博弈论之 SG 函数

李淳风

长郡中学

2024 年 4 月 13 日

博弈论简介

博弈论，主要研究具有竞争或对抗性质的对象，在一定规则下产生的各种行为。博弈论考虑游戏中的个体的预测行为和实际行为，并研究它们的优化策略。

通俗地讲，博弈论主要研究的是：在一个游戏中，进行游戏的多位玩家的策略。

NIM 博弈

NIM 博弈

给定 n 堆物品，第 i 堆物品有 A_i 个。两名玩家轮流行动，每次可以任选一堆，取走任意多个物品，可以把一堆取光，但不能不取。取走最后一件物品者获胜。两个人都采取最优策略，问先手能否必胜。

NIM 博弈

NIM 博弈

给定 n 堆物品，第 i 堆物品有 A_i 个。两名玩家轮流行动，每次可以任选一堆，取走任意多个物品，可以把一堆取光，但不能不取。取走最后一件物品者获胜。两个人都采取最优策略，问先手能否必胜。

这种游戏被称为 NIM 博弈。
我们把游戏过程中面临的状态称为局面。整局游戏第一个行动的称为先手，第二个行动的称为后手。
若在某一局面下无论采取何种行动，都会输掉游戏，则称该局面必败。

采取最优策略是指，若在某一局面下存在某种行动，使得行动后对手面临必败局面，则优先采取该行动。同时，这样的局面被称为必胜。我们一般只考虑理想情况，也就是两人都没有失误，都采取最优策略时游戏的结果。
NIM 博弈不存在平局，只有先手必胜和后手必胜两种情况。

NIM 博弈

定理：NIM 博弈先手必胜，当且仅当 $A_1\ xor\ A_2\ xor\ \cdots\ xor\ A_n \neq 0$。

NIM 博弈

定理：NIM 博弈先手必胜，当且仅当 $A_1\ xor\ A_2\ xor\ \cdots\ xor\ A_n \neq 0$。
设 $A_1\ xor\ A_2\ xor\ \cdots\ xor\ A_n = x$。
首先，所有物品被取光是一个必败局面（此时对手已经胜利），此时 $x = 0$。
否则，对于一个局面，如果 $x \neq 0$，如果 x 在二进制下最高位的 1 在第 k 位，那么至少存在一个 A_i 的第 k 位为 1。此时有 $A_i\ xor\ x < A_i$，我们就从 A_i 中取走若干物品，使其变为 $A_i\ xor\ x$，就变为了一个 $x = 0$ 的局面。
而对于任意一个 $x = 0$ 的局面，由于我们至少需要取一个物品，那么无论如何取物品，一定会变成一个 $x \neq 0$ 的状态。

NIM 博弈

定理：NIM 博弈先手必胜，当且仅当 $A_1\ xor\ A_2\ xor\ \cdots\ xor\ A_n \neq 0$。
设 $A_1\ xor\ A_2\ xor\ \cdots\ xor\ A_n = x$。
首先，所有物品被取光是一个必败局面（此时对手已经胜利），此时 $x = 0$。
否则，对于一个局面，如果 $x \neq 0$，如果 x 在二进制下最高位的 1 在第 k 位，那么至少存在一个 A_i 的第 k 位为 1。此时有 $A_i\ xor\ x < A_i$，我们就从 A_i 中取走若干物品，使其变为 $A_i\ xor\ x$，就变为了一个 $x = 0$ 的局面。
而对于任意一个 $x = 0$ 的局面，由于我们至少需要取一个物品，那么无论如何取物品，一定会变成一个 $x \neq 0$ 的状态。
综上所述，$A_1\ xor\ A_2\ xor\ \cdots\ xor\ A_n \neq 0$ 为必胜局面，必胜方法为每次取走若干物品，使得 $A_1\ xor\ A_2\ xor\ \cdots\ xor\ A_n = 0$。

公平组合游戏

若一个游戏满足：

- 由两名玩家交替行动；
- 在游戏进程的任意时刻，可以执行的合法操作与轮到哪名玩家无关；
- 不能行动的玩家判负。

则称该游戏为一个公平组合游戏。
NIM 博弈属于公平组合游戏，但常见的棋类游戏，比如围棋，象棋，就不是公平组合游戏，因为它们不满足后两个条件。
博弈论在信息竞赛中的使用，大部分情况是用于解决公平组合游戏。

有向图游戏

有向图游戏

给定一张有向无环图，图中有唯一的一个起点，初始时在起点上放有一枚棋子。两名玩家交替地把这枚棋子沿着有向边移动，每次可以移动一步，无法移动者判负。

有向图游戏

有向图游戏

给定一张有向无环图，图中有唯一的一个起点，初始时在起点上放有一枚棋子。两名玩家交替地把这枚棋子沿着有向边移动，每次可以移动一步，无法移动者判负。

任何一个公平组合游戏都可以转化为有向图游戏。转化方法为把每个局面看作一个节点，并从每个局面，往进行一次合法行动能到达的局面连有向边。

Mex 运算与 SG 函数

设 S 为一个非负整数集合。定义 $mex(S)$ 为求出不在 S 中的最小非负整数，即：

$$mex(S) = \min_{x \in \mathbb{N}, x \notin S} \{x\}$$

Mex 运算与 SG 函数

设 S 为一个非负整数集合。定义 $mex(S)$ 为求出不在 S 中的最小非负整数，即：

$$mex(S) = \min_{x \in \mathbb{N}, x \notin S} \{x\}$$

在有向图游戏中，对于每个节点 x，设从 x 出发有 k 条有向边，分别到达节点 $y_1, y_2, \cdots, y_k$，定义 $SG(x)$ 为 x 的后继节点 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 的 SG 函数值构成的集合再执行 mex 运算的结果。即：

$$SG(x) = mex(\{SG(y_1), SG(y_2), \cdots, SG(y_k)\})$$

对于有向图游戏 G，我们定义它的 SG 函数值为有向图游戏起点 s 的 SG 函数值，即 $SG(G) = SG(s)$。

Mex 运算与 SG 函数

定理：

- 有向图游戏的某个局面必胜，当且仅当该局面对应节点的 SG 函数值大于 0。
- 有向图游戏的某个局面必败，当且仅当该局面对应节点的 SG 函数值等于 0。

Mex 运算与 SG 函数

定理：

- 有向图游戏的某个局面必胜，当且仅当该局面对应节点的 SG 函数值大于 0。
- 有向图游戏的某个局面必败，当且仅当该局面对应节点的 SG 函数值等于 0。

我们可以这样理解：
在一个没有出边的节点上，棋子不能移动，它的 SG 值为 0，对应必败局面。
若一个节点的某个后继节点 SG 值为 0，在 mex 运算后，该节点的 SG 值大于 0。这等价于，若一个局面的后继状态中存在必败状态，则当前局面为必胜局面。
若一个节点的后继节点 SG 值均不为 0，在 mex 运算后，该节点的 SG 值为 0。这等价于，若一个局面的后继局面全部为必胜局面，则当前局面为必败局面。

有向图游戏的和

设 $G_1, G_2, \cdots, G_m$ 是 m 个有向图游戏。定义有向图游戏 G，它的规则是每次任选一个有向图游戏 G_i，并在 G_i 上行动一步。G 被称为有向图游戏 $G_1, G_2, \cdots, G_m$ 的和。
有向图游戏的和的 SG 函数值等于它包含的各个子游戏 SG 函数值的异或和。即：

$$SG(G) = SG(G_1)\ xor\ SG(G_2)\ xor\ \cdots\ xor\ SG(G_m)$$

其证明方法与 NIM 博弈类似。

例题

Cutting Game

给定一张 N*M 的矩形网格纸，两名玩家轮流行动。在每一次行动中，可以任选一张矩形网格纸，沿着某一行或者某一列的格线，把它剪成两部分。首先剪出 1*1 的玩家获胜。两名玩家都采取最优策略行动，求先手是否必胜。

$1 \leq N, M \leq 200$

例题

Cutting Game

给定一张 N*M 的矩形网格纸，两名玩家轮流行动。在每一次行动中，可以任选一张矩形网格纸，沿着某一行或者某一列的格线，把它剪成两部分。首先剪出 1*1 的玩家获胜。两名玩家都采取最优策略行动，求先手是否必胜。
$1 \leq N, M \leq 200$

首先，由于双方都采用最优策略，他们一定不会主动剪出 1*X 或 X*1 的纸张，否则下一步对手就获胜了。
而除了 1*X 与 X*1 以外，能够剪出 1*1 的方法必定要经过 2*2，2*3 和 3*2 三种局面之一。在这三种情况下，先手必定剪出 1*X 或 X*1，因此这三种局面都是必败局面。
因此如果我们把这三种情况作为终止局面判负，这个游戏就符合有向图游戏的特点了。

例题

对于一张 N*M 的矩形网格纸，我们可以枚举如何切割，就可以得到两个子问题。根据之前“有向图游戏的和”，这种切割的 SG 值应该是两个子问题的 SG 值的异或和。
由于我们可以有多种分割，因此我们需要对所有合法分割所产生的子局面构成的集合做 mex 运算，即可得到当下局面的 SG 值，从而判断是否先手必胜。即：

$$SG(N,M) = mex(\{SG(i,M)\ xor\ SG(N-i,M), 1 < i < N-1\}$$
$$\bigcup \{SG(N,j)\ xor\ SG(N,M-j), 1 < j < M-1\})$$

注意由于这个游戏规则与普通的有向图游戏并不一样，需要保证不剪出 1*X 与 X*1 的状态，因此在计算的时候需要保证 $i, N-i, j, N-j$ 都大于 1。