

Solutions Manual for ShreveII

spacegomi

3 ブラウン運動

3.1

$0 \leq t < u_1 < u_2$ に対して, $\mathcal{F}(t) \subset \mathcal{F}(u_1)$ (定義 3.3.3(i) 情報の蓄積) がいえる. また, $W(u_2) - W(u_1)$ は $\mathcal{F}(u_1)$ と独立 (定義 3.3.3(iii) 将来の増分の独立性) である. 以上より, $W(u_2) - W(u_1)$ は \mathcal{F}_t と独立である.

3.2

$0 \leq s \leq t$ に対して,

$$\begin{aligned} W_t^2 - t &= \{(W_t - W_s) + W_s\}^2 - t \\ &= (W_t - W_s)^2 + 2(W_t - W_s)W_s + W_s^2 - t, \end{aligned}$$

とおく.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_t^2 - t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s] + 2\mathbb{E}[(W_t - W_s)W_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_s^2 | \mathcal{F}_s] - t \\ &= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] + 2\mathbb{E}[W_t - W_s]\mathbb{E}[W_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_s^2 | \mathcal{F}_s] - t \\ &= (t - s) + 2 \cdot 0 \cdot W_s + W_s^2 - t = W_s^2 - s. \end{aligned}$$

以上より $W_t^2 - t$ はマルチンゲールである.

3.3

$X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$ のモーメント母関数とその微分は,

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \mathbb{E}[e^{u(X-\mu)}] = e^{\sigma^2 u^2 / 2}, \quad \varphi^{(1)}(u) = \sigma^2 u e^{\sigma^2 u^2 / 2}, \quad \varphi^{(2)}(u) = (\sigma^2 + \sigma^4 u^2) e^{\sigma^2 u^2 / 2}, \\ \varphi^{(3)}(u) &= (2\sigma^4 u + \sigma^4 u + \sigma^6 u^3) e^{\sigma^2 u^2 / 2} = (3\sigma^4 u + \sigma^6 u^3) e^{\sigma^2 u^2 / 2}, \\ \varphi^{(4)}(u) &= (3\sigma^4 + 3\sigma^6 u^2 + 3\sigma^6 u^2 + \sigma^8 u^4) e^{\sigma^2 u^2 / 2} = (3\sigma^4 + 6\sigma^6 u^2 + \sigma^8 u^4) e^{\sigma^2 u^2 / 2}. \end{aligned}$$

$$\text{尖度} = \mathbb{E}[(X - \mu)^4] = \varphi^{(4)}(0) = 3\sigma^4.$$

3.4 ブラウン運動の他の変分 (variation)

3.4.1 (i)

以下を満たすような集合 $A \in \mathcal{F}$ が存在すると仮定する：

$$\Pr(A) > 0, \omega \in A, \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |W_{t_{j+1}} - W_{t_j}|(\omega) < \infty$$

このとき,

$$\sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2(\omega) \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}|(\omega) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |W_{t_{j+1}} - W_{t_j}|(\omega)$$

となるが,

$|\Pi| \rightarrow 0$ とするとき, 左辺は T , 右辺は, $0 \cdot (\text{有限}) = 0$ となり, 矛盾する. したがって, 1 次変分はほとんどすべての経路で無限大に発散する.

3.4.2 (ii)

3 次変分について, 以下の不等式を得る.

$$\sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^3 \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2$$

この式の右辺は, $|\Pi| \rightarrow 0$ とするとき, $0 \cdot T = 0$ となる.

3.5 ブラック-ショールズ-マーティンの公式

$\phi(x)$ は標準正規分布の確率密度関数を表すものとする.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)^+] &= e^{-rT} \int_{w \in D} (S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma w} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-w^2/2T} dw \\ &= e^{-rT} \int_{\sqrt{T}z \in D} (S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}z} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \\ &= S_0 \int_{\sqrt{T}z \in D} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-\sigma\sqrt{T})^2/2} dz - K e^{-rT} \int_{\sqrt{T}z \in D} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \\ &= S_0 \int_{\sqrt{T}(y+\sigma\sqrt{T}) \in D} \phi(y) dy - K e^{-rT} \int_{\sqrt{T}z \in D} \phi(z) dz \end{aligned}$$

ここで,

$$D = \{x; S_T(x) - K > 0\} = \left\{x; x > \frac{1}{\sigma} \left[\ln \frac{K}{S_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \right\}$$

であるから、最終行の y, z の積分範囲はそれぞれ、

$$\begin{aligned} y &> \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \frac{K}{S_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] - \sigma\sqrt{T} = -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \\ z &> \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \frac{K}{S_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] = -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \end{aligned}$$

であり、

$$d_{\pm}(T, S_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \frac{S_0}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]$$

とおけば、

$$\mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)^+] = S_0 N(d_+(T, S_0)) - K e^{-rT} N(d_-(T, S_0)).$$

3.6

3.6.1 (i)

ドリフトを持つブラウン運動 $X_t = \mu t + W_t$ について、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_t)|\mathcal{F}(s)] &= \mathbb{E}[f(\mu t + W_t)|\mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[f(W_t - W_s + W_s + \mu t)|\mathcal{F}(s)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(w + W_s + \mu t) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{w^2}{2(t-s)}\right) dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y - W_s - \mu t)^2}{2(t-s)}\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y - W_s - \mu s - \mu(t-s))^2}{2(t-s)}\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y - X_s - \mu(t-s))^2}{2(t-s)}\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) p(t-s, X_s, y) dy = g(X_s). \end{aligned}$$

3.6.2 (ii)

$\mu = \nu/\sigma$ とすれば、幾何ブラウン運動は、 $S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \nu t} = S_t = S_0 e^{\sigma X_t}$ とかける。(i) の結果 (5 行目) を利用して、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(S_t)|\mathcal{F}(s)] &= \mathbb{E}[f(S_0 e^{\sigma X_t})|\mathcal{F}(s)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(S_0 e^{\sigma y}) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y - X_s - \mu(t-s))^2}{2(t-s)}\right) dy \end{aligned}$$

$z = S_0 e^{\sigma y} = S_0 e^{\sigma X_t}$ という変数変換を考えれば, 積分範囲は $z: 0 \rightarrow \infty$ で,
 $y = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{z}{S_0}$, $dy = \frac{1}{\sigma z} dz$, $y - X_s = X_t - X_s = \frac{1}{\sigma} (\ln \frac{z}{S_0} - \ln \frac{S_s}{S_0}) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{z}{S_s}$ であるから,

$$\begin{aligned} E[f(S_t)|\mathcal{F}(s)] &= \int_0^\infty f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp \left\{ -\frac{\left(\frac{1}{\sigma} \ln \frac{z}{S_s} - \mu(t-s) \right)^2}{2(t-s)} \right\} \frac{1}{\sigma z} dz \\ &= \int_0^\infty f(z) \frac{1}{\sigma z \sqrt{2\pi(t-s)}} \exp \left\{ -\frac{(\ln(z/S_s) - \nu(t-s))^2}{2\sigma^2(t-s)} \right\} dz \\ &= \int_0^\infty f(z) p(t-s, S_s, z) dz = g(S_s). \end{aligned}$$

3.7

3.7.1 (i)

$E[Z_t|\mathcal{F}_s] = E[Z_s]$ を示したいが,

$$\begin{aligned} E \left[\frac{Z_t}{Z_s} | \mathcal{F}_s \right] &= E \left[\exp \left\{ \sigma(X_t - X_s) - \left(\sigma\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right)(t-s) \right\} | \mathcal{F}_s \right] \\ &= E \left[\exp \left\{ \sigma\mu(t-s) + \sigma(W_t - W_s) - \left(\sigma\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right)(t-s) \right\} | \mathcal{F}_s \right] \\ &= E \left[\exp \{ \sigma(W_t - W_s) \} \right] \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2}\sigma^2(t-s) \right\} = 1. \end{aligned}$$

を得る. 従って, $Z_t, t \geq 0$ はマルチンゲール.

3.7.2 (ii)

Z_t はマルチンゲールであるから, 任意抽出定理より,

$$E[Z_{t \wedge \tau_m}] = E[Z_0] = E[\exp(0)] = 1, \quad t \geq 0.$$

3.7.3 (iii)

$\tau_m = \min\{t \geq 0; X_t = m\}$ であるから, $t \leq \tau_m$ において, 以下が常に成り立つ.

$$0 \leq \exp\{\sigma X_{t \wedge \tau_m}\} \leq e^{\sigma m}.$$

まず^{*}は, $\exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})(t \wedge \tau_m)\}$ について考える.

$\{\tau_m < \infty\}$ のとき,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})(t \wedge \tau_m)\} = \exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})\tau_m\},$$

$\{\tau_m = \infty\}$ のとき,

$$\exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})(t \wedge \tau_m)\} = \exp\{-(\sigma\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)t\} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

これらをまとめると, 以下のように表せる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})(t \wedge \tau_m)\} = \mathbb{1}_{\{\tau_m < \infty\}} \exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})\tau_m\}.$$

次に, $\exp\{\sigma X_{t \wedge \tau_m}\}$ について考える.

$\{\tau_m < \infty\}$ のとき,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\{\sigma X_{t \wedge \tau_m}\} = e^{\sigma X_{\tau_m}} = e^{\sigma m},$$

$\{\tau_m = \infty\}$ のとき, $t \rightarrow \infty$ で $\exp\{\sigma X_{t \wedge \tau_m}\}$ が有界であることは保証できる. したがって, $\exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})(t \wedge \tau_m)\}$ と $\exp\{\sigma X_{t \wedge \tau_m}\}$ の積の極限值 ($t \rightarrow \infty$) はゼロである.

以上の議論をまとめると, 以下を得る.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Z_{t \wedge \tau_m} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \exp\{\sigma X_{t \wedge \tau_m} - (\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})(t \wedge \tau_m)\} \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau_m < \infty\}} \exp\{\sigma m - (\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})\tau_m\} \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau_m < \infty\}} Z_{\tau_m} \end{aligned}$$

3.7(ii) の結果について極限をとると, 優収束定理により,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[Z_{t \wedge \tau_m}] = E[\lim_{t \rightarrow \infty} Z_{t \wedge \tau_m}] = E[\mathbb{1}_{\{\tau_m < \infty\}} Z_{\tau_m}] = 1.$$

つまり,

$$E\left[\mathbb{1}_{\{\tau_m < \infty\}} \exp\{\sigma m - (\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})\tau_m\}\right] = 1$$

を得る (前半部証明終了). これと同値な式として次式を得る.

$$E\left[\mathbb{1}_{\{\tau_m < \infty\}} \exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})\tau_m\}\right] = e^{-\sigma m}.$$

全ての正の σ でこの式は成り立つので, 両辺を $\sigma \rightarrow 0$ として極限をとると, 単調収束定理より, $E[\mathbb{1}_{\{\tau_m < \infty\}}] = 1$ を得る. それと同値な式として, $\Pr\{\tau_m < \infty\} = 1$ を得る. この結果から, 上で得た期待値の式の定義関数を外すことができ,

$$E\left[\exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})\tau_m\}\right] = e^{-\sigma m}.$$

を得る. 最後に, $\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2} = \alpha$ とおけば, $\sigma > 0, \alpha > 0$ という条件の下で σ について解くと,

$$\sigma = -\mu + \sqrt{2\alpha + \mu^2}$$

となり, 以下のラプラス変換を得る.

$$E[e^{-\alpha\tau_m}] = e^{-\sigma m} = e^{m\mu - m\sqrt{2\alpha + \mu^2}}, \quad \alpha > 0.$$

3.8

3.8.1 (i)

$\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt,n}$ のモーメント母関数 $\varphi(u)$ は, リスク中立測度を用いて以下のように表せる.

$$\begin{aligned}\varphi_n(u) &= \tilde{\mathbb{E}} \left[\exp(u \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt,n}) \right] = \tilde{\mathbb{E}} \left[\exp \left\{ \frac{u}{\sqrt{n}} (X_{i,n} + \dots + X_{nt,n}) \right\} \right] \\ &= \left(\tilde{\mathbb{E}} \left[e^{\frac{u}{\sqrt{n}} X_{1,n}} \right] \right)^{nt} = \left(e^{\frac{u}{\sqrt{n}} \cdot 1} \tilde{p}_n + e^{-\frac{u}{\sqrt{n}} \cdot (-1)} \tilde{q}_n \right)^{nt} \\ &= \left[e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\frac{r}{n} + 1 - e^{-\sigma/\sqrt{n}}}{e^{\sigma/\sqrt{n}} - e^{-\sigma/\sqrt{n}}} \right) + e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}} \left(\frac{e^{\sigma/\sqrt{n}} - \frac{r}{n} - 1}{e^{\sigma/\sqrt{n}} - e^{-\sigma/\sqrt{n}}} \right) \right]^{nt} \\ &= \left[e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\frac{r}{n} + 1 - e^{-\sigma/\sqrt{n}}}{e^{\sigma/\sqrt{n}} - e^{-\sigma/\sqrt{n}}} \right) - e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\frac{r}{n} + 1 - e^{\sigma/\sqrt{n}}}{e^{\sigma/\sqrt{n}} - e^{-\sigma/\sqrt{n}}} \right) \right]^{nt}.\end{aligned}$$

3.8.2 (ii)

変数変換 $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ を施すと,

$$\varphi_{\frac{1}{x^2}}(u) = \left[e^{ux} \left(\frac{rx^2 + 1 - e^{-\sigma x}}{e^{\sigma x} - e^{-\sigma x}} \right) - e^{-ux} \left(\frac{rx^2 + 1 - e^{\sigma x}}{e^{\sigma x} - e^{-\sigma x}} \right) \right]^{\frac{t}{x^2}}$$

を得る. 対数をとると, 次式を得る.

$$\begin{aligned}\ln \varphi_{\frac{1}{x^2}}(u) &= \frac{t}{x^2} \ln \left[\frac{(rx^2 + 1)(e^{ux} - e^{-ux}) + e^{(\sigma-u)x} - e^{-(\sigma-u)x}}{e^{\sigma x} - e^{-\sigma x}} \right] \\ &= \frac{t}{x^2} \ln \left[\frac{(rx^2 + 1) \sinh ux + \sinh(\sigma - u)x}{\sinh \sigma x} \right] \\ &= \frac{t}{x^2} \ln \left[\frac{(rx^2 + 1) \sinh ux + \sinh \sigma x \cosh ux - \cosh \sigma x \sinh ux}{\sinh \sigma x} \right] \\ &= \frac{t}{x^2} \ln \left[\cosh ux + \frac{(rx^2 + 1 - \cosh \sigma x) \sinh ux}{\sinh \sigma x} \right].\end{aligned}$$

3.8.3 (iii)

x の極限をとることに注意すれば, テイラー級数展開を用いて次式を得る.

$$\begin{aligned}
 & \cosh ux + \frac{(rx^2 + 1 - \cosh \sigma x) \sinh ux}{\sinh \sigma x} \\
 &= 1 + \frac{u^2 x^2}{2} + O(x^4) + \frac{\left(rx^2 + 1 - 1 - \frac{\sigma^2 x^2}{2} + O(x^4)\right)(ux + O(x^3))}{\sigma x + O(x^3)} \\
 &= 1 + \frac{u^2 x^2}{2} + O(x^4) + \frac{\left(rx^2 - \frac{\sigma^2 x^2}{2}\right)ux^3 + O(x^5)}{\sigma x + O(x^3)} \\
 &= 1 + \frac{u^2 x^2}{2} + \frac{\left(rx^2 - \frac{\sigma^2 x^2}{2}\right)ux^3(1 + O(x^2))}{\sigma x(1 + O(x^2))} + O(x^4) \\
 &= 1 + \frac{u^2 x^2}{2} + \frac{ru x^2}{\sigma} - \frac{\sigma u x^2}{2} + O(x^4).
 \end{aligned}$$

3.8.4 (iv)

3.8(iii) の結果より, $\ln \varphi_{\frac{1}{x^2}}(u)$ に対してもテイラー級数展開を用いて次式を得る.

$$\ln \varphi_{\frac{1}{x^2}}(u) = \frac{t}{x^2} \ln \left(1 + \frac{u^2 x^2}{2} + \frac{ru x^2}{\sigma} - \frac{\sigma u x^2}{2} + O(x^4) \right) = \frac{t}{x^2} \left(\frac{u^2 x^2}{2} + \frac{ru x^2}{\sigma} - \frac{\sigma u x^2}{2} + O(x^4) \right).$$

$x \rightarrow 0$ の極限をとれば,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \varphi_{\frac{1}{x^2}}(u) = t \left(\frac{u^2}{2} + \frac{ru}{\sigma} - \frac{\sigma u}{2} \right) = \frac{1}{2} t u^2 + t \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) u$$

を得る. $x \rightarrow 0$ は $n \rightarrow \infty$ の極限に対応するため, これは, 二項モデルの確率変数 $\frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt,n}$ の極限分布を考えていることにあたる. モーメント母関数に対して確率分布は一意に定まり, 上で得たキュムラント (モーメント母関数の対数) から, $\frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt,n}$ の極限分布は平均 $t(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})$, 分散 t の正規分布となることがわかる. したがって, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} M_{nt,n}$ の極限分布は, 平均 $t(r - \frac{\sigma^2}{2})$, 分散 $\sigma^2 t$ の正規分布となる.

3.9

考え中.