

A set of navigation icons typically found in Beamer presentations, including symbols for back, forward, search, and other slide controls.

# 前言

由于多项式与生成函数几乎被移除 OI，所以讲课内容几乎不含多项式与生成函数。

# counting

常见的一些数列与二维数列：组合数，卡特兰数，斯特林数，超级卡特兰数，贝尔数，伯努利数， $q$ -binomial，欧拉数，拆分数。  
常见的反演技巧：差反演，二项式反演，莫比乌斯反演，斯特林反演，单位根反演，子集反演（其实就是特殊矩阵的求逆）。

常见的组合对象方法：偏序树问题（显式的氪金手游和隐式的猎人杀，关键在于容斥），棋盘模型（容斥以及建立双射），根号方法（楼梯划分成两个部分分别处理），杨表（标准，半标准），反射容斥（一条线，两条线和完美覆盖）。

常见的计数方法： $a = \sum_{i=1}^{\infty} [i \leq a] = \binom{a}{1}$ ，选择代表元计数，找到判定的充要条件，断环为链，构建双射，组合数前缀和移动，转置原理。

杂项：FWT 与子集相关，互异关系容斥。

# AGC018E Sightseeing Plan

一个人在网格图上旅行，他可以从矩形  $(X_1, Y_1) - (X_2, Y_2)$  中任意一点  $S$  开始，再在矩形  $(X_3, Y_3) - (X_4, Y_4)$  中任意一点  $P$  午休，最后在矩形  $(X_5, Y_5) - (X_6, Y_6)$  中任意一点  $T$  结束旅行。如果旅行者当前在  $(x, y)$ ，那么他下一步只能移动到  $(x, y + 1)$  或  $(x + 1, y)$ ，且只要点  $(S, P, T)$  不同或旅行经过的点集不同即为不同的方案。求有多少种不同的行走方案，答案对  $10^9 + 7$  取模。保证三个矩形一定从左下到右上排列，且矩形不相交。

$$1 \leq X_1 \leq X_2 < X_3 \leq X_4 < X_5 \leq X_6 \leq 10^6, 1 \leq Y_1 \leq Y_2 < Y_3 \leq Y_4 < Y_5 \leq Y_6 \leq 10^6。$$

# LNR2 简单算术

给定一个  $n$  次多项式  $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ ，求其  $m$  次幂的  $k$  次项系数模质数  $p$  的值。

$n, p \leq 50, m, k \leq 10^{18}$ ，多测  $T \leq 1000$ 。

## UNR2 梦中的题面

求有多少个长度为  $m$  的非负整数序列  $a$ ,  $a_i \leq b^i - c$ , 求  $\sum_{i=1}^m a_i < n$  的方案数, 对 998244353 取模。  
 $c \in 0, 1, 0 \leq n < b^{m+1}, 2 \leq b \leq 50, 1 \leq m \leq 50$ 。

## CCPC2023 北京市赛三染色

有一个调色盘，总共  $n$  行  $m$  列，形成了  $n \times m$  个格子，每个格子里要放一朵花。可以放置的花有 3 种颜色可以选择，分别用 0, 1, 2 表示。

花朵注视着它周围的花，并想要变成其他花朵的样子。如果在一个时刻，一朵颜色为  $c$  的花的上、下、左、右之一，有至少一朵花的颜色为  $c - 1$ ，那么这朵花在下一个时刻会变成颜色  $c - 1$ ，否则它在下一个时刻的颜色仍然是  $c$ 。其中颜色  $\bmod 3$  考虑。对于一个初始的在调色盘中放花的方案，如果经过有限个时刻之后，所有花都变成同一颜色，我们称这个放花的方案是美好的。

# CCPC2023 北京市赛三染色

不难看出，对于一个美好的放花方案，每朵花都有一个最早的时刻，它在这个时刻之后一直不变色。我们称这个时刻为这朵花的稳定时刻。我们从第 0 时刻开始计时，所以一朵花如果从未改变颜色，那么它的稳定时刻就是 0。

现在我已经在调色盘的一些格子中放置了花朵，也有一些格子是空的。我想知道，有多少种给剩余的格子放花的方案，使得这个方案是美好的？以及，对于这些美好的方案，位于第 1 行第 1 列格子中花朵的稳定时刻的总和是多少？

你只需要回答我这两个结果对 998244353 取模的值。

$2 \leq n \leq 6, 1 \leq m \leq 50$ 。



## AGC056F Degree Sequence in DFS Order

已知整数  $n, m$ , 求有多少个长为  $n$  的整数序列  $a$  满足存在一个  $n$  个点  $m$  条边的简单连通无向图存在一个根满足其存在一个 dfs 序  $p$ , 满足对于  $1 \leq i \leq n$ ,  $p_i$  在原图的度数为  $a_i$ , 对 998244353 取模。

$2 \leq n \leq m \leq 10^6$ 。

## CTSC2018 青蕈领主

给定  $n$ ，对于一个  $n$  阶排列，定义其一个子区间  $[l, r]$  是连续的当且仅当  $\max_{i=l}^r p_i - \min_{i=l}^r p_i = r - l + 1$ 。现在对于每一个  $1 \leq i \leq n$ ，给出  $a_i$  表示满足  $r = i$  的所有好区间  $[l, r]$  中  $r - l + 1$  的最大值，求有多少个符合要求的  $n$  阶排列，对 998244353 取模。  
 $n \leq 50000$ ，多测  $T \leq 100$ 。

## dp

dp 设计技巧：记录未来状态，dfs 序树形依赖背包，数位 dp(将其转化为少量的信息合并)，轮廓线 dp，dp 套 dp。

dp 优化技巧：数据结构优化 (普通优化，李超树，KTT)，动态 dp(树剖 + 矩阵，线段树合并)，斜率优化，决策单调性优化 (分治，二分栈，二分队列，SMAWK，二维刷表，环上决策单调性)，蒙日矩阵 (蒙日矩阵乘法，单位蒙日矩阵乘法)，闵可夫斯基合并，wqs 二分。

# UNR5 提问系统

对于一个栈，与一个长为  $2k$  的操作序列，每次形如在栈的顶部放入一个  $A$  与  $B$  之间的元素或删除顶部的元素，保证操作结束后栈为空。

现在给出  $c_A, c_B$ ，要求任何时刻栈中的元素  $A$  个数不超过  $c_A$ ，元素  $B$  个数不超过  $c_B$ ，且令总共放入过  $p_A$  个元素  $A$ ，和  $p_B$  个元素  $B$ ，则会产生  $p_A p_B^2$  的贡献。

现在求对于所有的  $2^k$  种放入方式中满足条件的方式的贡献和，对 998244353 取模。

$1 \leq k \leq 2500$ 。

# 八省联考 2018 林克卡特树

给定一个  $n$  个点的边带权 (可能有负权) 的树, 现在断掉恰好  $k$  条边, 再连  $k$  条边权为 0 的边, 求新树的直径最大可以是多少。  
 $1 \leq n, k \leq 3 \times 10^5$ 。

# CEOI2024 核酸检测

交互题。

有 1000 个新冠样本，每一个样本的阳性率为  $P$ ，你不知道哪些样本是阳性。每次你可以选取一个样本子集，交互库会告诉你其中是否有阳性样本，现在你需要找出所有阳性样本，你的平均询问次数上限如下所示：

$P$	$F$
0.001	15.1
0.005256	51.1
0.011546	94.9
0.028545	191.5
0.039856	246.3
0.068648	366.2
0.104571	490.3
0.158765	639.1
0.2	731.4

# AGC061E Increment or XOR

你有一个非负整数  $X$  初始为  $S$ 。给定  $n$  和数列  $Y$  以及  $C$ 。你可以进行下列操作任意多次：

令  $X \leftarrow X + 1$  花费  $A$  的代价；

令  $X \leftarrow X \text{ xor } Y_i$ ，花费  $C_i$  的代价。

你想要把  $S$  变成  $T$ ，求最小代价。

$1 \leq n \leq 8, 0 \leq S, T, Y_i < 2^{40}$ 。

# CTS2022 独立集问题

给定一个  $n$  个点的树，每个点初始有一个点权  $a_i$ 。现在可以执行若干组操作，每次选择一个点  $x$ ，令所有与  $x$  相连的点的点权和为  $s$ ，现在将  $a_x$  变为  $s - a_x$ ，并将所有与  $x$  相连的点的点权清零。现在要操作若干次使得存在一个位置  $x$ ，使得对于所有  $y \neq x$  都有  $a_y \neq x$ ，并获得  $a_x$  的收益，求最终可以得到的最大收益。  
 $1 \leq n \leq 351493$ 。



# UNR5 航天飞机调度

交互题。

给定  $n$  个点的一个带权三角剖分图，你不知道这个图，但你可以调用交互接口求出任意一个  $x$  到  $y$  的最短路。

现在有两架飞机分别停在  $x$  与  $y$ ，你需要驾驶飞机来依次执行  $q$  个任务，第  $i$  个任务要求至少一家飞机在  $a_i$  进行完成，你需要求出执行完所有任务飞机需要移动的距离总和的最小值。

$3 \leq n \leq 50000, 1 \leq q \leq 30000$ ，调用次数上限  $2 \times 10^6$ 。

# math

积性函数求和：杜教筛，PN 筛，min25 筛，州阁筛，高维积性函数求和。

数论方程：exgcd，exCRT，exBSGS，离散对数，二次剩余。

数论加速计算：exlucas，狄利克雷前缀和与差分，万能欧几里得算法，连边型类欧几里得，farey 序列。

线性代数：矩阵快速幂，线性基 (带删，合并与高维压位)，矩阵树定理 (Best 定理)，伴随矩阵定理，高斯消元，特征多项式与凯莱哈密顿。

杂项：拉格朗日插值，Burnside 引理 (实际上与互异关系容斥一统)，BM 算法。

# 省选联考 2020 作业题

给定一个  $n$  个点  $m$  条边的带权无向图，求所有生成树的边权 gcd 乘上边权和的值之和对 998244353 取模。

$1 \leq n \leq 30$ 。

# ULR2 跳蚤猜密码

交互题。

有一个  $n \times n$  的矩阵  $A$ ，你不知道矩阵的每一个元素具体为多少，但是你知道矩阵的每个元素均为  $[0, 998244352]$  的整数。每次你可以询问一个元素均为  $[0, 998244352]$  整数的矩阵  $B$ ，交互库会告诉你  $\det(A + B)$  对 998244353 取模的结果，你可以询问至多  $T$  次，你需要求出矩阵  $A$ 。

$1 \leq n \leq 50, T = 2500$ 。

## AGC051D C4

给定一个  $C_4$  与每一条的边权，求有多少条 1 出发回到 1 的路径满足每条边经过的次数恰好和其边权相同，对 998244353 取模。所有边权均为  $[1, 5 \times 10^6]$  的整数。

## WC2021 斐波那契

定义  $F_0 = a, F_1 = b, F_i = (F_{i-1} + F_{i-2}) \bmod m (i \leq 2)$ 。

现在  $m$  固定，有  $q$  组询问，每次给出  $[0, m)$  间的整数  $a, b$ ，求最小的  $x$  满足  $F_x = 0$ 。

$1 \leq q, m \leq 10^5$ 。

## P10182 一径入繁华

定义一个  $n \times n$  的矩阵  $a$  满足

$a_{i,j} = \sum_{d \mid \gcd(i,j)} \mu\left(\frac{\gcd(i,j)}{d}\right) \times \sigma_0(d^s)^t$ , 求  $\det(a)$  对  $10^9 + 7$  取模的结果。

$1 \leq n \leq 10^{11}$ 。

## UR27 红场阅兵

给定一个积性函数  $f$ , 其中  $f(p^k) = w_0 + w_1 p^k + w_2 (p^k)^2$ , 求  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(ij)$ , 对 998244353 取模。  
 $1 \leq n \leq 10^9$ 。