N é o número de nódulos da fronteira. Nesta base, o operador correspondente a \mathcal{U}_l é diagonal e multiplicativo, enquanto o operador correspondente a \vec{L}_l é proporcional à derivada funcional em relação à variável de grupo \mathcal{U}_l , ou seja, o campo vetorial invariante à esquerda. Na teoria clássica a variável conjugada ao potencial vetor é o campo elétrico, logo podemos identificar o campo vetorial invariante à esquerda com o campo elétrico. Estes operadores satisfazem as relações (319)a-(319)c. Todas estas variáveis aparecerão novamente no texto principal.

APÊNDICE C – Teoria de Representação do Grupo de Lorentz $SL(2, \mathbb{C})$

Aqui será feita uma breve revisão da teoria de representações de $SL(2, \mathbb{C})$, em particular suas representações *unitárias*. É importantíssimo frizar que nenhuma das representações "usuais" de dimensão *finita* do grupo de Lorentz são unitárias (elas possuem um subgrupo unitário $SU(2)$, mas não o são em sua totalidade), as representações unitárias de $SL(2, \mathbb{C})$ são todas de dimensão infinita. De particular interesse para nós são as representações unitárias irredutíveis na série principal de $SL(2, \mathbb{C})$.

O grupo de Lorentz é caracterizado pela sua álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

$$[J^{IJ}, J^{KL}] = -\eta^{IK} J^{JL} + \eta^{IL} J^{JK} + \eta^{JK} J^{IL} - \eta^{JL} J^{IK}, \quad (323)$$

em que escolhendo-se um vetor tipo-tempo para fixar um referencial de Lorentz $t_I = (1, 0, 0, 0)$, podemos separar $SU(2)$ como o subgrupo que preserva t_I e usar este vetor para separar os geradores J^{IJ} em geradores de rotações espaciais e temporais (empurrões):

$$L^I = \frac{1}{2} \epsilon^I_{JKL} J^{JK} t^L = (0, \vec{L}) \quad (324a)$$

$$K^I = J^{IJ} t_J = (0, \vec{K}) \quad (324b)$$

satisfazendo as relações

$$[L^i, L^j] = \epsilon^{ij}_k L^k \quad (325a)$$

$$[L^i, K^j] = \epsilon^{ij}_k K^k \quad (325b)$$

$$[K^i, K^j] = \epsilon^{ij}_k L^k. \quad (325c)$$

O grupo $SL(2, \mathbb{C})$ é de rank 2, possuindo dois operadores de Casimir independentes. Podemos tomar estes como sendo

$$C_1 = \frac{1}{2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2} J^{IJ} J_{IJ} = \vec{K}^2 - \vec{L}^2 \quad (326a)$$

$$C_2 = \frac{1}{8} \mathbf{J} \cdot * \mathbf{J} = \frac{1}{8} \epsilon_{IJKL} J^{IJ} J^{KL} = \vec{K} \cdot \vec{L}, \quad (326b)$$

portanto estas representações unitárias são rotuladas por dois números quânticos: $p \in \mathbb{R}$, associado aos empurrões por estes formarem um espaço não-compacto e $k \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, associado a rotações por formarem um espaço compacto. O espaço de Hilbert da representação é $V^{(p,k)}$ e possui dimensão infinita, $\dim(V^{(p,k)}) = \infty$. É neste espaço que atuam os geradores Hermitianos $J^{IJ} = -J^{JI}$, com os operadores de Casimir C_1 e C_2 relacionados aos números quânticos p e k através das identidades

$$(\vec{K}^2 - \vec{L}^2)|\psi\rangle = (p^2 - k^2 + 1)|\psi\rangle \quad (327a)$$

$$\vec{K} \cdot \vec{L}|\psi\rangle = pk|\psi\rangle. \quad (327b)$$

$V^{(p,k)}$ é uma combinação de representações *redutíveis* de $SU(2)$ da forma

$$V^{(p,k)} = \bigoplus_{j=k}^{\infty} \mathcal{H}_j, \quad (328)$$

onde \mathcal{H}_j é o espaço de Hilbert $(2j+1)$ -dimensional da representação spin- j de $SU(2)$. Os geradores de rotações espaciais \vec{L} preservam esta decomposição, enquanto os geradores de empurrões \vec{K} "saem" dela ao mapear \mathcal{H}_j para $\mathcal{H}_{j-1} \oplus \mathcal{H}_j \oplus \mathcal{H}_{j+1}$.

Podemos definir uma base ortonormal $|p, k; j, m\rangle$ de $V^{(p,k)}$ (chamada de base canônica) ao diagonalizar simultaneamente os operadores C_1, C_2, \vec{L}^2 e L_z . Os geradores nessa base são os conhecidos L_+, L_- e L_z , junto dos seus equivalentes para empurrões K_+, K_- e K_z :

$$L_z|j, m\rangle = m|j, m\rangle \quad (329a)$$

$$L_+|j, m\rangle = \sqrt{(j+m+1)(j-m)}|j, m+1\rangle \quad (329)\text{b}$$

$$L_-|j, m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-(m-1))}|j, m-1\rangle \quad (329)\text{c}$$

$$K_z|j, m\rangle = -\alpha_{(j)}\sqrt{j^2-m^2}|j-1, m\rangle - \beta_{(j)}m|j, m\rangle + \alpha_{9j+1}\sqrt{(j+1)^2-m^2}|j+1, m\rangle \quad (329)\text{d}$$

$$\begin{aligned} K_+|j, m\rangle = & -\alpha_{(j)}\sqrt{(j-m)(j-(m+1))}|j-1, m+1\rangle - \beta_{(j)}\sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j, m+1\rangle - \\ & - \alpha_{(j+1)}\sqrt{(j+m+1)((j+1)+(m+1))}|j+1, m+1\rangle \end{aligned} \quad (329)\text{e}$$

$$\begin{aligned} K_-|j, m\rangle = & \alpha_{(j)}\sqrt{(j+m)(j+m-1)}|j-1, m-1\rangle - \beta_{(j)}\sqrt{(j+m)(j-(m-1))}|j, m-1\rangle + \\ & + \alpha_{(j+1)}\sqrt{(j-(m-1))((j+1)-(m-1))}|j+1, m-1\rangle, \end{aligned} \quad (329)\text{f}$$

onde $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ ($K_{\pm} = K_x \pm iK_y$) e os coeficientes $\alpha_{(j)}$ e $\beta_{(j)}$ são dados por

$$\alpha_{(j)} = \frac{i}{j} \sqrt{\frac{(j^2-k^2)(j^2+p^2)}{4j^2-1}} \quad (330)\text{a}$$

$$\beta_{(j)} = \frac{kp}{j(j+1)}. \quad (330)\text{b}$$

APÊNDICE D – Cálculo explícito do espectro de Área em termos das Variáveis de Ashtekar

Se tentássemos quantizar a teoria contínua, teríamos como operador da variável de configuração a conexão de Ashtekar

$$\hat{A}_a^i(x)|\psi\rangle = A_a^i(x)|\psi\rangle \quad (331)$$

e seu conjugado canônico sendo o campo elétrico de Ashtekar

$$\hat{E}_i^a(x)|\psi\rangle = i\hbar\kappa\gamma\frac{\delta}{\delta A_a^i(x)}|\psi\rangle \quad (332)$$

visto que estes devem satisfazer as relações de comutação

$$[\hat{A}_a^i(x), \hat{E}_j^b(y)] = i\hbar\kappa\gamma\delta_j^i\delta_a^b\delta^3(x, y). \quad (333)$$

Os estados $|\psi\rangle$ são funcionais da variável de configuração, $|\psi[A]\rangle$. Pelo Teorema de Giles, o qual constata que ao considerar o traço da holonomia para todos os laços possíveis de uma variedade teremos então toda a informação invariante de calibre da conexão, tais funcionais podem ser expandidos em termos dos laços de Wilson¹,

$$|\psi[A]\rangle = \sum C_{j,c} h_c^{(j)}[A] \quad (334)$$

$$h_c^{(j)}[A] = \text{Tr}(\mathcal{P}e^{\int_c A^{(j)}}). \quad (335)$$

Com isso, o operador de área seria dado ao substituir (332) na fórmula da área em termos do campo elétrico de Ashtekar (89):

$$\hat{A}_\ell = i\hbar\kappa\gamma \int_{S=\ell^*} \sqrt{dS_a dS_b \frac{\delta}{\delta A_a^i} \frac{\delta}{\delta A_{ib}^i}}, \quad (336)$$

o qual vemos ser extremamente não-trivial por envolver a raiz quadrada de um operador, por esta razão iremos considerar a ação do quadrado deste operador

$$\hat{A}_\ell^2 = -\hbar^2\kappa^2\gamma^2 \int_{S=\ell^*} dS_a dS_b \frac{\delta}{\delta A_a^i} \frac{\delta}{\delta A_{ib}^i} \quad (337)$$

e extrair seus autovalores através do Teorema Espectral. Na base dos laços de Wilson (334), as derivadas funcionais em (336) apenas contribuem quando a curva c associada a uma representação de spin j intersecta a superfície $S = \ell^*$, portanto temos (seja $x' = c \cap S$ e c_1 a fração da curva que vai de 0 até x' e c_2 a curva que vai de x' de volta ao ponto 0)

$$\begin{aligned} \hat{A}_\ell^2 h_c^{(j)}[A] &= -\hbar^2\kappa^2\gamma^2 \int_S dS_a(x) dS_b(y) \frac{\delta}{\delta A_a^i(x)} \frac{\delta}{\delta A_{ib}^i(y)} \text{Tr}(\mathcal{P}e^{\int_c A^{(j)}}) = \\ &= -\hbar^2\kappa^2\gamma^2 \int_S dS_a(x) dS_b(y) \frac{\delta}{\delta A_a^i(x)} \text{Tr} \left(\mathcal{P}e^{\int_{c_1} A^{(j)}} \frac{\delta}{\delta A_{ib}^i(y)} \int_c A_c^k \tau_k^{(j)} dy^c \mathcal{P}e^{\int_{c_2} A^{(j)}} \right) = \\ &= -\hbar^2\kappa^2\gamma^2 \int_S dS_a(x) dS_b(y) \frac{\delta}{\delta A_a^i(x)} \text{Tr} \left(\mathcal{P}e^{\int_{c_1} A^{(j)}} \int_c \delta^{ik} \delta_c^b \delta^3(x', y) \tau_k^{(j)} dy^c \mathcal{P}e^{\int_{c_2} A^{(j)}} \right) = \\ &= -\hbar^2\kappa^2\gamma^2 \int_S dS_a(x) dS_b(y) \text{Tr} \left(\mathcal{P}e^{\int_{c_1} A^{(j)}} \int_c \delta^3(x', x) \tau_i^{(j)} dx^a \int_c \delta^3(x', y) \tau^{(j)i} dy^b \mathcal{P}e^{\int_{c_2} A^{(j)}} \right) = \\ &= -\hbar^2\kappa^2\gamma^2 \int_{S \times c} d^3x d^3y \delta^3(x', x) \delta^3(x', y) \text{Tr}(\mathcal{P}e^{\int_{c_1} A^{(j)}} \tau_i^{(j)} \tau^{(j)i} \mathcal{P}e^{\int_{c_2} A^{(j)}}) = \\ &= \hbar^2\kappa^2\gamma^2 j(j+1) \text{Tr}(\mathcal{P}e^{\int_c A^{(j)}}). \end{aligned} \quad (338)$$

É possível mostrar que o operador \hat{A}_ℓ é diagonalizável e auto-adjunto, portanto pelo Teorema Espectral podemos tirar a raiz na eq (338) e obter

$$\hat{A}_\ell h_c^{(j)}[A] = \hbar\kappa\gamma\sqrt{j(j+1)} h_c^{(j)}[A] = 8\pi\gamma l_P^2 \sqrt{j(j+1)} h_c^{(j)}[A]. \quad (339)$$

¹ Esta expansão é chamada de "transformada de laços" e é a razão do nome "Gravitação Quântica de LAÇOS", pois historicamente a construção do modelo foi feita nesta base, e depois generalizada para holonomias em elos abertos como abordado no texto principal.

APÊNDICE E – Análise Harmônica no Grupo SU(2)

O Teorema de Peter-Weyl nos garante que os elementos das matrizes de Wigner $D_{mn}^{(j)}(\mathcal{U})$ formam uma base ortogonal no espaço de funções sobre o grupo SU(2)

$$\int_{\text{SU}(2)} d\mathcal{U} (D_{mn}^{(j)}(\mathcal{U}))^* D_{m'n'}^{(j')}(\mathcal{U}) = \frac{1}{d_j} \delta^{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \quad (340)$$

análogo às ondas planas $e^{in\theta}$ para o círculo U(1), nos dando o equivalente a uma série de Fourier para $L_2[\text{SU}(2)]$

$$L_2[\text{SU}(2)] \ni \psi(\mathcal{U}) = \sum_{j,m,n} C_{jmn} D_{mn}^{(j)}(\mathcal{U}). \quad (341)$$

Para o caso abordado no texto principal, temos L cópias do grupo, logo

$$L_2[\text{SU}(2)^L] \ni \psi(\mathcal{U}_\ell) = \sum_{j_\ell, m_\ell, n_\ell} C_{j_1 \dots j_L m_1 \dots m_L n_1 \dots n_L} D_{m_1 n_1}^{(j_1)}(\mathcal{U}_1) \dots D_{m_L n_L}^{(j_L)}(\mathcal{U}_L). \quad (342)$$

E.1 SÍMBOLOS $3j$ DE WIGNER

Há um objeto importante invariante de três índices em três representações de SU(2): os chamados **símbolos $3j$ de Wigner** denotados como

$$\iota^{m_1 m_2 m_3} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \quad (343)$$

os quais são como uma forma simétrica dos coeficientes de Clebsh-Gordon. Mais explicitamente, estes se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \equiv \frac{(-1)^{j_1 - j_2 - m_3}}{\sqrt{2j_3 + 1}} \langle j_1, m_1 \otimes j_2, m_2 | j_3, -m_3 \rangle. \quad (344)$$

A diferença entre ambos é que os coeficientes de Clebsh-Gordon aparecem ao descrever um estado de momento angular como soma de outros dois

$$|j_3, m_3\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1 \otimes j_2, m_2 | j_3, m_3 \rangle |j_1, m_1 \otimes j_2, m_2\rangle, \quad (345)$$

enquanto os símbolos $3j$ de Wigner servem para combinar três estados de momento angular em um estado de $j = m = 0$

$$\sum_{m_1, m_2, m_3} \iota^{m_1 m_2 m_3} |j_1, m_1 \otimes j_2, m_2 \otimes j_3, m_3\rangle = |0, 0\rangle. \quad (346)$$

Dito de outro modo, qualquer estado SU(2)-invariante no produto das três representações será proporcional ao estado normalizado

$$|i\rangle = \sum_{m_1, m_2, m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |j_1, m_1 \otimes j_2, m_2 \otimes j_3, m_3\rangle. \quad (347)$$

Na literatura de gravitação quântica, os símbolos $3j$ de Wigner são comumente chamados de "entrelaçadores" trivalentes.

APÊNDICE F – Demonstrações das equações

F.1 CAP 3 SEC 3.1:

Eq (84): note que $q = \sqrt{\frac{1}{6}\varepsilon^{abc}\varepsilon_{ijk}E_a^iE_b^jE_c^k}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta q_{ab}(x)}{\delta E_e^k(z)} &= \frac{\delta}{\delta E_e^k(z)} [q^{-1}(x)E_a^i(x)E_b^j(x)\delta_{ij}] = \\
 &= -q^{-2}(x) \cdot \frac{1}{2q(x)} \cdot \frac{1}{2}\varepsilon^{eb'c'}\varepsilon_{kj'k'}E_{b'}^{j'}(x)E_{c'}^{k'}(x)\delta^3(x, z)E_a^i(x)E_b^j(x)\delta_{ij} + \\
 &+ q^{-1}(x)\delta_{(a}^eE_{b)}^j(x)\delta_{kj}\delta^3(x, z) = \\
 &= q^{-1}(x)\delta^3(x, z) \left(\delta_{(a}^eE_{|k|b)}(x) - \frac{1}{2}q^{-1}(x)E_k^e(x)E_a^i(x)E_b^j(x)\delta_{ij} \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{q}}\delta^3(x, z) \left(e_{k(a}\delta_{b)}^e - \frac{1}{2}e_k^e q_{ab} \right) \tag{348}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta \pi^{cd}(y)}{\delta k_k^e(z)} &= \frac{\delta}{\delta k_k^e(z)} \left[\frac{1}{2\kappa} \sqrt{q}(k_{k'}^c e^{k'd} - k_{k'}^{e'} e_{e'}^{k'} q^{cd}) \right] (y) = \\
 &= \frac{1}{2\kappa} \sqrt{q}(e^{kc}\delta_e^d - e_e^k q^{cd}) \tag{349}
 \end{aligned}$$

\Downarrow

$$\begin{aligned}
 \{q_{ab}[E](x), \pi^{cd}[E, k](y)\} &= \int d^3x' d^3y' \frac{\delta q_{ab}(x)}{\delta E_{a'}^{i'}(x')} \{E_{a'}^{i'}(x'), k_{j'}^{b'}(y')\} \frac{\delta \pi^{cd}(y)}{\delta k_{j'}^{b'}(y')} = \\
 &= \int d^3x' d^3y' \left(\frac{1}{\sqrt{q}}\delta^3(x, x') \left(e_{i'(a}\delta_{b)}^{a'} - \frac{1}{2}e_{i'}^{a'} q_{ab} \right) \right) (2\kappa\delta_{j'}^{i'}\delta_{a'}^{b'}\delta^3(x', y')) \times \\
 &\times \left(\frac{1}{2\kappa}\sqrt{q}\delta^3(y, y') (e^{j'c}\delta_{b'}^d - e_{b'}^{j'} q^{cd}) \right) = \\
 &= \delta^3(x, y) \left(\delta_{(a}^c\delta_{b)}^d - q_{ab}q^{cd} - \frac{1}{2}q_{ab}q^{cd} + \frac{3}{2}q_{ab}q^{cd} \right) = \\
 &= \delta_{(a}^c\delta_{b)}^d\delta^3(x, y). \tag{350}
 \end{aligned}$$

Soma de conexão com covetor resulta em conexão: seja $\mathcal{A}_\mu = A_\mu^I T_I$ uma conexão de um grupo G com geradores T_I

$$\mathcal{A}'_\mu = U\mathcal{A}_\mu U^{-1} - \frac{1}{g}\partial_\mu U U^{-1} \tag{351}$$

e $\mathcal{V}_\mu = V_\mu^I T_I$ um covetor com valores em \mathfrak{g} transformando na representação adjunta

$$\mathcal{V}'_\mu = U\mathcal{V}_\mu U^{-1}, \tag{352}$$

então a soma dos dois $\mathcal{C}_\mu = \mathcal{A}_\mu + \mathcal{V}_\mu$ se transforma como conexão também:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}'_\mu &= \mathcal{A}'_\mu + \mathcal{V}'_\mu = \\
 &= U\mathcal{A}_\mu U^{-1} - \frac{1}{g}\partial_\mu U U^{-1} + U\mathcal{V}_\mu U^{-1} = \\
 &= U(\mathcal{A}_\mu + \mathcal{V}_\mu)U^{-1} - \frac{1}{g}\partial_\mu U U^{-1} = U\mathcal{C}_\mu U^{-1} - \frac{1}{g}\partial_\mu U U^{-1}. \tag{353}
 \end{aligned}$$

Eq (85)b:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta \omega_a^i(x)}{\delta e_{a'}^{i'}(x')} &= \frac{\delta}{\delta e_{a'}^{i'}(x')} \left[\frac{1}{2}\varepsilon^i{}_{j'k'}e^{j'b'}\nabla_a e_{b'}^{k'} \right] = \\
 &= \varepsilon^i{}_{j'k'}\delta_{i'}^{j'}q^{a'b'}\nabla_a e_{b'}^{k'}\delta^3(x, x') = \\
 &= \varepsilon^i{}_{i'k'}\nabla_a e^{k'a'}\delta^3(x, x') \tag{354}
 \end{aligned}$$

$$E_i^a = \frac{1}{2} \varepsilon^{ab'c'} \varepsilon_{ij'k'} e_{b'}^{j'} e_{c'}^{k'} \quad (355)$$

↓

$$\delta E_i^e = \varepsilon^{ab'c'} \varepsilon_{ij'k'} e_{b'}^{j'} \delta e_{c'}^{k'} \quad (356)$$

↓

$$\delta e_c^k = \left(\delta_{k'}^k \delta_c^{c'} - \frac{1}{4} e_c^k e_{k'}^{c'} \right) e_{j'}^{b'} \varepsilon_{ab'c'} \varepsilon^{ij'k'} \delta E_i^a \quad (357)$$

↓

$$\frac{\delta e_{a'}^{i'}(x')}{\delta E_j^b(y)} = \left(\delta_{k'}^{i'} \delta_{a'}^{c'} - \frac{1}{4} e_{a'}^{i'} e_{k'}^{c'} \right) e_{j'}^{b'} \varepsilon_{bb'c'} \varepsilon^{jj'k'} \delta^3(x', y) = \left(\varepsilon_{bb'a'} \varepsilon^{jj'i'} e_{j'}^{b'} - \frac{\sqrt{q}}{2} e_{a'}^{i'} e_b^j \right) \delta^3(x', y) \quad (358)$$

⇓

$$\begin{aligned} \left\{ \omega_a^i(x), k_b^j(y) \right\} &= \int d^3x' \frac{\delta \omega_a^i(x)}{\delta e_{a'}^{i'}(x')} \left\{ e_{a'}^{i'}(x'), k_b^j(y) \right\} = \\ &= \int d^3x' d^3y' \frac{\delta \omega_a^i(x)}{\delta e_{a'}^{i'}(x')} \frac{\delta e_{a'}^{i'}(x')}{\delta E_{j'}^{b'}(y')} \left\{ E_{j'}^{b'}(y'), k_b^j(y) \right\} = \\ &= 2\kappa \int d^3x' \frac{\delta \omega_a^i(x)}{\delta e_{a'}^{i'}(x')} \frac{\delta e_{a'}^{i'}(x')}{\delta E_j^b(y)} = \\ &= 2\kappa \int d^3x' \left(\varepsilon^i_{i'k'} \nabla_a e^{k'a'} \delta^3(x, x') \right) \left(\left(\varepsilon_{bb'a'} \varepsilon^{jj'i'} e_{j'}^{b'} - \frac{\sqrt{q}}{2} e_{a'}^{i'} e_b^j \right) \delta^3(x', y) \right) = \\ &= 2\kappa \delta^3(x, y) \nabla_a e^{ia'} e^{jb'} \varepsilon_{ba'b'}. \end{aligned} \quad (359)$$