# Berechnungen und Logik
# Hausaufgabenserie 1

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

## A1

Definiere folgende Mengen: $odd := \{2a + 1|a \in \mathbb{Z}\}$, $even := \{2a|a \in \mathbb{Z}\}$

sei $n \in \mathbb{Z}$, man sieht leicht, dass $\{odd, even\}$ Partition über $\mathbb{Z}$ ist.

### a)

Wir werden zeigen, dass für ein $n \in odd$ gilt, dann $n^2 \in odd$ gilt.

Es gilt per Definition: $\forall n \in odd : \exists a \in \mathbb{Z} : 2a + 1 = n$.

Für dieses $a$ gilt dann $n^2 = (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1$.

Da $a \in \mathbb{Z}$ gilt: $4a^2 \in even \land 4a \in even \land 1 \in odd$, somit ist $4a^2 + 4a + 1$ ungerade, also $n^2$ ungerade. $\square$

### b)

Wir werden zeigen, dass für ein $n^2 \in odd$ gilt, dann $n \in odd$ gilt.

Hierfür zeigen wir die Kontraposition, also $n \notin odd \implies n^2 \notin odd$.

Nach Voraussetzung ist die äquivalent zu: $n \in even \implies n^2 \in even$.

Es gilt per Definition: $\forall n \in even : \exists a \in \mathbb{Z} : 2a = n$.

Für dieses $a$ gilt dann $n^2 = (2a)^2 = 4a^2 \in even$. Damit ist $n^2$ gerade und die Kontraposition ist gezeigt $\square$

## A2

### a)

Gilt $\mathbb{N} := \{1, 2, ...\}$ die Menge der natürlichen Zahlen ab 1, dann gilt:

$$\mathbb{N} : \begin{cases} 1 \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

### b)

WOP hatte noch keine Ahnung, weil ich noch nicht ins Skript richtig reingeschaut habe.

## A3

### a)

3,6,9,12

### b)

etc.

## A4

trivial

## A5

Man sieht leicht, dass die Aussage für endliche Mengen gilt
(es gilt $|M| < 2^{|M|} = |\mathcal{P}(M)|$).

Per Induktion lässt sich die Aussage auch für abzählbar unendliche Mengen beweisen:
Induktionsbasis: $|\emptyset| = 0 < 1 = 2^{|\emptyset|} = |\mathcal{P}(\emptyset)|$.
Induktionsschritt: Sei also angenommen für eine Menge $M$, dass $|M| < \mathcal{P}(M)$ gilt. Dann gilt für ein Element $x \notin M$:
$|M \cup \{x\}| = |M| + 1 < 2 \cdot |\mathcal{P}(M)| \leq |\mathcal{P}(M \cup \{x\})|$. Dies folgt aus der Überlegung, dass in der Potenzmenge von $M \cup \{x\}$ mindestens alle Teilmengen von $M$ vorkommen müssen. Des Weiteren müssen in dieser Menge auch alle Teilmengen von $M$ liegen, welche noch dazu ein $x$ bekommen, da diese Mengen dann Teilmengen von $M \cup \{x\}$ sind.

Nun für alle Mengen im allgemeinen, − also auch überabzählbare Mengen:
Sei $M$ Menge. Wir werden zeigen, dass keine Bijektion $f : M \to \mathcal{P}(M)$ existiert, woraus $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ folgt.
Nehme an, dass $f$ wäre bijektiv.
Definiere $\Omega := \{x \in M | x \notin f(x)\}$. Dann ist $\Omega$ Teilmenge von $M$, also Element von $\mathcal{P}(M)$. Da $f$ bijektiv ist, gilt: $\Omega \in \mathrm{img}(f)$, und damit[1]: $f^{\leftarrow}(\Omega) \in M$.
Dieses Inverse nennen wir $\omega$. Für dieses gilt dann natürlich: $f(\omega) = \Omega$.
Jedoch gilt: $\omega \notin f(\omega)$ also $\omega \notin \Omega$, nach Definition von $\Omega$. Die Annahme der

[1] Hier ist wichtig zu beachten, dass bei einer Bijektion immer genau ein Element der Urbildmenge eines Elements existiert, also ein Inverses

Bijektivität führt somit zu dem Widerspruch $\omega \in \Omega \land \omega \notin \Omega$.

Nun um den Fall $|M| > |\mathcal{P}(M)|$ auszuschließen,

betrachte $f : M \to \mathcal{P}(M), x \mapsto \{x\}$. $f$ ist injektiv aber nicht surjektiv.

Somit gilt: $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ insgesamt $|M| < |\mathcal{P}(M)|$. $\square$