二分图的覆盖、独立集、最大带权匹配

李淳风

长郡中学

2025 年 1 月 9 日

回顾

如果一张无向图的 N 个节点 $(N > 2)$ 可以分成 A, B 两个非空集合，其中 $A \cap B = \varnothing$，并且在同一集合内的点之间都没有边相连，那么称这张无向图为一张二分图，A, B 分别称为二分图的左部和右部。
一张图是二分图等价于这张图没有奇环。

增广路：一条连接两个非匹配点的路径，非匹配边与匹配边交替出现
最大匹配：选出尽量多的边，使得任意两条边没有公共端点。
求二分图最大匹配：匈牙利算法（增广路算法）
二分图最大匹配模型：节点能分成独立的两个集合，每个集合内部没有边；每个节点只能与 1 条匹配边相连

二分图最小点覆盖

给定一张二分图，求出一个最小的点集 S，使得图中任意一条边都有至少一个端点属于 S。这个问题被称为二分图的最小点覆盖，简称最小覆盖。

二分图最小点覆盖

给定一张二分图，求出一个最小的点集 S，使得图中任意一条边都有至少一个端点属于 S。这个问题被称为二分图的最小点覆盖，简称最小覆盖。

柯尼希定理：二分图最小点覆盖的点数 = 最大匹配数
首先，由于最大匹配中的边互不相交，所以至少需要从每条匹配边中选出一个端点。因此，假设最大匹配数为 M，我们只要 M 个节点构造出一种方案，定理就能得证。
我们在求出二分图的最大匹配之后，从左部每个非匹配点出发，再执行依次寻找增广路的过程（一定找不到），标记所有访问过的节点；取出左部未被标记的点、右部被标记的点，就得到了二分图的最小点覆盖。

二分图最小点覆盖

在这个构造方法中：

- 左部非匹配点一定都被标记——它们是出发点
- 右部非匹配点一定都没有被标记——否则就找到了增广路
- 一对匹配点 (x, y) 要么都被标记，要么都没有被标记——因为在寻找增广路的过程中，x 只能通过 y 到达。x 不是出发点，所以如果 y 被标记了，x 就会被标记，否则就都不会被标记。

再来看看这样是否覆盖了所有的边：

- 匹配边一定被覆盖——两个匹配点都没被标记就取了左部点，都被标记了就取了右部点。
- 连接两个非匹配点的边一定不存在，否则就找到了增广路。
- 连接左部非匹配点 i、右部匹配点 j 的边——i 是出发点，所以 j 一定会被标记，会取点 j。
- 连接左部匹配点 i、右部非匹配点 j 的边——i 一定没有被访问，否则再走到 j 就会找到增广路。所以会取点 i。

我们也可以看作在每条极长交错路（连接匹配点和非匹配点的路径，匹配边和非匹配边交错出现）隔位选点，剩下的部分就是单独的匹配边，任意取点即可。

例题

Machine Schedule

有两台机器 A，B 以及 n 个任务。每台机器有 m 种不同的模式。
对于每个任务 $i (1 \leq i \leq n)$，给定两个整数 a_i, b_i，表示该任务如果在 A 上执行，需要设置模式为 a_i，如果在 B 上执行，需要设置模式为 b_i。
任务可以以任意顺序被执行，但每台机器转换一次模式就要重启一次。
求怎样分配任务并合理安排顺序，能使机器重启次数最少。
$1 \leq n, m \leq 100, 1 \leq a_i, b_i \leq m$。

例题

Machine Schedule

有两台机器 A，B 以及 n 个任务。每台机器有 m 种不同的模式。
对于每个任务 $i(1 \le i \le n)$，给定两个整数 a_i, b_i，表示该任务如果在 A 上执行，需要设置模式为 a_i，如果在 B 上执行，需要设置模式为 b_i。
任务可以以任意顺序被执行，但每台机器转换一次模式就要重启一次。
求怎样分配任务并合理安排顺序，能使机器重启次数最少。
$1 \le n, m \le 100, 1 \le a_i, b_i \le m$。

在二分图最大匹配模型中，往往是在有限制条件的情况下放置物品，我们需要构造出两个点集，每个集合内部没有边，并且每个点最多只能和一条边相连，每条边就表示一个物品。
二分图最小覆盖的模型特点：每条边有两个端点，二者至少选择一个。

在这道题目中，由于每个任务要么在 A 上以 a_i 模式执行，要么在 B 上以 b_i 模式执行，我们就可以把 A 的 m 种模式作为左部点，B 的 m 种模式作为右部点，每个任务作为无向边，连接左部的 a_i 号点与右部的 b_i 号点。这张二分图的最小覆盖就等价于用尽量少的模式来执行所有任务。

例题

Muddy Fields

在一块 $n*m$ 的网格状地面上，有一些格子是泥泞的，其它格子是干净的。现在需要用一些宽度为 1、长度任意的木板把泥地盖住，同时不能盖住干净的地面。每块木板必须覆盖若干个完整的格子，木板可以重叠。求最少需要多少块木板。

$n,m\le 50$。

例题

Muddy Fields

在一块 $n * m$ 的网格状地面上，有一些格子是泥泞的，其它格子是干净的。现在需要用一些宽度为 1、长度任意的木板把泥地盖住，同时不能盖住干净的地面。每块木板必须覆盖若干个完整的格子，木板可以重叠。求最少需要多少块木板。
$n, m \leq 50$。

每块泥地 (i, j) 要么被第 i 行横着的木板盖住，要么被第 j 列竖着的木板盖住，二者至少选择一个，这是本题的最小覆盖的特点。
由于木板可以重叠，所以每一块木板肯定是在不覆盖干净格子的前提下尽量长。我们可以预处理出所有这样的极长“行泥泞块”与“列泥泞块”，把“行泥泞块”作为左部点，“列泥泞块”作为右部点，每个泥泞格子就对应了他所属的“行泥泞块”与“列泥泞块”之间的边。
求出二分图的最小覆盖，就是用最少的木板覆盖所有的泥地。

二分图最大独立集

给定一张无向图，任意两点之间都没有边相连的点的集合被称为独立集。包含点数最多的一个就是最大独立集。
对应的，任意两点之间都有边相连的点的集合被称为团。包含点数最多的一个就是最大团。
定义无向图 G 的补图 G' 为，点集不变，包含了所有在完全图中、不在 G 中的边的图。无向图 G 的最大团等于其补图 G' 的最大独立集。对于某些题目，补图转化思想能称为突破口。

二分图最大独立集

给定一张无向图，任意两点之间都没有边相连的点的集合被称为独立集。包含点数最多的一个就是最大独立集。
对应的，任意两点之间都有边相连的点的集合被称为团。包含点数最多的一个就是最大团。
定义无向图 G 的补图 G' 为，点集不变，包含了所有在完全图中、不在 G 中的边的图。无向图 G 的最大团等于其补图 G' 的最大独立集。对于某些题目，补图转化思想能称为突破口。

设 G 是有 n 个节点的二分图，G 最大独立集的大小等于 n 减去最大匹配数。
证明：考虑 G 的点覆盖的点集 S，对于 G 中的任意一条边都至少有一个端点在 S 中；那么对于 S 的补集 S'，G 中任意一条边至多有一个端点在 S' 中，S' 是独立集。反过来也成立。而最小点覆盖数等于最大匹配数，所以最大独立集等于 n 减最大匹配数。
对于一般图，最大团、最小点覆盖、最大独立集问题都是 NP-Hard 问题。

例题

骑士放置

给定一个 $n*m$ 的棋盘，有一些格子禁止放棋子。问棋盘上最多能放多少个不能互相攻击的骑士（国际象棋的骑士，类似于中国象棋的马，走“日”字，但没有“别马腿”的规则）
$n, m \leq 100$

例题

骑士放置

给定一个 $n*m$ 的棋盘，有一些格子禁止放棋子。问棋盘上最多能放多少个不能互相攻击的骑士（国际象棋的骑士，类似于中国象棋的马，走“日”字，但没有“别马腿”的规则）
$n, m \leq 100$

我们对棋盘按照格子行数与列数和奇偶性的进行黑白染色，如果两个格子是“日”字的两个对角，那么它们的颜色一定不同。所以我们对每对“日”字的对角格子对应的节点连边，就建出来了一张二分图。
这张二分图的最大独立集就是答案。

有向无环图的最小路径点覆盖

给定一张有向无环图，要求用尽量少的不相交的简单路径，覆盖有向无环图的所有顶点（每个顶点恰好被覆盖一次）。这个问题被称为有向无环图的最小路径点覆盖，简称“最小路径覆盖”。

设原来的有向无环图为 $G=(V,E), n=|V|$（V 为点集，E 为边集）。把 G 中的每个点拆成编号为 x 和 $x+n$ 的两个点。建立一张新的二分图，$1\sim n$ 作为二分图左部点，$n+1\sim 2n$ 作为二分图右部点，对于原图的每条有向边 (x,y)，在二分图的左部点 x 与右部点 $y+n$ 之间连边。最终得到的二分图被称为 G 的拆点二分图，记为 G_2。

有向无环图的最小路径点覆盖

有向无环图 G 的最小路径点覆盖包含的路径条数，等于 n 减去拆点二分图 G_2 的最大匹配数。

证明:
在有向无环图的最小路径覆盖中，对于任意一个点 $x \in V$，因为路径不相交，所以 x 的入度和出度都不超过 1。
因此，最小路径覆盖中的所有边，在拆点二分图 G_2 中构成一组匹配。
最小路径覆盖中每条边 (x, y) 的起点 x 与二分图每条匹配边 $(x, y + n)$ 的左部点 x 是一一对应的。
特别地，对于每条路径的终点 t，因为 t 没有出边，所以在二分图中 t 匹配失败。即路径的终点和二分图左部的非匹配点是一一对应的。
路径覆盖包含的路径条数最少，等价于路径的终点数最少，等价于二分图左部非匹配点最少
故 G 的最小路径覆盖的路径数等于 n 减去二分图 G_2 的最大匹配数。
你也可以理解为初始每个点都是一条路径，共有 n 条；每次进行一次匹配相当于把两条路径首尾相连，需要用到的路径数就减一。

有向无环图的最小路径可重复点覆盖

给定一张有向无环图，要求用尽量少的可相交简单路径，覆盖有向无环图的所有顶点（一个点可以被覆盖多次）。

在最小路径可重复点覆盖中，如果两条路径 $\cdots \to u \to p \to v \to \cdots$ 与 $\cdots \to x \to p \to y \to \cdots$ 在点 p 相交，我们可以直接在原图中添加一条有向边 (x, y)，让第二条路径直接走 $x \to y$，就可以避免重复覆盖点 p。
进一步地，如果我们把原图中所有间接连通的点对 x, y 直接连上有向边 (x, y)，那么任何“有路径相交的点覆盖”都能转化为“没有路径相交的点覆盖”。
所以我们只需要先把问题进行转化，再用之前的做法求解即可。

例题

Vani 和 Cl2 捉迷藏

Vani 和 cl2 在一片树林里捉迷藏。这片树林里有 n 座房子，m 条有向道路，组成了一张有向无环图。
如果从房子 A 沿着路走下去能到房子 B，那么在 A 和 B 里的人是能互相望见的，否则是看不到对方的。
现在 cl2 要在这 n 座房子里选择 K 座作为藏身点，同时 Vani 也专挑 cl2 作为藏身点的房子进去寻找。为了避免被 Vani 看见，cl2 要求这 K 个藏身点的任意两个之间都没有路径相连。
现在 cl2 想知道，他最多能选出多少个藏身点。
$n \le 200, m \le 30000$。

例题

Vani 和 Cl2 捉迷藏

Vani 和 cl2 在一片树林里捉迷藏。这片树林里有 n 座房子，m 条有向道路，组成了一张有向无环图。
如果从房子 A 沿着路走下去能到房子 B，那么在 A 和 B 里的人是能互相望见的，否则是看不到对方的。
现在 cl2 要在这 n 座房子里选择 K 座作为藏身点，同时 Vani 也专挑 cl2 作为藏身点的房子进去寻找。为了避免被 Vani 看见，cl2 要求这 K 个藏身点的任意两个之间都没有路径相连。
现在 cl2 想知道，他最多能选出多少个藏身点。
$n \leq 200, m \leq 30000$。

题目所求的最多能选取的藏身点个数，就等于最小路径可重复点覆盖包含的路径条数。我们可以先对题目给出的有向无环图 G 传递闭包，得到一张新的有向无环图 G'，然后求出拆点二分图 G'_2 的最大匹配 x，$n - x$ 就是答案。

Vani 和 Cl2 捉迷藏

我们来考虑证明一下。设藏身点集合为 $hide$，G' 的最小路径点覆盖集合为 $path$，显然，H 中的每条路径上至多选出一个点。由于 H 覆盖了所有节点，所以我们只需要找出一种方法，使得 $|S| = |H|$，即可完成证明。

我们先求出 H 的具体方案。设节点 x 在拆点二分图 G_2' 中对应左部点 x 与右部点 x'，G_2' 已经求出了最大匹配。

- 一次考虑每一个左部的非匹配点 x_0。
- 从 x_0 出发，不断访问 $x_0, match[x_0'], match[match[x_0']], \cdots$，直到到达一个非匹配的左部点 y_0，满足它对应的右部点 y_0' 是非匹配点。
- 在 G' 中，节点 x_0, y_0 以及刚才经过的所有点构成一条路径，其中 y_0 是起点，x_0 是终点。

上述找到的所有路径互不相交，就是覆盖 G' 中所有点的一个方案。

Vani 和 Cl2 捉迷藏

接着我们再来构造一种从每条路径上选出一个藏身点的方案。

- 选出 H 中每条路径的终点 x_0，构成一个集合 E。
- 求出从 E 中节点出发，走一条边，到达的节点集合 $next(E)$。
- 根据题目（传递闭包）的性质，G 中任意两个藏身点没有路径相连，等价于 G' 中任意两个藏身点都没有边相连。因此，若 $E \cap next(E) = \varnothing$，则 $S = E$ 即为所求。
- 否则，考虑 $E \cap next(E)$ 中的每个节点 e，沿着 e 所在的路径向上走，直到一个节点 $e' \notin next(E)$。从 E 中删除 e，加入 e'。
- 对于修改后的集合，重复操作 $3 \sim 4$，直到 $E \cap next(E) = \varnothing$。

可以证明，在任意时刻，我们一定可以找到合法的 e'。因为如果不存在这样的 e'，就说明 e 所在路径（记为 pe）上的所有点都能被其它路径的终点到达。设 pe 的起点是 y_0，我们可以延长那条到达 y_0 的路径，代替 pe 去覆盖 pe 上的所有节点，使得 $path$ 集合中的路径减少一条，与 $path$ 的最小性矛盾。