

Berechnungen und Logik

Hausaufgabenserie 9

Henri Heyden, Nike Pulow

stu240825, stu239549

A1

Vor.: Sei β beliebige Belegung für die Formeln $\varphi, \psi \in F_{AL}$.

Beh.: $\neg(\varphi \vee \psi) \models \neg\varphi \wedge \neg\psi$

Bew.:

Fall 1.: $(\llbracket \varphi \rrbracket_\beta, \llbracket \psi \rrbracket_\beta) = (0, 0)$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\llbracket \neg(\varphi \vee \psi) \rrbracket_\beta &= f_\neg(\llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket_\beta) = f_\neg(f_\vee(\llbracket \varphi \rrbracket_\beta, \llbracket \psi \rrbracket_\beta)) = f_\neg(f_\vee(0, 0)) \\ &= f_\neg(0) = 1 = f_\wedge(1, 1) = f_\wedge(f_\neg(0), f_\neg(0)) = f_\wedge(f_\neg(\llbracket \varphi \rrbracket_\beta), f_\neg(\llbracket \psi \rrbracket_\beta)) \\ &= f_\wedge(\llbracket \varphi \rrbracket_\beta, \llbracket \psi \rrbracket_\beta) = \llbracket \neg\varphi \wedge \neg\psi \rrbracket_\beta\end{aligned}$$

Andere Fälle analog oder mittels Tabelle.

□

A2

Vor.: $n \in \mathbb{N}_0, \varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ Formeln.

Beh.: $\neg \bigwedge_{i=0}^{n-1} \varphi_i \models \bigvee_{i=0}^{n-1} \neg \varphi_i$

Bew.: Wir zeigen mittels Induktion:

(IB): Es gilt: $\neg(\wedge(\top)) \models \neg(\top) \models \perp \models \vee(\perp) \models \vee(\neg(\top))$ ¹

Anderer Fall analog.

(IS): Sei angenommen **(IH)** $\neg \bigwedge_{i=0}^{n-2} \varphi_i \models \bigvee_{i=0}^{n-2} \neg \varphi_i$.

Zu zeigen ist dann: $\neg \bigwedge_{i=0}^{n-1} \varphi_i \models \bigvee_{i=0}^{n-1} \neg \varphi_i$.

Es gilt:

$$\neg \bigwedge_{i=0}^{n-1} \varphi_i \models \neg \left(\bigwedge_{i=0}^{n-2} \varphi_i \wedge \varphi_{n-1} \right) \quad | \text{ (IB) bzw. Bearbeitung von A1}$$

$$\models \neg \bigwedge_{i=0}^{n-2} \varphi_i \vee \neg \varphi_{n-1} \quad | \text{ (IH), Ersetzungslemma}$$

$$\models \bigvee_{i=0}^{n-2} \neg \varphi_i \vee \neg \varphi_{n-1} \models \bigvee_{i=0}^{n-1} \neg \varphi_i$$

Somit sind Induktionsbasis und Induktionsschritt gezeigt. □

¹Hmm, ich wünschte, der Text wäre ein bisschen fetter...

A4

Vor.: $\Phi \subseteq F_{AL}$ und $\varphi \in F_{AL}$. $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar.

Beh.: $\Phi \models \varphi$ genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar.

Bew.: Wenn $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar ist, gilt $\llbracket \Phi \cup \{\neg\varphi\} \rrbracket_\beta = 0$ wegen der Definition von Erfüllbarkeit. Betrachte zwei Fälle:

(1) $\llbracket \Phi \rrbracket_\beta = 1$.

Damit $\llbracket \Phi \cup \{\neg\varphi\} \rrbracket_\beta = 0$ gelten kann, muss $\llbracket \neg\varphi \rrbracket_\beta = 1$ gelten. Daraus folgt $\llbracket \varphi \rrbracket_\beta = 1$. Dann gilt $\Phi \models \varphi$, da $\llbracket \Phi \rrbracket_\beta = 1$, also $\beta \models \Phi$, und $\llbracket \varphi \rrbracket_\beta = 1$, also $\beta \models \varphi$.

(2) $\llbracket \Phi \rrbracket_\beta = 0$

Damit $\llbracket \Phi \cup \{\neg\varphi\} \rrbracket_\beta = 0$ gelten kann, muss $\llbracket \varphi \rrbracket_\beta = 1$ gelten. Dann gilt auch $\llbracket \varphi \rrbracket_\beta = 0$.

Dann wissen wir auch, dass es keine passende Belegung β für Φ und φ gibt, sodass $\llbracket \Phi \rrbracket_\beta = 1$ und $\llbracket \varphi \rrbracket_\beta = 1$ gelten. Es gilt also auf Grund der Nicht-Existenz von passenden Belegungen β :

$\Phi \models \varphi$.

□

A6

a)

$$(\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg(X_1 \wedge (X_3 \vee \neg X_2)) \quad \text{Distributivität}$$

$$\models \quad (\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg((X_1 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2)) \quad \text{De Morgan}$$

$$\models \quad (\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg(X_1 \wedge X_3) \wedge \neg(X_1 \wedge \neg X_2) \quad \text{De Morgan}$$

$$\models \quad (\neg X_0 \vee X_4) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee \neg \neg X_2) \quad \text{Doppelnegation}$$

$$\models \quad (\neg X_0 \vee X_4) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee X_2)$$

Wir erhalten $\varphi \wedge \bigvee = \{\{\neg X_0, X_4\}, \{\neg X_1, \neg X_3\}, \{\neg X_1, X_2\}\}$.

b)

$$(\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg(X_1 \wedge (X_3 \vee \neg X_2)) \quad \text{DeMorgan}$$

$$\models \quad (\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg X_1 \vee \neg(X_3 \vee \neg X_2) \quad \text{Kommutativität}$$

$$\models \quad \neg X_1 \wedge (\neg X_0 \vee X_4) \vee \neg(X_3 \vee \neg X_2) \quad \text{Distributivität}$$

$$\models \quad (\neg X_1 \wedge \neg X_0) \vee (\neg X_1 \wedge X_4) \vee \neg(X_3 \vee \neg X_2) \quad \text{De Morgan}$$

$$\models \quad (\neg X_1 \wedge \neg X_0) \vee (\neg X_1 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge \neg \neg X_2) \quad \text{Doppelnegation}$$

$$\models \quad (\neg X_1 \wedge \neg X_0) \vee (\neg X_1 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge X_2)$$

Wir erhalten $\varphi \vee \wedge = \{\{\neg X_1, \neg X_0\}, \{\neg X_1, X_4\}, \{\neg X_3, X_2\}\}$.

A7

Definiere $\varphi := \wedge \vee \{\{X_2, X_1, X_5\}, \{\neg X_4, X_2, \neg X_3\}, \{\neg X_1\}, \{X_4, X_5, \neg X_2\}, \{\neg X_4, X_1\}, \{X_2, \neg X_5, \neg X_3\}, \{X_3, X_1\}, \{\neg X_5, \neg X_2\}\}$

Wir zeigen $\varphi \models \perp$ mittels Resolutionsbeweis.

- | | | |
|-----|-------------------------------|------------------------------------|
| 1. | $\{\neg X_1\}$ | Voraussetzung |
| 2. | $\{X_3, X_1\}$ | Voraussetzung |
| 3. | $\{X_3\}$ | Resolution mit X_1 aus 1 und 2 |
| 4. | $\{X_2, \neg X_5, \neg X_3\}$ | Voraussetzung |
| 5. | $\{X_2, \neg X_5\}$ | Resolution mit X_3 aus 3 und 4 |
| 6. | $\{\neg X_5, \neg X_2\}$ | Voraussetzung |
| 7. | $\{\neg X_5\}$ | Resolution mit X_2 aus 5 und 6 |
| 8. | $\{X_2, X_1, X_5\}$ | Voraussetzung |
| 9. | $\{X_2, X_1\}$ | Resolution mit X_5 aus 7 und 8 |
| 10. | $\{X_2\}$ | Resolution mit X_1 aus 1 und 9 |
| 11. | $\{X_4, X_5, \neg X_2\}$ | Voraussetzung |
| 12. | $\{X_4, X_5\}$ | Resolution mit X_2 aus 10 und 11 |

- | | | |
|------------|---------------------|------------------------------------|
| 13. | $\{X_4\}$ | Resolution mit X_5 aus 7 und 12 |
| 14. | $\{\neg X_4, X_1\}$ | Voraussetzung |
| 15. | $\{X_1\}$ | Resolution mit X_4 aus 13 und 14 |
| 16. | $\{\}$ | Resolution mit X_1 aus 1 und 15 |

Damit ist gezeigt, was zu zeigen war. □