Solutions Manual for Shreve2

Kohei Fukushima

2018 年 1 月 24 日

1　ブラウン運動

3.1
Proof.　$0 \le t < u_1 < u_2$ に対して，$\mathcal{F}(t) \subset \mathcal{F}(u_1)$（定義 3.3.3(i) 情報の蓄積）がいえる．また，$W(u_2) - W(u_1)$ は $\mathcal{F}(u_1)$ と独立（定義 3.3.3(iii) 将来の増分の独立性）である．以上より，$W(u_2) - W(u_1)$ は $\mathcal{F}_t$ と独立である．

3.2

$$\begin{aligned} W_t^2 - t &= \{(W_t - W_s) + W_s\}^2 - t \\ &= (W_t - W_s)^2 + 2(W_t - W_s)W_s + W_s^2 - t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[W_t^2 - t|\mathcal{F}_s] &= \mathrm{E}[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s] + 2\mathrm{E}[(W_t - W_s)W_s|\mathcal{F}_s] + \mathrm{E}[W_s|\mathcal{F}_s] - t \\ &= \mathrm{E}[(W_t - W_s)^2] + 2\mathrm{E}[W_t - W_s]\mathrm{E}[W_s|\mathcal{F}_s] + \mathrm{E}[W_s^2|\mathcal{F}_s] - t \\ &= (t-s) + 2 \cdot 0 \cdot W_s + W_s^2 - t = W_s^2 - s. \end{aligned}$$

3.3
$X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$ のモーメント母関数とその微分は，

$$\begin{aligned} &\varphi(u) = \mathrm{E}[e^{u(X-\mu)}] = e^{\sigma^2 u^2/2},\ \varphi^{(1)}(u) = \sigma^2 u e^{\sigma^2 u^2/2},\ \varphi^{(2)}(u) = (\sigma^2 + \sigma^4 u^2)e^{\sigma^2 u^2/2}, \\ &\varphi^{(3)}(u) = (2\sigma^4 u + \sigma^4 u + \sigma^6 u^3)e^{\sigma^2 u^2/2} = (3\sigma^4 u + \sigma^6 u^3)e^{\sigma^2 u^2/2}, \\ &\varphi^{(4)}(u) = (3\sigma^4 + 3\sigma^6 u^2 + 3\sigma^6 u^2 + \sigma^8 u^4)e^{\sigma^2 u^2/2} = (3\sigma^4 + 6\sigma^6 u^2 + \sigma^8 u^4)e^{\sigma^2 u^2/2}. \end{aligned}$$

尖度＝ $\mathrm{E}[(X-\mu)^4] = \varphi^{(4)}(0) = 3\sigma^4$.

3.4 ブラウン運動の他の変分 (variation)
(i) 以下を満たすような集合 $A \in \mathcal{F}$ が存在すると仮定する：
$\mathrm{P}(A) > 0$, $\omega \in A$, $\lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |W_{t_{j+1}} - W_{t_j}|(\omega) < \infty$

$\sum_{j=0}^{n-1}(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})^2(\omega) \leq \max_{0\leq k\leq n-1}|W_{t_{k+1}}-W_{t_k}|(\omega)\cdot\sum_{j=0}^{n-1}|W_{t_{j+1}}-W_{t_j}|(\omega)$ となるが，$|\Pi| \to 0$ とするとき，左辺は T，右辺は，$0\cdot$(有限) $=0$ となり，矛盾する．したがって，1 次変分はほとんどすべての経路で無限大に発散する．

(ii) $\sum_{j=0}^{n-1}(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})^3 \leq \max_{0\leq k\leq n-1}|W_{t_{k+1}}-W_{t_k}|\cdot\sum_{j=0}^{n-1}(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})^2$ は，

$|\Pi| \to 0$ のとき，$\to 0\cdot T = 0$

3.5 ブラック-ショールズ-マートンの公式

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[e^{-rT}(S_T-K)^+] &= e^{-rT}\int_{w\in D}(S_0e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma w}-K)\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-w^2/2T}dw \\
&= e^{-rT}\int_{\sqrt{T}z\in D}(S_0e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}z}-K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz \\
&= S_0\int_{\sqrt{T}z\in D}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(z-\sigma\sqrt{T})^2/2}dz - Ke^{-rT}\int_{\sqrt{T}z\in D}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz \\
&= S_0\int_{\sqrt{T}(y+\sigma\sqrt{T})\in D}\phi(y)dy - Ke^{-rT}\int_{\sqrt{T}z\in D}\phi(z)dz
\end{aligned}$$

ここで，

$$D = \{x; S_T(x)-K>0\} = \left\{x; x > \frac{1}{\sigma}\left[\ln\frac{K}{S_0}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]\right\}$$

であるから，最終行の y, z の積分範囲はそれぞれ，

$$\begin{aligned}
y &> \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{K}{S_0}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]-\sigma\sqrt{T} = -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{S_0}{K}+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right] \\
z &> \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{K}{S_0}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right] = -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{S_0}{K}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]
\end{aligned}$$

であり，

$$d_\pm(T,S_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{S_0}{K}+\left(r\pm\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]$$

とおけば，

$$\mathrm{E}[e^{-rT}(S_T-K)^+] = S_0N(d_+(T,S_0)) - Ke^{-rT}N(d_-(T,S_0))$$

である．

3.6

(i) ドリフトを持つブラウン運動 $X_t = \mu t + W_t$ について，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[f(X_t)|\mathcal{F}(s)] &= \mathrm{E}[f(\mu t + W_t)|\mathcal{F}(s)] = \mathrm{E}[f(W_t - W_s + W_s + \mu t)|\mathcal{F}(s)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(w + W_s + \mu t) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{w^2}{2(t-s)}\right) dw \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y - W_s - \mu t)^2}{2(t-s)}\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y - W_s - \mu s - \mu(t-s))^2}{2(t-s)}\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y - X_s - \mu(t-s))^2}{2(t-s)}\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) p(t-s, X_s, y) dy = g(X_s).
\end{aligned}
$$

(ii) $\mu = \nu/\sigma$ とすれば，幾何ブラウン運動は，$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \nu t} = S_t = S_0 e^{\sigma X_t}$ とかける．(i) の結果 (5 行目) を利用して，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[f(S_t)|\mathcal{F}(s)] &= \mathrm{E}[f(S_0 e^{\sigma X_t})|\mathcal{F}(s)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(S_0 e^{\sigma y}) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y - X_s - \mu(t-s))^2}{2(t-s)}\right) dy
\end{aligned}
$$

$z = S_0 e^{\sigma y} = S_0 e^{\sigma X_t}$ という変数変換を考えれば，積分範囲は $z : 0 \to \infty$ で，
$y = \dfrac{1}{\sigma} \ln \dfrac{z}{S_0}, \quad dy = \dfrac{1}{\sigma z} dz, \quad y - X_s = X_t - X_s = \dfrac{1}{\sigma}(\ln \dfrac{z}{S_0} - \ln \dfrac{S_s}{S_0}) = \dfrac{1}{\sigma} \ln \dfrac{z}{S_s}$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[f(S_t)|\mathcal{F}(s)] &= \int_0^{\infty} f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{\left(\dfrac{1}{\sigma}\ln\dfrac{z}{S_s} - \mu(t-s)\right)^2}{2(t-s)}\right\} \frac{1}{\sigma z} dz \\
&= \int_0^{\infty} f(z) \frac{1}{\sigma z\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{(\ln(z/S_s) - \nu(t-s))^2}{2\sigma^2(t-s)}\right\} dz \\
&= \int_0^{\infty} f(z) p(t-s, S_s, z) dz = g(S_s).
\end{aligned}
$$