组合计数

李淳风

长郡中学

2024 年 4 月 23 日

加法原理与乘法原理

加法原理：若完成一件事的方法有 n 类，其中第 i 类包含 a_i 种不同的方法，且这些方法互不重合，则完成这件事共有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 种方法。
乘法原理：若完成一件事需要 n 个步骤，其中第 i 个步骤有 a_i 种不同的完成方法，且这些步骤互不干扰，则完成这件事共有 $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ 种方法。

排列组合

排列数：从 n 个不同元素中依次取出 m 个元素排成一列 (有先后顺序) 的方案数：

$$A_n^m(\text{或}P_n^m) = \frac{n!}{(n-m)!} = n*(n-1)*\cdots*(n-m+1)$$

组合数：从 n 个不同元素中一次取出 m 个元素组成集合 (无先后顺序) 的方案数：

$$C_n^m(\text{或}\binom{n}{m}) = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n*(n-1)*\cdots*(n-m+1)}{m*(m-1)*\cdots*1}$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0 =$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0 = 1$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 =$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 =$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 =$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4$$

$$C_5^1 =$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4$$

$$C_5^1 = 5$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4$$

$$C_5^1 = 5 \quad C_5^2 =$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4$$

$$C_5^1 = 5 \quad C_5^2 = 10$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4$$

$$C_5^1 = 5 \quad C_5^2 = 10 \quad C_5^3 =$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4$$

$$C_5^1 = 5 \quad C_5^2 = 10 \quad C_5^3 = 10$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4$$

$$C_5^1 = 5 \quad C_5^2 = 10 \quad C_5^3 = 10 \quad C_5^4 =$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4$$

$$C_5^1 = 5 \quad C_5^2 = 10 \quad C_5^3 = 10 \quad C_5^4 = 5$$

组合数的性质

练习一下组合数的计算：

$$C_4^0=1 \quad C_4^1=4 \quad C_4^2=6 \quad C_4^3=4$$

$$C_5^1=5 \quad C_5^2=10 \quad C_5^3=10 \quad C_5^4=5$$

组合数的性质：

- $C_n^m=C_n^{n-m}$
- $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$
- $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$

可以通过数学公式证明，也可以通过组合数的定义来证明。

组合数的求法

可以通过性质 2 递推求；
如果存在一个模数的话，也可以通过预处理阶乘和逆元快速来求。
注意判断逆元是否存在，以及分子分母可能把模数约掉的情况。

二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

可以写成这样的形式：

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)}_{n\text{个}(a+b)}$$

这样一来，对于 n 个部分，每一个部分都有两种选择 a 或 b，选 k 个 a 和 n-k 个 b 的方案数就是 C_n^k。
也可以使用数学归纳法证明。

例题

Fibonacci

给定一个多项式 $(by+ax)^k$，请求出多项式展开后 $x^n y^m$ 的系数对 10007 取模的结果。

例题

Fibonacci

给定一个多项式 $(by + ax)^k$，请求出多项式展开后 $x^n y^m$ 的系数对 10007 取模的结果。

相当于计算 C_k^n。注意考虑 $n, m >= 10007$ 的情况（如果存在这样情况的话）。

一些经典问题

n 个完全一样的球，装入 m 个完全一样的盒子里，每个盒子可以为空，求方案数。

一些经典问题

n 个完全一样的球，装入 m 个完全一样的盒子里，每个盒子可以为空，求方案数。
因为球、盒子都完全相同，相当于把整数 n 拆分为 m 个非负整数的和。
用 $f_{i,j}$ 表示把 i 拆分为 j 个数的方案数，考虑拆分后 j 个数中最小的数是否为 0，若为 0，方案数为 $f_{i,j-1}$；若不为 0，则可以考虑把拆分得到的 j 个数全部减去 1，方案数不变，为 $f_{i-j,j}$。
因此转移方程为 $f_{i,j} = f_{i,j-1} + f_{i-j,j}$。

一些经典问题

n 个完全一样的球，装入 m 个完全一样的盒子里，每个盒子可以为空，求方案数。
因为球、盒子都完全相同，相当于把整数 n 拆分为 m 个非负整数的和。用 $f_{i,j}$ 表示把 i 拆分为 j 个数的方案数，考虑拆分后 j 个数中最小的数是否为 0，若为 0，方案数为 $f_{i,j-1}$；若不为 0，则可以考虑把拆分得到的 j 个数全部减去 1，方案数不变，为 $f_{i-j,j}$。
因此转移方程为 $f_{i,j} = f_{i,j-1} + f_{i-j,j}$。

n 个完全一样的球，装入 m 个完全一样的盒子里，每个盒子不可以为空，求方案数。

一些经典问题

n 个完全一样的球，装入 m 个完全一样的盒子里，每个盒子可以为空，求方案数。
因为球、盒子都完全相同，相当于把整数 n 拆分为 m 个非负整数的和。
用 $f_{i,j}$ 表示把 i 拆分为 j 个数的方案数，考虑拆分后 j 个数中最小的数是否为 0，若为 0，方案数为 $f_{i,j-1}$；若不为 0，则可以考虑把拆分得到的 j 个数全部减去 1，方案数不变，为 $f_{i-j,j}$。
因此转移方程为 $f_{i,j} = f_{i,j-1} + f_{i-j,j}$。

n 个完全一样的球，装入 m 个完全一样的盒子里，每个盒子不可以为空，求方案数。
相当于先给每个盒子里放一个球，n 变为 n-m，就转化为上面的问题了。

一些经典问题

n 个完全一样的球，装入 m 个不一样的盒子里，每个盒子可以为空，求方案数。

一些经典问题

n 个完全一样的球，装入 m 个不一样的盒子里，每个盒子可以为空，求方案数。
使用插板法。m-1 个板子可以把 n 个球分为 m 块，每一块代表一个盒子。
每个盒子可以为空，问题转化为了一个长度为 n+m-1 的序列，每个位置上可以是球也可以是板子。
总共有 n+m 个位置，方案数为 C_{n+m-1}^{m-1}。

一些经典问题

n 个完全一样的球，装入 m 个不一样的盒子里，每个盒子可以为空，求方案数。
使用插板法。m-1 个板子可以把 n 个球分为 m 块，每一块代表一个盒子。
每个盒子可以为空，问题转化为了一个长度为 n+m-1 的序列，每个位置上可以是球也可以是板子。
总共有 n+m 个位置，方案数为 C_{n+m-1}^{m-1}。

n 个完全一样的球，装入 m 个不一样的盒子里，第 i 个盒子中至少要有 a_i 个球，求方案数。

一些经典问题

n 个完全一样的球，装入 m 个不一样的盒子里，每个盒子可以为空，求方案数。
使用插板法。m-1 个板子可以把 n 个球分为 m 块，每一块代表一个盒子。
每个盒子可以为空，问题转化为了一个长度为 n+m-1 的序列，每个位置上可以是球也可以是板子。
总共有 n+m 个位置，方案数为 C_{n+m-1}^{m-1}。

n 个完全一样的球，装入 m 个不一样的盒子里，第 i 个盒子中至少要有 a_i 个球，求方案数。
相当于先给第 i 个盒子里放 a_i 个球，n 变为 $n-\sum a_i$，就转化为上面的问题了。
方案数为 $C_{n-\sum a_i+m-1}^{m-1}$。

一些经典问题

n 个完全一样的球，装入 m 个不一样的盒子里，每个盒子可以为空，求方案数。
这个问题实际上相当于求方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 的方案数，其中变量均为非负整数。
因此对于第 i 个盒子中至少要有 a_i 个球的限制，我们可以令 $x_i' = x_i - a_i$，就转化为了 $x_1' + x_2' + \cdots + x_m' = n - \sum a_i$。

一些经典问题

n 个完全一样的球，装入 m 个不一样的盒子里，每个盒子可以为空，求方案数。
这个问题实际上相当于求方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 的方案数，其中变量均为非负整数。
因此对于第 i 个盒子中至少要有 a_i 个球的限制，我们可以令 $x_i' = x_i - a_i$，就转化为了 $x_1' + x_2' + \cdots + x_m' = n - \sum a_i$。

那么再来考虑一个问题：从 1 到 n 这 n 个正整数中选 m 个数，且这 m 个数互不相邻，求方案数。

一些经典问题

n 个完全一样的球，装入 m 个不一样的盒子里，每个盒子可以为空，求方案数。
这个问题实际上相当于求方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 的方案数，其中变量均为非负整数。
因此对于第 i 个盒子中至少要有 a_i 个球的限制，我们可以令 $x'_i = x_i - a_i$，就转化为了 $x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_m = n - \sum a_i$。

那么再来考虑一个问题：从 1 到 n 这 n 个正整数中选 m 个数，且这 m 个数互不相邻，求方案数。
假设我们选的第 0 个数为-1，第 m+1 个数为 n+2，定义 x_i 表示选出的数从小到大第 i 个和第 i-1 个的差；
题目的意思就是要满足 $\forall i \in [1, m+1], x_i > 1$，而且 $\sum x_i = n + 3$。
同样地定义 $x'_i = x_i - 2$，限制就变成了 $x'_i \geq 0$。
方程为 $x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_{m+1} = n + 3 - 2m - 2 = n - 2m + 1$。
使用插板法，相当于 n-2m+1 个球，m 个插板，方案数为 C_{n-m+1}^{m}。

多重集

多重集是指包含重复元素的广义集合。
设 S 是由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，$\cdots$，n_k 个 a_k 组成的多重集合。记 $n = n_1 + \cdots + n_k$。S 的全排列数为：

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

多重集

多重集是指包含重复元素的广义集合。
设 S 是由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，$\cdots$，n_k 个 a_k 组成的多重集合。记 $n = n_1 + \cdots + n_k$。S 的全排列数为：

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

从 S 中取出 m 个元素，设 $m \leq n_i(\forall i \in [1, k])$ 组成一个多重集 (不考虑元素的顺序)，方案数为：

$$C_{k+m-1}^{k-1}$$

多重集

多重集是指包含重复元素的广义集合。
设 S 是由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，$\cdots$，n_k 个 a_k 组成的多重集合。记 $n = n_1 + \cdots + n_k$。S 的全排列数为：

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

从 S 中取出 m 个元素，设 $m \le n_i(\forall i \in [1,k])$ 组成一个多重集 (不考虑元素的顺序)，方案数为：

$$C_{k+m-1}^{k-1}$$

设取出了 x_i 个 a_i，问题转化为 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = m$。使用插板法解决。

例题

Counting Swaps

给定一个 1 n 的排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，可进行若干次操作，每次操作选择两个位置 x,y，交换两个位置上的数字 p_x,p_y。
现在，我们需要用最少的操作次数把给定排列变为单调递增的排列 $1, 2, \cdots, n$，并在操作次数最少的前提下，求方案数。

例题

Counting Swaps

给定一个 1 n 的排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，可进行若干次操作，每次操作选择两个位置 x,y，交换两个位置上的数字 p_x,p_y。
现在，我们需要用最少的操作次数把给定排列变为单调递增的排列 $1, 2, \cdots, n$，并在操作次数最少的前提下，求方案数。

对于一个排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，如果我们从 i 向 p_i 连一条边，那么我们可以得到一张 n 个点 n 条边的图，并且这张图由若干个环组成。我们的最终目标就是让这张图变成 n 个自环。

例题

Counting Swaps

给定一个 $1\ n$ 的排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，可进行若干次操作，每次操作选择两个位置 x,y，交换两个位置上的数字 p_x,p_y。
现在，我们需要用最少的操作次数把给定排列变为单调递增的排列 $1, 2, \cdots, n$，并在操作次数最少的前提下，求方案数。

对于一个排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，如果我们从 i 向 p_i 连一条边，那么我们可以得到一张 n 个点 n 条边的图，并且这张图由若干个环组成。我们的最终目标就是让这张图变成 n 个自环。
首先，把一个长度为 n 的环变为 n 个自环，至少需要 n-1 次操作。

例题

我们用 f_n 表示用最少的操作数把一个长度为 n 的环变为 n 个自环的方案数。
我们第一步操作，肯定是在这个环上选择两个位置并交换，拆成长度为 x 与 y 的两个环，而且 $x + y = n$。
用 $T(x, y)$ 表示由多少种方法把长度为 n 的环拆成两个长度为 x 和 y 的环，那么当 $x = y$ 时 $T(x, y) = n/2$，否则 $T(x, y) = n$。

例题

我们用 f_n 表示用最少的操作数把一个长度为 n 的环变为 n 个自环的方案数。
我们第一步操作，肯定是在这个环上选择两个位置并交换，拆成长度为 x 与 y 的两个环，而且 $x+y=n$。
用 $T(x,y)$ 表示由多少种方法把长度为 n 的环拆成两个长度为 x 和 y 的环，那么当 $x=y$ 时 $T(x,y)=n/2$，否则 $T(x,y)=n$。
在这之后，两个环分别还需要进行 x-1，y-1 次操作，这相当于一个多重集的排列。
因此我们可以得到：

$$F_n = \sum_{x+y=n} T(x,y) * F_x * F_y * \frac{(x-1+y-1)!}{(x-1)!(y-1)!}$$

例题

我们用 f_n 表示用最少的操作数把一个长度为 n 的环变为 n 个自环的方案数。
我们第一步操作，肯定是在这个环上选择两个位置并交换，拆成长度为 x 与 y 的两个环，而且 $x+y=n$。
用 $T(x,y)$ 表示由多少种方法把长度为 n 的环拆成两个长度为 x 和 y 的环，那么当 $x=y$ 时 $T(x,y)=n/2$，否则 $T(x,y)=n$。
在这之后，两个环分别还需要进行 x-1，y-1 次操作，这相当于一个多重集的排列。
因此我们可以得到：

$$F_n = \sum_{x+y=n} T(x,y) * F_x * F_y * \frac{(x-1+y-1)!}{(x-1)!(y-1)!}$$

那么，如果最初的排列由长度为 $l_1, l_2, \cdots, l_k$ 的 k 个环组成，最终的答案就是：

$$F_{l_1} * F_{l_2} * \cdots * F_{l_k} * \frac{(n-k)!}{(l_1-1)!(l_2-1)!\cdots(l_k-1)!}$$

例题

我们用 f_n 表示用最少的操作数把一个长度为 n 的环变为 n 个自环的方案数。
我们第一步操作，肯定是在这个环上选择两个位置并交换，拆成长度为 x 与 y 的两个环，而且 $x + y = n$。
用 $T(x, y)$ 表示由多少种方法把长度为 n 的环拆成两个长度为 x 和 y 的环，那么当 $x = y$ 时 $T(x, y) = n/2$，否则 $T(x, y) = n$。
在这之后，两个环分别还需要进行 x-1，y-1 次操作，这相当于一个多重集的排列。
因此我们可以得到：

$$F_n = \sum_{x+y=n} T(x, y) * F_x * F_y * \frac{(x-1+y-1)!}{(x-1)!(y-1)!}$$

那么，如果最初的排列由长度为 $l_1, l_2, \cdots, l_k$ 的 k 个环组成，最终的答案就是：

$$F_{l_1} * F_{l_2} * \cdots * F_{l_k} * \frac{(n-k)!}{(l_1-1)!(l_2-1)! \cdots (l_k-1)!}$$

实际上，我们可以找 F_n 的规律，可以发现 $F_n = n^(n-2)$。

Lucas 定理

若 p 是质数，则对于任意整数 $1 \le m \le n$，有：

$$C_n^m \equiv C_{n \bmod p}^{m \bmod p} * C_{\lfloor n/p \rfloor}^{\lfloor m/p \rfloor} \pmod p$$

预处理 p 以内的组合数，对 $C_{\lfloor n/p \rfloor}^{\lfloor m/p \rfloor}$ 递归求解即可。

Lucas 定理

若 p 是质数，则对于任意整数 $1 \le m \le n$，有：

$$C_n^m \equiv C_{n \bmod p}^{m \bmod p} * C_{\lfloor n/p \rfloor}^{\lfloor m/p \rfloor} \pmod p$$

预处理 p 以内的组合数，对 $C_{\lfloor n/p \rfloor}^{\lfloor m/p \rfloor}$ 递归求解即可。
证明略微复杂，感兴趣的同学可以自行查阅。

例题

古代猪文

给定整数 $q, n(1 \leq q, n \leq 10^9)$，计算 $q^{\sum_{d|n} C_n^d} \bmod 999911659$。
P.S. 999911659 是质数，999911658 可以写为四个质数的乘积 2*3*4679*35617。

例题

古代猪文

给定整数 $q, n(1 \le q, n \le 10^9)$，计算 $q^{\sum_{d|n} C_n^d} \bmod 999911659$。
P.S. 999911659 是质数，999911658 可以写为四个质数的乘积 2*3*4679*35617。

若 $q = 999911659$，答案为 0。否则，根据费马小定理，关键在于计算 $\sum_{d|n} C_n^d \bmod 999911658$。

例题

古代猪文

给定整数 $q, n (1 \le q, n \le 10^9)$，计算 $q^{\sum_{d|n} C_n^d} \bmod 999911659$。
P.S. 999911659 是质数，999911658 可以写为四个质数的乘积 2*3*4679*35617。

若 $q = 999911659$，答案为 0。否则，根据费马小定理，关键在于计算 $\sum_{d|n} C_n^d \bmod 999911658$。
然后，由于 999911658 可以写为四个不大的质数的乘积，我们可以考虑先计算出分别以这四个质数为模数的答案，再使用中国剩余定理合并。计算组合数的过程使用 lucas 定理加速。

Catalan 数列

由 n 个 0 和 n 个 1 排成长度为 2n 的序列 S。满足对于任意一个前缀，0 的个数都不少于 1 的个数的序列数目为：

$$Cat_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1} = \frac{C_{2n}^{n}}{n+1}$$

Catalan 数列

由 n 个 0 和 n 个 1 排成长度为 2n 的序列 S。满足对于任意一个前缀，0 的个数都不少于 1 的个数的序列数目为：

$$Cat_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1} = \frac{C_{2n}^{n}}{n+1}$$

显然，所有序列的数量为 C_{2n}^{n}，我们可以考虑从中找出不满足要求的序列有多少个。
若序列 S 不满足要求，则存在一个最小的 p，满足在第 1 到第 2p+1 个位置中有 p 个 0，p+1 个 1。我们把第 2p+2 到第 2n 位置上的所有数翻转，就得到了一个由 n-1 个 0，n+1 个 1 组成的序列。
同理，对于任意一个由 n-1 个 0，n+1 个 1 组成的序列，我们可以找到一个最小的 q，满足满足在第 1 到第 2q+1 个位置中有 q 个 0，q+1 个 1。把第 2q+2 到第 2n 位置上的所有数翻转，就得到了由 n 个 0，n 个 1 组成且不满足要求的序列。
因此这两种序列一一对应，它们的数量相同，都为 C_{2n}^{n-1}。

Catalan 数列

其它公式：

$$Cat_n = Cat_{n-1} * \frac{4n-2}{n+1} = \sum_{i=1}^{n} Cat_{i-1} * Cat_{n-i}$$

与 Catalan 数列有关的问题主要有：

- n 个左括号和 n 个右括号组成的合法括号序列 Cat_n。
- n 个不同的数经过一个栈，形成的合法出栈序列为 Cat_n。
- n 个节点的二叉树数量为 Cat_n。
- 在平面直角坐标系中，每一步只能向上或向右走，且步长为 1。从 (0,0) 走到 (n,n) 并且除了两个端点之外不接触直线 y=x 的路线数量为 $2Cat_{n-1}$。

Catalan 数列

其它公式：

$$Cat_n = Cat_{n-1} * \frac{4n-2}{n+1} = \sum_{i=1}^{n} Cat_{i-1} * Cat_{n-i}$$

与 Catalan 数列有关的问题主要有：

- n 个左括号和 n 个右括号组成的合法括号序列 Cat_n。
- n 个不同的数经过一个栈，形成的合法出栈序列为 Cat_n。
- n 个节点的二叉树数量为 Cat_n。
- 在平面直角坐标系中，每一步只能向上或向右走，且步长为 1。从 (0,0) 走到 (n,n) 并且除了两个端点之外不接触直线 y=x 的路线数量为 $2Cat_{n-1}$。

在平面直角坐标系中，每一步只能向上或向右走，且步长为 1。从 (1,0) 走到 (n,m)，保证 n>m，不接触直线 y=x 的路线数量为：

Catalan 数列

其它公式:

$$Cat_n = Cat_{n-1} * \frac{4n-2}{n+1} = \sum_{i=1}^{n} Cat_{i-1} * Cat_{n-i}$$

与 Catalan 数列有关的问题主要有:

- n 个左括号和 n 个右括号组成的合法括号序列 Cat_n。
- n 个不同的数经过一个栈，形成的合法出栈序列为 Cat_n。
- n 个节点的二叉树数量为 Cat_n。
- 在平面直角坐标系中，每一步只能向上或向右走，且步长为 1。从 (0,0) 走到 (n,n) 并且除了两个端点之外不接触直线 y=x 的路线数量为 $2Cat_{n-1}$。

在平面直角坐标系中，每一步只能向上或向右走，且步长为 1。从 (1,0) 走到 (n,m)，保证 n>m，不接触直线 y=x 的路线数量为:

$$C_{m+n-1}^{m} - C_{m+n-1}^{m-1}$$