Solutions Manual for ShreveII

spacegomi

3　ブラウン運動

3.1

$0 \le t < u_1 < u_2$ に対して，$\mathcal{F}(t) \subset \mathcal{F}(u_1)$（定義 3.3.3(i) 情報の蓄積）がいえる．また，$W(u_2) - W(u_1)$ は $\mathcal{F}(u_1)$ と独立（定義 3.3.3(iii) 将来の増分の独立性）である．以上より，$W(u_2) - W(u_1)$ は $\mathcal{F}_t$ と独立である．

3.2

$0 \le s \le t$ に対して，

$$\begin{aligned} W_t^2 - t &= \{(W_t - W_s) + W_s\}^2 - t \\ &= (W_t - W_s)^2 + 2(W_t - W_s)W_s + W_s^2 - t, \end{aligned}$$

とおく．

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[W_t^2 - t|\mathcal{F}_s] &= \mathrm{E}[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s] + 2\mathrm{E}[(W_t - W_s)W_s|\mathcal{F}_s] + \mathrm{E}[W_s|\mathcal{F}_s] - t \\ &= \mathrm{E}[(W_t - W_s)^2] + 2\mathrm{E}[W_t - W_s]\mathrm{E}[W_s|\mathcal{F}_s] + \mathrm{E}[W_s^2|\mathcal{F}_s] - t \\ &= (t - s) + 2 \cdot 0 \cdot W_s + W_s^2 - t = W_s^2 - s. \end{aligned}$$

以上より $W_t^2 - t$ はマルチンゲールである．

3.3

$X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$ のモーメント母関数とその微分は，

$$\begin{aligned} &\varphi(u) = \mathrm{E}[e^{u(X-\mu)}] = e^{\sigma^2 u^2/2},\ \varphi^{(1)}(u) = \sigma^2 u e^{\sigma^2 u^2/2},\ \varphi^{(2)}(u) = (\sigma^2 + \sigma^4 u^2)e^{\sigma^2 u^2/2}, \\ &\varphi^{(3)}(u) = (2\sigma^4 u + \sigma^4 u + \sigma^6 u^3)e^{\sigma^2 u^2/2} = (3\sigma^4 u + \sigma^6 u^3)e^{\sigma^2 u^2/2}, \\ &\varphi^{(4)}(u) = (3\sigma^4 + 3\sigma^6 u^2 + 3\sigma^6 u^2 + \sigma^8 u^4)e^{\sigma^2 u^2/2} = (3\sigma^4 + 6\sigma^6 u^2 + \sigma^8 u^4)e^{\sigma^2 u^2/2}. \end{aligned}$$

尖度＝ $\mathrm{E}[(X - \mu)^4] = \varphi^{(4)}(0) = 3\sigma^4$.

3.4　ブラウン運動の他の変分 (variation)

3.4.1　(i)

以下を満たすような集合 $A \in \mathcal{F}$ が存在すると仮定する：

$$\Pr(A) > 0,\, \omega \in A,\, \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |W_{t_{j+1}} - W_{t_j}|(\omega) < \infty$$

このとき，

$$\sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2(\omega) \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}|(\omega) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |W_{t_{j+1}} - W_{t_j}|(\omega)$$

となるが，
$|\Pi| \to 0$ とするとき，左辺は T，右辺は，$0 \cdot$ (有限) $= 0$ となり，矛盾する．したがって，1 次変分はほとんどすべての経路で無限大に発散する．

3.4.2　(ii)

３次変分について，以下の不等式を得る．

$$\sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^3 \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2$$

この式の右辺は，$|\Pi| \to 0$ とするとき，$0 \cdot T = 0$ となる．

3.5　ブラック-ショールズ-マートンの公式

$\phi(x)$ は標準正規分布の確率密度関数を表すものとする．

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[e^{-rT}(S_T - K)^+] &= e^{-rT} \int_{w \in D} (S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma w} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-w^2/2T} dw \\
&= e^{-rT} \int_{\sqrt{T}z \in D} (S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}z} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \\
&= S_0 \int_{\sqrt{T}z \in D} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-\sigma\sqrt{T})^2/2} dz - K e^{-rT} \int_{\sqrt{T}z \in D} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \\
&= S_0 \int_{\sqrt{T}(y+\sigma\sqrt{T}) \in D} \phi(y) dy - K e^{-rT} \int_{\sqrt{T}z \in D} \phi(z) dz
\end{aligned}$$

ここで，

$$D = \{x; S_T(x) - K > 0\} = \left\{ x; x > \frac{1}{\sigma} \left[\ln \frac{K}{S_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \right\}$$

であるから，最終行の y, z の積分範囲はそれぞれ，

$$
\begin{aligned}
y &> \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{K}{S_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right] - \sigma\sqrt{T} = -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right] \\
z &> \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{K}{S_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right] = -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]
\end{aligned}
$$

であり，

$$
d_{\pm}(T, S_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{S_0}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]
$$

とおけば，

$$
\mathrm{E}[e^{-rT}(S_T - K)^+] = S_0 N(d_+(T, S_0)) - Ke^{-rT}N(d_-(T, S_0)).
$$

3.6

3.6.1　(i)

ドリフトを持つブラウン運動 $X_t = \mu t + W_t$ について，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[f(X_t)|\mathcal{F}(s)] &= \mathrm{E}[f(\mu t + W_t)|\mathcal{F}(s)] = \mathrm{E}[f(W_t - W_s + W_s + \mu t)|\mathcal{F}(s)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(w + W_s + \mu t)\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left(-\frac{w^2}{2(t-s)}\right)dw \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left(-\frac{(y - W_s - \mu t)^2}{2(t-s)}\right)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left(-\frac{(y - W_s - \mu s - \mu(t-s))^2}{2(t-s)}\right)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left(-\frac{(y - X_s - \mu(t-s))^2}{2(t-s)}\right)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)p(t-s, X_s, y)dy = g(X_s).
\end{aligned}
$$

3.6.2　(ii)

$\mu = \nu/\sigma$ とすれば，幾何ブラウン運動は，$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \nu t} = S_t = S_0 e^{\sigma X_t}$ とかける．(i) の結果 (5 行目) を利用して，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[f(S_t)|\mathcal{F}(s)] &= \mathrm{E}[f(S_0 e^{\sigma X_t})|\mathcal{F}(s)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(S_0 e^{\sigma y})\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left(-\frac{(y - X_s - \mu(t-s))^2}{2(t-s)}\right)dy
\end{aligned}
$$

$z = S_0 e^{\sigma y} = S_0 e^{\sigma X_t}$ という変数変換を考えれば，積分範囲は $z : 0 \to \infty$ で，
$y = \dfrac{1}{\sigma}\ln\dfrac{z}{S_0}, \quad dy = \dfrac{1}{\sigma z}dz, \quad y - X_s = X_t - X_s = \dfrac{1}{\sigma}(\ln\dfrac{z}{S_0} - \ln\dfrac{S_s}{S_0}) = \dfrac{1}{\sigma}\ln\dfrac{z}{S_s}$ であるから，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[f(S_t)|\mathcal{F}(s)] &= \int_0^\infty f(z)\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left\{-\frac{\left(\frac{1}{\sigma}\ln\frac{z}{S_s} - \mu(t-s)\right)^2}{2(t-s)}\right\}\frac{1}{\sigma z}dz \\
&= \int_0^\infty f(z)\frac{1}{\sigma z\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left\{-\frac{(\ln(z/S_s) - \nu(t-s))^2}{2\sigma^2(t-s)}\right\}dz \\
&= \int_0^\infty f(z)p(t-s, S_s, z)dz = g(S_s).
\end{aligned}$$

3.7

3.7.1 (i)

$\mathrm{E}[Z_t|\mathcal{F}_s] = \mathrm{E}[Z_s]$ を示したいが，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\frac{Z_t}{Z_s}|\mathcal{F}_s\right] &= \mathrm{E}\left[\exp\left\{\sigma(X_t - X_s) - (\sigma\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)\right\}|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\exp\left\{\sigma\mu(t-s) + \sigma(W_t - W_s) - (\sigma\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)\right\}|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\exp\left\{\sigma(W_t - W_s)\right\}\right]\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)\right\} = 1.
\end{aligned}$$

を得る．従って，$Z_t, t \geq 0$ はマルチンゲール．

3.7.2 (ii)

Z_t はマルチンゲールであるから，任意抽出定理より，

$$\mathrm{E}[Z_{t\wedge\tau_m}] = \mathrm{E}[Z_0] = \mathrm{E}[\exp(0)] = 1, \quad t \geq 0.$$

3.7.3 (iii)

$\tau_m = \min\{t \geq 0;\, X_t = m\}$ であるから，$t \leq \tau_m$ において，以下が常に成り立つ．

$$0 \leq \exp\{\sigma X_{t\wedge\tau_m}\} \leq e^{\sigma m}.$$

まずは，$\exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})(t\wedge\tau_m)\}$ について考える．
$\{\tau_m < \infty\}$ のとき，

$$\lim_{t\to\infty}\exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})(t\wedge\tau_m)\} = \exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})\tau_m\},$$

$\{\tau_m = \infty\}$ のとき，

$$\exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})(t \wedge \tau_m)\} = \exp\{-(\sigma\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)t\} \to 0 \quad (t \to \infty),$$

これらをまとめると，以下のように表せる．

$$\lim_{t\to\infty} \exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})(t \wedge \tau_m)\} = \mathbb{1}_{\{\tau_m<\infty\}} \exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})\tau_m\}.$$

次に，$\exp\{\sigma X_{t\wedge\tau_m}\}$ について考える．
$\{\tau_m < \infty\}$ のとき，

$$\lim_{t\to\infty} \exp\{\sigma X_{t\wedge\tau_m}\} = e^{\sigma X_{\tau_m}} = e^{\sigma m},$$

$\{\tau_m = \infty\}$ のとき，$t \to \infty$ で $\exp\{\sigma X_{t\wedge\tau_m}\}$ が有界であることは保証できる．したがって，$\exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})(t \wedge \tau_m)\}$ と $\exp\{\sigma X_{t\wedge\tau_m}\}$ の積の極限値 $(t \to \infty)$ はゼロである．

以上の議論をまとめると，以下を得る．

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} Z_{t\wedge\tau_m} &= \lim_{t\to\infty} \exp\{\sigma X_{t\wedge\tau_m} - (\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})(t \wedge \tau_m)\} \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau_m<\infty\}} \exp\{\sigma m - (\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})\tau_m\} \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau_m<\infty\}} Z_{\tau_m}\end{aligned}$$

3.7(ii) の結果について極限をとると，優収束定理により，

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[Z_{t\wedge\tau_m}] = \mathrm{E}[\lim_{t\to\infty} Z_{t\wedge\tau_m}] = \mathrm{E}[\mathbb{1}_{\{\tau_m<\infty\}} Z_{\tau_m}] = 1.$$

つまり，

$$\mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{\{\tau_m<\infty\}} \exp\{\sigma m - (\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})\tau_m\}\right] = 1$$

を得る（前半部証明終了）．これと同値な式として次式を得る．

$$\mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{\{\tau_m<\infty\}} \exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})\tau_m\}\right] = e^{-\sigma m}.$$

全ての正の σ でこの式は成り立つので，両辺を $\sigma \to 0$ として極限をとると，単調収束定理より，$\mathrm{E}[\mathbb{1}_{\{\tau_m<\infty\}}] = 1$ を得る．それと同値な式として，$\Pr\{\tau_m < \infty\} = 1$ を得る．この結果から，上で得た期待値の式の定義関数を外すことができ，

$$\mathrm{E}\left[\exp\{-(\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2})\tau_m\}\right] = e^{-\sigma m}.$$

を得る．最後に，$\sigma\mu + \frac{\sigma^2}{2} = \alpha$ とおけば，$\sigma > 0, \alpha > 0$ という条件の下で σ について解くと，

$$\sigma = -\mu + \sqrt{2\alpha + \mu^2}$$

となり，以下のラプラス変換を得る．

$$\mathrm{E}[e^{-\alpha\tau_m}] = e^{-\sigma m} = e^{m\mu - m\sqrt{2\alpha+\mu^2}}, \quad \alpha > 0.$$

3.8

3.8.1 (i)

$\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt,n}$ のモーメント母関数 $\varphi(u)$ は，リスク中立測度を用いて以下のように表せる．

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(u) &= \tilde{\mathrm{E}}\left[\exp(u\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt,n})\right] = \tilde{\mathrm{E}}\left[\exp\left\{\frac{u}{\sqrt{n}}(X_{i,n}+...+X_{nt,n})\right\}\right] \\
&= \left(\tilde{\mathrm{E}}\left[e^{\frac{u}{\sqrt{n}}X_{1,n}}\right]\right)^{nt} = \left(e^{\frac{u}{\sqrt{n}}\cdot 1}\tilde{p}_n + e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}\cdot(-1)}\tilde{q}_n\right)^{nt} \\
&= \left[e^{\frac{u}{\sqrt{n}}}\left(\frac{\frac{r}{n}+1-e^{-\sigma/\sqrt{n}}}{e^{\sigma/\sqrt{n}}-e^{-\sigma/\sqrt{n}}}\right) + e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}}\left(\frac{e^{\sigma/\sqrt{n}}-\frac{r}{n}-1}{e^{\sigma/\sqrt{n}}-e^{-\sigma/\sqrt{n}}}\right)\right]^{nt} \\
&= \left[e^{\frac{u}{\sqrt{n}}}\left(\frac{\frac{r}{n}+1-e^{-\sigma/\sqrt{n}}}{e^{\sigma/\sqrt{n}}-e^{-\sigma/\sqrt{n}}}\right) - e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}}\left(\frac{\frac{r}{n}+1-e^{\sigma/\sqrt{n}}}{e^{\sigma/\sqrt{n}}-e^{-\sigma/\sqrt{n}}}\right)\right]^{nt}.
\end{aligned}
$$

3.8.2 (ii)

変数変換 $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ を施すと，

$$
\varphi_{\frac{1}{x^2}}(u) = \left[e^{ux}\left(\frac{rx^2+1-e^{-\sigma x}}{e^{\sigma x}-e^{-\sigma x}}\right) - e^{-ux}\left(\frac{rx^2+1-e^{\sigma x}}{e^{\sigma x}-e^{-\sigma x}}\right)\right]^{\frac{t}{x^2}}
$$

を得る．対数をとると，次式を得る．

$$
\begin{aligned}
\ln\varphi_{\frac{1}{x^2}}(u) &= \frac{t}{x^2}\ln\left[\frac{(rx^2+1)(e^{ux}-e^{-ux})+e^{(\sigma-u)x}-e^{-(\sigma-u)x}}{e^{\sigma x}-e^{-\sigma x}}\right] \\
&= \frac{t}{x^2}\ln\left[\frac{(rx^2+1)\sinh ux+\sinh(\sigma-u)x}{\sinh\sigma x}\right] \\
&= \frac{t}{x^2}\ln\left[\frac{(rx^2+1)\sinh ux+\sinh\sigma x\cosh ux-\cosh\sigma x\sinh ux}{\sinh\sigma x}\right] \\
&= \frac{t}{x^2}\ln\left[\cosh ux+\frac{(rx^2+1-\cosh\sigma x)\sinh ux}{\sinh\sigma x}\right].
\end{aligned}
$$

3.8.3 (iii)

x の極限をとることに注意すれば，テイラー級数展開を用いて次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\cosh ux + \frac{(rx^2+1-\cosh\sigma x)\sinh ux}{\sinh\sigma x} \\
=&1+\frac{u^2x^2}{2}+O(x^4)+\frac{\left(rx^2+1-1-\frac{\sigma^2x^2}{2}+O(x^4)\right)(ux+O(x^3))}{\sigma x+O(x^3)} \\
=&1+\frac{u^2x^2}{2}+O(x^4)+\frac{\left(rx^2-\frac{\sigma^2x^2}{2}\right)ux^3+O(x^5)}{\sigma x+O(x^3)} \\
=&1+\frac{u^2x^2}{2}+\frac{\left(rx^2-\frac{\sigma^2x^2}{2}\right)ux^3(1+O(x^2))}{\sigma x(1+O(x^2))}+O(x^4) \\
=&1+\frac{u^2x^2}{2}+\frac{rux^2}{\sigma}-\frac{\sigma ux^2}{2}+O(x^4).
\end{aligned}
$$

3.8.4 (iv)

3.8(iii) の結果より，$\ln\varphi_{\frac{1}{x^2}}(u)$ に対してもテイラー級数展開を用いて次式を得る．

$$
\ln\varphi_{\frac{1}{x^2}}(u)=\frac{t}{x^2}\ln\left(1+\frac{u^2x^2}{2}+\frac{rux^2}{\sigma}-\frac{\sigma ux^2}{2}+O(x^4)\right)=\frac{t}{x^2}\left(\frac{u^2x^2}{2}+\frac{rux^2}{\sigma}-\frac{\sigma ux^2}{2}+O(x^4)\right).
$$

$x\to 0$ の極限をとれば，

$$
\lim_{x\to 0}\ln\varphi_{\frac{1}{x^2}}(u)=t(\frac{u^2}{2}+\frac{ru}{\sigma}-\frac{\sigma u}{2})=\frac{1}{2}tu^2+t(\frac{r}{\sigma}-\frac{\sigma}{2})u
$$

を得る．$x\to 0$ は $n\to\infty$ の極限に対応するため，これは，二項モデルの確率変数 $\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt,n}$ の極限分布を考えていることにあたる．モーメント母関数に対して確率分布は一意に定まり，上で得たキュムラント (モーメント母関数の対数) から，$\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt,n}$ の極限分布は平均 $t(\frac{r}{\sigma}-\frac{\sigma}{2})$，分散 t の正規分布となることがわかる．したがって，$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}M_{nt,n}$ の極限分布は，平均 $t(r-\frac{\sigma^2}{2})$，分散 $\sigma^2 t$ の正規分布となる．

3.9

考え中．