

Berechnungen und Logik

Hausaufgabenreihe 9

Henri Heyden, Nike Pulow

stu240825, stu239549

A1

Vor.: Sei β beliebige Belegung für die Formeln $\varphi, \psi \in F_{AL}$.

Beh.: $\neg(\varphi \vee \psi) \models \neg\varphi \wedge \neg\psi$

Bew.:

Fall 1.: $(\llbracket \varphi \rrbracket_\beta, \llbracket \psi \rrbracket_\beta) = (0, 0)$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\llbracket \neg(\varphi \vee \psi) \rrbracket_\beta &= f_\neg(\llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket_\beta) = f_\neg(f_\vee(\llbracket \varphi \rrbracket_\beta, \llbracket \psi \rrbracket_\beta)) = f_\neg(f_\vee(0, 0)) \\ &= f_\neg(0) = 1 = f_\wedge(1, 1) = f_\wedge(f_\neg(0), f_\neg(0)) = f_\wedge(f_\neg(\llbracket \varphi \rrbracket_\beta), f_\neg(\llbracket \psi \rrbracket_\beta)) \\ &= f_\wedge(\llbracket \varphi \rrbracket_\beta, \llbracket \psi \rrbracket_\beta) = \llbracket \neg\varphi \wedge \neg\psi \rrbracket_\beta\end{aligned}$$

Andere Fälle analog oder mittels Tabelle.

□

A2

Vor.: $n \in \mathbb{N}_0, \varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ Formeln.

Beh.: $\neg \bigwedge_{i=0}^{n-1} \varphi_i \models \bigvee_{i=0}^{n-1} \neg \varphi_i$

Bew.: Wir zeigen mittels Induktion:

(IB): Es gilt: $\neg(\wedge(\top)) \models \neg(\top) \models \perp \models \vee(\perp) \models \vee(\neg(\top))^1$

Anderer Fall analog.

(IS): Sei angenommen **(IH)** $\neg \bigwedge_{i=0}^{n-2} \varphi_i \models \bigvee_{i=0}^{n-2} \neg \varphi_i$.

Zu zeigen ist dann: $\neg \bigwedge_{i=0}^{n-1} \varphi_i \models \bigvee_{i=0}^{n-1} \neg \varphi_i$.

Es gilt:

$$\neg \bigwedge_{i=0}^{n-1} \varphi_i \models \neg \left(\bigwedge_{i=0}^{n-2} \varphi_i \wedge \varphi_{n-1} \right) \quad | \text{ (IB) bzw. Bearbeitung von A1}$$

$$\models \neg \bigwedge_{i=0}^{n-2} \varphi_i \vee \neg \varphi_{n-1} \quad | \text{ (IH), Ersetzungslemma}$$

$$\models \bigvee_{i=0}^{n-2} \neg \varphi_i \vee \neg \varphi_{n-1} \models \bigvee_{i=0}^{n-1} \neg \varphi_i$$

Somit sind Induktionsbasis und Induktionsschritt gezeigt. □

¹Hmm, ich wünschte, der Text wäre ein bisschen fetter...