容斥原理

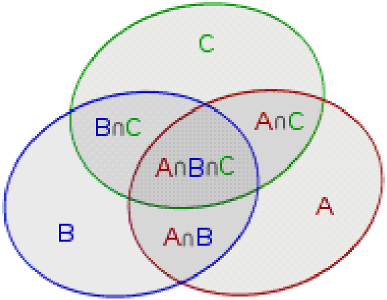
李淳风

长郡中学

2024 年 5 月 5 日

集合

设 A，B 为有限集合，两种集合操作：
交集：$A \cap B$
并集：$A \cup B$



容斥原理

设 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 为有限集合，$|S|$ 表示集合 S 的大小，则有：

$$|\bigcup_{i=1}^{n} S_i| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |S_i \cap S_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |S_i \cap S_j \cap S_k| + \cdots + (-1)^{n+1} |S_1 \cap S_2 \cdots \cap S_n|$$

当 $n = 3$ 时，就是：

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

练习题

简单数学题

求 100 以内，能被 3 或 5 或 7 整除的正整数的个数。

练习题

简单数学题

求 100 以内，能被 3 或 5 或 7 整除的正整数的个数。

假设能够被 3 整除的数集为 S_1，能够被 5 整除的数集为 S_2，能够被 7 整除的数集为 S_3，那么，能被 3 或 5 或 7 整除的正整数的个数就是 $|S_1 \cup S_2 \cup S_3|$。

练习题

简单数学题

小明班上总共有 28 人，他们刚考完期中考试，包含语数英三门科目。其中，数学 90 分以上的同学有 11 人，语文 90 分以上的有 13 人，英语 90 分以上的有 15 人。语文数学都在 90 以上的有 3 人，语文英语都在 90 以上的有 5 人，数学英语都在 90 以上的有 4 人。请问，班上语数英都在 90 以上的同学有多少人?

练习题

简单数学题

小明班上总共有 28 人，他们刚考完期中考试，包含语数英三门科目。其中，数学 90 分以上的同学有 11 人，语文 90 分以上的有 13 人，英语 90 分以上的有 15 人。语文数学都在 90 以上的有 3 人，语文英语都在 90 以上的有 5 人，数学英语都在 90 以上的有 4 人。请问，班上语数英都在 90 以上的同学有多少人?

我们设事件 A，B，C 分别表示语文，数学，英语 90 分以上的事件。那么，题目告诉了我们 $|A|, |B|, |C|, |A \cap B|, |B \cap C|, |A \cap C|, |A \cup B \cup C|$，让我们求 $|A \cap B \cap C|$。套用前面的公式就行。

例题

硬币购物

共有 4 种硬币。面值分别为 c_1, c_2, c_3, c_4。某人去商店买东西，去了 n 次，对于每次购买，他带了 d_i 枚 i 种硬币，想购买 s 价值的东西。请问每次有多少种付款方法。

$1 \le c_i, d_i, s \le 10^5, 1 \le n \le 1000$

例题

硬币购物

共有 4 种硬币。面值分别为 c_1, c_2, c_3, c_4。某人去商店买东西，去了 n 次，对于每次购买，他带了 d_i 枚 i 种硬币，想购买 s 价值的东西。请问每次有多少种付款方法。
$1 \leq c_i, d_i, s \leq 10^5, 1 \leq n \leq 1000$

不考虑硬币数量限制的话，就是一个完全背包问题，用 dp_s 表示购买价值为 s 的物品的方案数。
现在假设只考虑一种硬币，那么答案就是不考虑限制的方案数 dp_s，减去不合法的方案数，也就是使用了超过 d_1 枚第 1 种硬币的方案数，也就是 $dp_{s-(d_1+1)*c_1}$，强制使用 d_1+1 枚 1 种硬币，之后随便用的方案数。
当有两种硬币时，减去两次就会导致减重复，还需要再加回来两种都不合法的方案数，也就是加上 $dp_{s-(d_1+1)*c_1-(d_2+2)*c_2}$。
照这样推到四种硬币的情况就可以了。

例题

这道题实际上是在求什么呢?
我们用 S_i 表示满足第 i 种硬币不超过 d_i 枚的限制，那么答案就是 $|S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4|$。
但是 $|S_i|$ 不好求，反而是 S_i 的补集 $\overline{S_i}$ 很好求。
同时我们有这么一个公式 (假设全集为 U):

$$|\bigcap_{i=1}^{n} S_i| = |U| - |\bigcup_{i=1}^{n} \overline{S_i}|$$

右边可以再展开，这也是一个常用的容斥式子。

例题

染色问题

有一个棋盘，分成 n 行 m 列，共有 $n \times m$ 个小方格。现在有 c 种不同颜色的颜料，我们希望把棋盘用这些颜料染色，并满足以下规定：
1. 棋盘的每一个小方格既可以染色（染成 c 种颜色中的一种），也可以不染色。
2. 棋盘的每一行至少有一个小方格被染色。
3. 棋盘的每一列至少有一个小方格被染色。
4. 每种颜色都在棋盘上出现至少一次。
求方案数。$1 \le n, m, c \le 400$。

例题

染色问题

有一个棋盘，分成 n 行 m 列，共有 $n \times m$ 个小方格。现在有 c 种不同颜色的颜料，我们希望把棋盘用这些颜料染色，并满足以下规定：
1. 棋盘的每一个小方格既可以染色（染成 c 种颜色中的一种），也可以不染色。
2. 棋盘的每一行至少有一个小方格被染色。
3. 棋盘的每一列至少有一个小方格被染色。
4. 每种颜色都在棋盘上出现至少一次。
求方案数。$1 \le n, m, c \le 400$。

这道题有两类限制，分别是每种颜色出现至少一次，和每行每列至少有一个小方格被染色。后者比较好容斥，我们来考虑前者。
我们用 S_i 表示使用第 i 种颜色染色，且出现至少一次的方案数。那么答案就是 $|\bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i|$。

例题

但是我们也发现，直接算恰好使用 k 种颜色染色非常不好算，但是 $|\overline{S_{i_1}} \cap \overline{S_{i_2}} \cap \cdots \cap \overline{S_{i_k}}|$，$k$ 种颜色全都没有出现的方案数，比较好算。用剩下的 $c-k$ 种颜色染色，就没有了每种颜色至少出现一次的限制。

例题

但是我们也发现，直接算恰好使用 k 种颜色染色非常不好算，但是 $|\overline{S_{i_1}} \cap \overline{S_{i_2}} \cap \cdots \cap \overline{S_{i_k}}|$，$k$ 种颜色全都没有出现的方案数，比较好算。用剩下的 $c-k$ 种颜色染色，就没有了每种颜色至少出现一次的限制。
我们接着来考虑每行每列至少出现一次染色的限制，用 f_i 表示使用不超过 i 种颜色染色且满足行列限制的方案数。
首先对于行，我们可以直接计算，方案数为 $(i+1)^m-1$。
然后对于列，我们同样考虑容斥。还是一样地，考虑补集，计算若干列都没有被染色会比较好算。
所以我们可以得到公式：

$$f_i = ((i+1)^m-1)^n - \sum_{k=1}^{m} C_m^k * ((i+1)^k-1)^n * (-1)^{k-1}$$

例题

但是我们也发现，直接算恰好使用 k 种颜色染色非常不好算，但是 $|\overline{S_{i_1}} \cap \overline{S_{i_2}} \cap \cdots \cap \overline{S_{i_k}}|$，$k$ 种颜色全都没有出现的方案数，比较好算。用剩下的 $c-k$ 种颜色染色，就没有了每种颜色至少出现一次的限制。
我们接着来考虑每行每列至少出现一次染色的限制，用 f_i 表示使用不超过 i 种颜色染色且满足行列限制的方案数。
首先对于行，我们可以直接计算，方案数为 $(i+1)^m-1$。
然后对于列，我们同样考虑容斥。还是一样地，考虑补集，计算若干列都没有被染色会比较好算。
所以我们可以得到公式：

$$f_i = ((i+1)^m-1)^n - \sum_{k=1}^{m} C_m^k * ((i+1)^k-1)^n * (-1)^{k-1}$$

答案就是：

$$ans = f_c - \sum_{i=1}^{n} (-1)^i * C_c^i * f_{c-i}$$

多重集的组合数

设 S 是由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，$\cdots$，n_k 个 a_k 组成的多重集合，从 S 中取出 r 个元素组成一个多重集 (不考虑元素的顺序)，求方案数。

多重集的组合数

设 S 是由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，$\cdots$，n_k 个 a_k 组成的多重集合，从 S 中取出 r 个元素组成一个多重集 (不考虑元素的顺序)，求方案数。
不考虑限制条件，方案数为 C_{k+r-1}^{r-1}。
考虑一个限制条件，要减去的方案数即为第 i 类先选 n_i+1 个，剩下的任选，方案数为 $C_{k+r-1-n_i-1}$

多重集的组合数

设 S 是由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，$\cdots$，n_k 个 a_k 组成的多重集合，从 S 中取出 r 个元素组成一个多重集 (不考虑元素的顺序)，求方案数。
不考虑限制条件，方案数为 C_{k+r-1}^{r-1}。
考虑一个限制条件，要减去的方案数即为第 i 类先选 n_i+1 个，剩下的任选，方案数为 $C_{k+r-1-n_i-1}$
因此答案为：

$$C_{k+r-1}^{k-1}-\sum_{i=1}^{k} C_{k+r-n_i-2}^{k-1}+\sum_{1\le i<j\le k} C_{k+r-n_i-n_j-3}^{k-1}-\cdots+(-1)^k C_{k+r-(\sum n_i)-(k+1)}^{k-1}$$

莫比乌斯函数

设正整数 N 分解质因数之后表示为：$N = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_m^{c_m}$，那么莫比乌斯函数：

$$\mu(N) = \begin{cases} 0 & \exists i \in [1, m], c_i > 1 \\ 1 & m \equiv 0 (mod\ 2), \forall i \in [1, m], c_i = 1 \\ -1 & m \equiv 1 (mod\ 2), \forall i \in [1, m], c_i = 1 \end{cases}$$

通俗来说，如果 N 包含了两个相同的质因数，那么 $\mu(N) = 0$。否则，若质因数个数为偶数，$\mu(N) = 1$，若质因数个数为奇数，$\mu(N) = -1$。由于这个性质，莫比乌斯函数常用于辅助容斥。
莫比乌斯函数是积性函数，可以通过线性筛求出。

莫比乌斯函数

莫比乌斯函数有一个性质：

$$\sum_{d|N} \mu(d) = [N = 1]$$

其中 $[N = 1]$ 这个式子在 $N = 1$ 时为 1，其它时候为 0。

莫比乌斯函数

莫比乌斯函数有一个性质：

$$\sum_{d|N} \mu(d) = [N = 1]$$

其中 $[N = 1]$ 这个式子在 $N = 1$ 时为 1，其它时候为 0。
这个式子实际上就是在对 N 的质因数进行容斥。假设 N 有 m 个不同的质因数，那么：

$$\mu(N) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i * (-1)^i$$

因为从 m 个数中，取偶数个数出来，和取奇数个数出来的方案数是相同的，所有当 $N > 1$ 时 $\mu(N) = 0$。
也可以通过展开 $(1 + (-1))^m$ 来证明。

例题

Zap

有 n 组询问，每次询问给定三个正整数 a,b,d，求有多少个二元组 (x, y) 满足 $x \leq a, y \leq b$ 且 $\gcd(x, y) = d$。
$1 \leq d \leq a, b \leq 50000, 1 \leq n \leq 50000$

例题

Zap

有 n 组询问，每次询问给定三个正整数 a,b,d，求有多少个二元组 (x, y) 满足 $x \leq a, y \leq b$ 且 $\gcd(x, y) = d$。
$1 \leq d \leq a, b \leq 50000, 1 \leq n \leq 50000$

我们把要求的式子列出来，然后转化一下：

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{b}[\gcd(x, y) = d] \\
=&\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{a}{d} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{b}{d} \rfloor}[\gcd(id, jd) = d] \\
=&\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{a}{d} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{b}{d} \rfloor}[\gcd(i, j) = 1]
\end{aligned}$$

例题

然后使用莫比乌斯函数的性质转化一下：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{a}{d} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{b}{d} \rfloor}[\gcd(i,j)=1] \\
=&\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{a}{d} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{b}{d} \rfloor}\sum_{k\mid \gcd(i,j)}\mu(k) \\
=&\sum_{k=1}^{\min(\lfloor \frac{a}{d} \rfloor,\lfloor \frac{b}{d} \rfloor)}\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{a}{kd} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{b}{kd} \rfloor}\mu(k) \\
=&\sum_{k=1}^{\min(\lfloor \frac{a}{d} \rfloor,\lfloor \frac{b}{d} \rfloor)}\mu(k)\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{a}{kd} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{b}{kd} \rfloor}1
\end{aligned}
$$

然后我们就可以预处理莫比乌斯函数，对后面的部分分块计算了。

例题

不这样推式子，我们同样可以使用容斥原理来做。
首先这个问题可以化为 $d=1, a=\lfloor a/d \rfloor, b=\lfloor b/d \rfloor$，也就是求 $x \le \lfloor a/d \rfloor, y \le \lfloor b/d \rfloor, \gcd(x,y)=1$ 的二元组数目。
我们设 f_i 表示 $\gcd(x,y)$ 为 i 的倍数的二元组数目，这样非常好算，$f_i=\lfloor a/id \rfloor \lfloor b/id \rfloor$。现在我们希望能减掉多余的。
首先 $f_{p_1*p_1}$ 肯定被包含在了 f_{p_1} 中，因此像这种涉及倍数的容斥，我们可以按照质因数来考虑。

例题

不这样推式子，我们同样可以使用容斥原理来做。
首先这个问题可以化为 $d=1, a=\lfloor a/d \rfloor, b=\lfloor b/d \rfloor$，也就是求 $x \le \lfloor a/d \rfloor, y \le \lfloor b/d \rfloor, \gcd(x,y)=1$ 的二元组数目。
我们设 f_i 表示 $\gcd(x,y)$ 为 i 的倍数的二元组数目，这样非常好算，$f_i = \lfloor a/id \rfloor \lfloor b/id \rfloor$。现在我们希望能减掉多余的。
首先 $f_{p_1 * p_1}$ 肯定被包含在了 f_{p_1} 中，因此像这种涉及倍数的容斥，我们可以按照质因数来考虑。
假如只有 2 和 3 两个质因数，答案肯定是 $f_1 - f_2 - f_3 + f_6$。质因数多了之后是同样的道理，我们发现我们居然是按照质因数个数的奇偶性来判断式子前面的正负号。
因此我们可以使用莫比乌斯函数，答案为：

$$ans = \sum_{i=1}^{\min(\lfloor \frac{a}{d} \rfloor, \lfloor \frac{b}{d} \rfloor)} \mu(i) f_i$$