

# Berechnungen und Logik

## Hausaufgabenserie 8

Henri Heyden, Nike Pulow

stu240825, stu239549

### A1

### A2

**Vor.:**  $L_1, L_2$  Turing erkennbar, sodass  $L_1 \cup L_2$  und  $L_1 \cap L_2$  Turing entscheidbar sind. Sei  $\alpha \in L_1$

**Beh.:**  $L_1$  ist Turing entscheidbar.

**Bew.:** Sei  $f : A^* \rightarrow A^*$  mit  $f(\overline{L_1 \cup L_2}) = \overline{L_1 \cup L_2}$  und  $f(L_1 \cup L_2) = \{\alpha\}$ .

Dann existiert eine Turingmaschine, die sich wie folgt verhält, für  $w \in A^*$  Eingabewort:

Ist  $w \in \overline{L_1 \cup L_2}$ , dann tue nichts und akzeptiere.<sup>1</sup>

Sonst leere die Eingabe und schreibe  $\alpha$  hin und akzeptiere.

Dann gilt für alle Eingaben  $w \in A^*$ . Berechne  $w$ , dann ist die akzeptierende Konfiguration  $f(w)$ . Dies gilt nach den eben beschriebenen Definitionen.

Des Weiteren gilt:  $\forall w \in A^* : w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_1 \cup L_2$  nach Definition  $f$ .

Somit gilt also  $L_1 \leq (L_1 \cup L_2)$ . Beobachte, dass  $L_1 \cup L_2$  Turing entscheidbar ist. Dann gilt nach Satz „Eigenschaften der Reduktion 1“, dass  $L_1$  Turing entscheidbar ist, – was zu zeigen war.  $\square$

### A3

**Beh.:** Eine Turingmaschine mit einem beidseitig unendlichem Band entscheidet genau die gleichen Sprachen, wie eine einseitig unendliche Turingmaschine.

**Bew.:** Wir teilen den Beweis in zwei Richtungen auf:

1. „ $\Rightarrow$ “

Es wurde in der Vorlesung bereits gezeigt, dass  $k$ -bändige Turingmaschine gleich mächtig sind, wie einbändige, deswegen zeigen wir, dass für jede beidseitige Turingmaschine eine beidbandige Turingmaschine existiert.

Betrachten wir eine beidseitige Turingmaschine.

---

<sup>1</sup>Sei hier zu beachten, dass  $\overline{L_1 \cup L_2}$  entscheidbar ist.

Dann existiert folgende beidbandige Turingmaschine: Wir nennen Band 1 „rechtes Band“ und Band 2 „linkes Band“. Für jegliches beschriftetes Band, dass verwendet wird, werden das linke Band und das rechte Band so aufgeteilt, dass das linke Band die gespiegelte linke Hälfte des originalen Bandes ist und das rechte Band die rechte Hälfte des originalen Bandes ist. Die Mitte ist dabei der Start des rechten Bandes.

Transformiere nun beide Bänder nochmal, so, dass ein Buchstabe, der nicht im Bandalphabet rechts bzw. links vom linken bzw. rechtem Band angefügt wird. Dieser Buchstabe repräsentiert die Mitte des originalen Bandes.

Nun adjustieren wir die Transitionsfunktion so, dass folgendes gilt:

Starte auf dem zweiten Buchstaben des rechten Bandes<sup>1</sup>.

Wir rechnen so lange genau so, wie in der ursprünglichen Turingmaschine, bis wir (falls überhaupt) die Markierung erreichen.

Dann rechne mit invertierten Bewegungsaktionen bei der zweiten Stelle des linken Bandes weiter (also nicht auf der Markierung, sonst würden wir ja wieder zurückspringen).

Wenn wieder die Markierung erreicht wird, fahre wieder im „originalen“ Modus rechts weiter auf der zweiten Stelle.

Wir ersetzen sozusagen die Linke unendliche Hälfte der ursprünglichen Turingmaschine mit einem einzelnen Band.

Eine andere Möglichkeit mit einer Turingmaschine mit einem Band das Problem zu lösen ist es eine zweiseitige Turingmaschine auf der einbandigen zu simulieren, wenn man annimmt, dass sich jede mathematische Struktur über eine Turingmaschine simulieren lässt.

## 2. „ $\Leftarrow$ “

Betrachten wir eine einseitige Turingmaschine, dann existiert eine Turingmaschine mit zweiseitigem Band, welche genau die gleichen Transitionsfunktionen besitzt.

Es ist uns schließlich egal, wie viel „Platz“ links von dem Ursprung ist, da

---

<sup>1</sup>wir betrachten hier eine zweibandige Turingmaschine, wessen Bänder nicht synchronisiert sind, also wo wir nicht sozusagen Tupel betrachten, dass diese Turingmaschinen mit den synchronen k-bandigen äquivalent sind in der Stärke, ließe sich leicht zeigen, aber wir werden nicht uns nicht darauf fokussieren in diesem Beweis, um ihn nicht unnötig in die Länge zu ziehen, – wie sonst.

wir nie diesen überschreiten werden.

Somit sind beide Richtungen gezeigt. □

## A4

a)

Um die Nicht-Gültigkeit dieser Reduktionsfunktion zu zeigen, bedienen wir uns einem der Sätze, der in der verlinkten Ressource in Aufgabe 3 genannt wird:

Ist  $L_2$  Turing-Entscheidbar, und gilt  $L_1 \leq L_2$ , so ist auch  $L_1$  Turing-Entscheidbar.

Wir definieren  $L_2 = L$  und  $L_1 = HALT_{TM}^c$ .

$L$  ist offensichtlich entscheidbar, eine TM, welche diese Sprache entscheidet, ließe sich im Handumdrehen konstruieren. Wir wissen aber aus der genannten Ressource auch, dass  $HALT_{TM}^c$  nicht entscheidbar ist. Es kann also  $HALT_{TM}^c \leq L$  nicht gelten.

b)

c)

Die Reduktion funktioniert nicht, da angenommen ist, dass  $M_{<M>}$  wirklich TM ist.

Jedoch ist  $M_{<M>}$  abhängig von der Turingmaschine, die das Halteproblem entscheidet, welche nicht existiert.

Somit existiert also auch  $M_{<M>}$  nicht als TM und die Reduktionsfunktion  $f$  ist ungültig.

Man sieht dies auch an einem anderen Punkt unserer Definition:  $M_{<M>}$  müsse nach unserer Definition immer halten, tut es aber nicht.