

NOIP2024 模拟赛题解

GDFZ

2024 年 9 月 12 日

目录

1	random	1
2	string	2
3	mst	3
4	class	4

A 随机说话 (random)

先考虑某一种合并方式。

把 n 句话看成 n 个点，每次合并就新建一个点向合并的点连边，最后会形成一棵树。

注意到每次的贡献都是三次式，这意味着总贡献一定形如：

$$\sum_{i \neq j} c_{i,j} a_i^2 a_j + \sum_{i < j < k} d_{i,j,k} a_i a_j a_k$$

- $c_{i,j}$ 只会在 $\text{lca}(i, j)$ 处贡献，故 $c_{i,j} = 1$ 。
- $d_{i,j,k}$ 只会在 $\text{lca}(i, j, k)$ 处贡献，故 $d_{i,j,k} = 2$ 。

系数竟然是常数！这意味着无论合并方式如何，总贡献都是一样的。故上式就是答案：

$$Ans = \sum_{i \neq j} a_i^2 a_j + 2 \sum_{i < j < k} a_i a_j a_k = \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^3 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^3 \right) \right] / 3$$

直接计算或者按任意顺序合并一次计算答案即可。

时间复杂度 $O(n)$ 。

B 字符串 (string)

首先，设首尾配对的最长的前缀和后缀长度为 t （即 $\forall i \in [1, t], S_i = S_{n-i+1}, s_{t+1} \neq s_{n-t}$ ）。

假如最优解中没有选择上述的前后缀，可以不断地将中间的字符向两边补。如果前后缀没有补齐，那把剩下的补齐会得到一组更优解，矛盾；故可以调整使最优解选择了长为 t 的前后缀。

于是有 $A = S[1 : t]$ 或 $B = S[n - t + 1 : n]$ 。不妨设是前者，后者情况同理。

将长为 t 的前后缀删掉，现在问题变成找最长的后缀，与前面的某个等长子串回文。

做法很多，这里提供一个 KMP 自动机的做法：对反串建出 KMP 自动机，用原串在上面跑并在节点上标记长度，最后跑一遍 Fail 树统计答案即可。

时间复杂度 $O(n)$ 。

C 最小生成树 (mst)

考虑怎么描述最小生成树。模拟 Kruscal 算法，先把所有 a 边缩起来形成若干连通块，再在连通块间任选一些 b 边连起来。

一条路径合法当且仅当其没有重复进入同一个连通块，跑最短路时状压进入过哪些连通块即可。时间复杂度为 $O(2^n m \log n)$ 。

可以发现当某个连通块大小 ≤ 3 时，出去再进来（路径长度 $\geq 2b$ ）不如直接走里面（路径长度 $\leq 2a$ ）。

所以只用记所有大小 ≥ 4 的连通块，于是连通块至多 $n/4$ 个，于是优化至 $O(2^{n/4} m \log n)$ ，可以通过。

D 上课 (class)

不难想到设 f_S 表示 $\in S$ 的组已经就坐的最小期望。

考虑新加一个组 u , $f_{S \cup u} \leftarrow \min\{f_{S \cup u}, f_S + w(S, u)\}$ 。 $w(S, u)$ 表示在第 u 组之前就坐的组集合为 S 时 u 组内所有学生的贡献。

考虑如何计算 $w(S, u)$, 首先容易发现组内一定是若干靠左的学生向右走, 剩下的靠右的学生向左走。

设 s_u 表示 u 组别有 s_u 个人, 考虑 u 内部贡献:

设左边 k 个学生向右走, 剩下的学生向左走。

注意到顺序是均匀随机的, 所以每对可以产生贡献的两个人产生贡献的概率是 $\frac{1}{2}$ 。
所以此时贡献即为:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(s_u - k)(s_u - k - 1)}{2} \right)$$

接下来考虑 u 与 S 的贡献, 注意到计算 $c(S, u, k)$ 表示第 u 组选择左边 k 个学生向右走, 剩下的学生向左走, 此时和 S 的贡献。

注意到:

$$c(S, u, k) = \sum_{v \in S} c(v, u, k)$$

直接预处理即可。

转移直接枚举 k 可以做到 $O(nG2^G)$, 期望得分 60 分。

然后注意到 u 内部决策和 $c(S, u)$ 都是关于 k 下凸的, 而任意非负带权下凸函数和仍然为下凸函数, 所以可以用三分优化找到最优决策点。

复杂度 $O(2^G G^2 \log n + Gn)$, 期望得分 100 分。