排序、二分

李淳风

长郡中学

2025 年 1 月 11 日

排序

归并排序（逆序对）
快速排序
堆排序
桶排序
基数排序

分治法

对于难以直接解决的规模较大的问题，把它分解成若干个能直接解决的相互独立的子问题，递归求出各子问题的解，再合并子问题的解，得到原问题的解。

通过减少问题的规模，逐步求解，能够明显降低解决问题的复杂度。

平面最近点对

给定平面上的 n 个点，求欧几里得距离最近的两个点的距离。
$n \leq 100000$。

平面最近点对

给定平面上的 n 个点，求欧几里得距离最近的两个点的距离。
$n \le 100000$。

将所有点按照横坐标排序，然后每次均匀分成两半。
那么最近点对要么在其中一半，要么每半各一个点组成点对。
每次我们可以先递归分治求出两边的最近点对距离 ans 。
然后将距离分割线（就是之前把点分成两半的位置）小于 ans 的点提出（否则到对面的点距离一定大于 ans ）。
再将这些点左右分别按照纵坐标排序，枚举某一侧的点，和另一侧与它纵坐标差小于 ans 的点计算距离更新答案即可。

平面最近点对

由于保证了两侧点对距离不会小于 ans ，所以与一个点纵坐标差小于 ans 的点实际上只会枚举不到 6 个（所枚举点的范围为另一侧一个高为 $2ans$ 宽为 ans 的长方形，其中最多放 6 个点使得两两距离不小于 ans 。而实际上因为要求差小于 ans 所以是小于 6 个)。
实现时可以用一个单调指针维护。
该算法的总时间复杂度为分治的复杂度 $O(nlogn)$。

三分法

三分法被用于寻找单峰函数的极值点。这里假设函数在极大值点左侧严格上升，右侧严格下降。
我们假设函数定义域为 $[l, r]$，我们在其中取两个点 $[lmid, rmid]$，把函数分为三段。
若 $f(lmid) < f(rmid)$，则 $lmid$ 和 $rmid$ 要么都处于最大值左侧，要么处于最大值两侧。无论哪种情况，极大值点都在 $lmid$ 右侧，可以令 $l = lmid$。
同理，若 $f(lmid) > f(rmid)$，则极大值点一定在 $rmid$ 左侧，可以令 $r = rmid$。
如果我们取 $lmid, rmid$ 为三等分点，那么定义域范围每次缩小 $1/3$。如果我们取 $lmid, rmid$ 在二等分点两侧极其接近的地方，那么定义域范围每次近似缩小 $1/2$。这就是三分法。
注意，我们强调了“严格”单调性。如果不严格单调，当出现 $f(lmid) = f(rmid)$ 时，我们将无法继续。

二分答案

二分答案是很常用的一种分治方法，其通过每次判断某值是否满足某条件来将求极值问题转化为判定问题。

二分答案的思想是：开始时答案可能处于一个大区间 $[l, r]$ 内，那么每一次我们令 $m = \frac{l+r}{2}$，然后通过一定方法询问答案和 m 的大小关系。这样，可能的答案区间就缩小了一半。不断如此，只要 $log(r-l+1)$ 次就可以确定答案。

因此二分答案也需要满足在答案两侧的区间内进行某种询问得到的结果应该是相反的，否则我们无法判断答案与 m 的大小关系。

跳石头

一年一度的“跳石头”比赛又要开始了！
这项比赛将在一条笔直的河道中进行，河道中分布着一些巨大岩石。组委会已经选择好了两块岩石作为比赛起点和终点。在起点和终点之间，有 N 块岩石（不含起点和终点的岩石）。在比赛过程中，选手们将从起点出发，每一步跳向相邻的岩石，直至到达终点。为了提高比赛难度，组委会计划移走一些岩石，使得选手们在比赛过程中的最短跳跃距离尽可能长。由于预算限制，组委会至多从起点和终点之间移走 M 块岩石（不能移走起点和终点的岩石）。
设起点到终点的距离为 L，$0 \leq M \leq N \leq 50000, 1 \leq L \leq 10^9$

跳石头

一年一度的“跳石头”比赛又要开始了！
这项比赛将在一条笔直的河道中进行，河道中分布着一些巨大岩石。组委会已经选择好了两块岩石作为比赛起点和终点。在起点和终点之间，有 N 块岩石（不含起点和终点的岩石）。在比赛过程中，选手们将从起点出发，每一步跳向相邻的岩石，直至到达终点。为了提高比赛难度，组委会计划移走一些岩石，使得选手们在比赛过程中的最短跳跃距离尽可能长。由于预算限制，组委会至多从起点和终点之间移走 M 块岩石（不能移走起点和终点的岩石）。
设起点到终点的距离为 L，$0 \leq M \leq N \leq 50000, 1 \leq L \leq 10^9$

很多选手看到这道题的第一思路是堆 $+$ 贪心，复杂度 $O(nlogn)$，然而这样做并不对。

跳石头

本题的正确做法是二分答案 + 贪心。
每次二分出一个答案 k ，从第二块石头到最后一块石头依次判断，如果当前石头离上一块没有被去掉的石头距离小于 k ，则说明当前石头需要被去掉。
如果去掉的石头数大于限定的 m 则说明答案小于 k ，反之说明答案大于等于 k 。
这里又可以了用贪心了，是因为我们把最优性问题转化成了一个判定性问题。

扑克牌

你有 n 种牌，第 i 种牌的数目为 c_i。另外有一种特殊的牌：joker，它的数目是 m。你可以用每种牌各一张来组成一套牌，也可以用一张 joker 和除了某一种牌以外的其他牌各一张组成 1 套牌。比如，当 $n = 3$ 时，一共有 4 种合法的套牌：$\{1, 2, 3\}$ $\{J, 2, 3\}$ $\{1, J, 3\}$ $\{1, 2, J\}$。给出 n m 和 c_i，你的任务是组成尽量多的套牌。每张牌最多只能用在一副套牌里（可以有牌不使用）

$2 \le n \le 50, 0 \le m, c_i \le 5 \times 10^8$