Berechnungen und Logik
Hausaufgabenserie 6

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

a)

Vor.: Sei A Alphabet. $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$, wobei $\cdot^R : A^* \to A^*$ wie folgt:

IB für $w \in A^*, a \in A$: $(a \cdot r)^R := r^R \cdot a$

IS für $a \in A \cup \{\epsilon\}$: $a^R := a$

Außerdem: $\cdot // \cdot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (a,b) \mapsto \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ und: $\cdot \% \cdot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (a,b) \mapsto a - b \cdot \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$.

Diese beiden Operatoren sind Implementierungen der bekannten

abgerundeten ganzzahligen Division und dem Modulo.

Beh.: L_1 ist nicht regulär.

Bew.: Wir zeigen dies, indem wir die Kontraposition des Pumping-Lemmas zeigen,

d.h. es ist zu zeigen: $\forall m \in \mathbb{N}_{\geq 1} : \exists w \in \{a,b\}^m : \forall x,y,z \in \{a,b\}^*, w = xyz, |y| \geq 1 :$

$$\exists i,j \in \mathbb{N}, v \in \{a,b\}^* : xy^izv \in L_1 \not\Leftrightarrow xy^jzv \in L_1$$

Sei also $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Wähle $w = a^{(m//2)-1} \cdot b \cdot b^{m\%2} \cdot b \cdot a^{(m//2)-1}$.

Im Falle, dass m ungerade ist, haben wir also ein „extra“ b in der Mitte, sodass das

Wort w Palindrom ist und gleichzeitig immer noch wahrlich genauso lang wie m ist.

Sei dementsprechend xyz eine Zerlegung von w mit $|y| \geq 1$. Wir wählen $v = (xyz)^R$.

Dann gilt offenbar für $i = 1$: $xy^izv = xyzv = xyz(xyz)^R \in L_1$.

Jedoch gilt für $j = 2$: $xy^jzv = xyyzv = xyyz(xyz)^R \notin L_1$, da $|y| \geq 1$ vorausgesetzt.

Also gilt $xy^izv \in L_1 \not\Rightarrow xy^jzv \in L_1$, woraus folgt: $xy^izv \in L_1 \not\Leftrightarrow xy^jzv \in L_1$,

– was zu zeigen war. $\square$

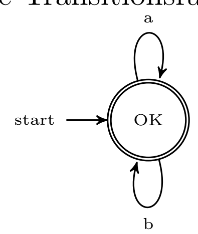
b)

L_2 ist die Menge der Palindrome über $\{a, b\}$ vereint mit der Menge an Wörtern, die keine Palindrome sind, es folgt: $L_2 = \{a, b\}^*$, somit lässt sich ein DEA konstruieren, der einfach jedes Wort aus $\{a, b\}^*$ akzeptiert:

$$\mathcal{A} := \{\{\text{OK}\}, \{a, b\}, \{((\text{OK}, a), \text{OK}), ((\text{OK}, b), \text{OK})\}, \text{OK}, \{\text{OK}\}\}$$

Diese Funktionsschreibweise ist etwas umständlich, aber bei kleinen Relationen lässt sich die Tupelschreibweise verwenden. Man sieht, dass diese Transitionsfunktion immer OK auf sich selbst abbildet und wohldefiniert ist.

Es ergibt sich folgendes Zustandsdiagramm:



c)

Vor.: $L_2 := \{0^{(2^n)} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
Beh.: L_2 ist nicht regulär.
Bew.: Wir verwenden das gleiche Schema, wie in **a)**.
Die Quantorenkette werden wir jetzt nicht ausschreiben.
Sei also $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, wähle $w := 0^{(2^n)}$ und $xyz := w$ mit $|y| \geq 1$.
Wähle $v := xyz$, dann gilt: $xy^1zv = xyzxyz \in L_2$, also existiert ein $i = 1$.
Sei $j = 2$, dann gilt folgendes: $xy^jzv = xyyzv = yyxzv$. Es gilt, dass jeder Buchstabe der Wörter 0 ist, weswegen wir uns nur die Kardinalitäten dieser Kompositionen anschauen werden.
Es gilt: $|y| \in [1, 2^m]_{\mathbb{N}}$, da $|xyz| = 2^m$ gilt, was die maximale Kardinalität von y ist, und da $|y| \geq 1$ gilt.
Es folgt: $|yyxzv| = |y| + 2^m + 2^m = |y| + 2^{m+1}$.
Damit diese Kardinalität eine Zweierpotenz sein soll, müsste $|y| \geq 2^{m+1}$ gelten, aber da $|y|$ maximal 2^m ist, fehlt uns im besten Fall immer noch ein Viertel.
Damit gilt somit $xy^izv \in L_2 \not\Rightarrow xy^jzv \in L_2$, $-$ was wie zuvor, zu zeigen war. $\square$

d)