Análisis Matemático I/Cálculo I

Licenciatura en Ciencias de la Computación
Licenciatura en Matemática Aplicada
FAMAF, UNC — Año 2024

Guía de Ejercicios N°5

Derivadas

1. Calcule, usando la definición, las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 5x + 3$ *b*) $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ *c*) $f(x) = \sqrt{6 - x}$

2. Determine si la siguiente función es derivable en $x = 0$. En caso afirmativo obtenga $f'(0)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

3. Sea f la función dada por $f(x) = |5x - 3|$.

   a) Determine $f'^{-}(3/5)$ y $f'^{+}(3/5)$.

   b) Demuestre que no existe $f'(3/5)$.

4. *a*) Use las definiciones de las derivadas laterales para calcular $f'^{-}(4)$ y $f'^{+}(4)$ si

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 5 - x & 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & x \geq 4 \end{cases}$$

   b) Determine el dominio de f.

   c) Trace la gráfica de f.

   d) ¿En qué puntos del dominio f es discontinua?

   e) ¿Dónde f no es derivable?

Cálculo de derivadas

5. Calcule las derivadas de las siguientes funciones y simplifique lo máximo posible:

   a) $f(x) = x^7 - 5x^3 + 1$

   b) $f(x) = (x^2 - x)^4$

   c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

   d) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x + 1)^2}$

   e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

   f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$

   g) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

   h) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

   i) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$

   j) $f(x) = \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$

k) $f(x) = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

l) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x^2)$

m) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arc\,tg} x$

n) $f(x) = x\ln(x)$

ñ) $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}$

o) $f(x) = (x^2-x)\ \mathrm{e}^{-x}$

p) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$

q) $f(x) = \ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$

r) $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x^2}$

s) $f(x) = x^x$

t) $f(x) = x^{\operatorname{tg} x}$

u) $f(x) = \log_x \mathrm{e}$

6. Calcule la derivada segunda de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x$

   b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

7. Calcule la ecuación de las rectas tangentes a la curva $y = \sqrt{3-x}$ en los puntos (-1,2), (2,1) y (-6,3).

8. ¿Para qué valores de x son paralelas las tangentes de $y = x^2$ e $y = x^3$?

9. Demuestre que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 1/x$ en $(a, 1/a)$ no corta a la gráfica de f más que en el punto $(a, 1/a)$. ¿Ocurre lo mismo con la tangente a $g(x) = 1/x^2$ en $(a, 1/a^2)$?

10. Deduzca la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado:

    a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1, \quad (-5, \frac{9}{4})$ (hipérbola)

    b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1, \quad (-1, 4\sqrt{2})$ (elipse)

Material Extra

11. Calcule las derivadas de las siguientes funciones y simplifique lo máximo posible:

    a) $f(x) = (1+3x^4)^5$

    b) $f(x) = (1+x+x^2)^3$

    c) $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^5}$

    d) $f(x) = (3x^2+3)(2x^2+1)$

    e) $f(x) = \frac{2x^3+5}{4x^2+7}$

    f) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}$

    g) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

    h) $f(x) = (2+5x^2)^{\frac{1}{3}}$

    i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-2)}}$

    j) $f(x) = (5-3\cos x)^4$

    k) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^3 x$

    l) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arc\,tg} x}$

    m) $f(x) = \operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x$

    n) $f(x) = \frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} - \frac{1}{\cos x}$

    ñ) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

    o) $f(x) = \sqrt[3]{2^x + x}$

    p) $f(x) = \ln(\ln x)$

    q) $f(x) = \arccos\sqrt{x}$

    r) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

    s) $f(x) = \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}$

    t) $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{4}\right)$

    u) $f(x) = 7\ln\left(x^{\frac{2}{5}}\right)$

    v) $f(x) = 4\ln(\operatorname{sen}(x))$

    w) $f(x) = \ln(\operatorname{arc\,tg}(x))$