Berechnungen und Logik
Hausaufgabenserie 10

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

HA 1

Vorberechnung:
Um beide Beweise etwas kürzer zu machen, führen wir eine Resolution durch von Φ, da wir in a) und b) genau die gleichen Schritte nochmal sonst machen würden nur mit noch eingefügten Formeln.

1	$\{X_0\}$	Voraussetzung
2	$\{\neg X_0, X_1\}$	Voraussetzung
3	$\{X_1\}$	Resolution mit X_0 aus 1 und 2
4	$\{\neg X_1, X_3\}$	Voraussetzung
5	$\{X_3\}$	Resolution mit X_1 aus 3 und 4
6	$\{\neg X_2, X_4\}$	Voraussetzung
7	$\{\neg X_4, X_3\}$	Voraussetzung
8	$\{\neg X_2, X_3\}$	Resolution mit X_4 aus 6 und 7
9	$\{\neg X_4, X_2\}$	Voraussetzung
10	$\{\neg X_4, X_3\}$	Resolution mit X_2 aus 8 und 9

Es bleibt nur noch die Klauselmenge $\{\{X_3\}, \{\neg X_4, X_3\}\}$.
Beobachte: $\bigwedge\bigvee\{\{X_3\}, \{\neg X_4, X_3\}\} \vDash\Dashv \bigwedge\bigvee\{\{X_3\}\}$ aufgrund der Konjunktion.

a)

Wir wenden alle Resolutionsschritte und die Umformung zuletzt auf $\Phi \cup \{\neg X_3\}$ an, und erhalten $\bigwedge\bigvee\{\{X_3\}, \{\neg X_3\}\} \vDash \bot$.
Nach Lemma ist $\Phi \vDash X_3$ gezeigt. $\square$

b)

Wir wenden alle Resolutionsschritte und die Umformung zuletzt auf $\Phi \cup \{\neg X_4\}$ an, und erhalten $\bigwedge \bigvee \{\{X_3\}, \{\neg X_4\}\}$ also $X_3 \land X_4$.
Da keine Resolutionsschritte mehr anwendbar sind
und offenbar nicht $X_3 \land \neg X_4 \models \bot$ gilt (Siehe Belegung $\beta := \{X_3 \mapsto 1, X_4 \mapsto 0\}$), können wir nicht schlussfolgern $\Phi \models X_4$, jedoch da das Resolutionskalkül vollständig ist, können wir $\Phi \models X_4$ ausschließen. $\square$

HA 2

a)

t_1 ist $\mathcal{S}$-Term, hier werden alle Formalismen für die Signatur $\mathcal{S}$ eingehalten.
t_2 ist nicht $\mathcal{S}$-Term, wir haben $\doteq$ so definiert, dass links und rechts $\mathcal{S}$-Terme stehen, was auch stimmt, jedoch ergibt dieser entstehende Baum eine $\mathcal{S}$-Formel, kein $\mathcal{S}$-Term.
t_3 ist nicht $\mathcal{S}$-Term, wir schreiben Variablen hier klein und nicht groß, also ist X_0 nicht Unter$\mathcal{S}$-term.
t_4 ist nicht $\mathcal{S}$-Term, da T Relation ist, Relationen dürfen nicht in $\mathcal{S}$-Termen vorkommen.

b)

φ_1 ist nicht $\mathcal{S}$-Formel, da $T(c)$ Formel ist und nicht $\mathcal{S}$-Term.
φ_2 ist nicht $\mathcal{S}$-Formel, da rechts von „$\doteq$“ kein $\mathcal{S}$-Term steht.
φ_3 ist nicht $\mathcal{S}$-Formel, da die Variable x_0 nicht $\mathcal{S}$-Formel ist.
φ_4 ist nicht $\mathcal{S}$-Formel, da links von dem Junktor „$\land$“ ein $\mathcal{S}$-Term steht und nicht eine $\mathcal{S}$-Formel.

HA 3

i = 0)

Definiere für die Struktur $\mathcal{A}_0$ das Universum $A_0 := \{\text{in}, \text{out}, 1, 2, 3\}$.
Definiere $E := \{(\text{in}, 2), (2, 3), (3, \text{out}), (3, 1), (1, 2)\}$.
Dann gilt $E \subseteq A_0^2$, des Weiteren hat jede Konstante aus $\mathcal{S}$ ein Komplement in A_0.
Somit ist $\mathcal{A}_0$ $\mathcal{S}$-Struktur und $\mathcal{A}_0$ modelliert den Graph G_0.

i = 1)

Definiere für die Struktur $\mathcal{A}_1$ das Universum $A_1 := \{\text{in}, \text{out}, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Definiere $E := \{(\text{in}, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 5), (5, 4), (1, 2), (1, 5), (5, \text{out})\}$.

Dann gilt $E \subseteq A_1^2$, des Weiteren hat jede Konstante aus $\mathcal{S}$ ein Komplement in A_1.
Somit ist $\mathcal{A}_1$ $\mathcal{S}$-Struktur und $\mathcal{A}_1$ modelliert den Graph G_1.

i = 2)

Definiere für die Struktur $\mathcal{A}_2$ das Universum $A_2 := \{\text{in}, \text{out}, ..., 1, 2, 3\}$.
Definiere $E := \{(\text{in}, 1), (1, \text{out}), (1, 2), (2, 3), (3, ...), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
Dann gilt $E \subseteq A_2^2$, des Weiteren hat jede Konstante aus $\mathcal{S}$ ein Komplement in A_2.
Somit ist $\mathcal{A}_2$ $\mathcal{S}$-Struktur und $\mathcal{A}_2$ modelliert den Graph G_2.

HA 4

i = 1)

Für $[\![\varphi]\!]_\beta^{\mathcal{A}_{1,0}} = 0$ definiere $\mathcal{A}_{1,0}$ wie folgt:
Das Universum $A = \mathbb{N}_0$, die Konstante $c^{\mathcal{A}_{1,0}} = 0$, die Funktion $f^{\mathcal{A}_{1,0}}(x) = x \cdot c$, für alle $x \in A$, sowie die Relation $R^{\mathcal{A}_{1,0}} = \ <$.

Für $[\![\varphi]\!]_\beta^{\mathcal{A}_{1,1}} = 1$ definiere $\mathcal{A}_{1,1}$ wie folgt:
Das Universum $A = \mathbb{N}_0$, die Konstante $c^{\mathcal{A}_{1,1}} = 1$, die Funktion $f^{\mathcal{A}_{1,1}}(x) = x + c$, für alle $x \in A$ sowie die Relation $R^{\mathcal{A}_{1,1}} = \ <$.

i = 2)

Für $[\![\varphi]\!]_\beta^{\mathcal{A}_{2,0}} = 0$ definiere $\mathcal{A}_{2,0}$ wie folgt:
Das Universum $A = \{1, 2\}$, die Konstante $c^{\mathcal{A}_{2,0}} = 1$, die Funktion $f^{\mathcal{A}_{2,0}}(x) = 1$, für alle $x \in A$, sowie die Relation $R^{\mathcal{A}_{2,0}} = \ =$.

Für $[\![\varphi]\!]_\beta^{\mathcal{A}_{2,1}} = 1$ definiere $\mathcal{A}_{2,1}$ wie folgt:
Das Universum $A = \{1\}$, die Konstante $c^{\mathcal{A}_{2,1}} = 0$, die Funktion $f^{\mathcal{A}_{2,1}}(x) = 1$, für alle $x \in A$, sowie die Relation $R^{\mathcal{A}_{2,1}} = \ =$.