Determinar para la sgte función: Dominio, puntos críticos, asíntotas verticales y horizontales, máximos y minímos locales, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión, intervalos de concavidad y convexidad. Graficar. (Las cuentas que no están en esta hoja las realizamos en el pizarrón)

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

- DOMINIO: Son todos los valores de x en los que la función está bien definida

  El denominador está bien definido y es distinto de 0 para todo x, el numerador está siempre bien definido, por lo tanto el dominio son todos los números reales: Dom(f) $= \mathbb{R}$

- ASÍNTOTAS VERTICALES: Si $a \notin Dom(f)$ y $\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$, entonces x=a es una asíntota vertical
  No tiene ya que Dom(f) $= \mathbb{R}$

- ASÍNTOTAS HORIZONTALES: Si alguno de los $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$, entonces tiene asíntota horizontal en $y = L$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+ \ , \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$$

  f tiene asíntotas horizontales en $y = 0$

- DERIVADAS:
  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ $\qquad$ $f''(x) = \frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$

- PUNTOS CRÍTICOS: son los X_c / $f'(X_c) = 0$ o aquellos en los que $f'(X_c)$ no $\exists$

  Para calcular $f'(x) = 0$, como el denominador no puede anularse, alcanza con pedir que se anule el numerador:

$$0 = 1 - x^2 \ \Rightarrow \ x^2 = 1 \ \Rightarrow \ \mathbf{X_{c_1} = 1} \ , \ \mathbf{X_{c_2} = -1}$$

  Otros puntos críticos podrían ser aquellos donde no exista la derivada. Pero, en este caso en particular, esta función no tiene ningún problema, está bien definida para todo x.

- INTERVALOS DE CRECIMIENTO: son los x / $f'(x) > 0$.

  Podemos resolver la inecuación de la siguiente manera:
  $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \ \Rightarrow$ Ya que el denominador es siempre positivo alcanza con pedir:

$$1 - x^2 > 0 \ \Rightarrow \ 1 > x^2 \ \Rightarrow \ |x| < 1 \ \Rightarrow$$

  resolviendo: f(x) es creciente en el intervalo $(-1, 1)$

- INTERVALOS DE DECRECIMIENTO: x / $f'(x) < 0$.

  Podemos resolver la inecuación de la siguiente manera:
  $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} < 0 \ \Rightarrow \ 1 - x^2 < 0 \ \Rightarrow \ 1 < x^2 \ \Rightarrow \ |x| > 1 \ \Rightarrow \ f(x)$ es decreciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$

- Otra manera para ver los signos de la $f'(x)$ es fabricar una tabla. En ella tenemos separar los intervalos determinados por los valores de **x que no pertenecen al domino de f, y todos los puntos críticos**, y evaluamos el signo de la $f'(x)$ en esos intervalos

x_f/X_c	$x<-1$	x=-1	$-1<x<1$	x=1	$x>1$
$f'(x)$		0		0	

Podemos usar cualquier punto en cada uno de esos intervalos, por ejemplo el punto $x=-2 \Rightarrow f'(-2)=-3/25<0$, el punto $x=0 \Rightarrow f'(0)=1>0$, y el punto $x=2 \Rightarrow f'(2)=-3/25<0$. Entonces la tabla nos queda:

x_f/X_c	$x<-1$	x=-1	$-1<x<1$	x=1	$x>1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Es decir, f decrece en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(1,+\infty)$, y f crece en $(-1,1)$

- MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES:

  - Una forma de encontrarlos es sabiendo que si la $f''(X_c)>0$, entonces X_c es mínimo local, si $f''(X_c)<0$, X_c es máximo local

  $f''(X_{c_1}=1)=\frac{-2(3-1)}{2^3}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}\ <\ 0\ \Rightarrow\ X_{c_1}$ es Máximo Local.

  $f''(X_{c_2}=-1)=\frac{2(3-1)}{2^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\ >\ 0\ \Rightarrow\ X_{c_2}$ es Mínimo Local.

  - Otra forma es tomando el resultado de crecimiento y decrecimiento que encontramos en el ítem anterior: En un punto de máximo local, a la izquierda del punto la función crece y a la derecha del punto la función decrece: $\nearrow\searrow$; mientras que en un mínimo local, a la izquierda del punto la función decrece y a la derecha del punto la función crece: $\searrow\nearrow$

  Hemos encontrado que

x_f/X_c	$x<-1$	x=-1	$-1<x<1$	x=1	$x>1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

  por lo tanto, la función tiene un mínimo local en x=-1 y un máximo local en x=1

- INTERVALOS DE CONVEXIDAD (o cóncavo hacia arriba): Son los $x\ /\ f''(x)>0$

  el denominador de $f''(x)$ es siempre positivo, por lo tanto sólo analizamos el numerador.

  Pedir que: $-2x(3-x^2)>0$, es idéntico a pedir que : $x(3-x^2)<0$

  $\Rightarrow\quad x<0 \bigcap 3-x^2>0 \quad \bigcup \quad x>0 \bigcap 3-x^2<0$

  $x<0 \bigcap |x|<\sqrt{3} \quad \bigcup \quad x>0 \bigcap |x|>\sqrt{3}$

  $(-\sqrt{3},0) \quad \bigcup \quad (\sqrt{3},+\infty)$

- INTERVALOS DE CONCAVIDAD (o cóncavo hacia abajo): Son los $x\ /\ f''(x)<0$

  Pedir que: $-2x(3-x^2)<0$, es idéntico a pedir que : $x(3-x^2)>0$

  $\Rightarrow\quad x>0 \bigcap 3-x^2>0 \quad \bigcup \quad x<0 \bigcap 3-x^2<0$

  $x>0 \bigcap |x|<\sqrt{3} \quad \bigcup \quad x<0 \bigcap |x|>\sqrt{3}$

  $(0,\sqrt{3}) \quad \bigcup \quad (-\infty,-\sqrt{3})$

- PUNTOS DE INFLEXIÓN: Son los x donde la $f''(x)$ pasa de positiva a negativa o viceversa. Por lo calculado, podemos ver que los puntos donde la función pasa de cóncava hacia arriba ($f''(x) > 0$) a cóncava hacia abajo ($f''(x) < 0$) o viceversa son:

$$X_{I_1} = 0,\ X_{I_2} = \sqrt{3}\ ,\ X_{I_3} = -\sqrt{3}$$

  - Nuevamente, para ver los signos de la $f''(x)$ se puede fabricar una tabla. En ella tenemos que poner los valores de **x que no pertenecen al domino de f, y todos los puntos donde la** $f''(x) = 0$, y evaluamos el signo de la $f''(x)$ en los intervalos comprendidos entre esos puntos. Para obtener $f''(x) = 0$, alcanza con pedir que el numerador se anule $\Rightarrow$:

  $-2x(3 - x^2) = 0 \ \Rightarrow\ X_1 = 0\ \ U\ \ 3 - x^2 = 0$

  . $x^2 = 3 \Rightarrow\ X_2 = \sqrt{3}\ ,\ X_3 = -\sqrt{3}$

x_f/X_I	$x < -\sqrt{3}$	$x = -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	x=0	$0 < x < \sqrt{3}$	$x = \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
$f''(x)$		0		0		0	

Podemos usar cualquier punto en cada uno de esos intervalos, por ejemplo el punto $x = -2 \Rightarrow f''(-2) = -4/125 < 0$, el punto $x = -1 \Rightarrow f''(-1) = 1/2 > 0$, el punto $x = 1 \Rightarrow f''(1) = -1/2 < 0$,y el punto $x = 2 \Rightarrow f''(2) = 4/125 > 0$. Entonces la tabla nos queda:

x_f/X_I	$x < -\sqrt{3}$	$x = -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	x=0	$0 < x < \sqrt{3}$	$x = \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Es decir, f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, +\infty)$, y f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(0, \sqrt{3})$. Además, vemos que hay puntos de inflexión en $-\sqrt{3}$, 0 y $\sqrt{3}$.

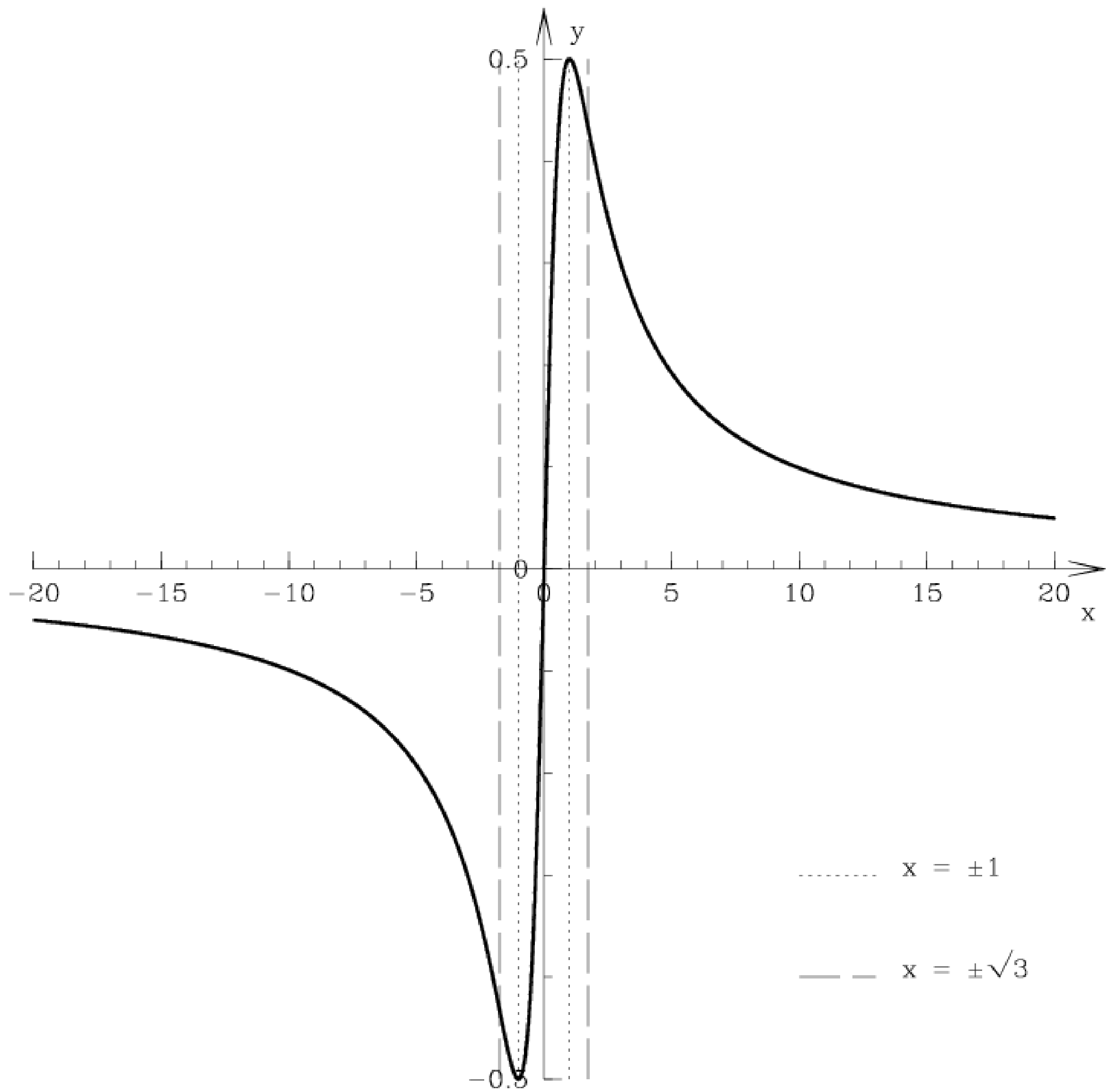
x_f/X_I	$x < -\sqrt{3}$	$x = -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	x=0	$0 < x < \sqrt{3}$	$x = \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\bigcap$		$\bigcup$		$\bigcap$		$\bigcup$

RESUMIENDO:

1. Dominio: $\mathbb{R}$
2. No tiene asíntotas verticales
3. las asíntotas horizontales son $f(\pm\infty) = 0$
4. Puntos críticos: $X_c = 1$ y $X_c = -1$
5. Máximo local en $X_c = 1$ y mínimo local en $X_c = -1$
6. en este caso, el máximo absoluto coincide con el máximo local, y el mínimo absoluto con el mínimo local
7. $f(x)$ es creciente para los x en el intervalo $(-1, 1)$
8. $f(x)$ es decreciente para los x en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$
9. $f(x)$ es convexa en los intervalos $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, +\infty)$
10. $f(x)$ es cóncava en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(0, \sqrt{3})$

11. Puntos de inflexión: $X_i = -\sqrt{3}$, $X_i = 0$ y $X_i = \sqrt{3}$

CON TODO ESTO, REALIZAR EL GRÁFICO:



EUGE