

Práctico 3
Matemática Discreta I – Año 2024/1
FAMAF

- (1) Hallar el cociente y el resto de la división de:
a) 135 por 23. b) -135 por 23.
c) 127 por 99. d) -98 por 73.
- (2) a) Si $a = b \cdot q + r$, con $b \leq r < 2b$, hallar el cociente y el resto de la división de a por b .
b) Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que $-b \leq r < 0$.
- (3) Dado $m \in \mathbb{N}$ hallar los restos posibles de m^2 y m^3 en la división por 3, 4, 5, 7, 8, 11.
- (4) Expresar en base 10 los siguientes enteros:
a) $(1503)_6$ b) $(1111)_2$ c) $(1111)_{12}$
d) $(123)_4$ e) $(12121)_3$ f) $(1111)_5$
- (5) Convertir
a) $(133)_4$ a base 8, b) $(B38)_{16}$ a base 8,
c) $(3506)_7$ a base 2, d) $(1541)_6$ a base 4.
- (6) Calcular:
a) $(2234)_5 + (2310)_5$, b) $(10101101)_2 + (10011)_2$.
- (7) Expresar en base 5: $(1503)_6 + (1111)_2$.
- (8) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:
a) Si $ab = 1$, entonces $a = b = 1$ ó $a = b = -1$.
b) Si $a, b \neq 0$, $a|b$ y $b|a$, entonces $a = b$ ó $a = -b$.
c) Si $a|1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.
d) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(b + c)$ y $a|(b - c)$.
e) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|(b + c)$, entonces $a|c$.
f) Si $a \neq 0$ y $a|b$, entonces $a|b \cdot c$.
- (9) Dados b, c enteros, probar las siguientes propiedades:
a) 0 es par y 1 es impar.
b) Si b es par y $b | c$, entonces c es par. (Por lo tanto, si b es par, también lo es $-b$).

- c) Si b y c son pares, entonces $b + c$ también lo es.
- d) Si un número par divide a 2, entonces ese número es 2 ó -2 .
- e) La suma de un número par y uno impar es impar.
- f) $b + c$ es par si y sólo si b y c son ambos pares o ambos impares.

(10) Sea $n \in \mathbb{Z}$. Probar que n es par si y sólo si n^2 es par.

(11) Probar que $n(n + 1)$ es par para todo n entero.

(12) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar las respuestas.

- a) $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.
- b) $a \mid (b + c) \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.
- c) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$.
- d) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow (a + b) \mid c$.
- e) $a, b, c > 0$ y $a = b \cdot c$, entonces $a \geq b$ y $a \geq c$.

(13) Probar que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$:

- a) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.
- b) $3^{2n+2} - 8n - 9$ es divisible por 64.

(14) Decir si es verdadero o falso justificando:

- a) $3^n + 1$ es múltiplo de n , $\forall n \in \mathbb{N}$.
- b) $3n^2 + 1$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- c) $(n + 1) \cdot (5n + 2)$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(15) Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 2$ no es divisible por 4.

(16) Probar que todo entero impar que no es múltiplo de 3, es de la forma $6m \pm 1$, con m entero.

(17) a) Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.

b) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24 (ayuda: el número combinatorio $\binom{n}{4}$ es entero).

c) Probar que el producto de m enteros consecutivos es divisible por $m!$.

(18) Probar que si a y b son enteros entonces $a^2 + b^2$ es divisible por 7 si y sólo si a y b son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3? ¿Para 5?

- (19) Encontrar
 $a)$ (7469, 2464), $b)$ (2689, 4001),
 $c)$ (2447, -3997), $d)$ (-1109, -4999).
- (20) Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números:
 $a)$ 14 y 35, $b)$ 11 y 15, $c)$ 12 y 52,
 $d)$ 12 y -52, $e)$ 12 y 532, $f)$ 725 y 441,
 $g)$ 606 y 108.
- (21) Probar que no existen enteros x e y que satisfagan $x + y = 100$ y $(x, y) = 3$.
- (22) $a)$ Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid b \cdot c$ entonces $a \mid c$.
 $b)$ Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.
- (23) Encontrar todos los enteros positivos a y b tales que $(a, b) = 10$ y $[a, b] = 100$.
- (24) $a)$ Probar que si d es divisor común de a y b , entonces $\frac{(a, b)}{d} = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right)$.
 $b)$ Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\frac{a}{(a, b)}$ y $\frac{b}{(a, b)}$ son coprimos.
- (25) Probar que 3 y 5 son números primos.
- (26) Dar todos los números primos positivos menores que 100.
- (27) Determinar con el criterio de la raíz cuáles de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 151, 199, 503.
- (28) Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces los números $2n + 1$ y $n(n + 1)$ son coprimos.
- (29) Si $a \cdot b$ es un cuadrado y a y b son coprimos, probar que a y b son cuadrados.
- (30) $a)$ Probar que $\sqrt{5}$ no es un número racional.
 $b)$ Probar que $\sqrt{15}$ no es un número racional.
 $c)$ Probar que $\sqrt{8}$ no es un número racional.
 $d)$ Probar que $\sqrt[3]{4}$ no es un número racional.
- (31) $a)$ Probar que $\sqrt[4]{54}$ no es racional.
 $b)$ Probar no existen m, n tal que $21n^5 = m^5$.

(32) Probar que si p_k es el k -ésimo primo positivo entonces

$$p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1.$$

(33) Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números usando la descomposición en números primos.

a) $a = 12$ y $b = 15$.

b) $a = 11$ y $b = 13$.

c) $a = 140$ y $b = 150$.

d) $a = 3^2 \cdot 5^2$ y $b = 2^2 \cdot 11$.

e) $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $b = 2 \cdot 5 \cdot 7$.