基础算法

yydtq

长沙市长郡中学

2024.08.06

导读

什么是基础算法?

导读

什么是基础算法?

在本节课中，贪心、二分、排序以及部分构造方式被称为基础算法，我们将通过八道题来对基础算法进行一些简单的认识。

第 1 题，CF1991G，消除构造方法

给定 $n \times m$ 的矩形和定值 k，你需要按照给定的顺序放置 q 个 $1 \times k$ 或 $k \times 1$ 的长条，不能出界。
每次放置之后，如果某一些行和列全部都放满了，那么这些行和列会同时消失。
求一种成功的放置方案，或报告无解。
$n, m \leq 100, \sum q \leq 1000.$

第 1 题，CF1991G，消除构造方法

发现很难想象到无解的情况，而且样例全部有解，所以猜测没有无解的情况。

发现很难想象到无解的情况，而且样例全部有解，所以猜测没有无解的情况。

对于 $1 \times k$ 的矩形，直接放置在 $(1,1),(2,1),\ldots,(n,1)$ 的位置。

第 1 题，CF1991G，消除构造方法

发现很难想象到无解的情况，而且样例全部有解，所以猜测没有无解的情况。

对于 $1 \times k$ 的矩形，直接放置在 $(1,1),(2,1),\dots,(n,1)$ 的位置。

对于 $k \times 1$ 的矩形，直接放置在 $(n,m),(n,m-1),\dots,(n,1)$ 的位置。

第 1 题，CF1991G，消除构造方法

发现很难想象到无解的情况，而且样例全部有解，所以猜测没有无解的情况。

对于 $1 \times k$ 的矩形，直接放置在 $(1,1),(2,1),\ldots,(n,1)$ 的位置。

对于 $k \times 1$ 的矩形，直接放置在 $(n,m),(n,m-1),\ldots,(n,1)$ 的位置。

发现如果两种矩形同时存在，可能产生碰撞，但是这里碰撞之后的结果是有规律的。

第 1 题，CF1991G，消除构造方法

发现很难想象到无解的情况，而且样例全部有解，所以猜测没有无解的情况。

对于 $1 \times k$ 的矩形，直接放置在 $(1,1),(2,1),\ldots,(n,1)$ 的位置。

对于 $k \times 1$ 的矩形，直接放置在 $(n,m),(n,m-1),\ldots,(n,1)$ 的位置。

发现如果两种矩形同时存在，可能产生碰撞，但是这里碰撞之后的结果是有规律的。

于是可以在碰撞之后直接消除，在之后的放置过程中，优先和对方消除，无法消除再找到最小的可放置位置。

第 1 题，CF1991G，消除构造方法

发现很难想象到无解的情况，而且样例全部有解，所以猜测没有无解的情况。

对于 $1 \times k$ 的矩形，直接放置在 $(1,1),(2,1),\ldots,(n,1)$ 的位置。

对于 $k \times 1$ 的矩形，直接放置在 $(n,m),(n,m-1),\ldots,(n,1)$ 的位置。

发现如果两种矩形同时存在，可能产生碰撞，但是这里碰撞之后的结果是有规律的。

于是可以在碰撞之后直接消除，在之后的放置过程中，优先和对方消除，无法消除再找到最小的可放置位置。

发现这样总是可以找到放置的位置，可以通过，时间复杂度 $O(nm\sum q)$。

第 2 题，CF1700G，贪心就近原则

给定两个 $2 \times n$ 的 01 矩阵 A, B。
尽量少地交换 A 中相邻（有公共边）两数，使得 $A = B$。
输出交换次数，$n \leq 2 \times 10^5$。

第 2 题，CF1700G，贪心就近原则

设 $C_{i,j} = A_{i,j} - B_{i,j}$，发现我们需要用最短的距离匹配 1 和 -1。

设 $C_{i,j} = A_{i,j} - B_{i,j}$，发现我们需要用最短的距离匹配 1 和 -1。

根据就近原则，我们可以不断尽量让 $C_{1/2,[1,r]}$ 进行匹配。
换句话说，从 $[1, r]$ 走到 $[1, r+1]$ 时，1 和 -1 不会同时存在。

第 2 题，CF1700G，贪心就近原则

设 $C_{i,j} = A_{i,j} - B_{i,j}$，发现我们需要用最短的距离匹配 1 和 -1。

根据就近原则，我们可以不断尽量让 $C_{1/2,[1,r]}$ 进行匹配。
换句话说，从 $[1, r]$ 走到 $[1, r+1]$ 时，1 和 -1 不会同时存在。

不过我们可以直接维护这些 1 或 -1 在第 1/2 行分别有多少个。

第 2 题，CF1700G，贪心就近原则

设 $C_{i,j} = A_{i,j} - B_{i,j}$，发现我们需要用最短的距离匹配 1 和 -1。

根据就近原则，我们可以不断尽量让 $C_{1/2,[1,r]}$ 进行匹配。
换句话说，从 $[1, r]$ 走到 $[1, r + 1]$ 时，1 和 -1 不会同时存在。

不过我们可以直接维护这些 1 或 -1 在第 1/2 行分别有多少个。

在行走的过程中同时维护走的步数。

第 2 题，CF1700G，贪心就近原则

设 $C_{i,j} = A_{i,j} - B_{i,j}$，发现我们需要用最短的距离匹配 1 和 -1。

根据就近原则，我们可以不断尽量让 $C_{1/2,[1,r]}$ 进行匹配。
换句话说，从 $[1, r]$ 走到 $[1, r+1]$ 时，1 和 -1 不会同时存在。

不过我们可以直接维护这些 1 或 -1 在第 1/2 行分别有多少个。

在行走的过程中同时维护走的步数。

可以通过，时间复杂度 $O(n)$。

第 3 题，P10220，贪心字典序、二分

省选联考 2024 迷宫守卫。

考虑求一棵子树的答案，我们会先在合法代价范围内，先最小化字典序，再最小化代价。

递推求出每棵子树能够走到的最小的第一个点，从而决定当前需不需要激活。

时间复杂度 $O(n^2 2^n)$，可以通过。

第 4 题，CF1981D，质因数贪心、无向图构造

构造长度为 n 的正整数序列 $a_i \le 3 \times 10^5$。
要求 $\forall 1 \le i < j < n, a_i a_{i+1} \ne a_j a_{j+1}$。
使得不同的 a_i 的值个数尽量少，$\sum n \le 10^6$。

容易发现 a_i 全部使用质数很优。

容易发现 a_i 全部使用质数很优。

但我们至少要满足 $\{a_i, a_{i+1}\} \neq \{a_j, a_{j+1}\}$。于是这形如构造一个尽量长的路径，使得每一条无向边至多经过一次。

容易发现 a_i 全部使用质数很优。

但我们至少要满足 $\{a_i, a_{i+1}\} \neq \{a_j, a_{j+1}\}$。于是这形如构造一个尽量长的路径，使得每一条无向边至多经过一次。

可以考虑使用构造：$x, x+1, x+2, \dots, x+n(x), x+2, x+4, \dots$ 的构造。

第 4 题，CF1981D，质因数贪心、无向图构造

容易发现 a_i 全部使用质数很优。

但我们至少要满足 $\{a_i, a_{i+1}\} \neq \{a_j, a_{j+1}\}$。于是这形如构造一个尽量长的路径，使得每一条无向边至多经过一次。

可以考虑使用构造：$x, x+1, x+2, \ldots, x+n(x), x+2, x+4, \ldots$ 的构造。

为了防止算重，对于一个 $x \in [0, n)$，选取的公差 k 需要满足 $x < \gcd(n, k)$。

第 4 题，CF1981D，质因数贪心、无向图构造

容易发现 a_i 全部使用质数很优。

但我们至少要满足 $\{a_i, a_{i+1}\} \neq \{a_j, a_{j+1}\}$。于是这形如构造一个尽量长的路径，使得每一条无向边至多经过一次。

可以考虑使用构造：$x, x+1, x+2, \ldots, x+n(x), x+2, x+4, \ldots$ 的构造。

为了防止算重，对于一个 $x \in [0, n)$，选取的公差 k 需要满足 $x < \gcd(n, k)$。

发现这种构造方法在 n 是奇数的时候不能遍历全图，会有 $\dfrac{n-3}{2}$ 条边没有访问，但这依旧是最优情况。

容易发现 a_i 全部使用质数很优。

但我们至少要满足 $\{a_i, a_{i+1}\} \neq \{a_j, a_{j+1}\}$。于是这形如构造一个尽量长的路径，使得每一条无向边至多经过一次。

可以考虑使用构造：$x, x+1, x+2, \dots, x+n(x), x+2, x+4, \dots$ 的构造。

为了防止算重，对于一个 $x \in [0, n)$，选取的公差 k 需要满足 $x < \gcd(n, k)$。

发现这种构造方法在 n 是奇数的时候不能遍历全图，会有 $\dfrac{n-3}{2}$ 条边没有访问，但这依旧是最优情况。

也可以从欧拉路径的角度得出构造方法。

NOI 2024 D1T2 百万富翁。

NOI 2024 D1T2 百万富翁。

考虑求出 $W(l, r)$ 表示一次请求将 r 个候选最值缩减成 l 个的最小代价。

NOI 2024 D1T2 百万富翁。

考虑求出 $W(l,r)$ 表示一次请求将 r 个候选最值缩减成 l 个的最小代价。

发现这个代价满足四边形不等式，于是进行 8 次决策单调性 dp 即可。

第 5 题，P10786，贪心交互策略，四边形不等式

NOI 2024 D1T2 百万富翁。

考虑求出 $W(l, r)$ 表示一次请求将 r 个候选最值缩减成 l 个的最小代价。

发现这个代价满足四边形不等式，于是进行 8 次决策单调性 dp 即可。

时间复杂度 $O(1600n \log n)$，可以在有限时间内表出决策点。

NOI 2024 D1T2 百万富翁。

考虑求出 $W(l,r)$ 表示一次请求将 r 个候选最值缩减成 l 个的最小代价。

发现这个代价满足四边形不等式，于是进行 8 次决策单调性 dp 即可。

时间复杂度 $O(1600n\log n)$，可以在有限时间内表出决策点。

然后直接模拟即可。

第 6 题，CF1936F，黄金分割维护三分

给定 n 个圆 $(x_i, y_i, r_i), |x|, |y| \le 10^6, r \le 2 \times 10^6, n \le 10^5$。
求一个最大的圆，使得其被这 n 个圆包含，输出最大的半径。
CF 上时间限制 2 秒，精度为 10^{-7}。

等价于求 $\max\limits_{(x,y)}\min\limits_{i=1}^{n}(r_i-\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2})$。

等价于求 $\max\limits_{(x,y)} \min\limits_{i=1}^{n} (r_i - \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2})$。

猜测这具有可三分性，可以先三分 x，在 check 时三分 y。

第 6 题，CF1936F，黄金分割维护三分

等价于求 $\max\limits_{(x,y)} \min\limits_{i=1}^{n} (r_i - \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2})$。

猜测这具有可三分性，可以先三分 x，在 check 时三分 y。

这里需要分别三分约 70 次才能保证精度，需要进行 $70^2 \times 10^5 = 4.9 \times 10^8$ 次浮点数运算，无法通过。

等价于求 $\max\limits_{(x,y)} \min\limits_{i=1}^{n} (r_i - \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2})$。

猜测这具有可三分性，可以先三分 x，在 check 时三分 y。

这里需要分别三分约 70 次才能保证精度，需要进行 $70^2 \times 10^5 = 4.9 \times 10^8$ 次浮点数运算，无法通过。

考虑每次并不是使用二等分点，而是黄金分割点，这样无论往那个方向递归，总能使用到这个方向的信息。

第 6 题，CF1936F，黄金分割维护三分

等价于求 $\max\limits_{(x,y)} \min\limits_{i=1}^{n} (r_i - \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2})$。

猜测这具有可三分性，可以先三分 x，在 check 时三分 y。

这里需要分别三分约 70 次才能保证精度，需要进行 $70^2 \times 10^5 = 4.9 \times 10^8$ 次浮点数运算，无法通过。

考虑每次并不是使用二等分点，而是黄金分割点，这样无论往那个方向递归，总能使用到这个方向的信息。

使得常数减半，然后再进行少量卡常、三分次数缩减，能将时间缩小到 $1.9s$，可以通过。

第 7 题，P10200，按位贪心

给定 $n, k1, k2$，和长度为 n 的序列 a_i。
定义一个可重集的权值 $H(S)$ 为集合内任意两个不同元素（值可以相同）异或和的最小值。
大小为 1 可重集权值为 $+\infty$。
求将序列划分成两个非空可重集 $S1, S2$ 的方案数，使得 $H(S1) \geq k1, H(S2) \geq k2$。
答案对 $10^9 + 7$ 取模，$n \leq 2 \times 10^5, 0 \leq a_i, k1, k2 < 2^{60}$。

第 7 题，P10200，按位贪心

设 $h(x) = \lfloor \log_2 x \rfloor$，假设 $h(k1) < h(k2)$。

第 7 题，P10200，按位贪心

设 $h(x) = \lfloor \log_2 x \rfloor$，假设 $h(k1) < h(k2)$。

考虑将第 $h(k2)$ 以上的位相同的数放到一起计算，然后将答案组合起来。

第 7 题，P10200，按位贪心

设 $h(x) = \lfloor \log_2 x \rfloor$，假设 $h(k1) < h(k2)$。

考虑将第 $h(k2)$ 以上的位相同的数放到一起计算，然后将答案组合起来。

对于第 $h(k2)$ 位为 0 或 1 的分别最多只会选取一个数放到 $S2$。

第 7 题，P10200，按位贪心

设 $h(x) = \lfloor \log_2 x \rfloor$，假设 $h(k1) < h(k2)$。

考虑将第 $h(k2)$ 以上的位相同的数放到一起计算，然后将答案组合起来。

对于第 $h(k2)$ 位为 0 或 1 的分别最多只会选取一个数放到 $S2$。

暴力求出有多少种取法，使得剩余的数放到 $S1$ 合法。

第 7 题，P10200，按位贪心

设 $h(x) = \lfloor \log_2 x \rfloor$，假设 $h(k1) < h(k2)$。

考虑将第 $h(k2)$ 以上的位相同的数放到一起计算，然后将答案组合起来。

对于第 $h(k2)$ 位为 0 或 1 的分别最多只会选取一个数放到 $S2$。

暴力求出有多少种取法，使得剩余的数放到 $S1$ 合法。

将 0 的部分插入 trie，再使用 1 的部分查询。

第 7 题，P10200，按位贪心

设 $h(x) = \lfloor \log_2 x \rfloor$，假设 $h(k1) < h(k2)$。

考虑将第 $h(k2)$ 以上的位相同的数放到一起计算，然后将答案组合起来。

对于第 $h(k2)$ 位为 0 或 1 的分别最多只会选取一个数放到 $S2$。

暴力求出有多少种取法，使得剩余的数放到 $S1$ 合法。

将 0 的部分插入 trie，再使用 1 的部分查询。

可以得出这部分的方案数，全部相乘就是答案。

第 7 题，P10200，按位贪心

设 $h(x) = \lfloor \log_2 x \rfloor$，假设 $h(k1) < h(k2)$。

考虑将第 $h(k2)$ 以上的位相同的数放到一起计算，然后将答案组合起来。

对于第 $h(k2)$ 位为 0 或 1 的分别最多只会选取一个数放到 $S2$。

暴力求出有多少种取法，使得剩余的数放到 $S1$ 合法。

将 0 的部分插入 trie，再使用 1 的部分查询。

可以得出这部分的方案数，全部相乘就是答案。

不过这样做的前提条件是 $h(k1) < h(k2)$，下面考虑 $h(k1) = h(k2)$ 的情况。

第 7 题，P10200，按位贪心

依旧将第 $h(k1)$ 以上的位相同的数放到一起计算。

第 7 题，P10200，按位贪心

依旧将第 $h(k1)$ 以上的位相同的数放到一起计算。

对于第 $h(k1)$ 位为 0 或 1 的分别最多只会选取一个数放到 $S1$ 和 $S2$。

第 7 题，P10200，按位贪心

依旧将第 $h(k1)$ 以上的位相同的数放到一起计算。

对于第 $h(k1)$ 位为 0 或 1 的分别最多只会选取一个数放到 $S1$ 和 $S2$。

也就是当数字个数超过了 4 个就不合法了，否则直接状压枚举。

第 7 题，P10200，按位贪心

依旧将第 $h(k1)$ 以上的位相同的数放到一起计算。

对于第 $h(k1)$ 位为 0 或 1 的分别最多只会选取一个数放到 $S1$ 和 $S2$。

也就是当数字个数超过了 4 个就不合法了，否则直接状压枚举。

时间复杂度 $O(n \log V + 2^4 n)$，可以通过，注意减去存在空集的答案。

第 8 题，CF1868D，枚举构造方法

构造一棵大小为 n 的像花的（删除环后，每棵树高度一致）基环树，使得节点 x 的度数为 d_x。

$\sum n \leq 10^6$。

直接枚举环长、高度，按层分点，发现将度数较大的点放在前面可以避免出现断层现象。

第 8 题，CF1868D，枚举构造方法

直接枚举环长、高度，按层分点，发现将度数较大的点放在前面可以避免出现断层现象。

于是直接枚举、检验、如果存在方案就进行构造，枚举的时间复杂度是调和级数 $O(n \ln n)$。