Berechnungen und Logik
Hausaufgabenserie 1

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

Definiere folgende Mengen: $odd := \{2a + 1 | a \in \mathbb{Z}\}$, $even := \{2a | a \in \mathbb{Z}\}$

sei $n \in \mathbb{Z}$, man sieht leicht, dass $\{odd, even\}$ Partition über $\mathbb{Z}$ ist.

a)

Wir werden zeigen, dass für ein $n \in odd$ gilt, dann $n^2 \in odd$ gilt.

Es gilt per Definition: $\forall n \in odd : \exists a \in \mathbb{Z} : 2a + 1 = n$.

Für dieses a gilt dann $n^2 = (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1$.

Da $a \in \mathbb{Z}$ gilt: $4a^2 \in even \wedge 4a \in even \wedge 1 \in odd$, somit ist $4a^2 + 4a + 1$ ungerade, also n^2 ungerade. $\square$

b)

Wir werden zeigen, dass für ein $n^2 \in odd$ gilt, dann $n \in odd$ gilt.

Hierfür zeigen wir die Kontraposition, also $n \notin odd \implies n^2 \notin odd$.

Nach Voraussetzung ist die äquivalent zu: $n \in even \implies n^2 \in even$.

Es gilt per Definition: $\forall n \in even : \exists a \in \mathbb{Z} : 2a = n$.

Für dieses a gilt dann $n^2 = (2a)^2 = 4a^2 \in even$. Damit ist n^2 gerade und die Kontraposition ist gezeigt $\square$

A2

a)

Gilt $\mathbb{N} := \{1, 2, ...\}$ die Menge der natürlichen Zahlen ab 1, dann gilt:

$$\mathbb{N} : \begin{cases} 1 \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

b)

Vorausgesetzt, $\mathbb{N}$ ist wie oben definiert:

Basiselemente: aab

Induktionsregel: Es gilt $w = a^{n+1}b^n$ für alle $w \in L \subset \Sigma^*$ mit $n \in \mathbb{N}$.

A3

a)

3,6,9,12

b)

IA: Bekannt ist, dass $3 \in M$ gilt. Wir wissen also, dass für $n = 1$ $3n \in M$ gilt, da $3 \cdot 1 = 3 \in M$.

IV: Sei M' eine Menge, welche nach mehrfacher Anwendung der induktiven Regel erzeugt wurde und es gelte $m = 3n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m \in M'$.

IS: Betrachte nun: $3(n + 1) = 3n + 3 \cdot 1 = 3n + 3$.

Nach IA ist bekannt, dass $3 \in M$ gilt und nach IV gilt $3n \in M'$.

$\square$

A4

$\{ab, aaa, c\} \subset L_1$	L_1 ist endlich.
$\{aa, bb, cc\} \subset L_2$	L_2 ist unendlich.
$\{ababab, aaaaaaaaa, ccc\} \subset L_3$	L_3 ist unendlich.
$L_4 = \{\}$	L_4 ist endlich.
$\{aba, aaaa, ca\} \subset L_5$	L_5 ist unendlich.
$\{aa, bb, cc\} \subset L_6$	L_6 ist unendlich.

A5

Man sieht leicht, dass die Aussage für endliche Mengen gilt
(es gilt $|M| < 2^{|M|} = |\mathcal{P}(M)|$).

Per Induktion lässt sich die Aussage auch für abzählbar unendliche Mengen beweisen:
Induktionsbasis: $|\emptyset| = 0 < 1 = 2^{|\emptyset|} = |\mathcal{P}(\emptyset)|$.
Induktionsschritt: Sei also angenommen für eine Menge M, dass $|M| < \mathcal{P}(M)$ gilt. Dann gilt für ein Element $x \notin M$:
$|M \cup \{x\}| = |M| + 1 < 2 \cdot |\mathcal{P}(M)| \leq |\mathcal{P}(M \cup \{x\})|$. Dies folgt aus der Überlegung, dass in der Potenzmenge von $M \cup \{x\}$ mindestens alle Teilmengen von M vorkommen müssen. Des Weiteren müssen in dieser Menge auch alle Teilmengen von M liegen, welche noch dazu ein x bekommen, da diese Mengen dann Teilmengen von $M \cup \{x\}$ sind.

Nun für alle Mengen im allgemeinen, − also auch überabzählbare Mengen:

Sei M Menge. Wir werden zeigen, dass keine Bijektion $f : M \to \mathcal{P}(M)$ existiert, woraus $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ folgt.

Nehme an, dass f wäre bijektiv.

Definiere $\Omega := \{x \in M | x \notin f(x)\}$. Dann ist Ω Teilmenge von M, also Element von $\mathcal{P}(M)$. Da f bijektiv ist, gilt: $\Omega \in \mathrm{img}(f)$, und damit[1]: $f^{\leftarrow}(\Omega) \in M$.

Dieses Inverse nennen wir ω. Für dieses gilt dann natürlich: $f(\omega) = \Omega$.

Jedoch gilt: $\omega \notin f(\omega)$ also $\omega \notin \Omega$, nach Definition von Ω. Die Annahme der Bijektivität führt somit zu dem Widerspruch $\omega \in \Omega \wedge \omega \notin \Omega$.

Nun um den Fall $|M| > |\mathcal{P}(M)|$ auszuschließen,

betrachte $f : M \to \mathcal{P}(M), x \mapsto \{x\}$. f ist injektiv aber nicht surjektiv.

Somit gilt: $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ insgesamt $|M| < |\mathcal{P}(M)|$. $\square$

[1] Hier ist wichtig zu beachten, dass bei einer Bijektion immer genau ein Element der Urbildmenge eines Elements existiert, also ein Inverses