不连续子序列（sub）

容易发现，当 $n \geq 5$ 时，一个序列是“完美”的当且仅当 $1,2,3$ 不同时出现。那么 $r-l+1 \geq 5$ 时只需要数有多少种填入数的方案使得 $1,2,3$ 不同时出现。设 0 有 c 个，那么：

- 如果 $1,2,3$ 中有 0 个没有出现过，使得 $1,2,3$ 不同时出现的方案数为 0；
- 如果 $1,2,3$ 中有 1 个没有出现过，使得 $1,2,3$ 不同时出现的方案数为 2^c；
- 如果 $1,2,3$ 中有 2 个没有出现过，使得 $1,2,3$ 不同时出现的方案数为 $2 \cdot 2^c - 1$；
- 如果 $1,2,3$ 中有 3 个没有出现过，使得 $1,2,3$ 不同时出现的方案数为 $3 \cdot 2^c - 3$。

当询问的 $r-l+1 \leq 4$ 时暴力求解即可。

造题（provide）

原题链接：Meta Hacker Cup。

以下记 $n = \max(R, C)$。

容易发现，两条路径的交必定完全属于同一行或者同一列。若将小 X 选的路径（以下简称“路径 X”）中，相邻两个转弯处之间（$(1, C)$ 和 $(R, 1)$ 视为转弯处）的横向或纵向的部分称为一段（包含转弯处的两个格子，即可能相交），则小 Y 选择的路径（以下简称“路径 Y”）与其的交必然完全属于一段。

对于每一段，都可以计算出路径 X 包含这一段且要求路径 Y 与路径 X 交于这一段时，Y 能获得的最大得分（以下称为这一段的权值）。若能较快速求出每一段的权值，则可定义以下 dp 式：

$dp_{i,j,0/1}$ 表示路径 X 经过 (i, j) 且 (i, j) 为转弯处，上一段为横向/纵向的所有方案中，可达到的最小的从 $(1, C)$ 到 (i, j) 的部分所有段最大权值。转移即枚举下一个转弯处，共 $O(n)$ 个，因而时间复杂度为 $O(n^3)$。本题剩余部分即如何求出每一段的权值。

由于不同段只有 $O(n^3)$ 种，因此每次枚举一段，将该段所有格子对应题目分值设为 0，同时进行一次 bfs，同时记录是否已经与该段有交。bfs 复杂度为 $O(n^2)$，总时间复杂度 $O(n^5)$。

考虑预处理出 $f_{i,j}$，$g_{i,j}$ 分别表示原状态（即小 X 不操作）下路径 Y 在 $(1, 1)$ 到 (i, j) 的部分及在 (i, j) 到 (R, C) 之间的部分可能的最大权值。若确定两条路径相交的一段，则可以证明相交部分格子数一定为 1，2 或是整段。因此共有 $O(n)$ 种本质不同（进入该段前的最后一个格子不同，或者离开该段的下一个格子不同）的选择，每种路径选择均能根据 f，g 的值 $O(1)$ 求出。时间复杂度 $O(n^4)$。在枚举下一个 dp 状态的同时维护最大值，则可以达到时间复杂度 $O(n^3)$。

机器人（robot）

定义一个 4 维列向量 (x, y, dx, dy) 分别表示机器人当前的 x 坐标、y 坐标、沿 x 轴朝向方向（即 $dx = 1$ 表示朝向 x 轴正方向，$dx = -1$ 表示朝向 x 轴负方向，$dx = 0$ 表示朝向 y 轴正方向或负方向）、沿 y 轴朝向方向（含义类似）。注意到 `W`,`A`,`S`,`D` 均能表示为矩阵操作（具体矩阵可以参考 std）。

`W` 操作只需 $x \leftarrow x + dx, y \leftarrow y + dy$，`D` 操作即 $x \leftarrow x - dx, y \leftarrow y - dy$；`A`,`D` 操作不影响 x, y，同时注意到：

(dx, dy) 逆时针旋转 90°（即操作 `A`）后为 $(-dy, dx)$；(dx, dy) 顺时针旋转 90°（即操作 `D`）后为 $(dy, -dx)$。

即可使用矩阵维护修改及询问操作。时间复杂度 $O((N + Q)\log N)$。

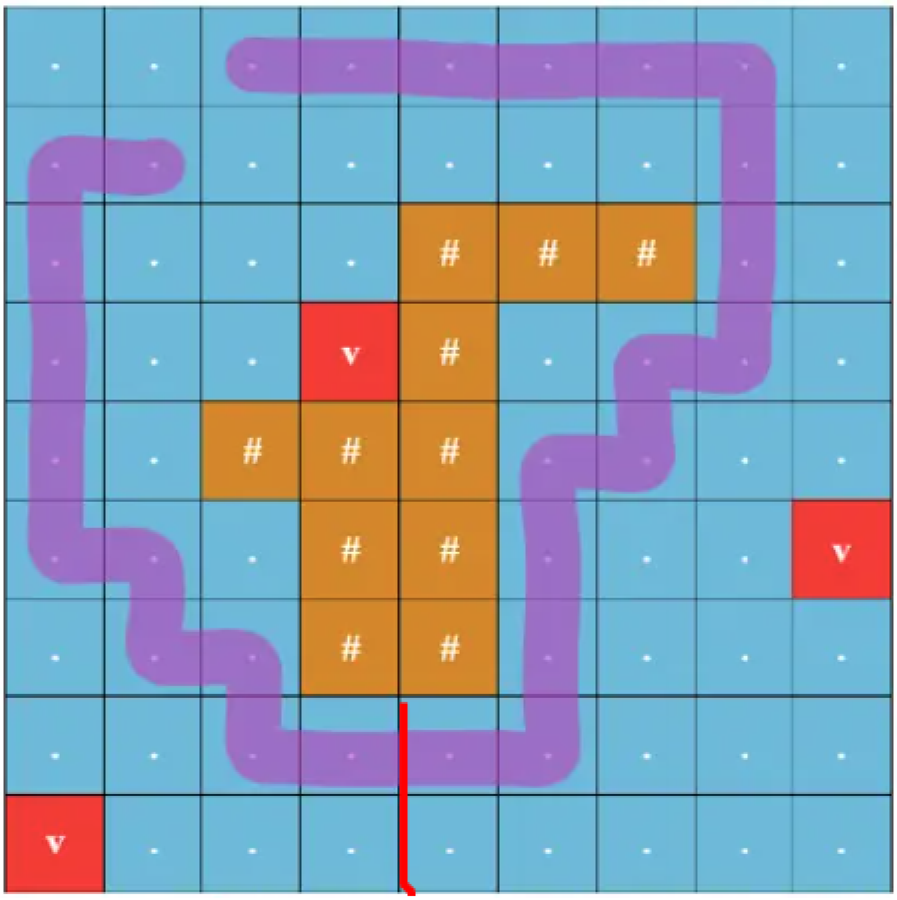
以下是部分测试点做法：

- $1 \sim 6$：各种不优于 $O(n^2)$ 的模拟。
- $7, 8, 14, 15$：用线段树维护矩阵乘积，区间查询（即正解做法去掉修改），或者注意到 `W` 与 `S`、`A` 与 `D` 分别互为逆操作（即对应矩阵为逆矩阵），因此对于询问 $[l, r]$，可以等价于先进行 $A_{l-1}, A_{l-2}, \cdots A_1$ 的逆操作，再依次进行 $A_1, A_2, \cdots A_r$ 操作（即相当于先撤回之前的 $[1, l-1]$ 逆操作）。
- $9, 16$：y 坐标显然始终为 0，x 坐标可以直接线段树维护。
- $10, 11, 17, 18$：用来降低一些分讨难度，对于一些做法或许可以降低一点维护的信息量。事实上，如果你会了这一部分，注意到操作序列 `X`=`XWD`（`X` 为 `W`,`A`,`S`,`D` 之一，`=` 表示操作序列等价）；若将 `W`,`A`,`S` 之一更改为 `D`，则直接将 3 个操作修改为 `AAA`；若将 `D` 改为 `X`=`W`,`A`,`S` 之一，则将 3 个操作修改为 `XWS`。于是可以转化为本题操作序列长度为 $3N$ 的形式。
- $7 \sim 13$：用来放过一些分块/乱搞/巨大常数做法。

岛屿（island）

原题链接：CF1920F2。

观察：选取中间岛最下侧的一个点，将这个点右下角与边界上点连边。



则一条路径绕过整个岛等价于跨过这条边偶数次。那么每个点拆成 $(x,y,0),(x,y,1)$ 两个点就可以建图了，一个合法的环对应着 $(x,y,0)$ 和 $(x,y,1)$ 间的一条路径。

BFS 可以求出每个点到最近火山的距离，最大点权瓶颈路即为答案。使用 Kruskal 重构树求解。时间复杂度 $O((NM+Q)\log NM)$。