

Análisis Matemático I/Cálculo I
 Licenciatura en Ciencias de la Computación
 Licenciatura en Matemática Aplicada
 FAMAF, UNC — Año 2024

Guía de Ejercicios N°6

Derivadas - 2° Parte

1. Haga corresponder el gráfico de cada función en (a)-(d) de la Figura 1 con el de su derivada en (i)-(iv). Justifique la correspondencia. Discuta lo que ve, prestando especial atención a lo que le pasa a $f(x)$ cuando $f'(x)$ es positiva y cuando $f'(x)$ es negativa. ¿Cómo se comporta $f(x)$ cuando $f'(x)$ se acerca a 0? ¿Está de acuerdo con la siguiente afirmación? *Mientras más grande es $|f'(x)|$, más rápido cambia $f(x)$* . Comente.

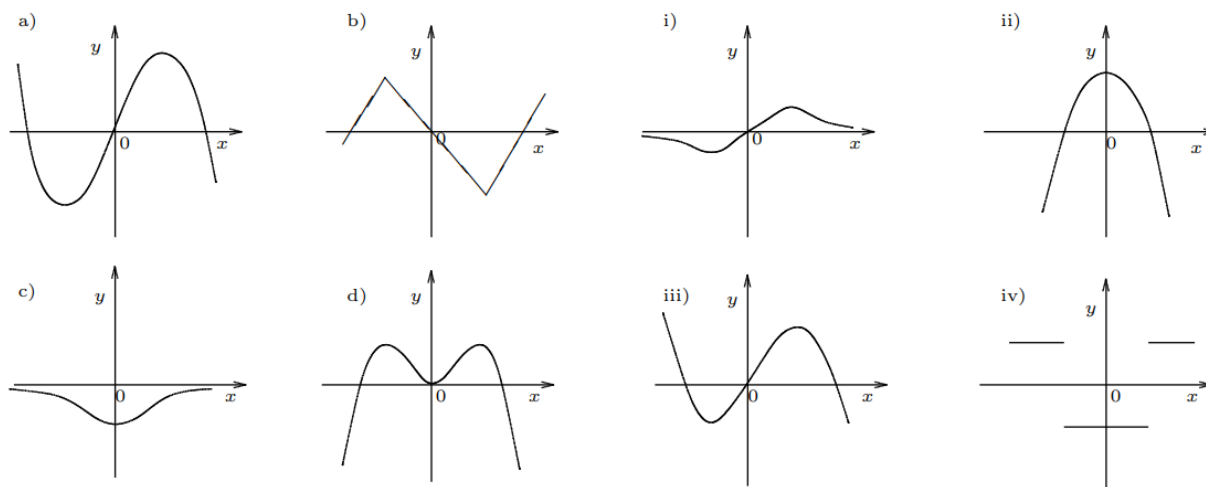


Figura 1

2. La Figura 2 muestra la gráfica de la función g en el intervalo $[-4, 7]$.

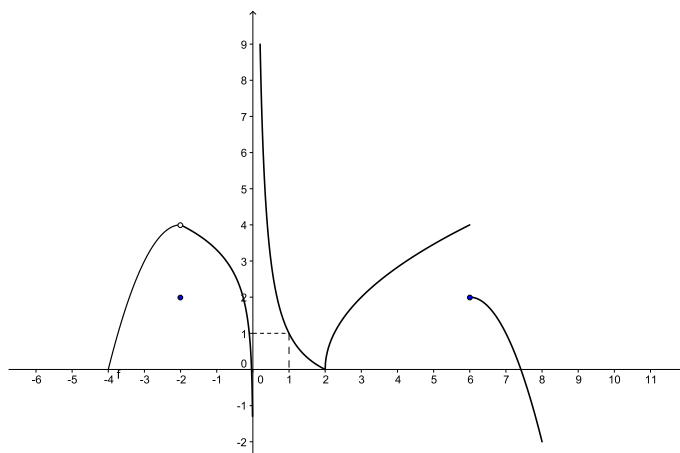


Figura 2: Función $g(x)$.

- a) ¿Qué puntos están excluidos del dominio de g ?
- b) ¿En qué puntos del dominio g es discontinua?
- c) ¿En qué puntos del dominio g no es diferenciable?
- d) Especifique un intervalo donde g crece más rápidamente.
- e) Especifique un intervalo donde g decrece más rápidamente.
- f) Esboce a grandes rasgos el gráfico de $g'(x)$.

Extremos locales y absolutos. Gráfica de funciones.

3. Encuentre el máximo y el mínimo de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x + 3, \quad x \in [-1, 1]$	d) $f(x) = x^2 - 4x + 6, \quad -3 \leq x \leq 10$
b) $f(x) = x^2 - x - 2 , \quad x \in [-3, 3]$	
c) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}, \quad -1 \leq x \leq 1$	e) $f(x) = (x^2 - x - 1) e^x, \quad x \leq 3$

4. Encuentre los extremos locales y absolutos de las siguientes funciones en \mathbb{R} :

a) $f(x) = x - x^{2/3}$	b) $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 1} + 3 \arctan x.$
-------------------------	---

5. Determine los intervalos donde la función $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$ es monótona.

6. Determine los máximos y mínimos locales de $f(x) = x^2 - |2x - 1|$.

7. Determine los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^{1/x} \quad \text{para } x > 0$	c) $f(x) = x^2 e^{-2x^2}$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$	d) $f(x) = x \ln x$

8. Esboce la gráfica de las siguientes funciones. Previamente determine dominio, puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento y comportamiento de la función cuando x se acerca a los bordes del dominio.

a) $f(x) = x^2 + 2x$	e) $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 3}$
b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$	f) $f(x) = (x^2 - 4)^2$
c) $f(x) = x - 2 \arctan x$	g) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$
d) $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + x - 2}$	h) $f(x) = \frac{1}{3 + x^2}$

9. Grafique una función que cumpla con **todas** las siguientes características:

- a) La función está definida para todos los reales.
- b) Tiene una asíntota horizontal en $y = -6$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- c) Tiene sólo 2 discontinuidades: una esencial en $x = 3$ y una de salto en $x = 6$.
- d) Es continua por derecha en $x = 3$ y $f(3) = -3$; $f(x) > 0$ en el intervalo $(4, 6)$ y $f(6) = -1$.
- e) $f'(x)$ y $f''(x)$ no existen únicamente para $x = 0$, $x = 3$ y $x = 6$.
- f) $f'(x) = 0$ para $x = -2$ y $x = 1$.
- g) $f'(x) < 0$ exclusivamente en los intervalos $(-2, 0)$ y $(6, +\infty)$.
- h) $f''(x) < 0$ exclusivamente en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(4, 6)$.
- i) Tiene 2 puntos de inflexión.
- j) En función de los datos brindados, especificar cuáles son las asíntotas de la función, cuáles son los máximos, mínimos, los puntos críticos y puntos de inflexión, en qué intervalos la función crece y decrece, y en cuáles es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

10. Demuestre que la ecuación $x^5 + 10x + 3 = 0$ tiene una y solo una raíz.

Formas Indeterminadas y la Regla de L'Hôpital.

11. Calcule los límites indicados

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 6x)}{x(x - 7)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 2^x}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^6 + x^{12}}{e^x}$

f) $\lim_{h \rightarrow 0^+} h \ln(h)$

j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

g) $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{\sin(r)}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}$

12. Compruebe que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0$ para cualquier número $p > 0$. Esto hace ver que la función logarítmica tiende a ∞ con mayor lentitud que cualquier potencia de x .

13. Compruebe que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ para cualquier entero n . Esto significa que la función exponencial tiende a ∞ con mayor rapidez que cualquier potencia de x .

Linealización y aplicaciones

14. Sea f una función tal que $f(1) = 2$, cuya función derivada es $f'(x) = \sqrt{x^3 + 1}$
- a) Estime el valor de $f(1,1)$ con una aproximación lineal.
 - b) ¿Cree que el valor exacto de $f(1,1)$ es menor o mayor que el estimado? ¿Por qué?
15. Usando aproximaciones lineales, encuentre valores aproximados de
- a) $\sqrt{36,1}$
 - b) $\frac{1}{10,1}$
 - c) $\sin 59^\circ$

Material Extra

16. El lado de un cubo mide 30 cm, con un posible error de medición de 0.1 cm. Usando aproximaciones lineales, estime el error máximo posible en el cálculo de
- a) el volumen del cubo,
 - b) su área.
17. Si V es el volumen de un cubo cuyo lado mide x , donde el valor de x depende de t , calcule dV/dt en función de dx/dt .
18. Si $xy = 1$ y $dx/dt = 4$, calcule dy/dt cuando $x = 2$.