Práctico 1
Matemática Discreta I – Año 2024/1
FAMAF

(1) Demostrar las siguientes afirmaciones, donde a, b son siempre números enteros. Justificar cada uno de los pasos en cada demostración indicando el axioma o resultado que utiliza.

a) $a + a = a$ implica que $a = 0$.

b) $0 \cdot a = 0$.

c) $-a = (-1) \cdot a$.

d) $-(-a) = a$.

e) $a = b$ si y sólo si $-a = -b$.

(2) Sea a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones.

a) $c < 0$ implica que $0 < -c$.

b) $a + c < b + c$ implica que $a < b$.

c) $0 < a$ y $0 < b$ implican $0 < a \cdot b$

d) $a < b$ y $c < 0$ implican $b \cdot c < a \cdot c$

(3) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar las siguientes afirmaciones, justificando los pasos que realiza.

a) Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $a < b$ si y sólo si $a^2 < b^2$.

b) Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.

c) Si $a \neq b$ entonces $a^2 + b^2 > 0$.

(4) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ arbitrarios. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique apropiadamente.

a) Si $0 < a.b$ entonces $0 < a$ y $0 < b$.

b) Si $0 < a.b$ entonces $0 < a$ ó $0 < b$.

c) Si $a.c < b.c$ entonces $a < b$.

d) Si $a^2 < b^2$ entonces $a < b$.

(5) Calcular, evaluando, las siguientes expresiones:

a) $\displaystyle\sum_{r=0}^{4} r$ *b)* $\displaystyle\prod_{i=1}^{5} i$

c) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)}$ *d)* $\displaystyle\prod_{n=2}^{7} \frac{n}{n-1}$

(6) Usando las propiedades de las potencias, calcular:

a) $2^{10} - 2^9$ *b)* $3^2 2^5 - 3^5 2^2$

c) $\left(2^2\right)^n - (2^n)^2$ *d)* $\left(2^{2^n} + 1\right)\left(2^{2^n} - 1\right)$

(7) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

a) $\left(2^{2^n}\right)^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$, $n, k \in \mathbb{N}$.

b) $(2^n)^2 = 4^n$, $n \in \mathbb{N}$.

c) $2^{7+11} = 2^7 + 2^{11}$.

(8) Probar que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(9) Demostrar por inducción las siguientes igualdades:

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}_0$.

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (i^2+1)i! = n(n+1)!$, $n \in \mathbb{N}$.

g) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (4i-2) = \frac{(2n)!}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

(10) Hallar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumpla que $n^2 \geq 11n + 3$, y usar el principio de inducción para probar dicha desigualdad.

(11) Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión definida por recurrencia como sigue: $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ y $u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que $u_n = 3^n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(12) Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como sigue: $u_1 = 9$, $u_2 = 33$, $u_n = 7u_{n-1} - 10u_{n-2}$, $\forall n \geq 3$. Probar que $u_n = 2^{n+1} + 5^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(13) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 1, \\ a_n = 3a_{n-1} + (n-1)(n-3)a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que $a_n = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(14) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 7, \\ a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que $a_n = 6^n + (-1)^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(15) Sea u_n definida recursivamente por: $u_1 = 2$, $u_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-2i} u_i \ \ \forall\, n > 1$.

a) Calcule u_2 y u_3.

b) Proponga una fórmula para el término general u_n y pruébela por inducción.

(16) Las siguientes proposiciones no son válidas para todo $n \in \mathbb{N}$. Indicar en qué paso del principio de inducción falla la demostración:

a) $n = n^2$, *b)* $n = n + 1$, *c)* $3^n = 3^{n+2}$, *d)* $3^{3n} = 3^{n+2}$.

§ **Ejercicios de repaso.** Los ejercicios marcados con $^{(*)}$ son de mayor dificultad.

(17) Demostrar las siguientes igualdades:

a) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = n + 1, \ \ n \in \mathbb{N}.$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}, \ \ n \in \mathbb{N}.$

c) $\displaystyle\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \ \ n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq 2.$

d) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \geq -1$, entonces $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

e) Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

f) Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y $0 < a_i < 1\, \forall\, i$, entonces $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$(1 - a_1) \cdots (1 - a_n) \geq 1 - a_1 - \cdots - a_n.$$

(18) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = 2, \\ a_n = (n-2)a_{n-1} + 2(n-1)a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3. \end{cases}$$

Probar que $a_n = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(19) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 5, \\ a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que $a_n = 3^n + (-1)^{n+1}2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(20) $^{(*)}$ Encuentre el error en los siguientes argumentos de inducción.

a) Demostraremos que $5n + 3$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.
Supongamos que $5k + 3$ es múltiplo de 5, siendo $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $5k + 3 = 5p$. Probemos que $5(k + 1) + 3$ es múltiplo de 5: Como

$$5(k + 1) + 3 = (5k + 5) + 3 = (5k + 3) + 5 = 5p + 5 = 5(p + 1),$$

entonces obtenemos que $5(k + 1) + 3$ es múltiplo de 5. Por lo tanto, por el principio de inducción, demostramos que $5n + 3$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Vamos a demostrar que para todo entero no negativo n, $a^n = 1$.
Como $a^0 = 1$ por definición, la proposición es verdadera para $n = 0$. Supongamos que para un entero k, $a^m = 1$ para $0 \leq m \leq k$. Entonces $a^{k+1} = \frac{a^k a^k}{a^{k-1}} = \frac{1\cdot 1}{1} = 1$. Por lo tanto, el principio de inducción fuerte implica que $a^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(21) $^{(*)}$ La *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente de la siguiente manera:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1},\ n \geq 2.$$

Los primeros términos de esta sucesión son: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Demostrar por inducción que el término general de esta sucesión se puede calcular mediante la fórmula

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Ayuda: usar que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$ y por lo tanto $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$.

(22) Probar las siguientes afirmaciones usando inducción en n:

a) $2n + 1 < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

b) $n^2 \leq 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^n \geq 1 + 2^n$.