# Berechnungen und Logik
# Hausaufgabenserie 8

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

## A1

**Vor.:** $L := \{\langle M\rangle \in \{0,1\}^* | \forall w : w \in L(M) \Leftrightarrow w = w^R\}$
**Beh.:** $L$ ist unentscheidbar.
**Bew.:** Sei $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*, \langle M\rangle \mapsto \langle M \circ l\rangle$, wobei $l \in L$ und $\circ$ so, dass erst $M$ berechnet wird und dann $l$ berechnet wird.
$M \circ l \in L$ gilt also genau dann, wenn $M$ und $l$ in einem akzeptierenden Zustand enden.
Dann gilt: $w \in \mathrm{HALT}^{\epsilon}_{\mathrm{TM}} \Rightarrow f(w) \in L$ und $w \notin \mathrm{HALT}^{\epsilon}_{\mathrm{TM}} \Rightarrow f(w) \notin L$.[1]
Somit sind beide Richtungen gezeigt damit $f$ Reduktionsfunktion für die Reduktion $\mathrm{HALT}^{\epsilon}_{\mathrm{TM}} \leq L$ ist.
Nach Satz „Eigenschaften der Reduktion“ ist somit $L$ nicht entscheidbar. □

## A3

### a)

Es gilt: $\overline{\mathrm{NONSTOP}^{\epsilon}_{\mathrm{TM}}} = \mathrm{HALT}^{\epsilon}_{\mathrm{TM}}$. Wir zeigen also, dass $\mathrm{HALT}^{\epsilon}_{\mathrm{TM}}$ erkennbar ist.
Folgende Turingmaschine erkennt $\mathrm{HALT}^{\epsilon}_{\mathrm{TM}}$:

$$M : \{0,1\}^* \to \mathbb{B}, \langle w\rangle \mapsto \begin{cases} \text{wahr} & \text{hält } w? \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese TM erkennt dann also alle haltenden Turingmaschinen, hält sie nicht interessiert uns das nicht, da wir nur zeigen wollten, dass $\mathrm{NONSTOP}^{\epsilon}_{\mathrm{TM}}$ co-erkennbar ist. □

[1] Wir haben hier die Äquivalenz aufgeteilt und die Zweite, also die „Rückrichtung“ mittels Kontraposition gezeigt.

**b)**

Definiere die TM $H$ so, dass $H$ für jede Eingabe hält, außer der leeren Eingabe, also $\epsilon$. Sei $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*, \langle w \rangle \mapsto \langle w \circ H \rangle$ so, dass $w \circ H$ erst $w$ simuliert und dann $H$ simuliert für die gleiche Eingabe.
Dann gilt folgendes:
Ist $\langle w \rangle \in \text{NONSTOP}^{\epsilon}_{\text{TM}}$, dann hält $w \circ H$, also $f(w)$ „decodiert" für keine Eingabe, also es gilt $f(w) = \langle w \circ H \rangle \in \text{NONSTOP}_{\text{TM}}$.
Ist $\langle w \rangle \notin \text{NONSTOP}^{\epsilon}_{\text{TM}}$, dann existiert ein Eingabewort, sodass $w$ hält und damit dann auch $w \circ H$, also gilt dann $f(w) = \langle w \circ H \rangle \notin \text{NONSTOP}_{\text{TM}}$.
Somit eignet sich $f$ als Reduktionsfunktion für die zu zeigende Reduktion $\text{NONSTOP}^{\epsilon}_{\text{TM}} \leq \text{NONSTOP}_{\text{TM}}$. $\square$

## A4

Es gilt $\varphi_1, \varphi_3 \notin F_{AL}$ und $\varphi_2, \varphi_4 \in F_{AL}$.
Eine für $\varphi_2$ gültige Belegung $\beta_1$ ist $[\![\varphi_2]\!]_{\beta_1} = 1$.
Eine für $\varphi_4$ gültige Belegung $\beta_2$ ist $[\![\varphi_4]\!]_{\beta_2} = 0$.

## A5

**a)**

$$
\begin{aligned}
[\![\varphi_1]\!]_\beta &= ([\![\neg X_0]\!]_\beta \wedge [\![Y_0]\!]_\beta) \vee (([\![X_0]\!]_\beta \leftrightarrow [\![Y_0]\!]_\beta) \wedge \varphi_0) && \text{Definition Semantik} \\
&= (\neg 0 \wedge 0) \vee ((0 \leftrightarrow 0) \wedge \top) && \beta, \varphi_0 = \top, \text{Basiselement} \\
&= (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge \top) && \text{Auswertung Junktoren} \\
&= 0 \vee \top && \text{Auswertung } \vee \\
&= \top
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\![\varphi_2]\!]_\beta &= ([\![\neg X_1]\!]_\beta \wedge [\![Y_1]\!]_\beta) \vee (([\![X_1]\!]_\beta \leftrightarrow [\![Y_1]\!]_\beta) \wedge \varphi_1) && \text{Definition Semantik} \\
&= (\neg 0 \wedge 1) \vee ((0 \leftrightarrow 1) \wedge \top) && \text{Auswertung } \neg, \leftrightarrow, \varphi_1 = \top
\end{aligned}
$$

$$= (1 \land 1) \lor (0 \land \top) \qquad \text{Auswertung } \land$$

$$= 1 \lor 0 \qquad \text{Auswertung } \lor$$

$$= 1 = \top$$

$$[\![\varphi_3]\!]_\beta = ([\![\neg X_2]\!]_\beta) \land [\![Y_2]\!]_\beta \lor (([\![X_2]\!]_\beta \leftrightarrow [\![Y_2]\!]_\beta) \land \varphi_2) \qquad \text{Definition Semantik}$$

$$= (\neg 1 \land 0) \lor ((1 \leftrightarrow 0) \land \top) \qquad \text{Auswertung } \neg, \leftrightarrow, \varphi_2 = \top$$

$$= (0 \land 0) \lor (0 \land \top) \qquad \text{Auswertung } \land$$

$$= 0 \lor 0 \qquad \text{Auswertung } \lor$$

$$= 0 = \bot = [\![\varphi_3]\!]_\beta$$

**b)**

Betrachte:
**(1)** $\bigwedge_{i=0}^{n-1}(X_i \leftrightarrow Y_i)$
**(2)** $\bigvee_{i=0}^{n-1}(\neg X_i \land Y_1 \land$ **(3)**$)$
**(3)** $\bigvee_{j=i+1}^{n-1}(X_j \leftrightarrow Y_j))$
**(1)** stellt sicher, dass die Bits von $X$ und $Y$ an der Stelle $i$ gleich sind. Kommt **(3)** zur Anwendung, dann sind $X$ und $Y$ an Stelle $j$ immer gleich, während in **(2)** die große Disjunktion dafür sorgt, dass die Bits $\neg X_i$ und $Y_i$ nicht beide zu 0 ausgewertet werden und dass alle nachfolgenden Bits gleich sind.
Alle Teile der Relation sorgen also für einen Vergleich der beiden Binärzahlen $X$ und $Y$: Entweder alle Bits an Stelle $i$ sind gleich **oder** es gibt eine Stelle $i$, an der $[\![X_1]\!] = 0$ und $[\![Y_1]\!] = 1$ und an allen weiteren Positionen $j$ sind die Bits gleich.
Zusammengefasst bedeutet dies: Entweder die durch $X_n$ und $Y_n$ repräsentierten Binärzahlen sind gleich, oder unterscheiden sich nur bis zu einer bestimmten Stelle $i$ und alle nachfolgenden Bits sind gleich.

## A6

Die Menge aller aussagenlogischen Variablen, die in $\varphi \in F_{AL}$ vorkommen, $vars(\varphi) : F_{AL} \to \mathcal{P}(V_{AL})$, definieren wir induktiv wie folgt:

**IA:** Sei $\varphi_0 \in F_{AL}$. Dann definieren wir $vars(\varphi_0) := \{\varphi_0\}$.

**IS:** Sind $\varphi_0, \ldots, \varphi_n \in V_{AL}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ durch beliebigen n-stelligen Junktor $C$ verbunden, sodass $C(\varphi_0, \ldots, \varphi_n) \in F_{AL}$ gilt, dann definieren wir $vars(C(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)) := \{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$.