FOC-PINC 模拟赛题解

cdqz

时间：10 月 28 日

太空漫步（walking）

发现模式串长度比较小，我们记一下当前可能匹配到了模式串的哪些位置，然后每次转移，复杂度 $O(\left|模式串\right| \cdot \sum |s_i|)$。

树的解构（deconstruct）

10 pts

对于菊花图的情况，发现删除每条边的代价都恒为 1，则答案为 $(n-1)$。

25 pts

对于链的情况，f_i 代表一条有 i 条边的链的答案，最终答案为 f_{n-1}。考虑 j 为每次删从上到下的第几条边，那么可以得到：

$$
\begin{aligned}
f_0 &= 0, \\
f_i &= \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} f_{j-1} + f_{i-j} + i - j + 1 \\
&= \frac{1}{i}\left(2\sum_{j=0}^{i-1} f_j + \sum_{j=1}^{i} j\right).
\end{aligned}
$$

递推即可。

100 pts

考虑所有删边顺序下代价的总和，答案即为这个和除以 $(n-1)!$。考虑每个点会对答案做出多少贡献。我们用 1、2、3、...、D 来标记一个深度为 D 的点从根到这个点的 D 条边（1 号点的深度为 0），我们发现一旦 x 这条边被删去了，再删去任何编号小于 x 的边都不会有这个点的贡献。因此一个删边顺序下这个深度为 D 的点的贡献就是这个删边顺序形成的 $1 \sim D$ 的排列的单调递增栈的大小，记其为 $f(S)$，其中 S 为这个删边的排列。

但是我们确定了一种 $1 \sim D$ 的排列后，我们还有其他 $(n-1-D)$ 条边没有考虑。我们考虑依次加入这 $(n-1-D)$ 条边，第一条边有 $(D+1)$ 个位置可选，第二条有 $(D+2)$ 个.... 总共就是 $\frac{(n-1)!}{D!}$ 种方式。

那么得出这个点对答案的总贡献就是：

$$\frac{(n-1)!}{D!} \cdot \sum_{S \in \mathrm{perm}(D)} f(S).$$

其中 $\mathrm{perm}(D)$ 代表 $1 \sim D$ 所有排列的集合。

考虑化简 $f(S)$ 的期望。我们发现，一个排列中的元素 x 会出现在这个排列的单调栈里面，当且仅当比 x 大的元素没有在 x 之前出现，于是我们只考虑大于等于 x 的元素，很容易发现只有 $\frac{1}{|S|-x+1}$ 的概率 x 会在 $x \sim |S|$ 中第一个被选到，这个概率也就等于每一个点对期望的贡献。那么容易得到：

$$E(f(S)) = \sum_{i=1}^{|S|} \frac{1}{i}.$$

然后最终的答案就是：

$$\begin{aligned} ans &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{dep_i!} \left(dep_i! \cdot \sum_{j=1}^{dep_i} \frac{1}{j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{dep_i} \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

然后我们可以线性处理出这个 $\frac{1}{i}$ 的前缀和然后一遍 bfs 搞定。

Alternative Solution

考虑 x 对除自己以外的一祖先结点 y 产生 1 的贡献当且仅当 y 在 x 方向上的那条边在 x 到 y 的路径上的边中被最先删去，这种情况的概率为 $1/d$，其中 d 为 x 到 y 的路径上的边数。根据期望的线性型，答案就是上述概率之和。求和即可得到上面的式子。

小 T 与灵石（stone）

每次操作我们找到集合内点的的直径，那么每个点的 f 值为到直径中点的距离加上直径的一半。

我们找到中间这个点，若在边上就把边拆开，然后新建一个点连向中点，边权为直径的一半，标记新建的点。为了避免小数，把边权都乘 2。

新建了树后，就是求每个点到标记点的最短距离，直接 dfs 即可。

时间复杂度 $O(n \log n + Q \log n + \sum k_i)$。

小 S 埋地雷（landmine）

区间 DP，每次枚举区间最晚删除的数。

定义 $f_{i,j,t,u}$ 区间 $[i,j]$ 比 $i-1, j+1$ 早删除，在 $j+1$ 后第一个比 $[i,j]$ 晚删除的数是 t，区间最晚删除的数必需在 u 之后删除区间 $[i,j]$ 的最大代价。

转移的时候枚举区间最晚删除的数 k，左区间的 t 是 v 。于是有转移

$$f_{i,j,t,u} = \max_{k=u\to j, v=k+1\to j+1} \left(f_{i,k-1,v,u} + f_{k+1,j,t,v} + w\left(i-1,k,j+1,t\right)\right)$$

$$w\left(a,b,c,d\right) = \left(p_a - q_b\right)^2 + \left(p_b - r_c\right)^2 + \left(p_c - s_d\right)^2$$

但是这种 DP 算不了删除顺序 31425（数字小代表先删除），但可以证明这种顺序一定不会更优秀，因为 t 的取值关系只会影响到式子 $(p_{i+1} - s_{i+2})$，所以我们固定了 r 后，t 一定不会变动，这样不会更劣。

时间复杂度 $O\left(n^6\right)$，但常数非常小，可以通过。