CQYC NOIp 模拟赛 Round 3 题解

比赛工作人员 / 题目信息

题目名称	修剪	合成	分类	游走
题目负责人	@Federico2903	@Federico2903	@FFTotoro	@**zaa**
预估难度*	*1400	*2000	*2800	*2800

*：该难度评定参考了 Codeforces 官方题目难度系统。

如果你对比赛的任何方面有任何的疑问，可以在洛谷私信负责人 @FFTotoro。感谢大家对我们的信任与支持，我们将在今后的日子里为各位选手提供更加优质的比赛。祝大家开学快乐。

题解：修剪（litchi）

先将所有 A_i 排序，考虑 $\max A_i$，显然它和 $\min A_i$ 连边可以使其贡献最小。接着考虑其他所有数，在和 $\max A_i$ 和 $\min A_i$ 之间选择一个产生贡献较小的连边即可。可以证明这样的贪心是正确的。

题解：合成（merge）

确定递推式

首先考虑将以某个端点作为左端点的子串变换为空

为了方便，将以 i 为左端点，可以变换为空的最小子串右端点的后一位记为 $t_{i,26}$。

P.S. 选择后一位仅是为了实现方便，字符串下标从 1 开始，长度为 n。

既然只有 `zz` 可以变换为空，我们就把以 i 为左端点，可以变换为 z 的最小子串右端点的后一位，记为 $t_{i,25}$；以此类推，我们将以 i 为左端点，可以变换为第 j 个字母的最小子串右端点的后一位记为 $t_{i,j}$ （`a` 为第0个字母）。

如何求出 $t_{i,j}$ 的值呢？我们可以得到下列递推式：

$$t_{i,j}=\begin{cases}i+1 & j=s_i\\ t_{t_{i,j-1},j-1} & j>s_i\\ t_{t_{i,26},j} & j<s_i\end{cases}$$

其中 s_i 表示输入字符串的第i位字母的编号，i 从 n 到 1 遍历。

这个式子中，第一行是初始条件，第二行表示 j 从两个可以变为 $j-1$ 的子串合并而来，第三行表示可以先消除以 i 开头的一段子串，再从该子串右端点的后一位开始消除为 j。

确定边界条件

因为我们取了目标子串的后一位，所以子串的最后一定要有一个占位符（编号 $n+1$）；为了方便，我们再规定占位符的后一位是结束符（$n+2$），并把 $t_{n+1,x}$ 和 $t_{n+2,x}$ 设为 $n+2$。

这样显然会超时；我们可以倍增处理以 i 为左端点第 2^j 短的子串，记为 $f_{i,j}$。求得递推式 $f_{i,j}=f_{f_{i,j-1},j-1}$。

起始条件为 $f_{i,0}=t_{i,26}$；跳转时，直接从大往小试即可。

题解：分类（sort）

考虑到一个简单的性质：如果一个串中有连续的两个相同的字符，那么可以将它们视为一个字符；于是最后两个串都形如 `abab...abab`，我们的目标是让两个串变为一个 `a` 一个 `b`。

接着分类讨论，对于两个字符串首字母相同的情况（不妨设为 `a`），最优的做法是选择一个串的 `ab` 与另一个串的 `a` 交换；这样可以让总长度减少 2；由此可得应在其中一个字符串中选择长度为奇数的前缀，另一个字符串中选择长度为偶数的前缀；类似的，如果首字母不同，那么应选择两个长度为奇数的前缀。

对于边界情况：其中一个字符串长度为 1，直接暴力做，此时每次只能减少一个字符；两个字符串长度均为 2，此时也是每次只能减少一个字符。对于这些情况，字符串的长度可能都很小——于是在上面的操作中可以尽量让两个字符串的长度平均。

题解：游走（run）

对于禁用每段区间 $[l,r]$ 我们可以看成只能使用 $[1,l-1]\cup[r+1,m]$ 这里面的边，然后我们可以将边复制两边，这样我们就可以将它看作只是用区间 $[r+1,l-1+m]$ 中的边。

考虑暴力该怎么做，就是可以对于每个左端点 i 我们二分一下最后一个位置 j，使得 $[i,j]$ 之间的边组成二分图。判断二分图的方法就是可以用并查集维护的，就是将一个点拆成两个点 $x,x+n$，每次将合并 u,v 的时候就只用合并 $(u,v+n),(v,u+n)$，如果 u,v 在同一个集合中那么合并之后就是有奇环的。

记 f_i 表示二分的最后一个位置。然后不难发现 f_i 是满足单调性的；可以考虑整体二分，将并查集改成可撤销的并查集的。

你可能会发现代码跑的很慢，我们可以在整体二分 $[l,r,L,R]$ 的时候保留重复要算的区间 $[r,L]$ 就行了，这样能快很多；时间复杂度是 $O(n\log^2 n)$，使用 LCT 可以做到 $O(n\log n)$ 的复杂度。