solution

2025-07-21

因子

容易知道 k 取某个质数最优，开个桶统计每个质数的答案即可，复杂度 $O(\sum \sqrt{a_i})$

抓内鬼

- 算法一

$k = 1$。

不难想到一个简单策略是只在点 1 处放一个 小 U 壮丁，其他地方都放 小 P 壮丁。这种策略只会在 1 和 n 有边时失败，但此时唯一的最短路就是从 1 一步走到 n，因此只要 $n \geq 3$ 就可以在 $1, n$ 都放 小 P 壮丁，就解决了。

抓内鬼

- 算法二

$u_i \in \{1,n\}$ 或 $v_i \in \{1,n\}$ 。

同样先特判掉 $1,n$ 有边的情况，然后不难发现只要给 1 和 n 分配不同来源的壮丁，剩下的点随便分，就一定可以掐断所有路线。或者如果 $k=0$ 或 $k=n$ 也是显然有解的。

抓内鬼

- 算法三

沿用算法二，先给 $1, n$ 分配不同来源的壮丁，不妨假设 1 的壮丁是 P 而 n 的壮丁是 U 。

可以发现，如果存在边 $(1, x)$ ，并且 x 的壮丁也是 P ，那就相当于把 x 从图里删掉了。这是因为从 1 不能一步走到 x ，而其他拐一个弯再到 x 的走法不可能是最短路。存在边 (y, n) 且 y 的壮丁是 U 的情况同理。

抓内鬼

因此只需要把 小 P 壮丁贪心分配给 1 旁边的点。那么要么是把 1 旁边的点都删完了，要么是剩下的 小 U 壮丁可以把 n 旁边的点删完。总之1和n 肯定有一个是周围的点被删完了。

异或序列

- 算法一

从小到大加入数来 dp。暴力一点，既然要求连续三个的异或和不为 0，就记录序列的最后两个位置 x, y 分别是什么，加入 z 的时候要求 x, y, z 异或和不为 0。

时间复杂度 $O(n^3)$，期望得分 40 分。

异或序列

- 算法二

注意到性质：如果连续三个位置 a_i, a_{i+1}, a_{i+2} 违反了题目的限制，那 (a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) 就不可能违反限制了。

设 $f(n)$ 表示以n 结尾有多少个合法的序列。使用容斥：$f(n) = 1 + \sum_{i<n} f(i) - C$，$C$ 是在 n处第一次违反限制的序列数。C 怎么算？如果一个序列 $[..., x, y, n]$ 在 (x, y, n) 第一次违反限制，枚举 y，如果 $x = (y \oplus n) < y$，C就应该加上$f(x)$。

时间复杂度 $O(n^2)$，期望得分 60 分。

异或序列

- 算法三

对于 $\sum_{i<n} f(i)$ 这部分，可以用前缀和优化。

对于$C = \sum_{y<n}[(y \oplus n) < y]f(y \oplus n)$，考虑满足条件的 y 有何性质:
实际上只要 y 的二进制最高位和 n 相同就有 $(y \oplus n) < y$ 了。此时，枚举最高在哪一位 y 和 n 不同，则比这一位低的位可以任取，这样 $(y \oplus n)$ 就属于一段特定的区间。因此我们把上述求和拆成了 $O(\log n)$ 段区间求和，同样可以前缀和。

时间复杂度 $O(n \log n)$，期望得分 100 分。

数圈圈

- 算法一

枚举每种情况，再暴力判断条件是否满足。

可通过子任务 1，期望得分 5。

- 算法二

预处理从 x 开始往右、往下最长的一段连续相同字符，再暴力枚举，这时可以 $O(1)$判断了。

时间复杂度 $O(n^2m^2)$，可通过子任务 1,2，期望得分 15。

数圈圈

- 算法三

子任务 3 中，只需要求有多少个矩形，这很容易 $O(1)$ 计算。

子任务 4 中，注意圈的大小肯定不大，因此小范围内枚举即可。结合前述期望得分 40。

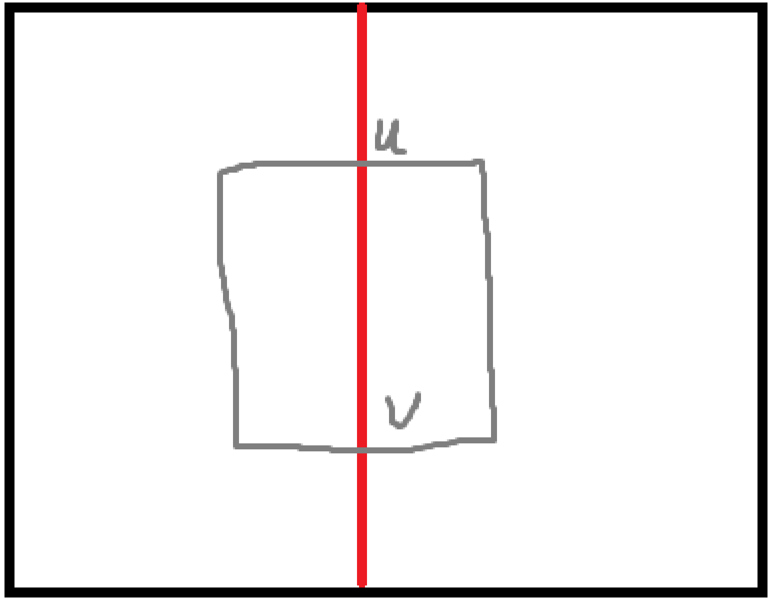
数圈圈

- 算法四

考虑对矩阵分治，每次选择长的一边割开，然后计算经过中线（中线长度等于短的一边长度）的“圈”数量。不妨假设是竖着切的。

在下图中，我们对每一对 (u, v)求出左边的 匚 和右边对称的形状数量，最终乘起来即可。因为两边是对称的，下面就只描述怎么求 匚 数量了。

数圈圈



数圈圈

- 算法四

设 L_u 表示 u 往左，相同字符至多能延伸到第几列；$D_{x,y}$ 表示(x,y) 往下，相同字符至多能延伸到第几行。则我们要求的是 $\sum_{i=\max(L_u,L_v)}^{\text{mid}}[D_{i,u}\geq v]$

若$L_u\geq L_v$，就是求：$\sum_{i=L_u}^{\text{mid}}[D_{i,u}\geq v]$

因为 L_u是固定的，所以这里可以用一个桶存下所有的 $D_{i,u}$，做个后缀和就可以 $O(1)$ 求出了。

否则，我们发现 $[D_{i,u}\geq v]$等价于 $[U_{i,v}\geq u]$（U 表示向上延伸最远能到第几行），所以做法是一样的。

数圈圈

时间复杂度$O(nm\log nm)$，因为递归有 $\log nm$ 层，设短边长 x 长边长 y，每层用 $x^2+xy\geq 2xy$ 也即 $O(xy)$的时间处理了询问，加起来每层是$O(nm)$。可以通过本题得到 100 分。

当然，如果固定 u 将 $\{D_{i,u}\}$ 看成一个序列，上面就是问序列的某个后缀里有几个数 $\geq x$，用树状数组容易优化到 $O(\log n)$ 单次询问。时间复杂度 $O(nm(\log nm)^2)$。也可以通过本题得到 100 分。