

Práctico 4
Matemática Discreta I – Año 2024/1
FAMAF

- (1) *a)* Calcular el resto de la división de 1599 por 39 sin tener que hacer la división. (Ayuda: $1599 = 1600 - 1 = 40^2 - 1$).
b) Lo mismo con el resto de 914 al dividirlo por 31.
- (2) Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que todo número de la forma $4^n - 1$ es divisible por 3.
- (3) Probar que el resto de dividir n^2 por 4 es igual a 0 si n es par y 1 si n es impar.
- (4) *a)* Probar las reglas de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 8, 9 y 11.
b) Decir por cuáles de los números del 2 al 11 son divisibles los siguientes números:
12342 5176 314573 899.
- (5) Sean a, b, c números enteros, ninguno divisible por 3. Probar que
$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod{3}.$$
- (6) Hallar la cifra de las unidades y la de las decenas del número 7^{15} .
- (7) Hallar el resto en la división de x por 5 y por 7 para:
a) $x = 1^8 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + 5^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8$;
b) $x = 3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 71 \cdot 101$.
- (8) Hallar todos los x que satisfacen:
a) $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$ *b)* $x^2 \equiv x \pmod{12}$ *c)* $x^2 \equiv 2 \pmod{3}$
d) $x^2 \equiv 0 \pmod{12}$ *e)* $x^4 \equiv 1 \pmod{16}$ *f)* $3x \equiv 1 \pmod{5}$
- (9) Sean $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $d > 0$ tales que $d \mid a$, $d \mid b$ y $d \mid m$. Probar que la ecuación $a \cdot x \equiv b \pmod{m}$ tiene solución si y solo si la ecuación
$$\frac{a}{d} \cdot x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$$
tiene solución.
- (10) Resolver las siguientes ecuaciones:
a) $2x \equiv -21 \pmod{8}$ *b)* $2x \equiv -12 \pmod{7}$ *c)* $3x \equiv 5 \pmod{4}$.

(11) Resolver la ecuación $221x \equiv 85 \pmod{340}$. Hallar todas las soluciones x tales que $0 \leq x < 340$.

(12) a) Encontrar todas las soluciones de la ecuación en congruencia

$$36x \equiv 8 \pmod{20}$$

usando el método visto en clase.

b) Dar todas las soluciones x de la ecuación anterior tales que $-8 < x < 30$.

(13) a) Encontrar todas las soluciones de la ecuación en congruencia

$$21x \equiv 6 \pmod{30}$$

usando el método visto en clase.

b) Dar todas las soluciones x de la ecuación anterior tales que $0 < x < 35$.

(14) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas **justificando** apropiadamente.

a) El resto de dividir 117^{273} por 17 es 1.

b) La ecuación $10^{70}x \equiv 7 \pmod{2^{201}}$ tiene infinitas soluciones.

c) El número $\underbrace{2222 \cdots 2222}_{\text{tres millones de cifras}}$ es divisible por 9.

d) El resto de dividir 46^{69} por 23 es 1.

e) El número $\underbrace{101010 \cdots 101010}_{\text{un millón de cifras}}$ es divisible por 11.

(15) Dado $t \in \mathbb{Z}$, decimos que t es *invertible módulo m* si existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $th \equiv 1 \pmod{m}$.

a) ¿Es 5 invertible módulo 17?

b) Probar que t es invertible módulo m , si y sólo si $(t, m) = 1$.

c) Determinar los invertibles módulo m , para $m = 11, 12, 16$.

(16) Encontrar los enteros cuyos cuadrados divididos por 19 dan resto 9.

(17) Probar que todo número impar a satisface: $a^4 \equiv 1 \pmod{16}$, $a^8 \equiv 1 \pmod{32}$, $a^{16} \equiv 1 \pmod{64}$.

¿Se puede asegurar que $a^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$?

(18) Encontrar el resto en la división de a por b en los siguientes casos:

a) $a = 11^{13} \cdot 13^8$; $b = 12$; b) $a = 4^{1000}$; $b = 7$;

c) $a = 123^{456}$; $b = 31$; d) $a = 7^{83}$; $b = 10$.

(19) Obtener el resto en la división de 2^{21} por 13; de 3^8 por 5 y de 8^{25} por 127.

- (20) a) Probar que no existen enteros no nulos tales que $x^2 + y^2 = 3z^2$.
 b) Probar que no existen números racionales no nulos a, b, r tales que $3(a^2 + b^2) = 7r^2$.
- (21) Probar que si $(a, 1001) = 1$ entonces 1001 divide a $a^{720} - 1$.
- (22) Sea p primo impar. Probar que las únicas raíces cuadradas de 1 módulo p , son 1 y -1 módulo p . Es decir, probar que $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$, entonces $x \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

§ **Ejercicios de repaso.** Los ejercicios marcados con (*) son de mayor dificultad.

- (23) Dada la ecuación de congruencia

$$14x \equiv 10 \pmod{26},$$

hallar todas las soluciones en el intervalo $[-20, 10]$. Hacerlo con el método usado en la teórica.

- (24) Dada la ecuación de congruencia

$$21x \equiv 15 \pmod{39},$$

hallar todas las soluciones en el intervalo $[-10, 30]$. Hacerlo con el método usado en la teórica.

- (25) (*) ¿Para qué valores de n es $10^n - 1$ divisible por 11?
- (26) (*) Probar que para ningún $n \in \mathbb{N}$ se puede partir el conjunto $\{n, n+1, \dots, n+5\}$ en dos partes disjuntas no vacías tales que los productos de los elementos que las integran sean iguales.
- (27) (*) El número 2^{29} tiene nueve cifras y todas distintas. ¿Cuál dígito falta? (No está permitido el uso de calculadora).
- (28) (*) Sea $p = d \cdot 2^s + 1$ donde d es impar. Dado a entero tal que $0 < a < p$, probar que
- $a^d \equiv 1 \pmod{p}$, o
 - $a^{2^r \cdot d} \equiv -1 \pmod{p}$ para algún r tal que $0 \leq r < s$.
- Dicho de otra forma: probar que
- $$a^d \equiv 1 \pmod{p} \text{ o } a^d \equiv -1 \pmod{p} \text{ o } a^{2^d} \equiv -1 \pmod{p} \text{ o } \dots$$
- $$a^{2^{s-2}d} \equiv -1 \pmod{p} \text{ o } a^{2^{s-1}d} \equiv -1 \pmod{p}.$$
- (Ayuda: observar $a^{2^i d}$ es el cuadrado de $a^{2^{i-1}d}$ y por el Teorema de Fermat $a^{2^s \cdot d} = a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$). Utilizar el resultado del ejercicio (22)).

- (29) (*) Cinco hombres recogieron en una isla un cierto número de cocos y resolvieron repartirlos al día siguiente. Durante la noche uno de ellos decidió separar su parte y para ello dividió el total en cinco partes y dió un coco que sobraba a un mono y se fue a dormir. Enseguida otro de los hombres hizo lo mismo, dividiendo lo que había quedado por cinco, dando un coco que sobraba a un mono y retirando su parte, se fue a dormir. Uno tras otro los tres restantes hicieron lo mismo, dándole a un mono el coco que sobraba. A la mañana siguiente repartieron los cocos restantes, dándole a un mono el coco sobrante. ¿Cuál es el número mínimo de cocos que se recogieron?
- (30) (*) La producción diaria de huevos en una granja es inferior a 75. Cierta día el recolector informó que la cantidad de huevos recogida era tal que contando de a 3 sobraban 2, contando de a 5 sobraban 4 y contando de a 7 sobraban 5. El capataz, dijo que eso era imposible. ¿Quién tenía razón? Justificar.