202408题解

在银河中孤独摇摆（sway）

$k=1$

结论：若 $\exists p\in\mathbb{N},n=2^p$，则有解且唯一，否则无解。

可以简单地归纳证明这件事。

$k>1$

结论：对于所有 n 都有解。

构造如下：

- 若 $\exists p\in\mathbb{N},n=2^p$，则取 $x=\frac{n}{2}$
- 否则取 $x=lowbit(n)$

使一颗心免于哀伤（heart）

首先考虑一次游戏的轮数怎么求。

不妨假设游戏的参数 x 与 y 的按位或 z 的二进制表示只包含 1（显然 0 所在的二进制位是无用的）。

若 x 最高位为 0，则先手会在一开始就说 $x<y$，轮数为 1，否则先手会说不知道。

此时若 y 最高位或次高位为 0，则后手会立刻说 $x>y$，轮数为 2，否则后手会说不知道。

……

游戏的轮数会是 x 与 y 的最高不相同位之上的同为 1 的数量，加一个常数（根据这一不相同位是 $x=0,y=1$ 还是 $x=1,y=0$ 来定）。

将所有数加入 01trie，最后 dfs 一遍，容易在子树分叉时计算答案。

时空复杂度均为 $O(n\log n)$。

若我不曾见过太阳（sun）

首先按套路定义一个 dp：f_u 表示从 u 出发，能到达 n 的最大概率。

转移要从若干个 v 中选一个，但是要记录哪些边已经被销毁了，直接实现需要状压。

结论：每次选择 f_v 最大的 v 是最优的，证明放在最后。

此时可以先 dp 出一个 $g_{i,j}$ 表示有 i 个点，最后走向 f 值第 j 大的点的概率：

$g_{i,1}=\frac{1}{i},g_{i,j}=g_{i-2,j-2}\frac{j-2}{i}+g_{i-2,j-1}\frac{i-j}{i}$

计算 f_u 只需要将所有孩子的 f_v 从大到小排序后逐个与 g 相乘即可。

排序可以插入排序，时空复杂度均为 $O(n^2)$。

下面考虑归纳证明这个结论。

首先 $n=1$ 和 $n=2$ 时是显然的。

对于一个 $n>2$，若选择了从大到小第 x 个，则走向 x 的概率是 $\frac{1}{n}$，将大于 x 的点编号都减一，则走向 $y<n$ 的概率是 $h_y=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1}[i\neq y]g_{n-2,y-[i<y]}$。

容易发现 h 与 x 无关，且 $h_1=\frac{1}{n}$，h 单调不增。此时 x 的影响就是向 h 中插入一个 $\frac{1}{n}$，显然插在最开头，即 $x=1$ 是最优的。

希望有羽毛和翅膀（hope）

首先考虑没有 q 次询问怎么做。

以下称编号较小的一方为红方，较大的为蓝方。

扫描线，分别计算红方选出的最大编号为 i 时的方案数。

维护一颗值域上的线段树，每个线段树节点维护四个值：

- 所有评分在这个区间中，被选了且评分最高的，归属红方/蓝方，评分最低的，归属红方/蓝方的方案数

这个值是很容易合并的，在扫描线时只需要支持单点修改（某个值从蓝方变成红方），区间查询即可。

加入了 q 次相邻交换之后，考虑单次交换对这颗线段树的影响。

x 处线段树的 a_x 位置会从红方变成蓝方，a_{x+1} 位置会从蓝方变成红方，其他处线段树不会发生改变。

那么只需要使用主席树，重新计算 x 处和 $x+1$ 处（因为 a_{x+1} 也改变了）的贡献即可。

时空复杂度均为 $O(n\log n)$。

也可以离线将空间复杂度优化到 $O(n)$。