

SX-NOI 0210 Solution

题目	出题人	期望难度
石头	L zaa L	2600*
爱情	KAXdd	3100*
玩梗	Miss SGT	3500*

*对题目有问题的请咨询出题人

石头

首先发现，如果集合中大于等于两个区间的话一定只会取两个区间，因为多选一个区间会使满足条件的方块数不变，否则如果是会使满足条件的方块数变小的话，那么我们最开始选择的那两个区间一定不是最优的。

由此可以得出，在最优情况下被所有区间包含的方块应该是连续的，且左右端点为 $\min\{r\}, \max\{l\}$ ，个数就是 $\max(\min\{r\} - \max\{l\} + 1, 0)$ 。假如个数大于 0，那么我们选择一个区间的左端点一定为 $\max\{l\}$ ，另一个区间的右端点一定是 $\min\{r\}$ ，然后我们可以用 multiset 进行维护，然后对于个数等于零的，我们需要找到一个位置 p 使得选择两个区间在这个位置的左右两边，然后这个直接用线段树维护就可以了，记 ml 记录左端点在 $[l, r]$ 的区间最大右端点，记 mr 表示右端点在 $[l, r]$ 的区间最小左端点，然后记录 s 表示两个不相交的区间且区间的左右端点有一个在 $[l, r]$ 组成的答案最小值。

时间复杂度 $O(n \log V)$ 。

爱情

闲话：Alice 和 Bob 在一起玩这么久游戏，该结婚的。

首先 $A \leq B$ 输出 1，Bob 可以反悔 Alice 的决定，然后 Alice 无法继续走，Bob 可以去任何他想去的地方。

首先注意到一个要求最大，一个要求最小，考虑二分答案。假设当前的枚举重点为 mid 。那么把 $\leq mid$ 的点值修改为 0，把 $> mid$ 的点值修改为 1。因为 Alice 想要最大，Bob 想要最小，那么 Bob 会想去点值为 0 的，Alice 想要去点值为 1 的，考虑动态规划。

设 f_u 为只考虑 u 子树，Alice 先手是否能走到 0 上，如果 Alice 无法操作，那么则考虑 Bob 在最后一步能不能走到 1。

设 g_u 为只考虑 u 子树，在这里因为 $A > B$ 所以我们认为 $R - u$ 的路径被走过了。Bob 先手是否能走到 1 上。

考虑转移。

若子树 u 中没有能被 Alice 转移的点，那么则考虑 Bob 在最后一步能不能走到 1。如果存在一个点 v 使得 $dep_u - dep_v \leq dep_u + B$ 那么他的 g 一定为 1。若子树 u 中存在能被 Alice 转移的点，当且仅当 u 走不到 0 上，那么他的 g 一定是 1。

一般情况，设子树 u 中的 f 为 1，且距离 u 距离最短的 1 是在 v ，那么 v 深度的子树是深度小于等于 $dep_v - dep_u$ 的点 g 为 1。

f 与 g 之间的转移，用线段树上 dfs 序维护限制条件。然后外层套二分，时间复杂度 $O(n \log^2 n)$ 。因为二分，线段树维护的信息较少，所以常数很小。

玩梗

假设树是一条链，我们可以通过染第 $i, i + k, i + 2k, \dots, (i \leq k)$ 个点来到达这个目的。

考虑扩展到树上的情况，我们从树的直径去考虑这个问题。

不需要考虑两端均不在直径但经过直径的那些路径，证明是容易的，考虑两个端点在直径上等的两个点即可。我们设 h_u 为 u 根子树内深度最大值， l 为直径左端点， r 为右端点。

首先剔 $h_u + \max(dis_{u,l}, dis_{u,r}) < k - 1$ 的点，不难发现他们染不染色都无所谓。

如果我找到一条与直径不交的路径满足它的长度大于等于 $k - 1$ ，那么可以发现直径上的合法染色方案只有两种，证明考虑三条路径长什么样就行，直接对这两种方案线性判断是否有合法解即可，判断的方法直接换根dp求最近和最远的染色点距离即可。

如果没有这类路径，我们考虑如果一个点 u 满足 $h_u + \min(dis_{u,l}, dis_{u,r}) < k - 1$ 且 $h_u + \max(dis_{u,l}, dis_{u,r}) \geq k - 1$ ，若其父亲不满这个性质或者父亲在直径上，我们称这些点为关键点。我们有以下结论(为方便描述，下文假设 $dis_{u,r} > dis_{u,l}$):

- 如果 (u, r) 路径上存在一个被染色节点，那么整颗子的染色方案已经确定，证明可以考虑如果一个点被一条长度为 $k - 1$ 的路径覆盖并且上面有被染色结点那么这个点的染色本质上已经确定。
- 否则，子内的染色方案一定满足被染色的节点与 u 的距离不超过 $k - dis_{u,r} - 1$ ，并且所有与 u 距离 $\geq k - dis_{u,r} - 1$ 的点都满足其到 u 的路径上只有一个被染色节点。我们记这个为 f_u ，它可以通过 dp 直接求出。

至此，我们可以枚举键上的每一种染色方案，然后考虑关键点对答案的贡献，不难发现关键点对答案的贡献是一个前缀或者后缀的形式，直接前缀积后缀积优化即可。

时间复杂度 $O(n)$ 。

致歉

很抱歉我们题面出锅了，还发了三个版本，如果这很影响你的体验，我先对您说声对不起。

主要问题是搬题人写的题面没人看得懂，于是我上手写的，理解错了意思。

再次表达诚挚的歉意，我们下次一定会对此类问题进行改正，尽量下次不再出现错误。