

Análisis Matemático I/Cálculo I
Licenciatura en Ciencias de la Computación
Licenciatura en Matemática Aplicada
FAMAF, UNC — Año 2024

Guía de Ejercicios N°4

Continuidad

1. Esboce el gráfico de una función f , sin dar su fórmula, que tenga las siguientes características:

- Su dominio es $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$,
- es discontinua en $x = -2$ y en $x = 4$,
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \infty$ y
- $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 1$.

2. Determine si la función g , del ejercicio 9 de la Guía 3, es continua en $x = 1, 2, 6, -2, 0$ y justifique su respuesta.

3. Utilice la definición de continuidad y las propiedades de límites para demostrar que la función dada es continua en el valor indicado.

a) $f(x) = (x + 2x^3)^4$ en $x = -1$

b) $f(t) = \frac{t^2}{(t+1)^3}$ en $t = 2$

4. Justifique por qué la función $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$ es continua en el intervalo $[-4, 4]$ e indique qué propiedades de la continuidad de funciones utiliza.

5. Determine, en caso de que los haya, en qué puntos es discontinua la función f . En cada caso, indique si se trata de una discontinuidad evitable, de salto o esencial.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ x & x \leq 2 \end{cases}$

c) $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

6. a) Determine la constante c para la cual la función g resulta continua en \mathbb{R} .

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - c & x < 4 \\ cx + 20 & x \geq 4 \end{cases}$$

- b) Grafique g con el valor c obtenido en el ítem anterior.

7. Determine el dominio de f en los distintos casos y decida si existe una función F continua cuyo dominio es todo el conjunto \mathbf{R} y que satisfice $F(x) = f(x)$ si x está en el dominio de f . ¿Cómo está definida F , en caso de que exista?.

$$a) f(t) = \frac{\sqrt[3]{t^3 + 3t^2 + 7}}{t + 2} \quad b) f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad c) f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$$

8. Aplicando el Teorema del Valor Intermedio demuestre que hay una solución de la ecuación en el intervalo dado:

$$a) x^3 - 3x = -1 \quad \text{en } (0, 1) \quad c) x^3 + 2x = x^2 + 1 \quad \text{en } (0, 1)$$

$$b) x^5 - 2x^2 - x - 3 = 0 \quad \text{en } (-2, 3)$$

9. Empleando el Teorema del Valor Intermedio demuestre que hay un número c tal que $f(c) = 0$.

$$a) f(x) = \ln(x) - \sin(x), \text{ en } [1, \pi]. \quad b) f(x) = 2^x + x - 2, \text{ en } [0, 1].$$

10. Determine si las siguientes funciones verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass en el intervalo indicado. De ser así, indique cuál es el valor máximo y cuál es el valor mínimo que alcanza la función:

$$a) f(x) = \cos x, \text{ en } [-\pi/3, \pi/2]. \quad c) f(x) = 1 - 2x^2, \text{ en } [1, 3].$$

$$b) f(x) = \tan x, \text{ en } [0, \pi] \text{ con } f(\pi/2) = 0.$$

Material Extra

1. Determine, en caso de que los haya, en qué puntos es discontinua la función f . En cada caso, indique si se trata de una discontinuidad evitable, de salto o esencial.

$$a) f(x) = \frac{x}{x + 1} \quad c) f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$b) h(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{|x|}}$$

2. Determine el dominio de f en los distintos casos y decida si existe una función F continua cuyo dominio es todo el conjunto \mathbf{R} y que satisfice $F(x) = f(x)$ si x está en el dominio de f . ¿Cómo está definida F , en caso de que exista?

$$a) f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \quad b) f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}}$$

3. Tiene que graficar, en una computadora, el plano de una ruta y se le presenta el problema de graficar las curvas de la misma. Sabe que el camino se comporta como la función $y = -(x-1)^4 + 1$ en el intervalo $[0, 5; 1]$ y como la función $(x-1)^2 + k$ en el intervalo $[1; 1, 2]$, pero desconoce la constante k . ¿Podría calcularla?

4. Determine si las siguientes funciones verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass en el intervalo indicado. De ser así, indique cuál es el valor máximo y cuál es el valor mínimo que alcanza la función:

$$a) f(x) = \frac{1}{|x|}, \text{ en } [4, 8]$$

$$b) f(x) = x, \text{ en } (0, 1).$$