FOC-PINC 模拟赛题解

cdqz

10 月 16 日

路哥

题目即问有多少种断边方案使得包含 1 号结点的联通块大小（权值）刚好为 k，最终答案只需要除以所有断边方案（即 2^{n-1}）即可。

20pts

枚举所有的断边方案，再 dfs 一遍判断该方案是否可行，时间复杂度 $O\left(n2^n\right)$。

40pts

设立状态 $f_{i,j}$ 表示结点 i 的子树中包含 i 的连通块的权值为 j 的方案数依次进行树上背包，可以直接枚举儿子结点枚举权值转移，时间复杂度为 $O\left(n^3\right)$。

60pts/100pts

在树上背包的前提下优化。观察每个点的转移为每个儿子的所有权值方案和当前所有权值方案的卷积，可以使用多项式优化，时间复杂度 $O\left(n^2\log n\right)$ 或 $O\left(n^2\right)$。

100pts

在树上背包的前提下使用常见树上背包优化技巧，即设立状态 $f_{i,j}$ 表示在 dfs 到 i 点时权值为 j 的方案总数，在每次递归的时候将该点的方案下传给儿子，再在每次回溯的时候将儿子的贡献计算到父亲上，再考虑不选连向这个儿子的边（这个儿子的子树中的边随便选）的所有方案即可，时间复杂度为 $O\left(n^2\right)$。

密电

设原数组为 a，给出的数组为 b。

先将 a,b 排序，那么可以看出 $a_1+a_2=b_1$，$a_1+a_3=b_2$。然后枚举 $a_2+a_3=b_x$，解方程后得出了 a_1,a_2,a_3。接下来 b 中剩下最小的一定是 a_1+a_4。求出 a_4 后，将 a_1+a_4,a_2+a_4,a_3+a_4 在 b 中去掉，剩下最小的一定是 a_1+a_5，然后以此类推。

由于可能的 a_2+a_3 最多只有 $O(n)$ 个，所以时间复杂度 $O(n^3)$。

战争

定义关于状态 $S=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ 的函数

$$F(S)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p^{a_i}}-\frac{1}{p}\right).$$

那么终止态 $T=\{\sum_{i=1}^{n}a_i\}$ 唯一对应函数值最大的状态。

假设随机选到的数为 a_1,a_2，那么函数值的期望变化量：

$$\begin{aligned}\Delta&=p\left(\frac{1}{p^{a_1+1}}-\frac{1}{p}\right)+p\left(\frac{1}{p^{a_2+1}}-\frac{1}{p}\right)-\left(\frac{1}{p^{a_1}}-\frac{1}{p}\right)-\left(\frac{1}{p^{a_2}}-\frac{1}{p}\right)\\&=\frac{2}{p}-2.\end{aligned}$$

与 a_1,a_2 无关，所以

$$F(S)+\Delta=\mathrm{average}_{S\to U}\{F(U)\}.$$

设状态 S 到 T 的期望操作次数为 $E(S)$，那么

$$E(S)=\begin{cases}0, & S=T,\\ 1+\mathrm{average}_{S\to U}\{E(U)\}, & S\neq T.\end{cases}$$

将其看做关于变量 S 的方程组，则其显然有唯一解。将解

$$E(S)=\frac{F(T)-F(S)}{\Delta}$$

代入，发现 $S=T$ 时显然满足；而当 $S\neq T$ 时有

$$\begin{aligned}E(S)&=1+\mathrm{average}_{S\to U}\{E(U)\}\\&=1+\mathrm{average}_{S\to U}\left\{\frac{F(T)-F(U)}{\Delta}\right\}\\&=1+\frac{F(T)}{\Delta}-\frac{1}{\Delta}\mathrm{average}_{S\to U}\{F(U)\}\\&=\frac{F(T)-F(S)}{\Delta}.\end{aligned}$$

亦满足，所以这一定是方程组的解。

直接上光速幂即可，注意不要炸空间。

送信

观察到对于一组 (a,b) 满足条件的 (x,y) 在若干个以树的 dfs 序为维度的二维平面上的矩阵上，从而转化为三维偏序问题，差分后 cdq 分治即可。