Análisis Matemático I/Cálculo I

Lic. en Ciencias de la Computación / Lic. en Matemática Aplicada

FAMAF, UNC — Año 2024

Guía de Ejercicios N°3: Límites

1. A partir de una tabla de valores, estime $\lim_{x\to a} f(x)$ tomando valores cercanos a a, por derecha y por izquierda. (Sugerencia: utilice calculadora).

   a) $\lim_{x\to 4}(5x^2-2x+3)$ *b)* $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$ *c)* $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

2. Calcule los siguientes límites utilizando las propiedades de cálculo de límite.

   a) $\lim_{x\to 4}(5x^2-2x+3)$

   b) $\lim_{s\to 2}(s^2+1)(s^2+4s)$

   c) $\lim_{t\to -1}\dfrac{\sqrt{t^3+3t^2+7}}{t+2}$

   d) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$

   e) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$

   f) $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$

   g) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

3. Dada la siguiente función $f(x)$, calcule los límites laterales e indique si los límites indicados existen:

$$f(x)=\begin{cases} |x| & \text{si} \quad x\leq 0\\ 9-(x-3)^2 & \text{si} \quad 0<x<4\\ -1 & \text{si} \quad x\geq 4\end{cases}$$

   a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ *b)* $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ *c)* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *d)* $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ *e)* $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ *f)* $\lim_{x\to 4} f(x)$

4. Dada la siguiente función $g(x)$, calcule los límites laterales y decida si los límites indicados existen:

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si} \quad |x|>1\\ -x & \text{si} \quad |x|<1\\ 2 & \text{si} \quad |x|=1\end{cases}$$

   a) $\lim_{x\to 1^+} g(x)$ *b)* $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ *c)* $\lim_{x\to 1} g(x)$ *d)* $\lim_{x\to -1^+} g(x)$ *e)* $\lim_{x\to -1^-} g(x)$ *f)* $\lim_{x\to -1} g(x)$

5. Calcule los siguientes límites, si existen. Si no existen explique por qué:

   a) $\lim_{h\to 0^-}\dfrac{\sqrt{h^2}}{h}$

   b) $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{|x-2|}$

   c) $\lim_{x\to -2}\dfrac{2-|x|}{2+x}$

   d) $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

   e) $\lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

   f) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

6. Calcule:

   a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ sabiendo que $1 \leq f(x) \leq x^2 + 2x + 2$.

   b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ sabiendo que $3x \leq f(x) \leq x^3 + 2$ cerca de 1.

7. Calcule los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+1}{x+1}$

   b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x}{1+3x^2}$

   c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x+1}{2+2x^2+9x^4}$

   d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{18x^2+1}\dfrac{1}{\sqrt{32x^2-3}}\right)$

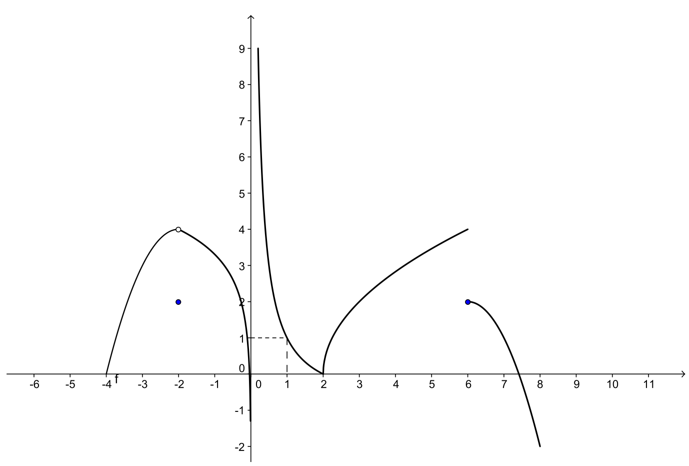
8. Determine las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes curvas:

   a) $y = \frac{x}{x+4}$

   b) $y = \frac{x^2+4}{x^2-1}$

   c) $y = \frac{x^3+1}{x^3+x}$

9. Observe el gráfico de la función g de la Figura que se muestra a continuación y determine, aproximadamente, los siguientes valores, en caso que existan.



   a) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

   b) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$

   c) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$

   d) $g(1)$

   e) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

   f) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$

   g) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$

   h) $g(2)$

   i) $\lim\limits_{x\to 6} g(x)$

   j) $\lim\limits_{x\to 6^+} g(x)$

   k) $\lim\limits_{x\to 6^-} g(x)$

   l) $g(6)$

   m) $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$

   n) $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$

   ñ) $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)$

   o) $g(-2)$

   p) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

   q) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

   r) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$

   s) $g(0)$

10. Calcule los límites indicados:

    a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^2-1}{x}$

    b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x^2-9)}{x^2-5x+6}$

    c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 5x}\right)^2$

    d) $\lim\limits_{r\to\infty} r \operatorname{sen} \dfrac{1}{r}$

    e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{x}$

    f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

11. Calcule los límites indicados:

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5^{2x+5}$
   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \pi^{-x}$
   c) $\lim\limits_{x\to2^+} 4^{\frac{x}{2-x}}$
   d) $\lim\limits_{x\to0^-} 3^{1/x}$
   e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x^2+3}\right)$
   f) $\lim\limits_{x\to3} \ln\left(\dfrac{9-x^2}{x-3}\right)$

12. Calcule los límites indicados:

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{4x}\right)^{4x+3}$
   b) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{1/3x}$
   c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{7}{5x}\right)^{2x}$
   d) $\lim\limits_{x\to0}(1+34x)^{3+2/x}$
   e) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(\sqrt[4]{x})$
   f) $\lim\limits_{x\to0} \ln\left((1+x)^{3/x}\right)$

Problemas extras

13. Utilizando las propiedades de límites, conteste los siguientes interrogantes:

   a) Si no existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ o $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$?
   b) Si existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$, y son ambos finitos, ¿existe necesariamente $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?
   c) Si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, finito, y no existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$?
   d) Si existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$, ambos finitos, ¿se puede concluir que existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?

14. Se sabe que una pileta de natación se vacía según la función $V(t) = 1000\dfrac{\sqrt{t+3}-2}{t-1}$, donde V es el volumen expresado en m^3 y t el tiempo en horas. ¿A qué valor se aproxima el volumen cuando el tiempo se aproxima a 1 hora?

15. La cantidad de una droga en la corriente sanguínea t horas después de inyectada intramuscularmente está dada por la función $f(t) = \dfrac{10t}{t^2+1}$. Al pasar el tiempo, ¿cuál es la cantidad límite de droga en sangre?

16. En un experimento biológico, la población de una colonia de bacterias (en millones) después de x días está dada por: $y(x) = \dfrac{4}{2+8\mathrm{e}^{-2x}}$.

   a) ¿Cuál es la poblacioń inicial de la colonia de bacterias?
   b) Determine si la población crece indefinidamente con el tiempo o tiende a estabilizarse en algún valor fijo.