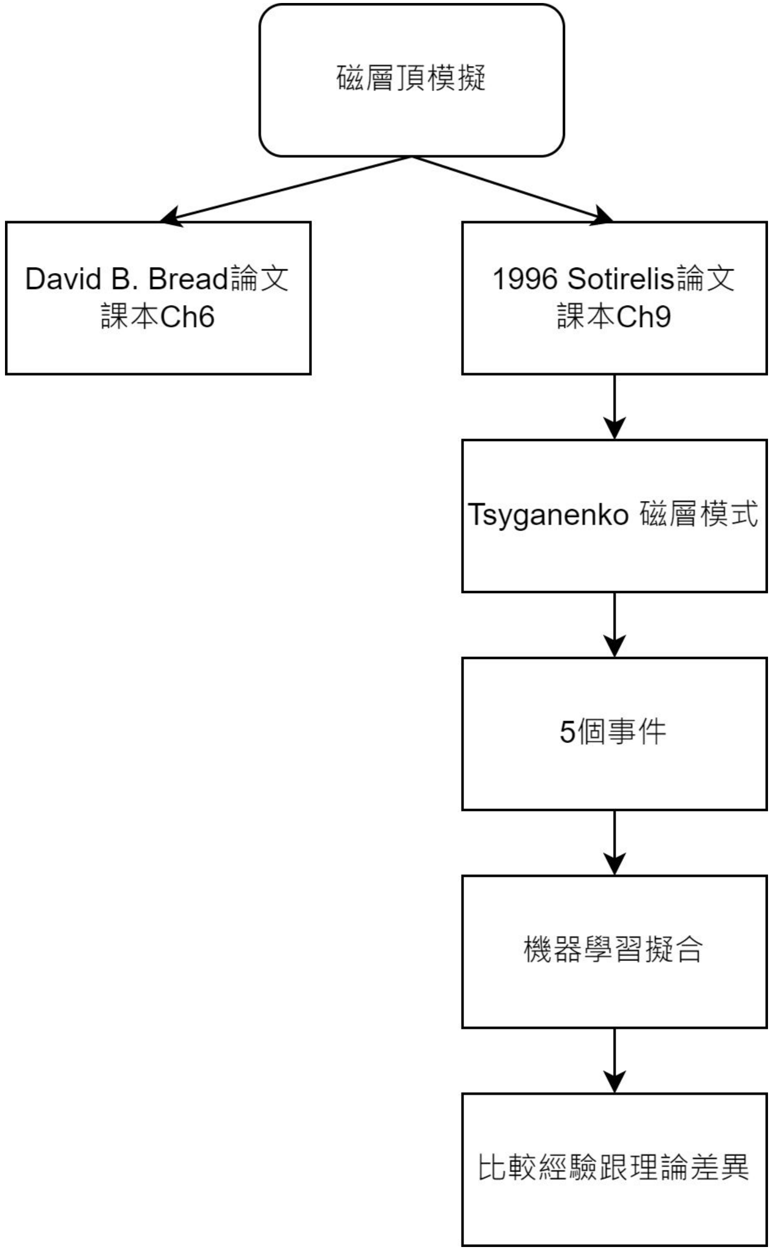
太陽動壓與磁壓平衡模擬磁層頂

彭楷庭、張以侑、賴諺謀

流程圖



磁層頂模擬
David B. Bread論文
課本Ch6
1996 Sotirelis論文
課本Ch9
Tsyganenko 磁層模式
5個事件
機器學習擬合
比較經驗跟理論差異

大綱

1.講解並推導分流常數的理論模式

2.上述理論模式畫出的結果與經驗模式的結果

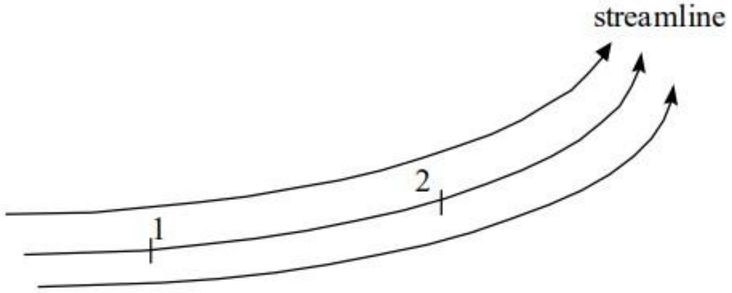
3.磁尾寬度的極限理論與模式的限制

理論模型

Bernoulli Equation

對於無黏滯性流體而言，並假設重力可忽略，則沿著流線會滿足以下方程式:

$$\int_0^p \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} = Const.$$



Bernoulli Equation for adiabatic process

而對於絕熱流場來說，熱力學第一定律告訴我們:

$$p\rho^{-\gamma} = Const.$$

因此:

$$\int_0^p \frac{dp}{\rho} = \int_0^p \frac{C^{\frac{1}{\gamma}}}{p^{\frac{1}{\gamma}}}\, dp = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}$$

Bernoulli Equation for adiabatic process

而對於絕熱無黏滯流場來說，沿著流線滿足:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = Const$$

磁層頂和停滯點熱壓關係

利用前述絕熱條件的Bernoulli Equation和狀態方程:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=Const \qquad p\rho^{-\gamma}=Const.$$

將速度以馬赫數代換，可以推導出:

$$\frac{p_{st}}{p}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

上式為沿著磁層頂的流線上熱壓和停滯點熱壓的關係。

磁層頂和太陽風熱壓、速度關係

沿磁層頂的流線位於磁鞘內, 磁鞘的熱壓可用Rankine-Hugoniot Relation和太陽風連結在一起如下:

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_\infty^2 - 1)$$

至於磁鞘內流場的速度, 也可用Rankine-Hugoniot Relation連結在一起:

$$M^2 = \frac{1 + (\gamma - 1)M_\infty^2}{2\gamma \cdot M_\infty^2 - \gamma - 1}$$

理論模式的分流常數K

利用前述推導出的關係式:

$$\frac{p_{st}}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \qquad \frac{p}{p_\infty} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_\infty^2 - 1) \qquad M^2 = \frac{1 + (\gamma - 1)M_\infty^2}{2\gamma \cdot M_\infty^2 - \gamma - 1}$$

可推導停滯點總壓和太陽風動壓關係如下:

$$\frac{P_{st}}{\rho_\infty u_\infty^2} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{(\gamma+1)(\gamma\text{-}1)} \cdot \frac{1}{\gamma\left[\gamma - \frac{\gamma - 1}{2M_\infty^2}\right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}}$$

理論模式的分流常數K

代入停滯點總壓:

$$P_{st} = K\rho_\infty u_\infty^2 + P_0$$

即可得到分流常數K如下:

$$K = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{(\gamma+1)(\gamma\text{-}1)} \cdot \frac{1}{\gamma\left[\gamma - \frac{\gamma-1}{2M_\infty^2}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}} - \frac{P_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2}$$

經驗模式

Newtonian Approximation

從論文中可得知分流常數K可從空氣動力學經驗公式求得，稱作Newtonian Approximation:

$$\frac{P_{st}}{\rho_\infty u_\infty^2} = 0.881 \cdot \frac{5M_\infty^2}{5M_\infty^2 - 1}$$

代入平衡式即可求出分流常數K:

$$K = 0.881 \cdot \frac{5M_\infty^2}{5M_\infty^2 - 1} - \frac{P_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2}$$

事件模擬

模擬物理假設

1.假設太陽風為一均勻流場 $\overrightarrow{u_{sw}} = -u_0\hat{x}$

2.假設行星際磁場也為一個均勻磁場。

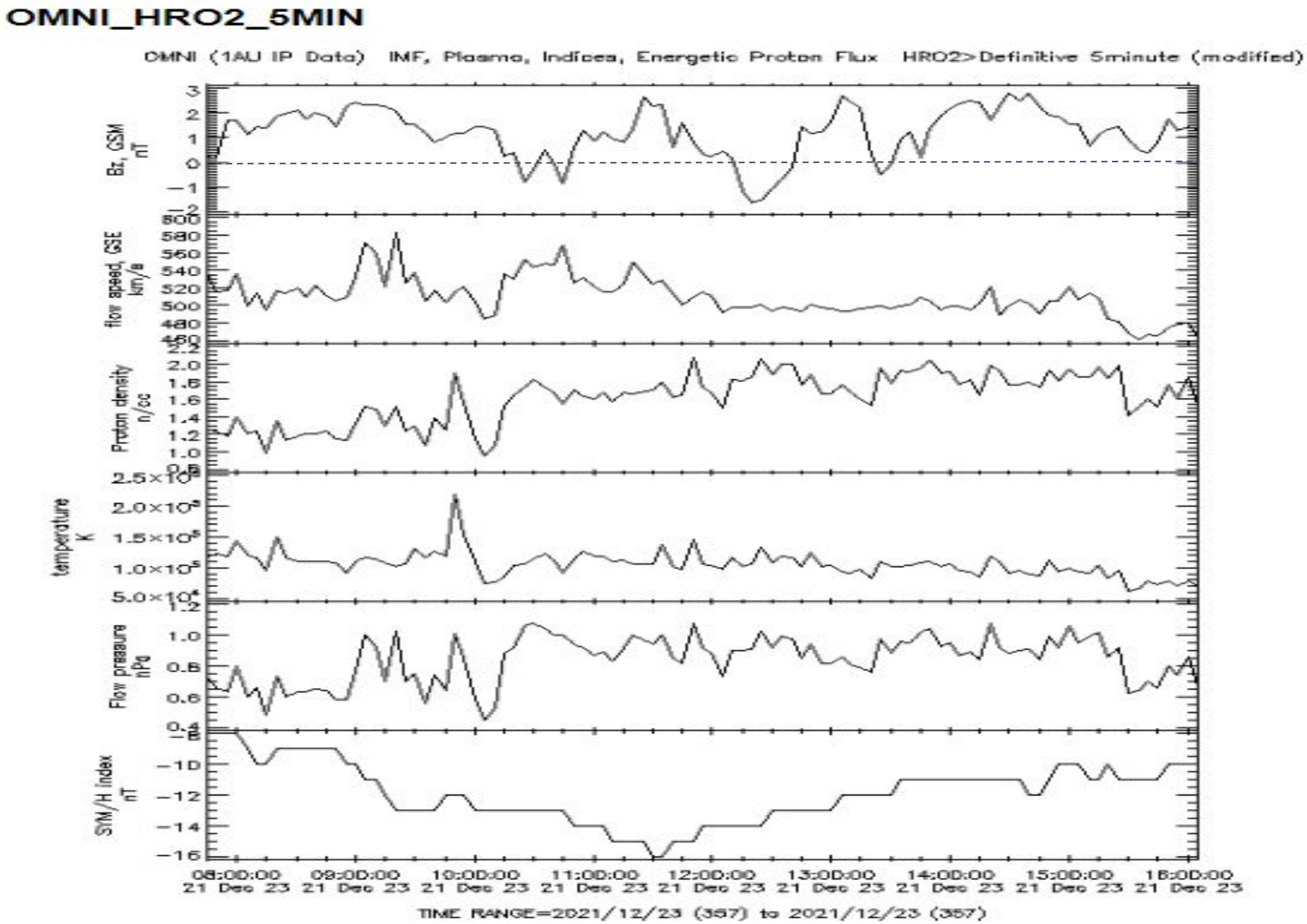
模擬方法

1.用CDAWeb上OMNI資料庫的太陽風密度、溫度算馬赫數，再利用動壓，行星際磁場代入模式中。

2.用IDL趨動Tsyganenko geopack(TS04)以最外圍磁場線的磁場和行星際磁場，算出法向量並求出和太陽風方向的夾角。

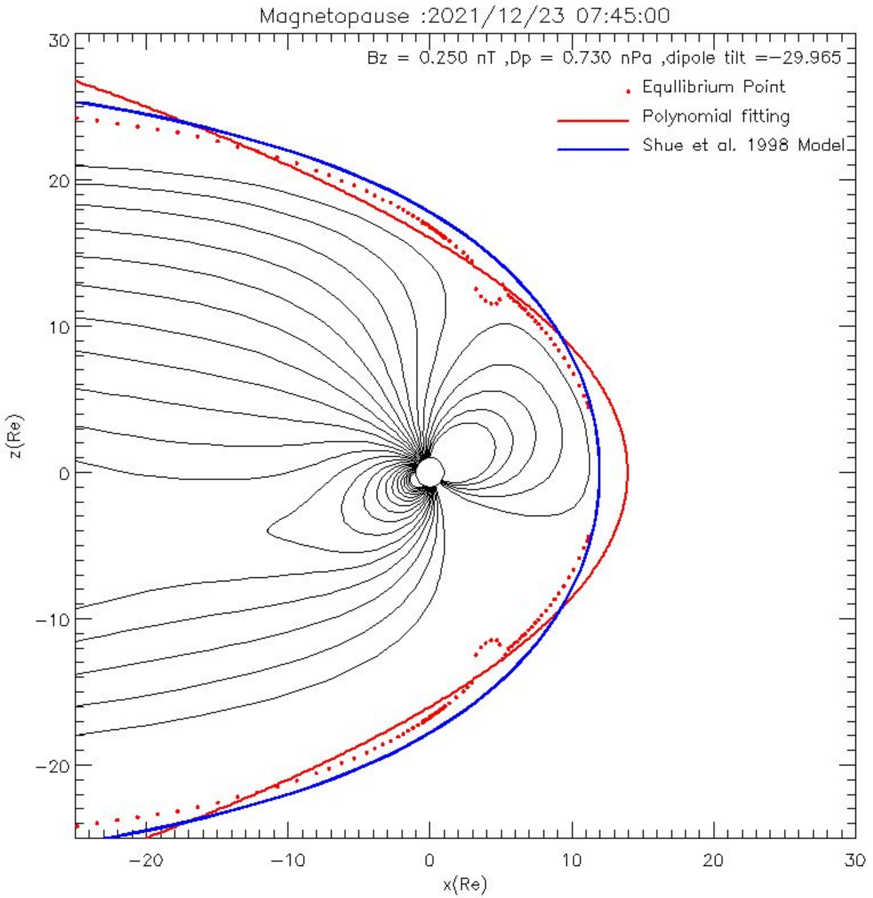
3.用IDL找出平衡點，分作理論算出的K值以及經驗公式的K值，用二次多項式擬合繪出，並加上Shue et al. 1998模式進行比較。

2021年12月23日 UT 10:00 磁場重聯



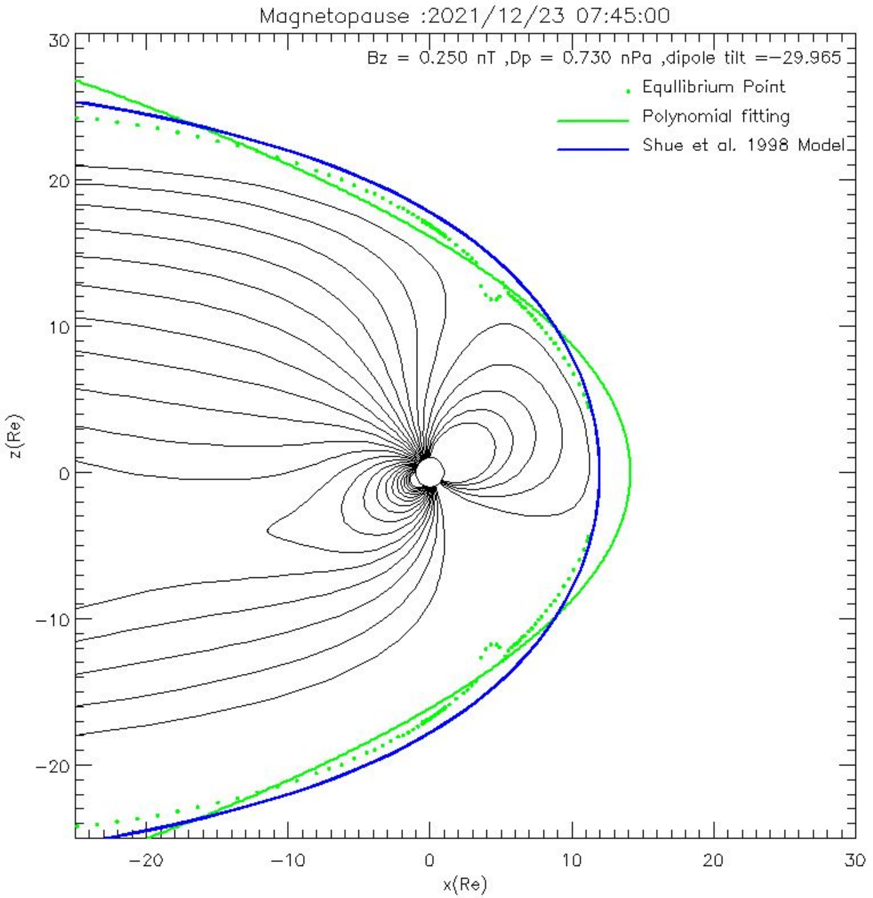
2021年12月23日 UT 10:00 經驗模式

間斷的南向行星際磁場和地球磁層磁場重聯，使磁層頂被一層層剝開。

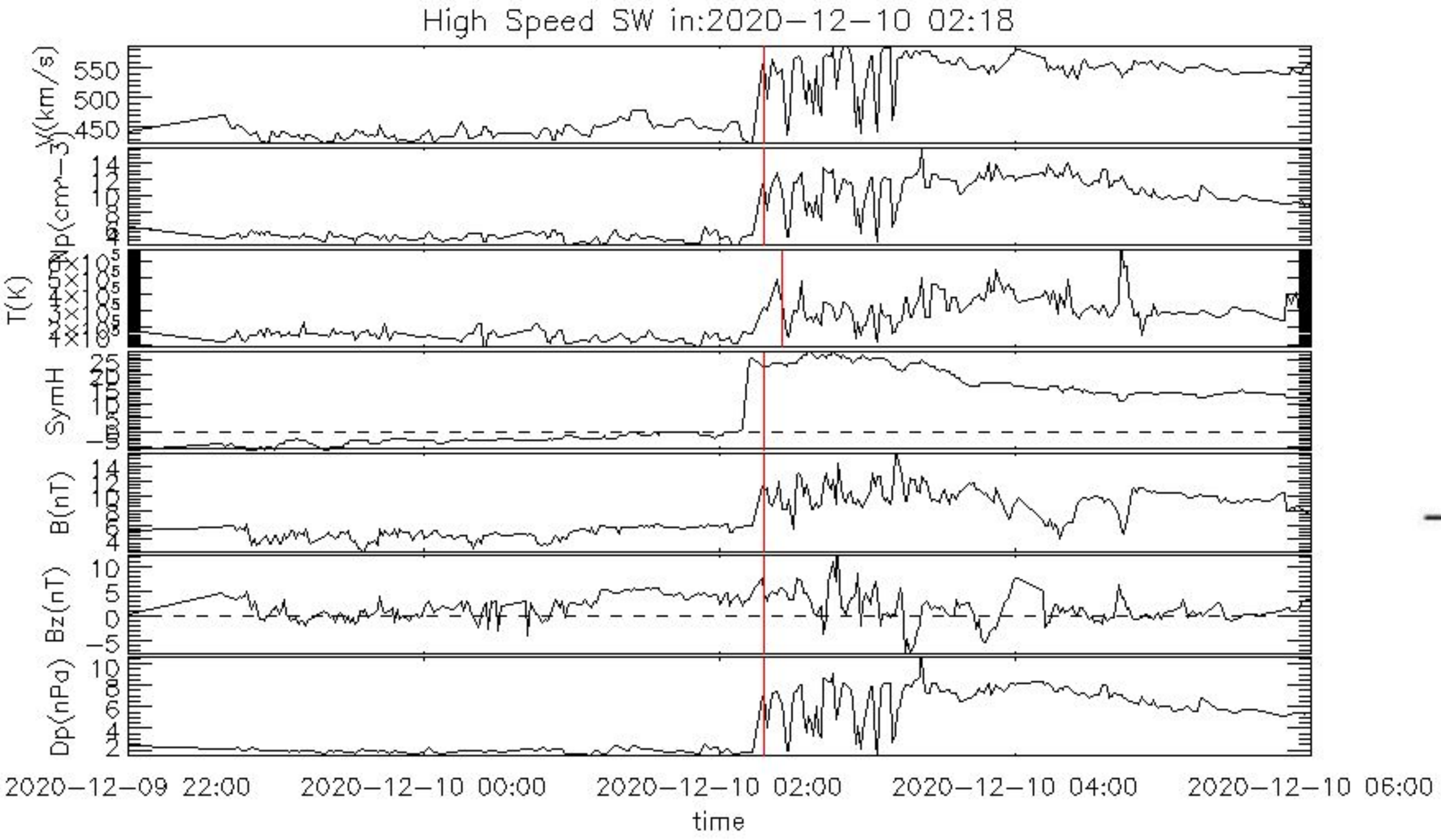


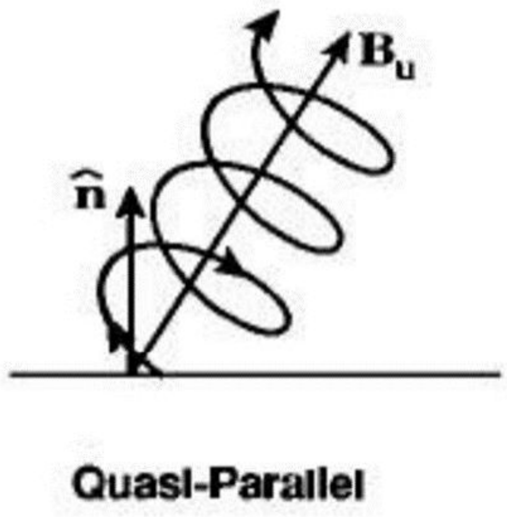
2021年12月23日 UT 10:00 理論模式

間斷的南向行星際磁場和地球磁層磁場重聯，使磁層頂被一層層剝開。



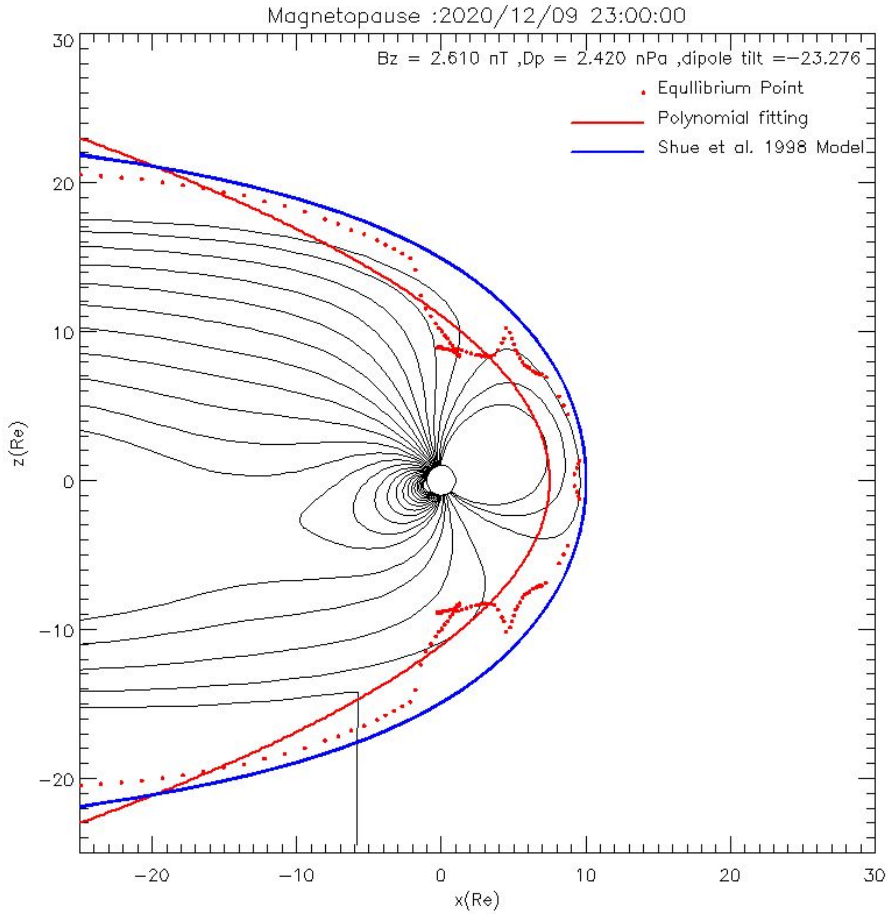
2020年12月10日 UT 02:00 Quasi-Parallel Shock





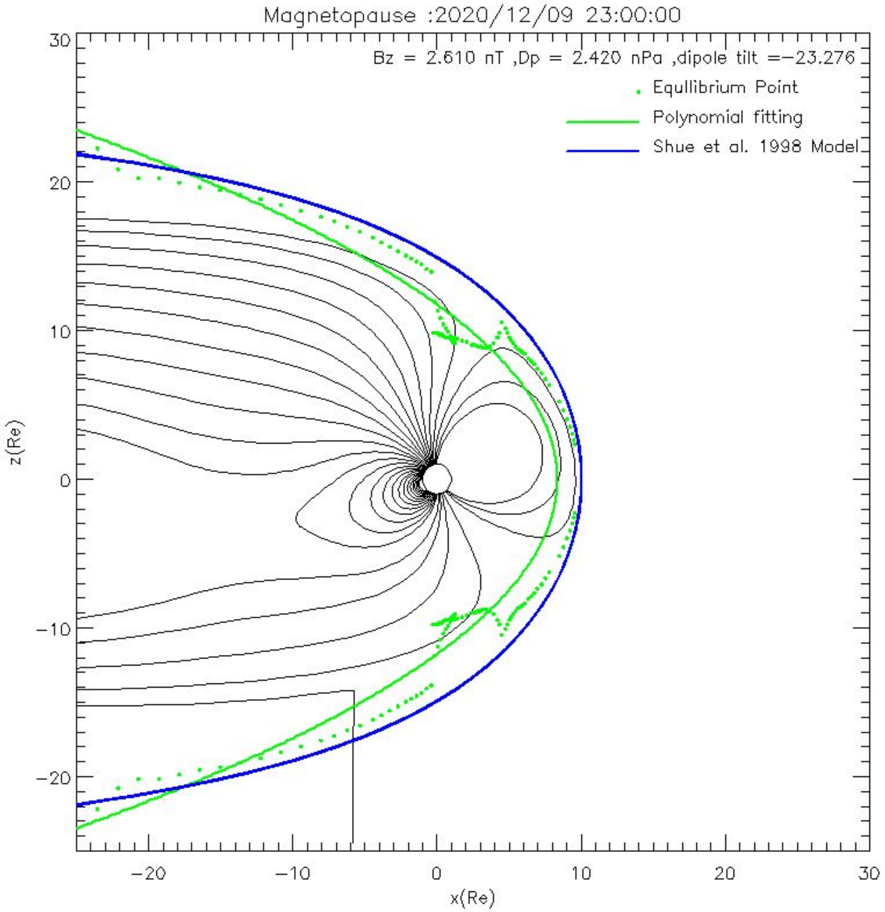
2020年12月10日 UT 02:00 經驗模式

動壓持續增強的事件，未出現南向行星際磁場，磁層頂被壓縮。



2020年12月10日 UT 02:00 理論模式

動壓持續增強的事件，未出現南向行星際磁場，磁層頂被壓縮。



理論模式和經驗模式的差別

依據我們模擬的結果來說，對於2021/12/23的磁場重聯事件:

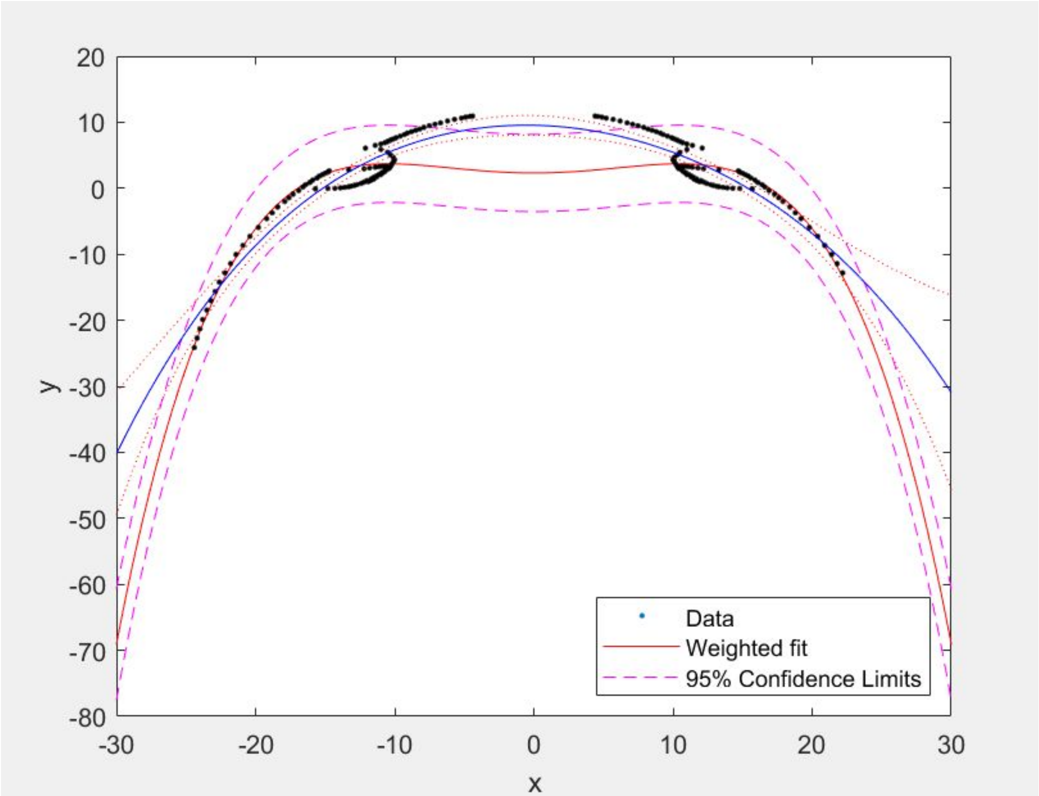
1.Newtonian Approximation經驗模式對超音速太陽風來說，分流常數K都趨近於0.88。

2.理論模式對超音速太陽風而言，算出K的數值皆在0.47左右。

與Shue et al. 1998模式比較

方法

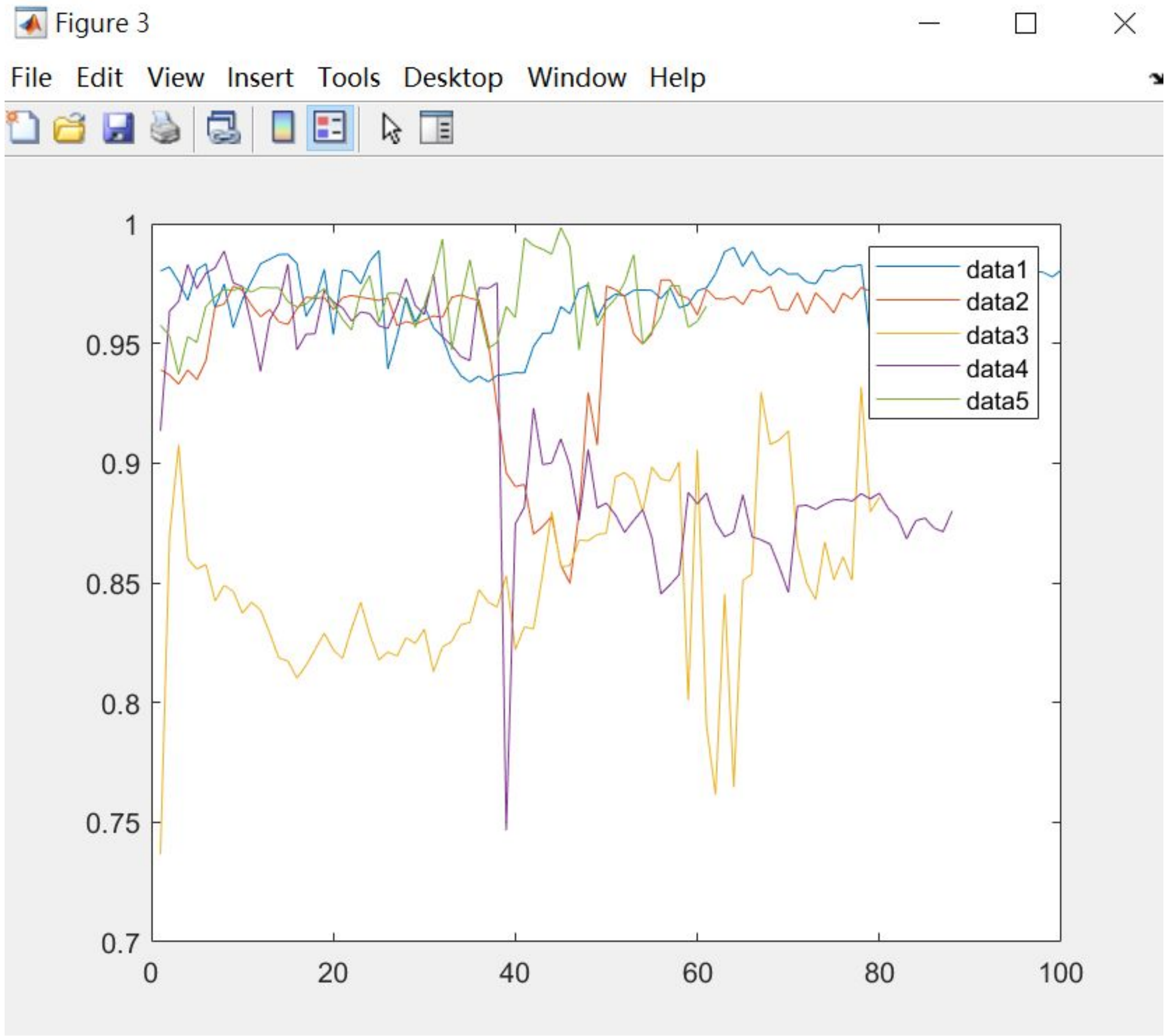
- 殘差平方和: $RSS = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$
- 擬合線:使用機器學習擬合(非線性)出的線進行殘差評分計算
- 磁尾極限:+-30地球半徑
- 事件:20201210、20211223



R 平方

這張圖只是要說明上次不同事件用機器學習擬合線得出的R平方值。

可以看見事件3的R平方值偏低，是因為磁力線整個被太陽風剝離，使得數據變少。



比較

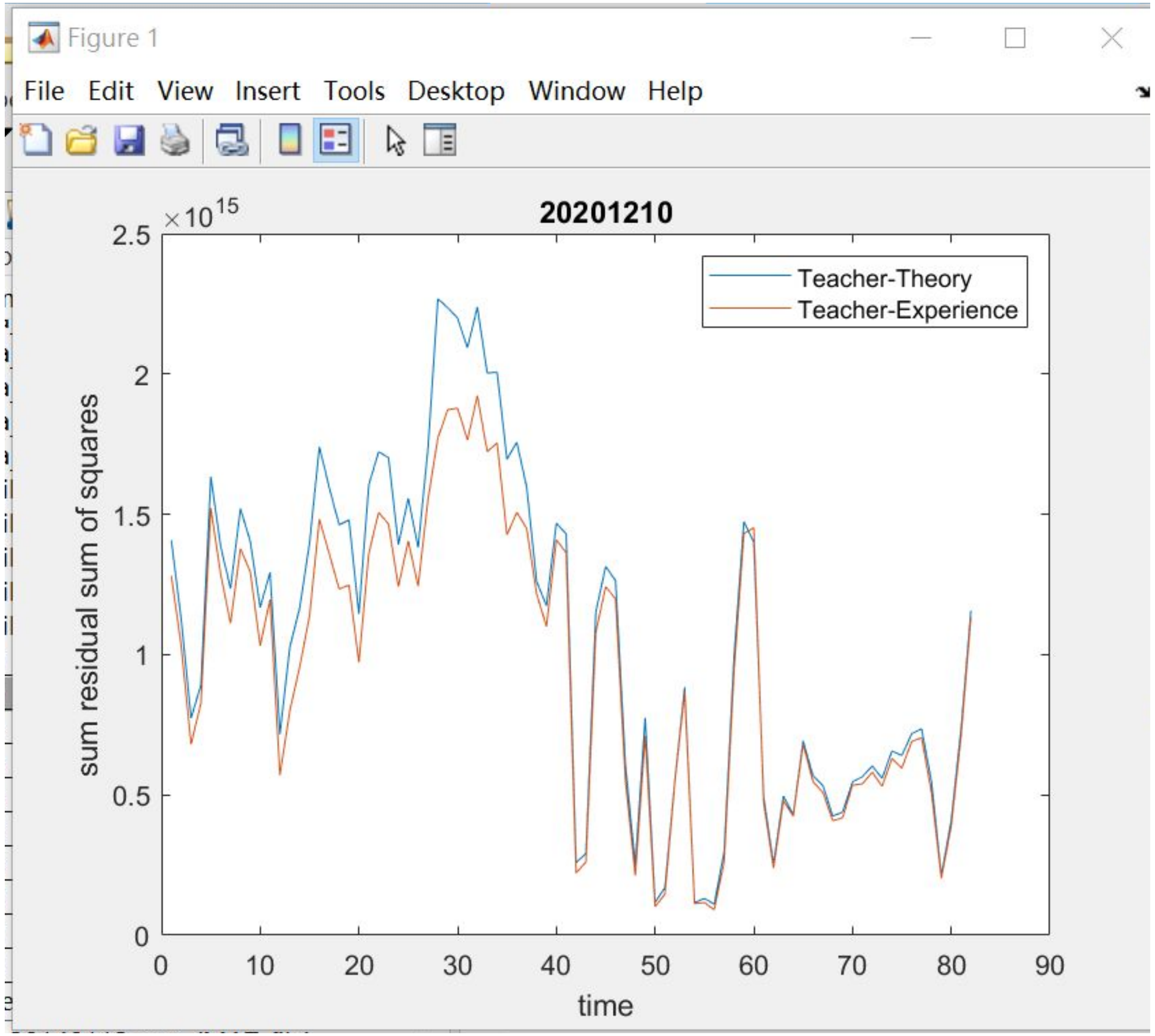


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
20201210
×10^15
Teacher-Theory
Teacher-Experience
sum residual sum of squares
time

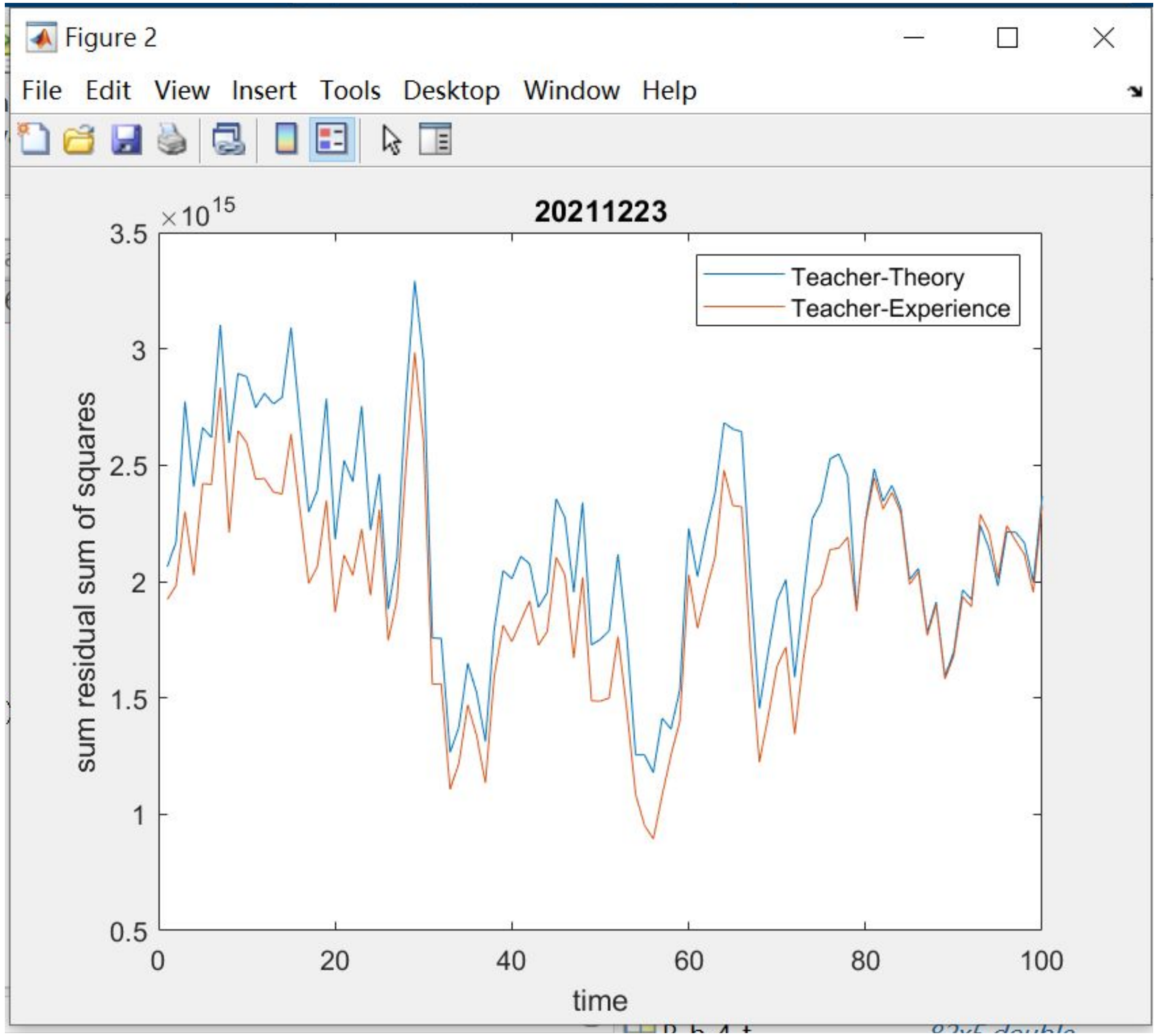


Figure 2
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
20211223
×10^15
Teacher-Theory
Teacher-Experience
sum residual sum of squares
time

磁尾寬度極限與模式的限制

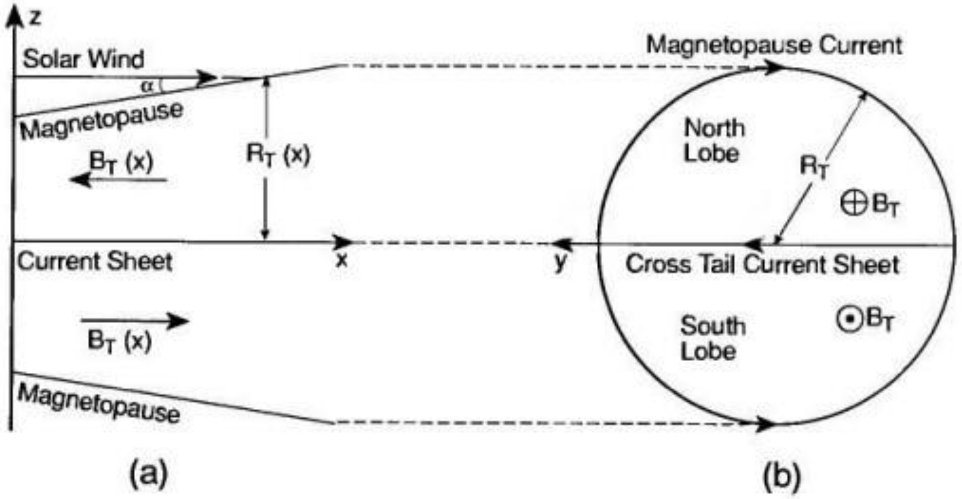
磁尾寬度極限的公式推導

從磁層頂切向不連續面的總壓平衡公式可知:

$$\rho_{sw}u_{sw}^2 \cdot sin^2\alpha = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{4\Phi_T}{\pi^2 R_T^4}$$

由於太陽風和磁層頂夾角在磁尾處很小, 因此可以近似為:

$$\rho_{sw}u_{sw}^2 \cdot \left(\frac{dR_T}{dx}\right)^2 = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{4\Phi_T}{\pi^2 R_T^4}$$



磁尾寬度極限的公式推導

移項後可得到:

$$\frac{dR_T}{dx} = \left(\frac{\Phi_T}{\rho_{sw}\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\pi \cdot u_{sw}} \cdot \frac{1}{R_T^2}$$

分離變數積分可得:

$$\int R_T^2 \;\; dR_T = \int \left(\frac{\Phi_T}{\rho_{sw}\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\pi \cdot u_{sw}} \;\; dx$$

磁尾寬度極限的公式推導

積分後得到:

$$\frac{1}{3}R_T^3 = \left(\frac{\Phi_T}{\rho_{sw}\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\pi \cdot u_{sw}} \cdot x + Const.$$

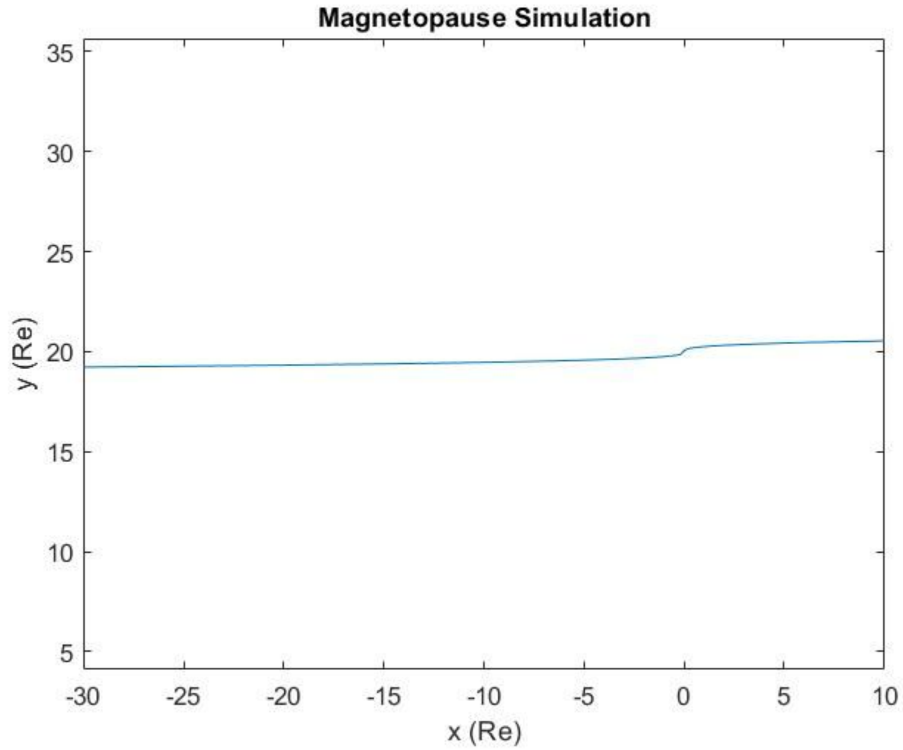
即可得到磁尾寬度的理論極限:

$$R_T = \left[3 \cdot \left(\frac{\Phi_T}{\rho_{sw}\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\pi \cdot u_{sw}} \cdot x\right]^{\frac{1}{3}} + Const.$$

磁尾寬度極限

磁尾寬度的理論極限如下所示，由於我們的模式到磁尾處動壓和磁壓已趨近於0，判斷出來的平衡點不準，不過可用下式為磁尾的磁層頂做修正:

$$R_T(x) = \left[3 \cdot \left(\frac{\Phi_T}{\rho_{sw}\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\pi \cdot u_{sw}} \cdot x\right]^{\frac{1}{3}} + Const.$$



結論

1.經驗模式的模擬結果比理論模式好。

2.無論是經驗模式還是理論模式都比Shue et al. 1998的模型還要敏感。

3.針對過於極端的事件，Tsyganenko Model Geopack能繪製出的磁場線較難以用我們的模式繪出，不過對於一般的事件仍可做不錯的模擬。

開源

https://github.com/spacephysicsgroup2/spacephysics

包含IDL的模式以及OMNI資料庫範例資料點以及機器學習擬合程式。

用法:IDL讀取範例檔案後生成資料點.csv檔，再用MATLAB作擬合比較不同模式的差別。

參考文獻

- fdocuments.in_introduction-to-space-physics-kivelson
- Journal-of-Geophysical-Research-Space-Physics-1996-Sotirelis-The-shape-and-field-of-the-magnetopause-as-determined from pressure balance