



FAKULTA MATEMATIKY,
FYZIKY A INFORMATIKY
Univerzita Komenského
v Bratislave



N-body simulácie (nie len) v galaktike

RNDr. Roman Nagy, PhD.

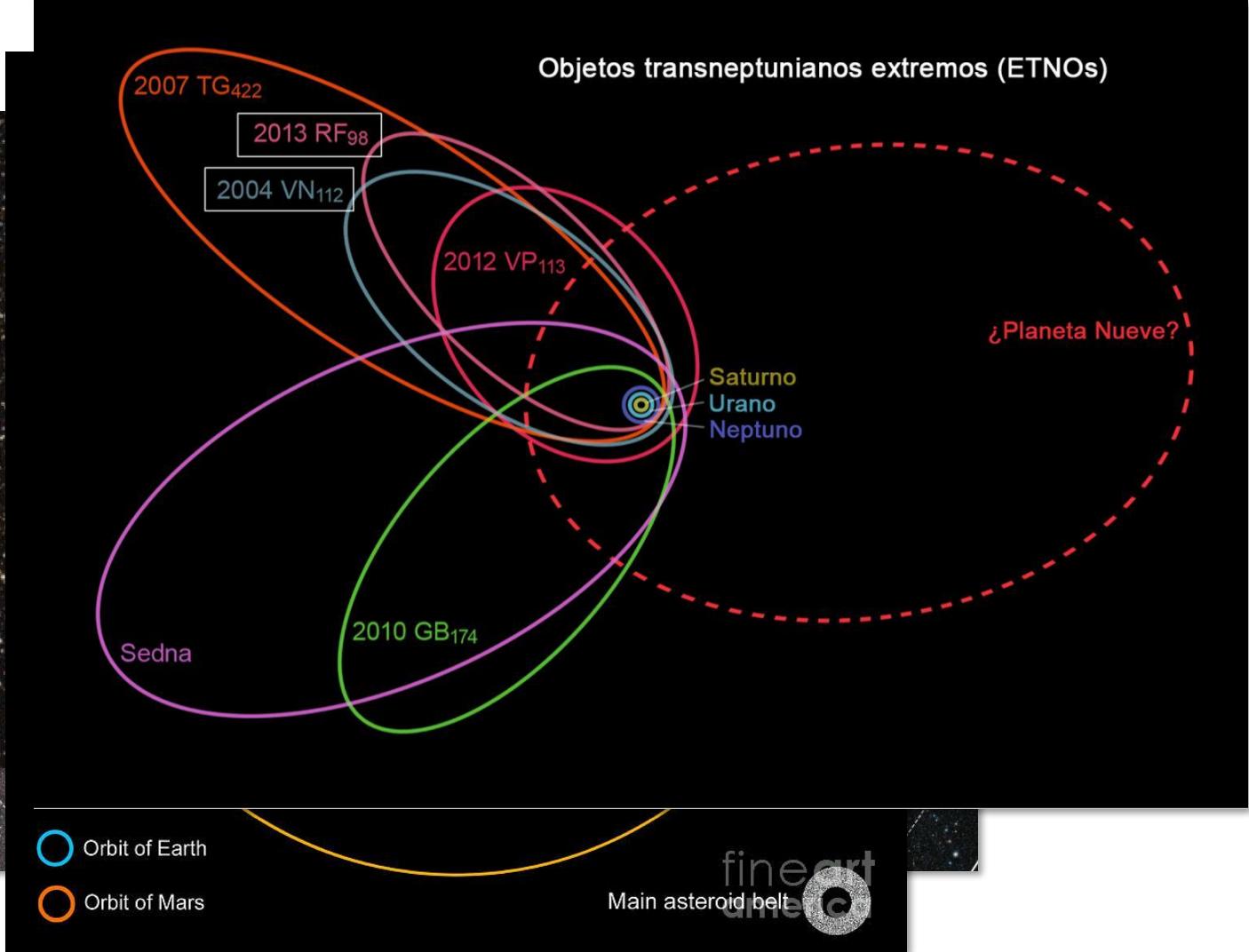
SPACE::LAB
summer school 2022
22.08.2022



Prehľad

- ▶ Problém 2 telies, problém 3 telies a N-body
- ▶ Kedy N-body (ne)použiť – galaktická aplikácia
- ▶ Slnečná sústava – negalaktická aplikácia
- ▶ Guľové hviezdokopy o ktorých sa vám ešte bude snívať

3





4

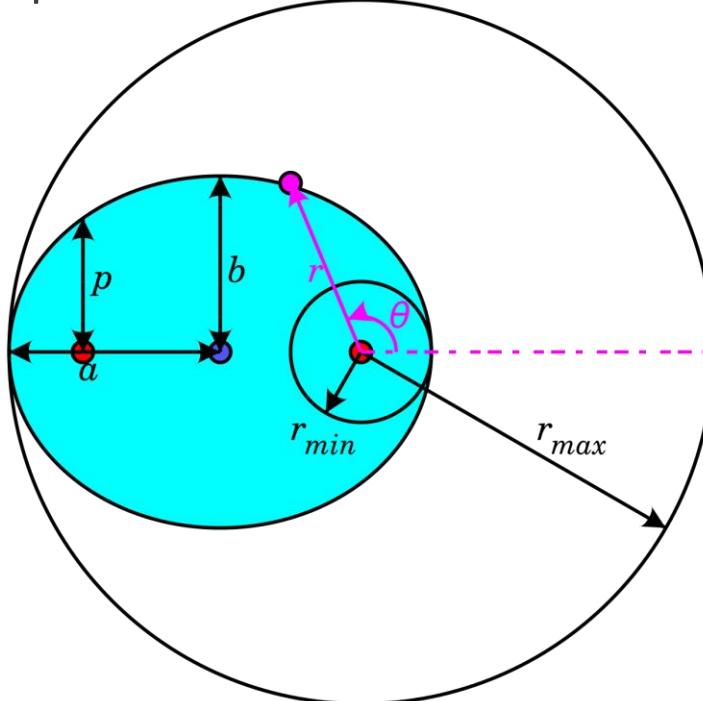
Problém dvoch telies

Trošku histórie

- ▶ Kopernikove heliocentrický model s kružnicovými trajektóriami planét (16. st.)
- ▶ Tycho Brahe (16.st.) a paralaxa
- ▶ Kepler a jeho zákony

Keplerove zákony – problém 2-telies

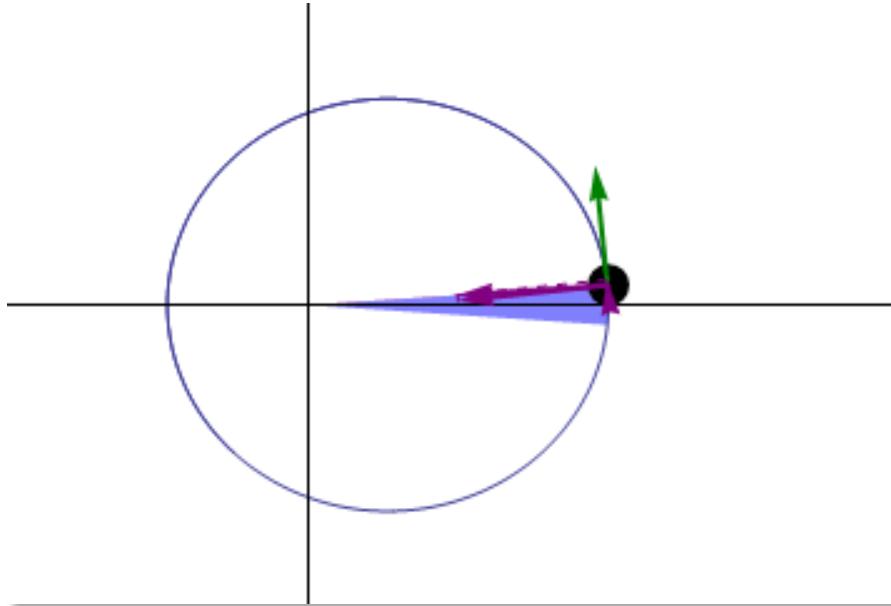
- ▶ Planéty obiehajú okolo Slnka po eliptických trajektóriách s malou výstrednosťou, v ktorých sa Slnko nachádza v jednom spoločnom ohnisku



$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

Keplerove zákony – problém 2-telies

- ▶ Sprievodič (spojnica Slnka a planéty) opíše za rovnaký čas vždy rovnakú plochu
- ▶ Ide o zákon zachovania momentu hybnosti



Keplerove zákony – problém 2-telies

- ▶ Pomer druhej mocniny obežnej doby planéty a tretej mocniny jej strednej vzdialenosťi od Slnka má pre všetky planéty rovnakú hodnotu

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa(m_1 + m_2)}$$



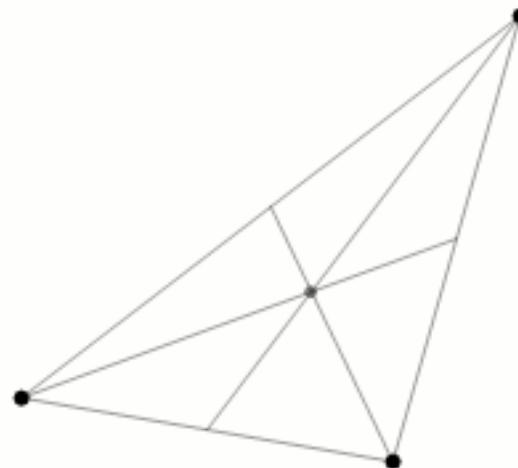
9

N-body pre $N > 2$

Problém troch telies

- ▶ Neexistuje analytické riešenie problému n-telies pre $n > 2$ (dôkaz - H. Poicaré a H. Bruns)
- ▶ Euler (1707-1783) – 10 integrálov (3 pre polohu ťažiska, 3 pre rýchlosť ťažiska, 3 pre ZZMH a 1 pre ZZE)
- ▶ Lagrange (1736-1813) – obmedzený (reštrigovaný) problém troch telies má analytické riešenie (ak je tretie teleso zanedbateľnej hmotnosti)

Lagrangeove b



N-body

- ▶ pohybové rovnice – diferenciálne rovnice 2. rádu

$$\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^2} \hat{\mathbf{r}}_{21}$$

$$m_i \mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{Gji} = \sum_{j=1}^N \frac{G m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

- ▶ N telies – 3N dif. rovníc – 6N integračných konštánt
- ▶ poznáme ale 10 integrálov (3 pre polohu ťažiska, 3 pre rýchlosť ťažiska, 3 pre ZZMH a 1 pre ZZE)

N-body - numerika

- ▶ Priama integrácia – budeme sa ňou zaoberať
- ▶ Integrácia porúch:
 - ▶ Máme približné riešenie popísateľné analyticky (keplerova dráha)
 - ▶ Integrujeme len malé poruchy k analytickému riešeniu

Simulácia disku našej Galaxie

Simulácia disku našej Galaxie

- ▶ Chceme zistiť radiálnu migráciu hviezd v disku MW
- ▶ Porovnať výsledky štandardnej teórie tmavej hmoty a alternatívneho popisu gravitácie bez nutnosti existencie tmavej hmoty
- ▶ 10^5 testovacích častíc náhodne distribuovaných v disku MW (2D)

Tmavá hmota vs. MOND

► Pohybová rovnica pre systém s tmavou hmotou

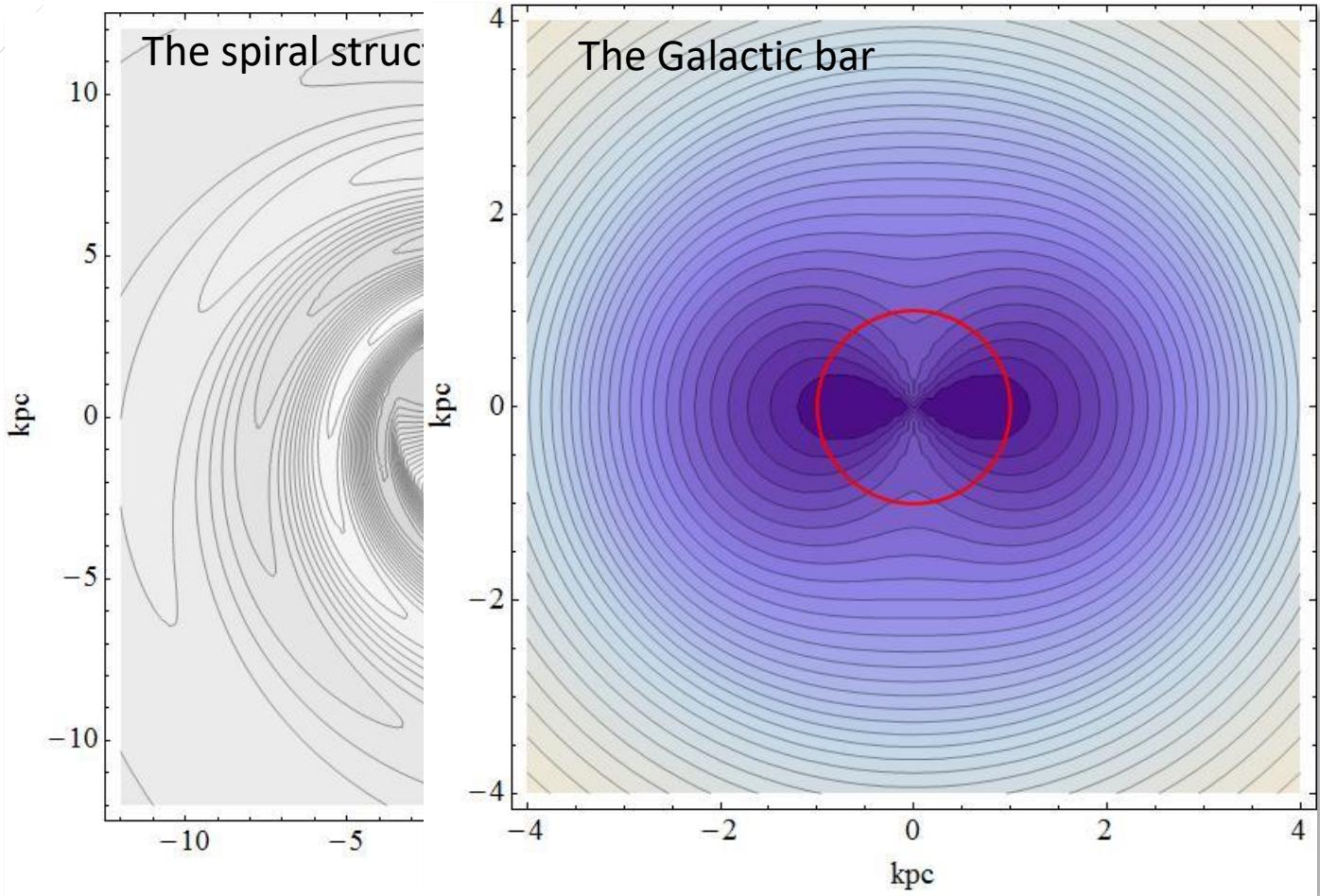
$$\dot{\mathbf{v}} = -\text{grad}(\Phi_d + \Phi_h + \Phi_{sp} + \Phi_b)$$

► MOND pohybová rovnica

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{g}_{bar}}{1 - \exp(-\sqrt{g_{bar}/g_+})},$$

$$\mathbf{g}_{bar} = -\text{grad}(\Phi_d + \Phi_{sp} + \Phi_b),$$

Galaxia - potenciál



Galaktická priečka

$$\Phi_b(\mathbf{r}) = \Phi_b^{(0)}(\mathbf{r}) + \Phi_b^{(1)}(\mathbf{r}) + \Phi_b^{(2)}(\mathbf{r}) + \Phi_b^{(3)}(\mathbf{r}),$$

$$\Phi_b^{(0)}(r, \varphi) = g^{(0)}(\varphi) \times \begin{cases} f_1^{(0)}(r), & r > r_b \\ f_2^{(0)}(r), & r \leq r_b \end{cases},$$

$$\Phi_b^{(1)}(r, \varphi) = 0,$$

$$\Phi_b^{(2)}(r, \varphi) = g^{(2)}(\varphi) \times \begin{cases} f_1^{(2)}(r), & r > r_b \\ f_2^{(2)}(r), & r \leq r_b \end{cases},$$

$$\Phi_b^{(3)}(r, \varphi) = 0,$$

$$g^{(0)}(\varphi) = 1,$$

$$g^{(2)}(\varphi) = \frac{1 + Q_{22}/Q_{11}}{1 - Q_{22}/Q_{11}} + \cos(\Omega_b t + \varphi_0 - 2\varphi)$$

$$f_1^{(0)}(r) = -\frac{GM_b}{r},$$

$$f_2^{(0)}(r) = -\frac{GM_b}{2r_b} [3 - (r/r_b)^2],$$

$$f_1^{(2)}(r) = -\frac{GQ_{11}(1 - Q_{22}/Q_{11})}{4r^3},$$

$$f_2^{(2)}(r) = -\frac{3GQ_{11}(1 - Q_{22}/Q_{11})}{16r_b^3} [7/3 - (r/r_b)^4].$$

Galaktický disk

► Maoz 2007

$$\rho_d = \rho_0 \exp\left(-\frac{r}{r_d}\right) \exp\left(-\frac{|z|}{h_d}\right)$$

► 2D

$$\Phi_d(r) = -\pi G \Sigma_0 r [I_0(y)K_1(y) - I_1(y)K_0(y)]$$

Špirálová štruktúra

► Antoja a kol. (2011)

$$\Phi_{sp}(r, \varphi) = -A_{sp} r e^{-r/r_d} \cos[2(\varphi - \Omega_s t) - g(r)]$$

► Definujeme tvar ramien

$$g(r) = \left(\frac{2}{N \tan(i)} \right) \ln \left[1 + \left(\frac{r}{r_{sp}} \right)^N \right]$$

Galaktické halo tmavej hmoty

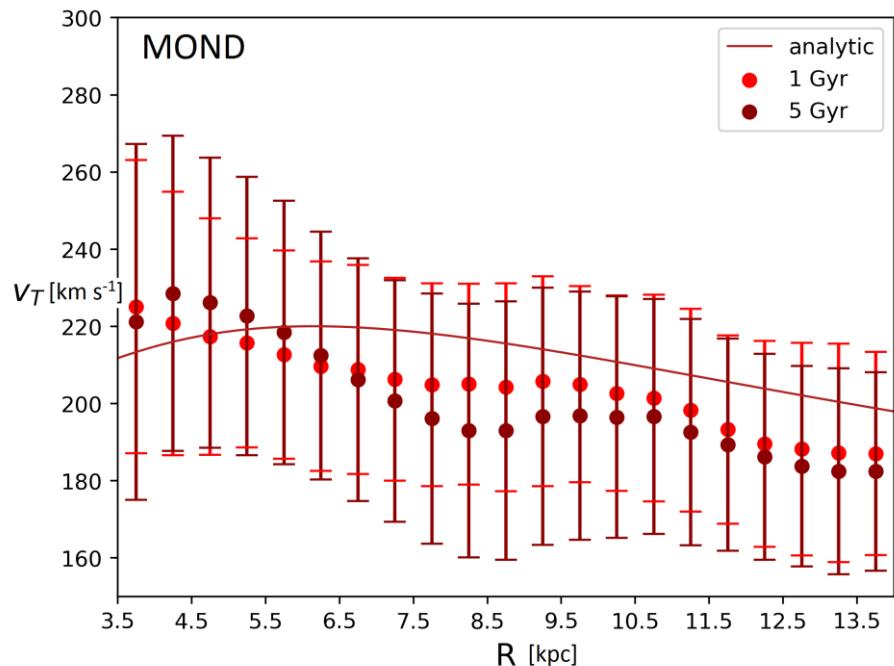
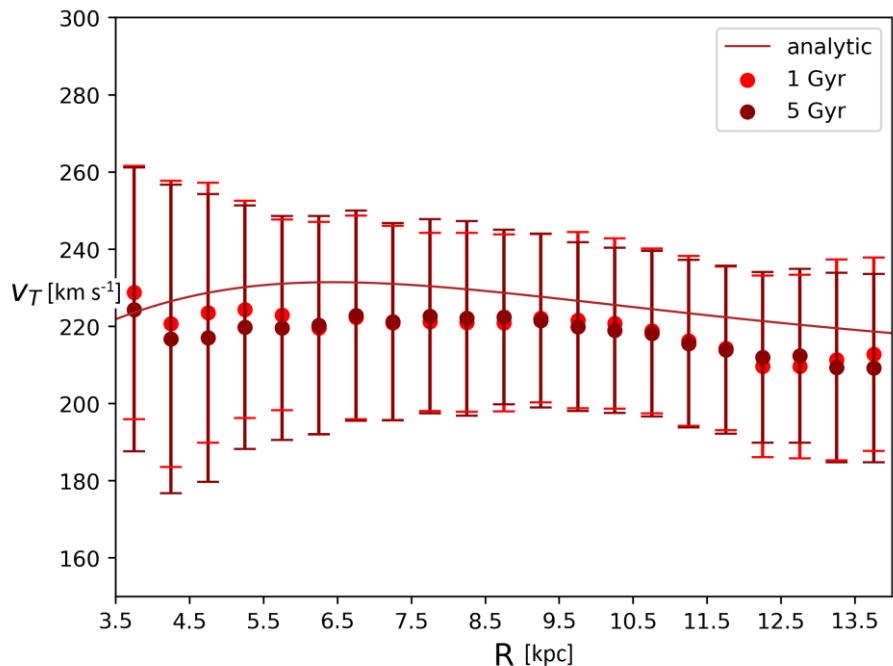
► NFW model – Navarro a kol (1996)

$$\rho(r) = \rho_0 \left[\frac{r}{r_0} + \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]^{-1}$$

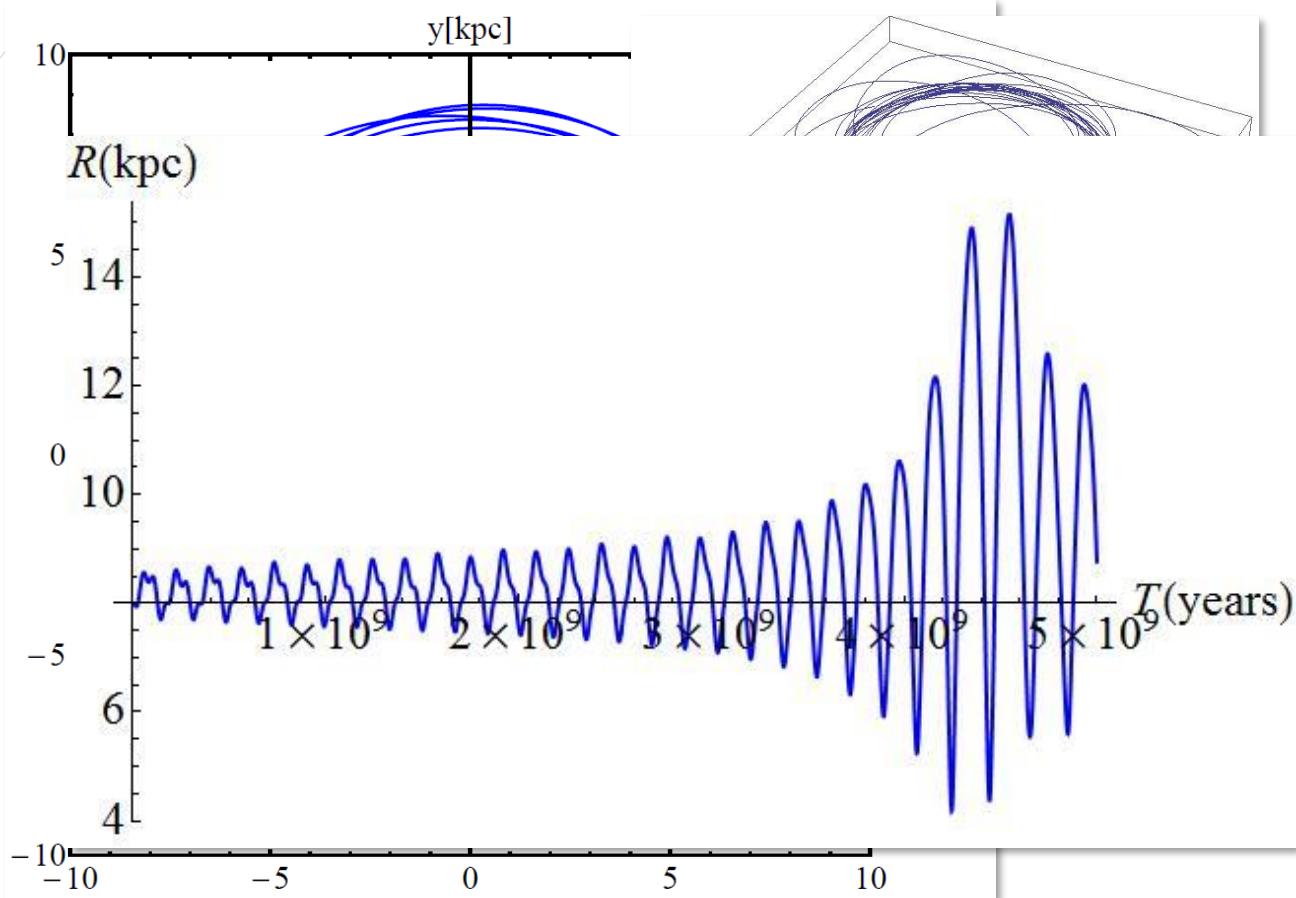
► Použitím Poissonovej rovnice $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho(\mathbf{r})$

$$\Phi_h(r) = -\frac{4\pi r_h^3 \rho_{0,h}}{r} \ln \left(1 + \frac{r}{r_h} \right)$$

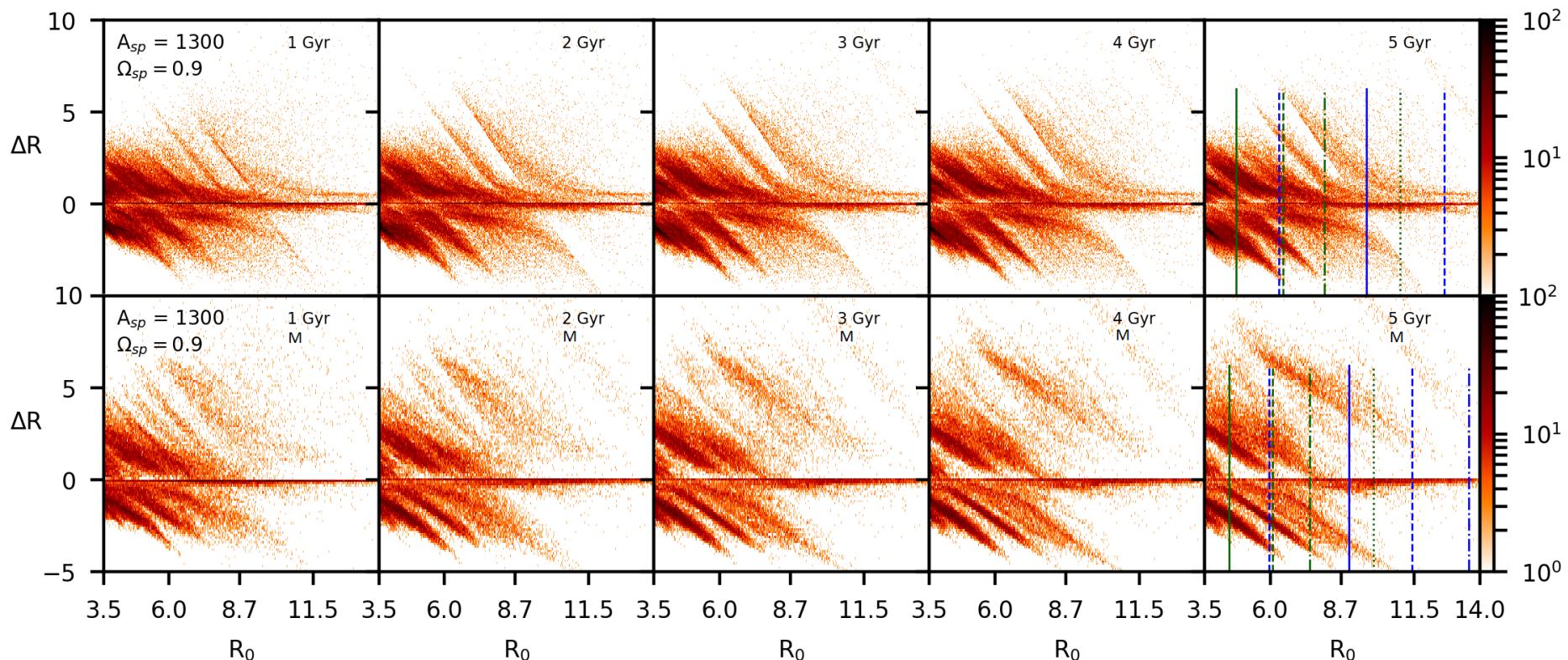
Rotačné krivky



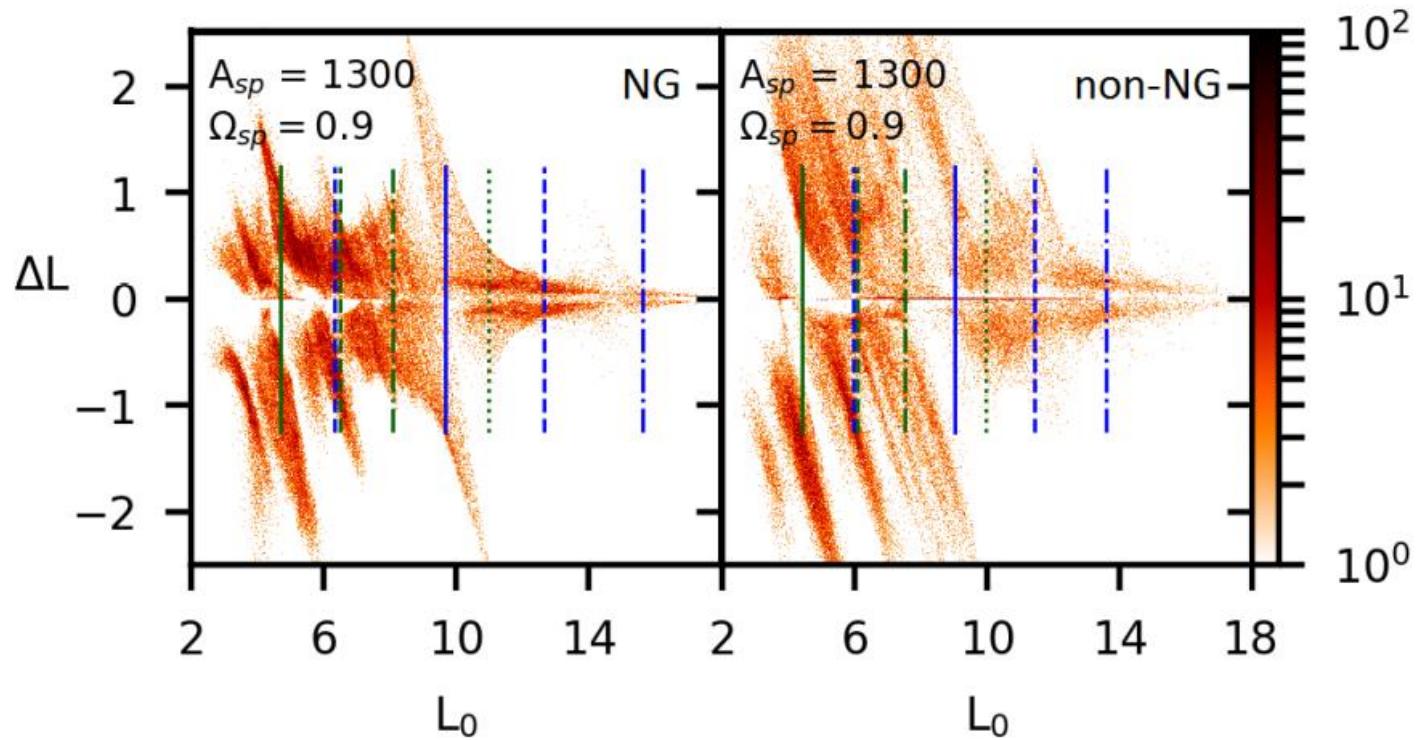
Vývoj individuálnej hviezdy



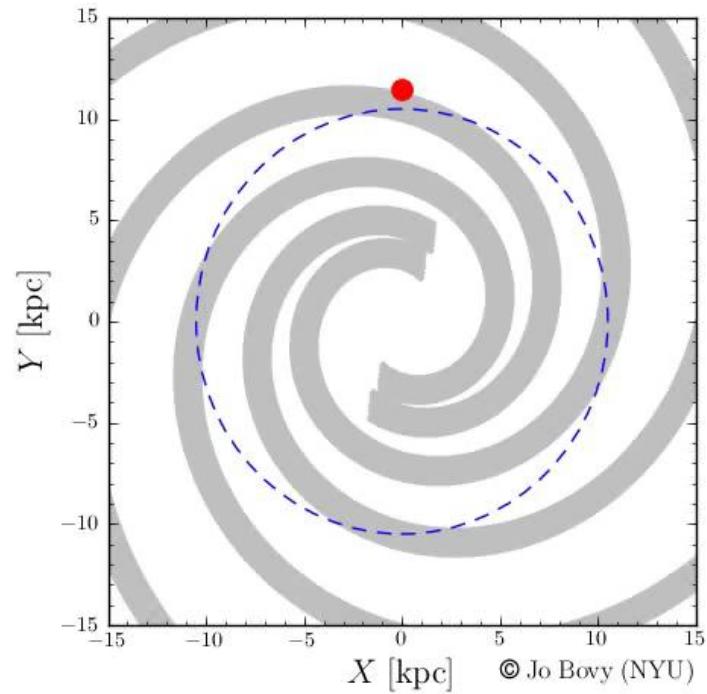
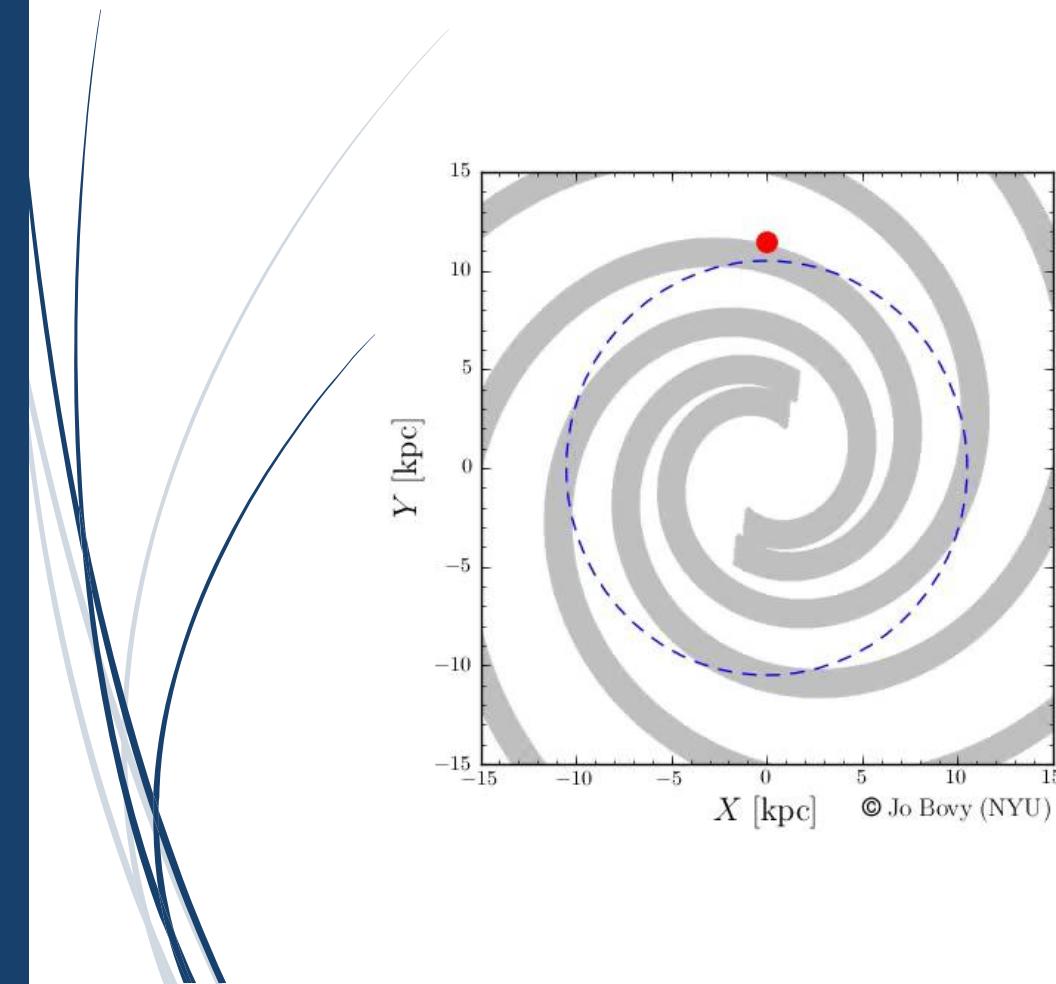
Časový vývoj



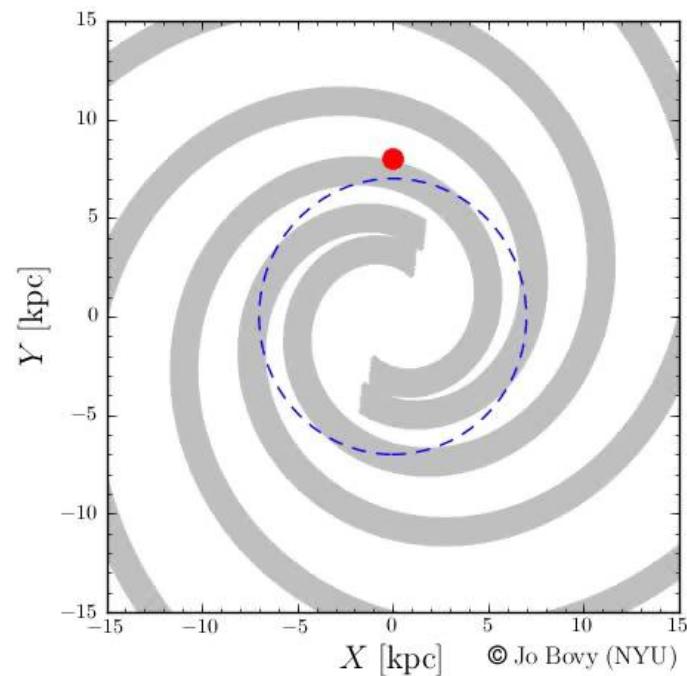
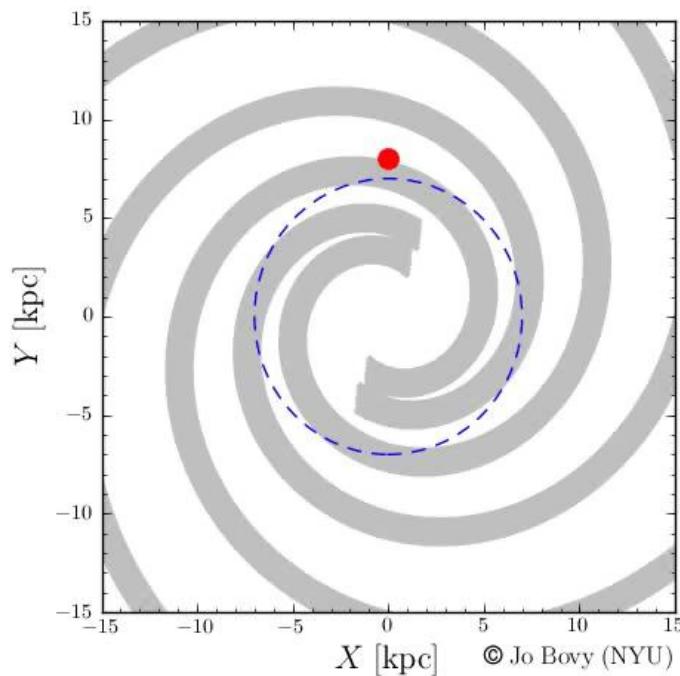
Rezonancie



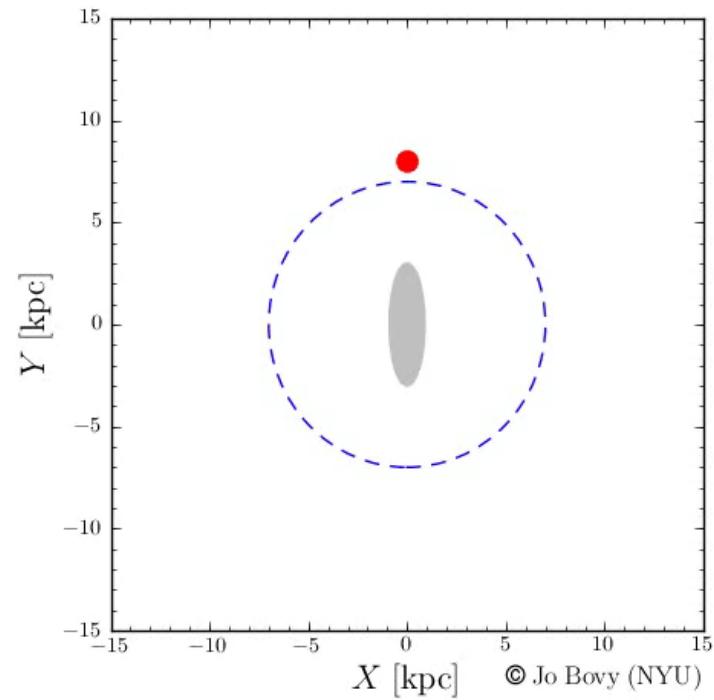
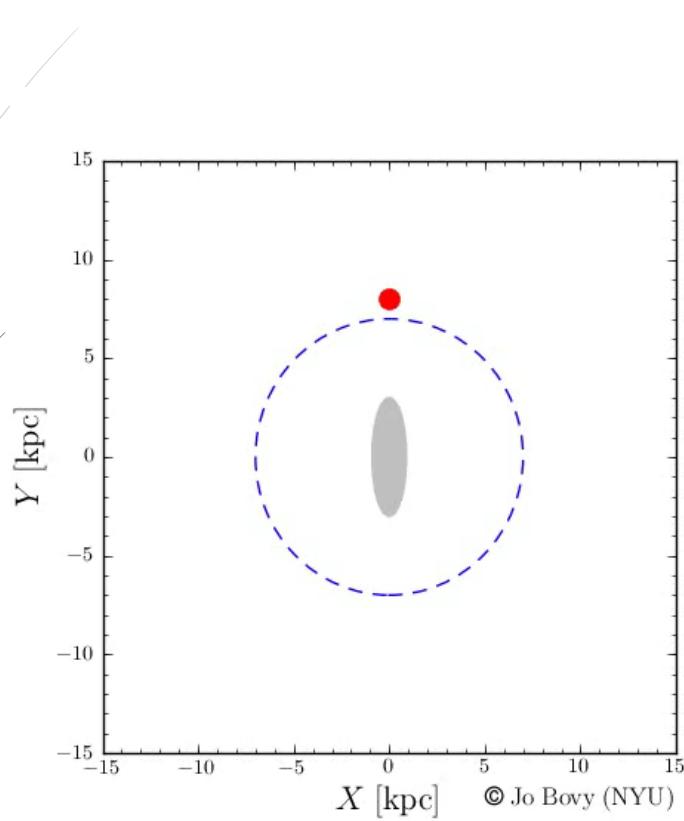
Korotačná rezonancia



Lindbladove vnútorné rezonancie



Lindbladove vonkajšie rezonancie



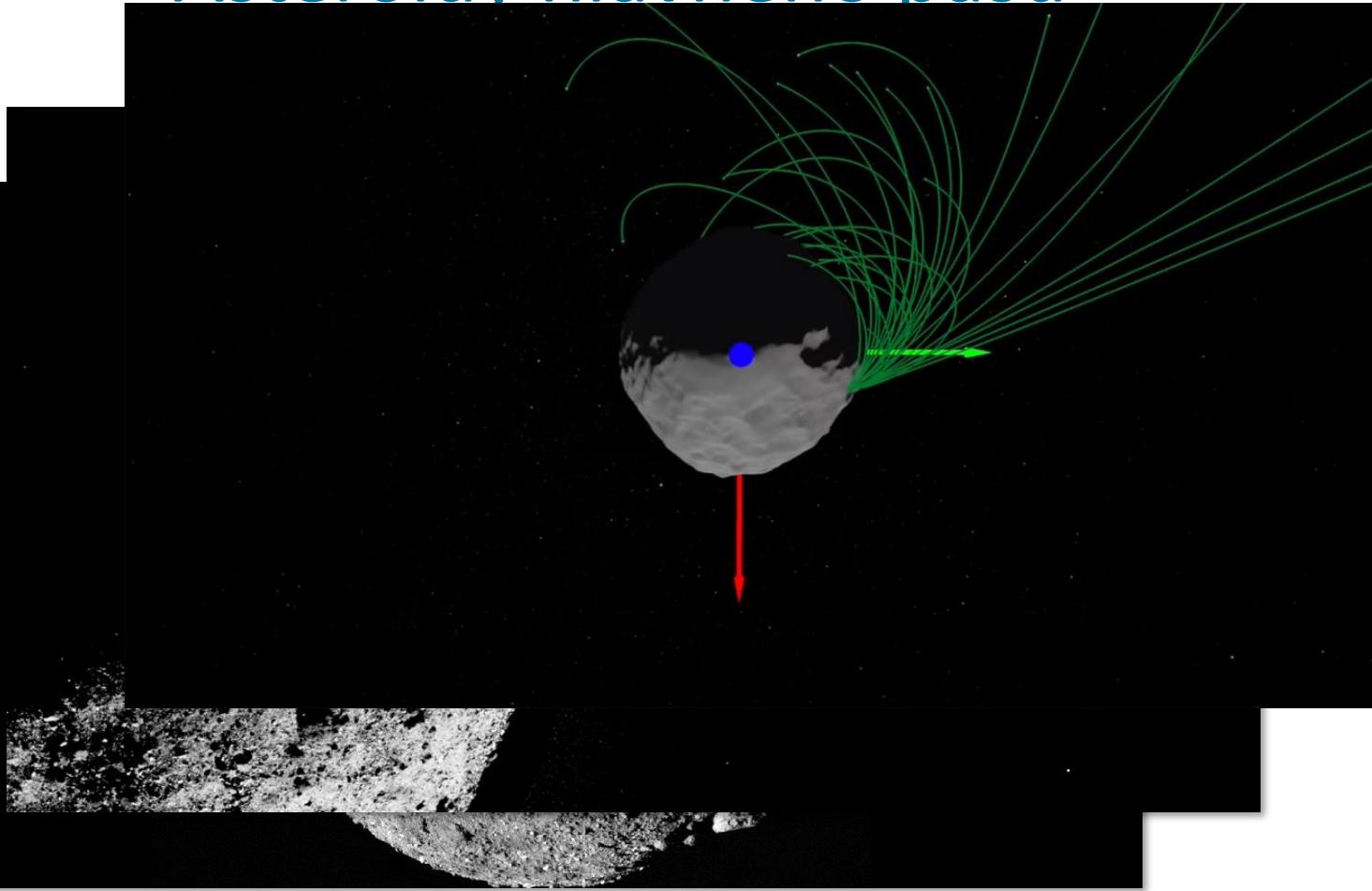
© Jo Bovy (NYU)

© Jo Bovy (NYU)

Slniečná sústava – asteroidy Bennu a Ryugu

NEO objekty a potenciálne Zem ohrozujúce asteroidy objavené
v r. 1999

Asteroidy hlavného pásu



31

2014-12-0

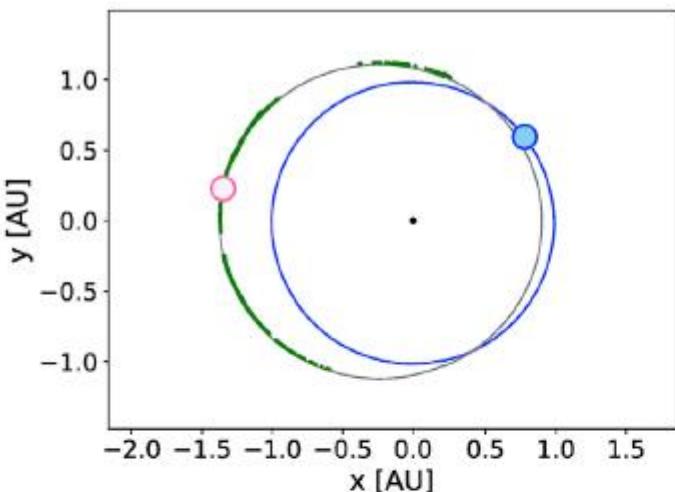


Simulácia

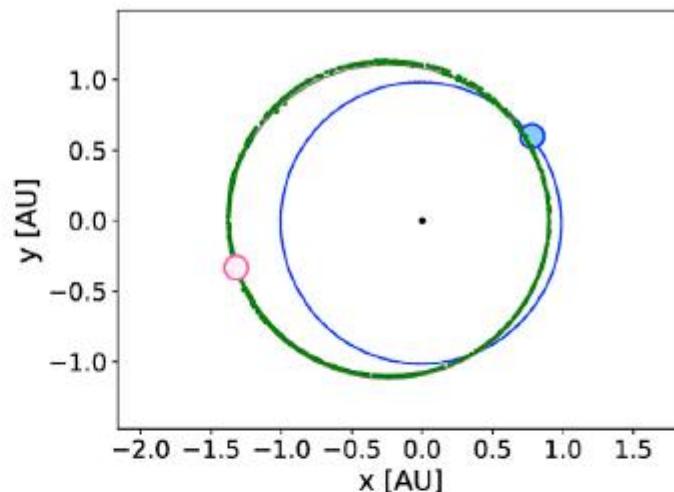
- ▶ 5000 testovacích častic opustilo asteroid
- ▶ Integračný čas 1000 rokov
- ▶ Počiatočné rýchlosťi od 0,05 m/s do 3 m/s

Simulácia

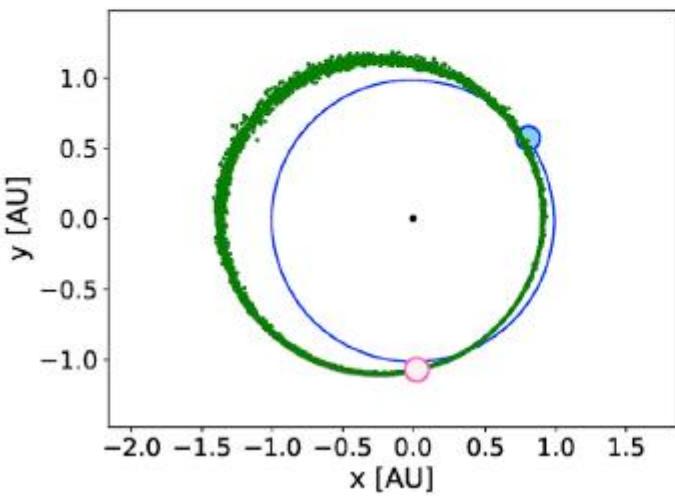
- ▶ Integrátor IAS15 z REBOUND balíčka
- ▶ Ne-symplektický integrátor s adaptívnym krokom integrácie
- ▶ Treba zvážiť aj negravitačné efekty – MERCURIUS integrátor (symplektický integrátor Wisdom-Holman)



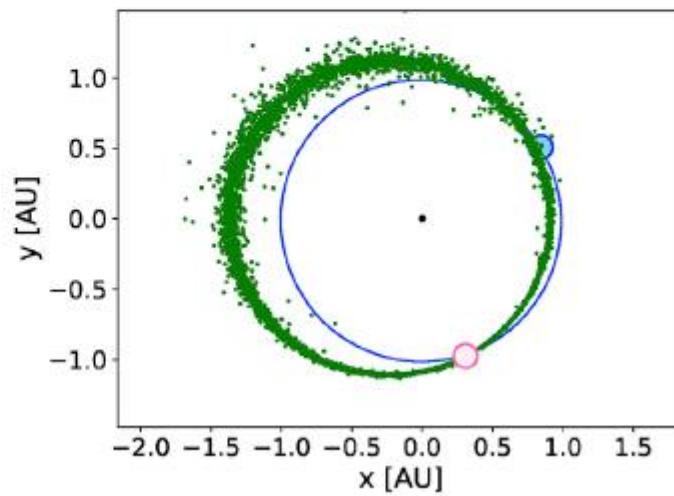
(a)



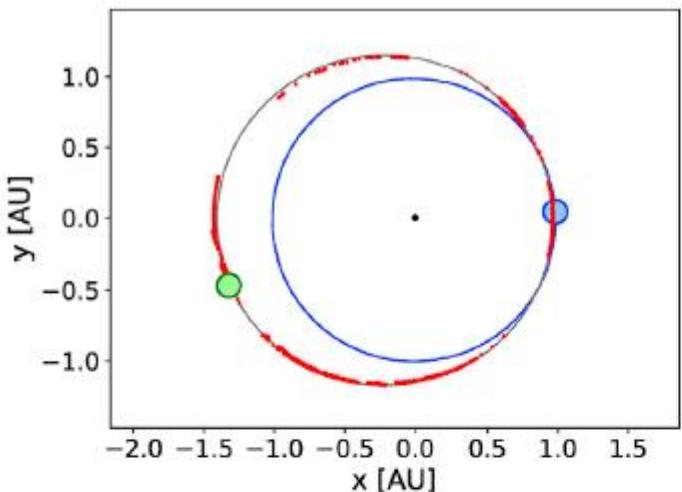
(b)



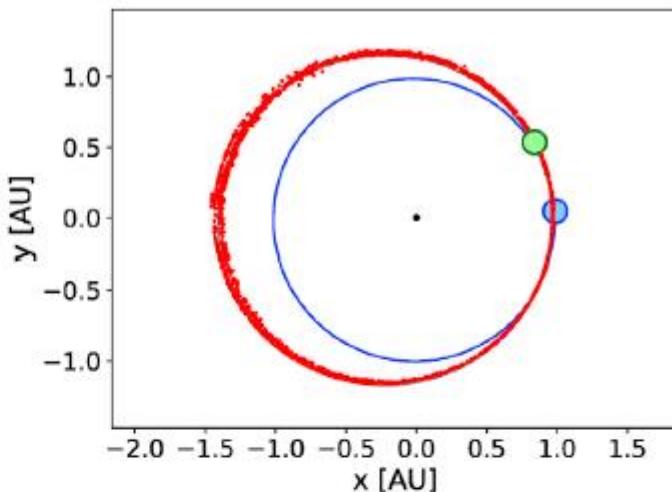
(c)



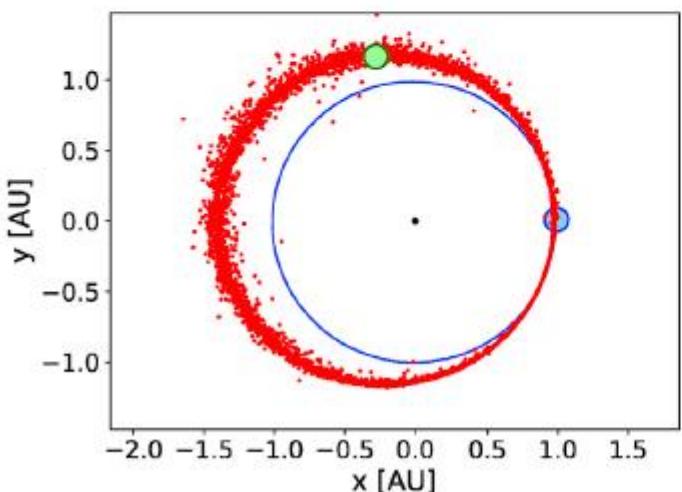
(d)



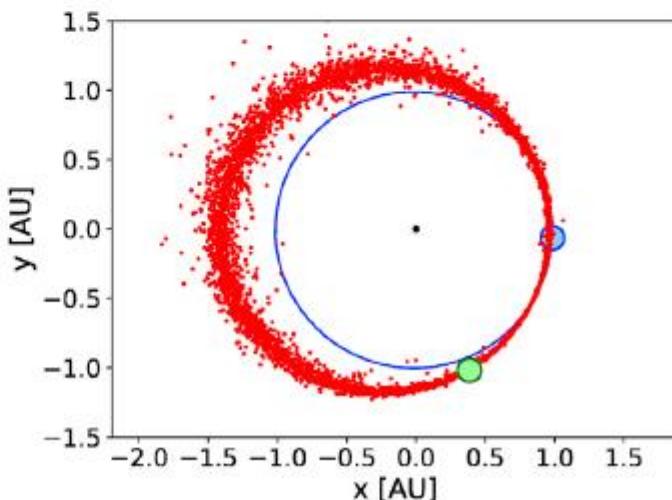
(a)



(b)



(c)

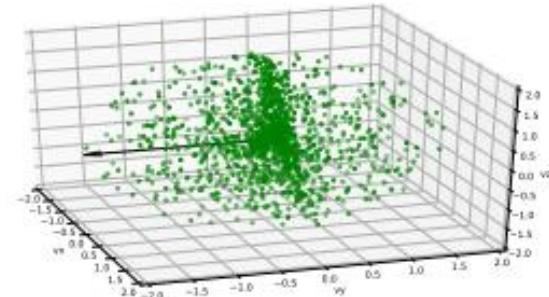
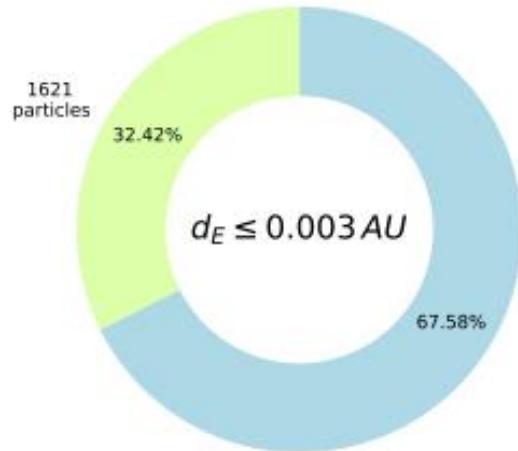


(d)

Skúmali sme prítok častíc na Zem

► Bennu:

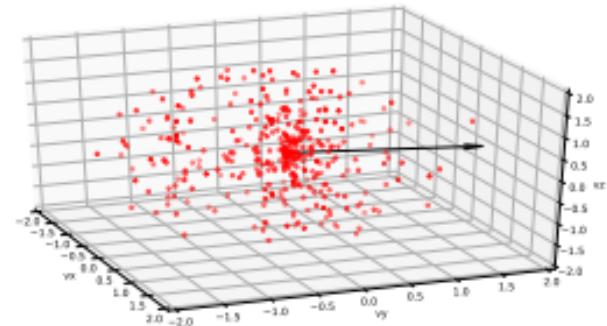
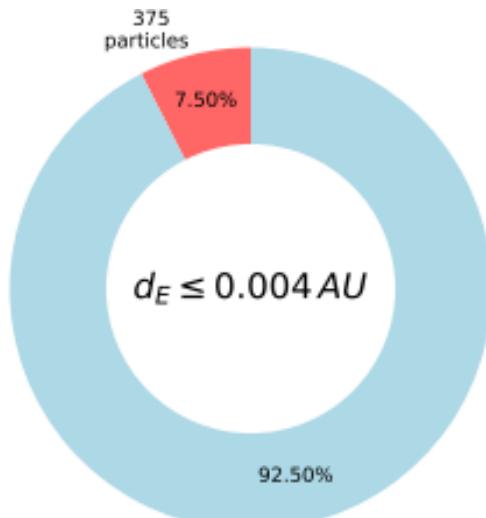
► 32,42% testovacích častíc (z 5000 vzorky) doputovalo až na Zem (< 0,003 AU)



Skúmali sme prítok častíc na Zem

► Bennu:

► 7,5% testovacích častíc (z 5000 vzorky) doputovalo až na Zem ($< 0,004$ AU)



Gul'ové hviezdzokopy

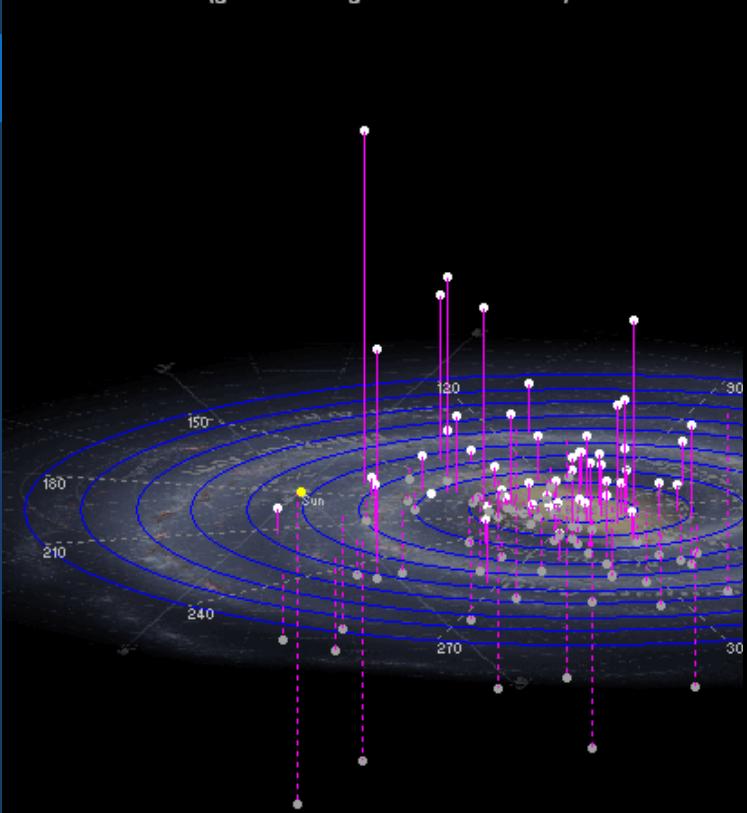
39

G



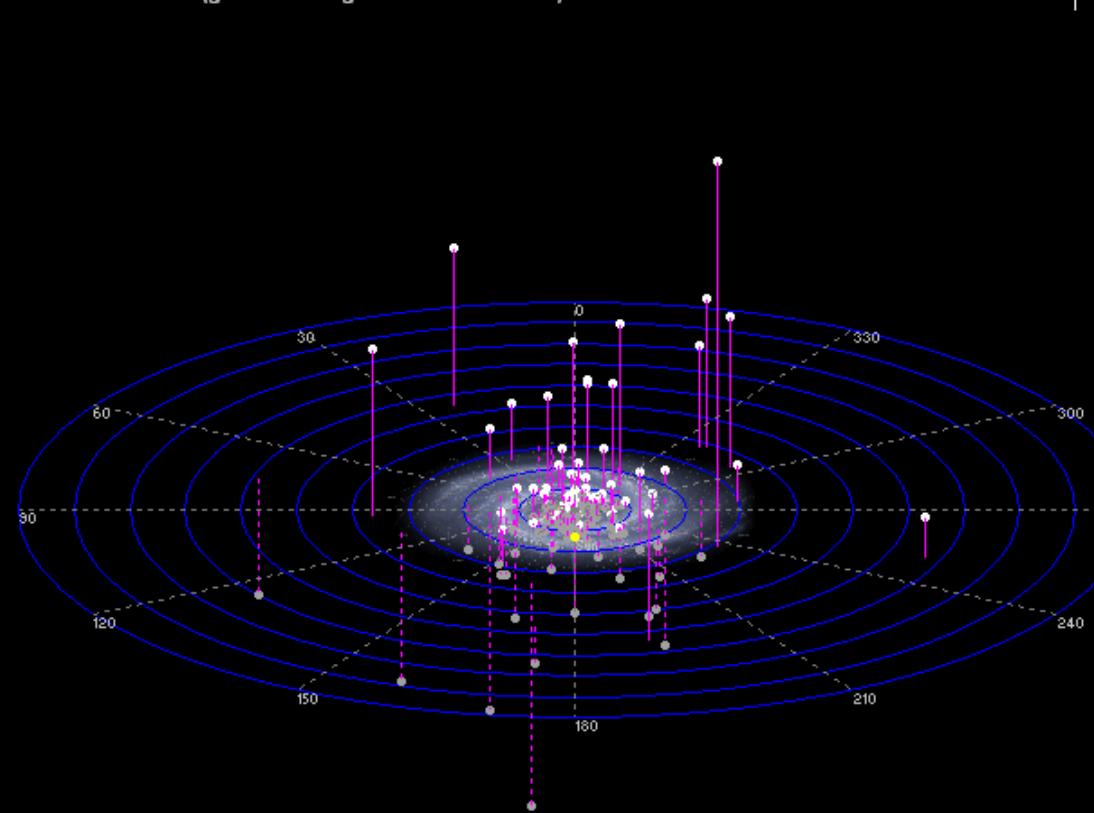
The 119 globular clusters within 50,000 LY of the galactic centre

Galactic centric (galactic longitude and latitude)



The 151 globular clusters within 200,000 LY of the galactic centre

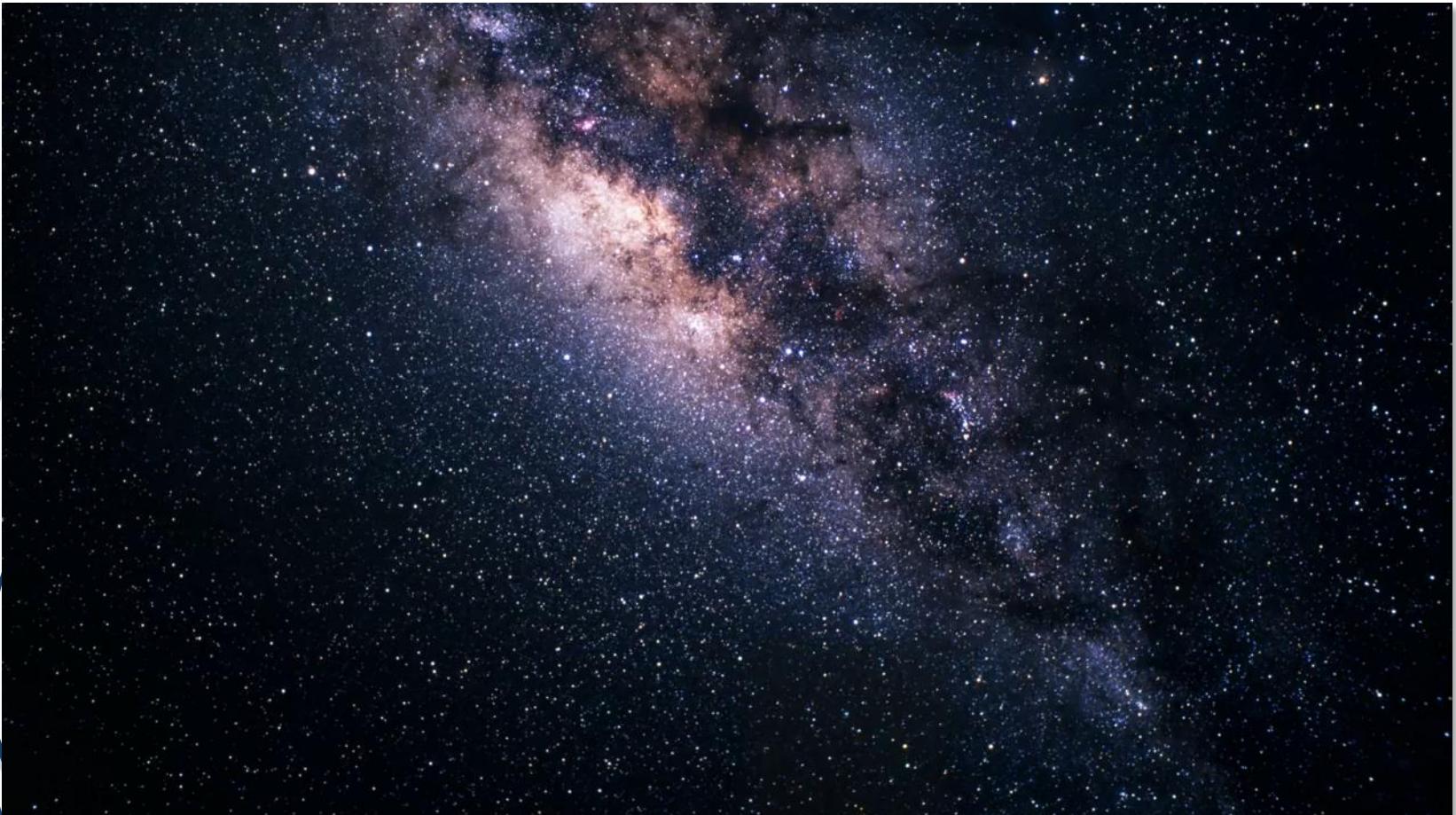
Galactic centric (galactic longitude and latitude)



20,000 LY



NGC 6397



Ako na to ...

► Priama integrácia:

$$\vec{F}_i = - \sum_{j \neq i} G \frac{m_i m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} - \vec{\nabla} \cdot \phi_{ext}(\vec{r}_i),$$

- Gravitačné pôsobenie od hviezd
- Gravitačné pôsobenie Galaxie, najjednoduchší model:

$$\phi = v^2 \ln(R_{\text{GC}})$$

- kde $v = 220$ km/s reprezentuje plochú rotačnú krivku

Parametre

- ▶ Hmotnosť hviezdokôp je výrazne rôznorodá:

$$10^4 - 10^6 \text{ Ms}$$

- ▶ Rozmer je na tom podobne

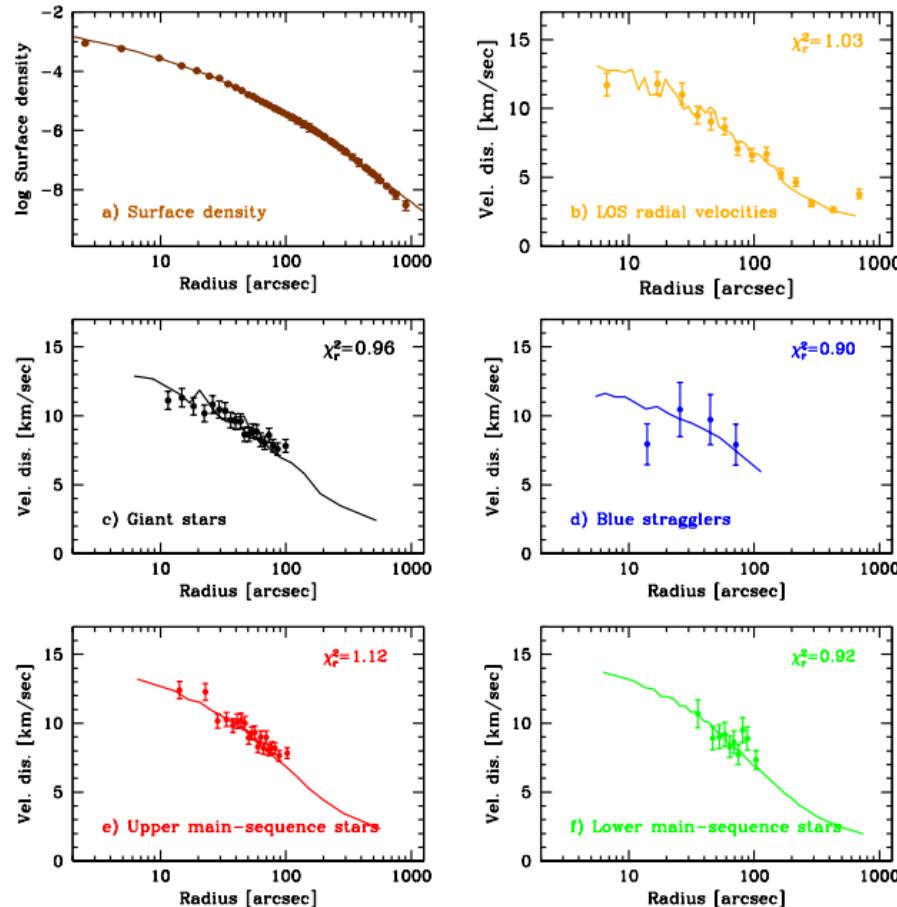
$$0,1 - 20 \text{ pc}$$

- ▶ Distribúcia hmoty v GC (najjednoduchší model)

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi a^3 (1 + r^2/a^2)^{5/2}} \quad \phi(r) = -\frac{GM}{a(1 + r^2/a^2)^{1/2}}$$

- ▶ Plummerova sféra, kde a je škála GC ($\approx 0,6 R_{gc}$)
- ▶ Nesimulujeme každú jednu hviezdu, ale „zhluky hviezd“ (podľa výpočtových možností)

Distribúcia rýchlosťí



alebo veľmi jednoduchá aproximácia

$$V_1(r) = \left(1 - \frac{r}{R+0,5}\right) \times 15 \text{ km/s}$$

ktorú náhodne rozdelíme do $[v_x, v_y, v_z]$

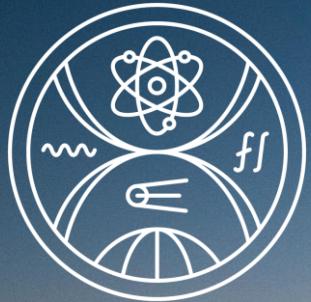


Záver

- ▶ 2- 3- N- body problémy
- ▶ Disk Mliečnej cesty
- ▶ Asteroidy v slnečnej sústave
- ▶ Guľové hviezdokopy

Odkazy

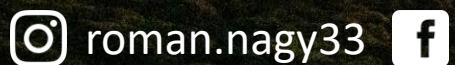
- ▶ Integrátor:
 - ▶ Rebound: <https://rebound.readthedocs.io/en/latest/integrators/>
 - ▶ Gulp: <https://docs.galpy.org/en/v1.8.0/>
- ▶ N-body:
 - [http://www.scholarpedia.org/article/N-body_simulations_\(gravitational\)](http://www.scholarpedia.org/article/N-body_simulations_(gravitational))
 - <http://www.artcompsci.org/kali/vol/plummer/volume11.pdf> (Plummer model)
- ▶ Guľové hviezdzokopy:
 - ▶ <https://sites.astro.caltech.edu/~george/ay20/Ay20-Lec15x.pdf>
 - ▶ <https://isima.ucsc.edu/2014/presentations/lectures/Heggie.pdf>
 - ▶ <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/453/1/605/4908073/stv1546.pdf> (parametre GC)
 - ▶ <http://www.icc.dur.ac.uk/~tt/Lectures/Galaxies/LocalGroup/Back/globular.html> (zoznam GC)
 - ▶ <https://arxiv.org/pdf/1804.08359.pdf> (vlastnosti GC)



European Collaborating Astronomer Projects: Espana-Czechia-Slovakia – Erasmus + Key Action 2



- Paradigmatické zmeny v nazeraní na vesmír a človeka z filozofickej, teologickej a fyzikálnej perspektívy - APVV-18-0103



roman nagy

Ďakujem za pozornosť

Tesné priblženia

Table 2

Comparison of close approaches of Bennu to the Earth according to JPL Small-Body Database, NEODyS and our simulation. We chose only approaches in 1900–2100 satisfying condition $d_E \leq 0.1 \text{ AU}$. Listed values are in AU . Value marked with an asterisk (*) corresponds approximately to the date listed in the table, however it does not represent the local minimum of geocentric distance in our simulation.

	Date	Planet	JPL	NEODyS	Our simulation
Bennu	22 Sep 1911	Earth	0.01418	–	0.01423
	3 Oct 1917	Earth	0.05295	–	0.04936
	5 Feb 1930	Earth	0.08925	–	0.09109
	16 Sep 1964	Earth	0.08349	–	0.08508
	27 Sep 1970	Earth	0.02140	–	0.02176
	4 Feb 1977	Earth	0.09793	–	0.09785
	22 Sep 1999	Earth	0.01469	–	0.01584
	20 Sep 2005	Earth	0.03313	–	0.03314
	11 Feb 2037	Earth	0.09871	0.09872	0.09891
	9 Feb 2043	Earth	0.09663	0.09662	0.09663
	30 Sep 2054	Earth	0.03930	0.03931	0.03951
	23 Sep 2060	Earth	0.00501	0.00502	0.00546
	15 Feb 2068	Earth	0.07047	0.07041	0.07057
	22 Sep 2080	Earth	0.01556	0.00933	0.01383
	2 Oct 2087	Earth	0.05311	–	0.02672*

Table 3

Comparison of close approaches of Ryugu to the Earth and Mars according to JPL Small-Body Database, NEODyS and our simulation. We chose only approaches in 1900–2100 satisfying condition $d_E \leq 0.1 \text{ AU}$ or $d_{\text{Mars}} \leq 0.1 \text{ AU}$. Listed values are in AU .

	Date	Planet	JPL	NEODyS	Our simulation
Ryugu	13 Jan 1930	Earth	0.08046	–	0.08051
	16 Nov 1931	Mars	0.08950	–	0.08970
	21 Oct 1948	Mars	0.08363	–	0.08380
	23 Sep 1965	Mars	0.08733	–	0.08733
	20 Nov 1972	Earth	0.08266	–	0.08269
	31 Aug 1982	Mars	0.08891	–	0.08899
	24 Nov 1985	Earth	0.04979	–	0.04979
	12 Apr 2020	Mars	0.08932	–	0.08932
	29 Dec 2020	Earth	0.06053	0.06053	0.06061
	21 Dec 2033	Earth	0.04744	0.04745	0.04747
	23 Jan 2071	Mars	0.08889	–	0.08894
	6 Dec 2076	Earth	0.01044	0.01044	0.01045