sol

	graph	print	game	squares
搬题	NATO	Mini_PEKKA	tybbs	tybbs
solution	NATO	NATO	ATZdhjeb	tybbs
std	NATO	M1ndeveloped	ATZdhjeb	tybbs
data	NATO	M1ndeveloped	ATZdhjeb	M1ndeveloped

欢迎选手私信交流疑问并对本场比赛的质量进行~~批斗~~评价！

图（graph）

原题

sub1：

直接 $O(n^2)$ 枚举点对判断是否有边后直接并查集连边即可。

sub2：

考虑任意两个数 $2^i,2^{i'}(i\neq i')$，显然 $2^i\oplus 2^{i'}=2^i+2^{i'}>\max(2^i,2^{i'})$，故任意两个不相等的数之间均有连边，故如果所有数相同则有 n 个连通块，否则 1 个。

sub3：

考虑直接把本质不同的数拿出来做 sub1 即可。

sub4：

sub2 启示我们按位考虑，而 sub3 启示我们精简枚举的方法。

我们钦定当前枚举的 $a_i=\max(a_i,a_{i'})$，如果 $a_{i'}$ 二进制下的最高非零位和 a_i 的那一位均为 1 的话（设该位为从低到高的第 k 位）就会减去 2^{k-1}，而后面的位无论加上多少都补不上，必然无边；反之若 a_i 的那一位为 0 就会加上 2^{k-1}，而后面的位无论减去多少都减不完，必然有边。

故两个点是否有边仅由大的那个数在小的那个数二进制下的最高非零位那一位是否为 1 决定，为 1 无边，否则有边。

故对于 $1\le k\le 63$ 记录有哪些连通块存在一个数满足最高位是从低到高第 k 位，从小到大枚举 a_i 将点 i 和与符合上述条件的连通块用并查集合并即可。

时间复杂度 $O(n(\log v+\alpha(n)))$（std 只写了路径压缩，是 $O(n(\log v+\log n))$ 的，不过不重要）。

印刷（print）

原题

（下设字符矩形为 s）

考虑哪些长度可能成为答案。

经过观察，可以发现一个长度 len 是合法的则必然有 $len\mid n$ 或 $len\mid m$，证明如下：

考虑对矩形染色，将一个点 (i,j) 染为 $(i+j) \bmod len$，则一次覆盖必然是覆盖掉了颜色为 $0,1,\dots,len-1$ 的点各一个，则染色后的矩形每种颜色出现次数必须相同。

考虑若 $len \nmid n$ 的同时有 $len \nmid m$，则每行有 $m \bmod len$ 个颜色多了一次，则每 len 行每个颜色就同时多了 $m \bmod len$ 次，而由于 $len \nmid n$，故必然每个颜色不是同时多了一定的次数，故此时每种颜色出现次数并不相同，故若 $len \nmid n$ 成立则必有 $len \mid m$。

若 $len \nmid m$ 成立则必有 $len \mid n$ 的证明同上。

故一个长度 len 是合法的则必然有 $len \mid n$ 或 $len \mid m$。

枚举 len，考虑如何 check。

模板显然必须是从 $s_{1,1}s_{1,2}\dots s_{1,len}$ 或 $s_{1,1}s_{2,1}\dots s_{len,1}$。

考虑我们从左往右，从上往下地枚举某个位置作为填充模板的开头。

若无法填充，由于矩形必须填充完，故显然无解；

若只能往下或往右，直接填充即可；

若同时能，我们断言往右填充必然是不劣的，证明如下：

假设现在枚举的位置是 (i,j)，若当前向下填充，考虑 $(i,j+1),\dots(i,j+len-1)$ 是如何被填充的。

若它们均是向下填充掉的，则说明模板串每个字符全同，显然有解则必然矩形全同，这样填显然没有问题。

否则，若在 $(i,j),(i,j+1),\dots,(i,j+t-1)$ 这些位置是向下填充掉的，后面是向右填充的，则说明模板串前 t 个字符是全同的，而由于后面 $(i,j+t)$ 开始是被向右填充的，之前 (i,j) 开始也是可以向右填充的，故 $s_{i,j+t}s_{i,j+t+1}\dots s_{i,j+len-1}$ 是模板串的一个 border。

根据刚才的那个 border 我们可以知道 $s_{i,j}s_{i,j+1}\dots s_{i,j+t-1}$ 是模板串的一个周期，故模板串仍然全同！

所以这种情况仍然是有解则必然矩形全同的，这样填显然没有问题。

证毕。

故枚举模板串后直接按上述方法填即可，判断是否是模板串直接 $O(len)$ 暴力判断即可，因为每次必然有 len 个位置被填充，而一共有 $n\times m$ 个位置，故这样 check 单次时间复杂度是 $O(nm)$ 的。

总时间复杂度 $O((d(n)+d(m))nm)$（$d(x)$ 为 x 的因数个数），可以通过本题。

游戏（game）

原题

若根的深度为 0，则深度大于 k 的点是没有意义的，下文称深度为 k 的点为叶子节点。

显然题意等价于小 H 需要堵住一些点，使得小 X 无法不通过堵住的点而到达任一叶子节点。

$\mathrm{sub1}$:

留给爆搜。

$\mathrm{sub2}$:

小 H 堵住一个点，相当于是使得该点子树内所有叶子均不可被小 X 到达，考虑将所有叶子按 dfn 排序，则可以看作是覆盖了一个区间内的叶子，题意转化为询问是否能用 k 手覆盖所有叶子。

注意到若小 H 可以获胜，则一定存在一种使小 H 获胜的策略使得对于任意深度 $d \le k$，小 H 都标记且仅标记了一个深度为 d 的点。调整法证明是容易的。

故考虑状压 DP，设状态 $f_{i,S}$ 表示通过标记 S 中的深度的点，是否可以覆盖 dfn 序前 i 小的叶子，转移则枚举一个点标记即可，时间复杂度 $O(2^k n)$。

$\mathrm{sub3/4:}$

留给搬题人认为有意义，但是笔者不知道的做法。

$\mathrm{sub5:}$

我们断言：若 $k \ge \sqrt{n}$，则一定存在小 H 的必胜策略。

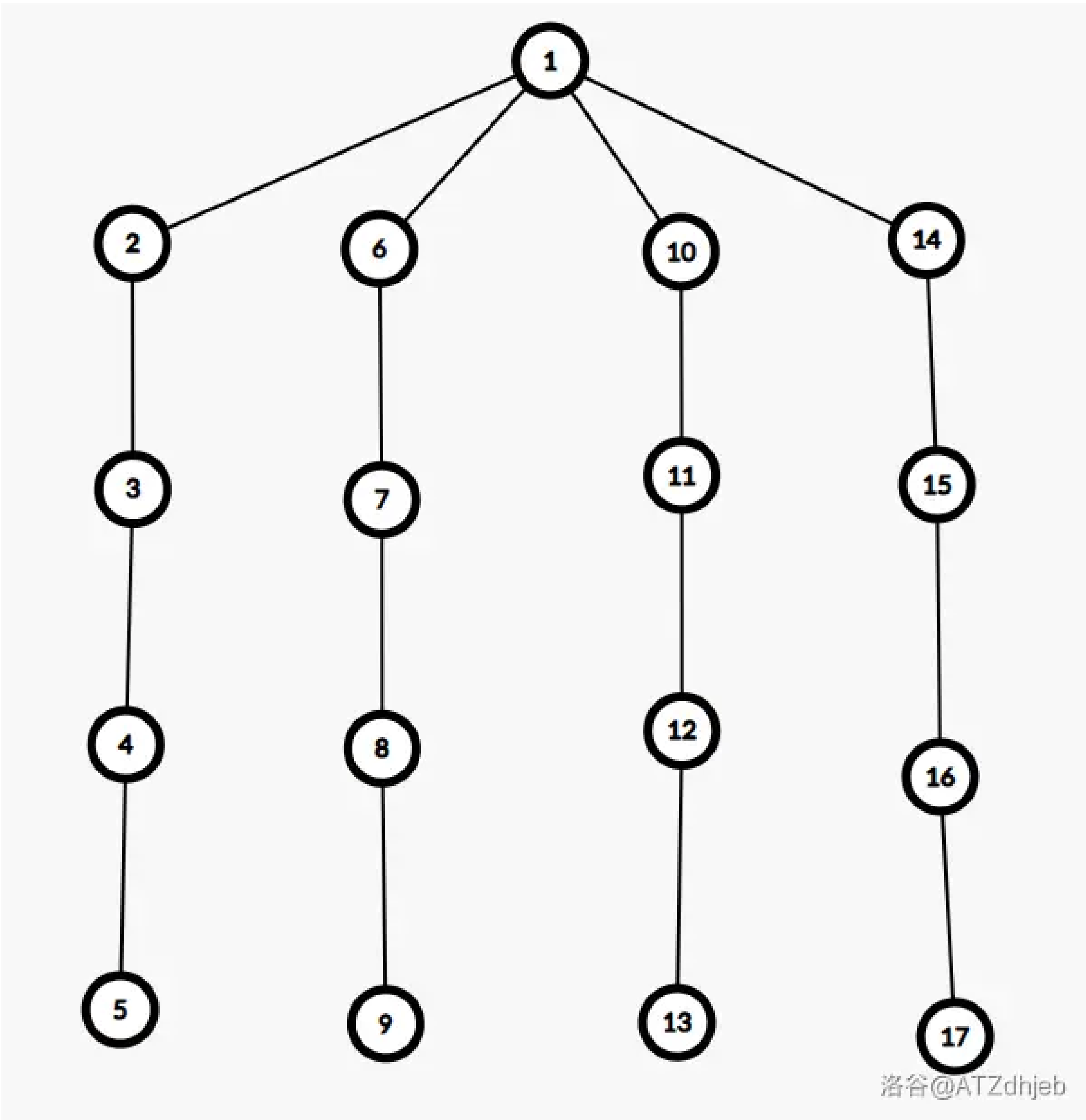
证明：

对于一棵小 H 不可获胜的树 T，在 T 上再额外挂一个点小 H 一定不可获胜。

下文称小 H 不可获胜的树是优的。

注意到若小 H 标记了点 u，那么 u 的子树内必然存在恰好一个叶子（若不存在叶子，则不必标记之；若存在多于一个叶子，则可以将多的叶子挂到其它子树内，使其余子树变得不劣，u 的子树也不变劣）。更进一步地，我们可以类似的论证此时 u 的子树一定是一条链，且最深的点深度恰好为 k。

再进一步地，我们可以认为最优的树形如下图（$k=4$ 的情况）：



发现这样的树具有 k^2+1 个节点，证毕。

因此现在只需要对 $k<\sqrt{n}\le 20$ 的情况计算了，这个可以直接套用 Sub2 的状压 DP。

时间复杂度 $O(2^{\min\{\sqrt{n},k\}}n)$。可以通过本题。

存在更优秀~~还有随机化~~的做法，可以参见 Luogu 题解区。时间复杂度 $O((n+q)\log n)$。

正方形（squares）

[原题]

本题复杂度中认为 n,q 同阶。

$\mathrm{sub1}$：我会暴力！暴力枚举所有正方形判定合法性，复杂度 $O(n^2X^2)$，期望得分 5 分。

$\mathrm{sub2}$：考虑作为答案的正方形。注意到一定至少存在三个点位于正方形的边或角上，否则，一定可以将正方形平移调整。暴力枚举这三个关键点判定合法性，复杂度 $O(n^5)$，期望得分 20 分。

$\mathrm{sub3}$：预处理所有可以做为答案的正方形。不妨仅考虑正方形最下方的边上有点的情况，最上方有点同理。对于每个点 (x,y)，找到最长长度 l 使得：设纵坐标在 $(y,y+l)$ 内的点中横坐标恰好比 x 小的点 (x_1,y_1)，恰比 x 大的点 (x_2,y_2)，满足 $x_1-x_2\ge l$。可以根据 l 确定关键正方形。若 $x_1-x_2=l$，正方形已经确定；否则正方形存在一个位于角上的点阻挡其拓展。得到 $O(n)$ 个关键正方形，每次询问直接查询包含询问点的关键正方形中边长最大的，复杂度 $O(n^2)$，期望得分 35 分。

$\mathrm{sub4}$：考虑优化 $\mathrm{sub3}$ 的做法。显然，合法长度 l 具有单调性，考虑二分。查找 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 可以用主席树维护。具体的，将所有点按 x 排序，维护前后缀可持久化线段树，在一个点前驱的主席树上查找纵坐标 $(y,y+l)$ 区间内的横坐标最大值，后继的主席树上类似查找最小值。询问部分，考率扫描线。对询问按横坐标排序，线段树上每个节点开一个 `set` 维护合法的正方形集合即可。复杂度 $O(n\log^2 n)$，常数巨大，期望得分 65 分。

$\mathrm{sub5}$：继续优化 $\mathrm{sub3}$ 的做法。上述二分过程可以用类似线段树上二分的思想改为主席上跳节点的过程（细节较多）。查询中，注意到若一个线段树上节点维护的正方形满足以下性质：若一个正方形加入时间晚于另一个，而边长更长，则之前的不会再产生贡献。可以将 `set` 改为单调队列。复杂度 $O(n\log n)$，期望得分 100 分。