

Berechnungen und Logik

Hausaufgabenserie 3

Henri Heyden, Nike Pulow

stu240825, stu239549

A1

a)

f_1 erfüllt nicht das notwendige Kriterium des linear beschränkten Wachstums, denn es gilt folgendes: Für alle $w \in A^*$ gilt: $|f_1(w)| = |1^{|w|^2}| = |w|^2$.

Des Weiteren gilt jedoch: $\forall c \in \mathbb{N} : \exists w \in A^* : |w|^2 > c \cdot (|w| + 1)$, mit $w : |w| = 2c > 0$, denn es gilt dann: $|w|^2 = 4c^2 > 2c^2 + c$ (Beachte $|w| > 0$).

□

b)

f_2 erfüllt auch nicht das notwendige Kriterium des linear beschränkten Wachstums. Wir zeigen dafür $\forall c \in \mathbb{N} : \exists w \in A^* : |f_2(w)| > c \cdot (|w| + 1)$

Hierfür wähle $w := v_0 v_1 v_3 \dots v_n$ mit $n := \max(2c, 3)$ und $v_i \neq \epsilon$ für $i \in [n]$, dann gilt: $|f_2(w)| = \frac{n^2+n}{2} = \frac{4c^2+2c}{2} = 2c^2+c > 2c^2+2$ aufgrund der gaußschen Summenformel und der Definition von f_2 .

Dann gilt: $|f_2(w)| > c \cdot (|w| + 1)$, was zu zeigen war.

□

A2

Zunächst zeigen wir $f_M = f$ für $x = 1^m$ per Induktion über m .

Induktionsanfang: Für $m = 0$ gilt: $\hat{\alpha}(+1, 1^0) = \hat{\alpha}(+1, \epsilon = \epsilon)$ und für $m = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(+1, 1^1) &= \hat{\alpha}(+1, \epsilon)\alpha(\hat{\delta}(+1, \epsilon), 1) && \text{Eigenschaft } \hat{\alpha} \\ &= \epsilon\alpha(+1, 1) \\ &= \epsilon 0 = 0\end{aligned}$$

Induktionsschritt: Für $m > 1$ gilt mit $m = m_0 + (m - 1)$, $m_0 = 1$:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(+1, 1^{m_0+(m-1)}) &= \hat{\alpha}(+1, 1^{m_0})\alpha(\hat{\delta}(+1, 1^{m_0}), 1^{m-1}) && \text{Eigenschaft } \hat{\alpha} \\ &= \hat{\alpha}(+1, 1^{m_0})\alpha(+1, 1^{m-1}) && \hat{\delta} \text{ bekannt} \\ &= \hat{\alpha}(+1, 1^1)\alpha(+1, 1^{m-1}) && \hat{\alpha}(+1, 1) \text{ bekannt} \\ &= 0\alpha(+1, 1^{m-1}) \\ &= 0^m\end{aligned}$$

Nun zeigen wir $f_M = f$ für den Fall $x = 1^m 0y$, hier per Induktion über y .

Induktionsanfang: Für $|y| = 0$, also $y = \epsilon$ gilt:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(+1, 1^m 0) &= \hat{\alpha}(+1, 1^m)\alpha(\hat{\delta}(+1, 1^m), 0) && \text{Eigenschaft } \hat{\alpha} \\ &= 0^m\alpha(\hat{\delta}(+1, 1^m), 0) && \hat{\alpha}(+1, 1^m) \text{ bekannt}\end{aligned}$$

$$= 0^m \alpha(+1, 0) \quad \hat{\delta} \text{ bekannt}$$

$$= 0^m 1$$

$$= 0^m 1y = f(x) \quad y = \epsilon$$

Induktionsschritt: Für $|y| > 0$ gilt:

$$\hat{\alpha}(+1, 1^m 0y) = \hat{\alpha}(+1, 1^m 0) \alpha(\hat{\delta}(+1, 1^m 0), y)$$

$$= \hat{\alpha}(+1, 1^m 0) \alpha(\delta(\hat{\delta}(+1, 1^m), 0), y)$$

$$= \hat{\alpha}(+1, 1^m 0) \alpha(\delta(+1, 0), y) \quad \hat{\delta} \text{ bekannt}$$

$$= \hat{\alpha}(+1, 1^m 0) \alpha(=, y)$$

$$= \hat{\alpha}(+1, 1^m) \alpha(\hat{\delta}(+1, 1^m), 0) \alpha(=, y) \quad \text{Eigenschaft } \hat{\alpha}$$

$$= \hat{\alpha}(+1, 1^m) \alpha(+1, 0) \alpha(=, y) \quad \hat{\delta} \text{ bekannt}$$

$$= \hat{\alpha}(+1, 1^m) 1 \alpha(=, y) \quad \alpha(+1, 0) \text{ bekannt}$$

$$= \hat{\alpha}(+1, 1^m) 1y \quad \alpha(=, y) = y$$

$$= 0^m 1y \quad \hat{\alpha}(+1, 1^m) \text{ bekannt}$$

Damit ist gezeigt, was zu zeigen war. □

A3

Da f und $\lambda : B^* \rightarrow B^*, w \mapsto wv$ sequenziell¹ sind, gilt nach Bonusaufgabe 7, dass \tilde{f} sequenziell ist, da $\tilde{f} = \lambda \circ f$ gilt. \square

A4

a)

Induktionsbasis: Sei $u, v \in A^*, |u| = |v| = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \hat{\delta}(q, uv) \\ &= \delta(\hat{\delta}(q, u), v) && | \text{ Def. } \hat{\delta} \\ &= \delta(\delta(\hat{\delta}(q, \epsilon), u), v) \\ &= \delta(\delta(q, u), v) && | 2 \cdot \text{ Def. } \hat{\delta} \\ &= \delta(\delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \epsilon), \epsilon), u), v) \\ &= \delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \epsilon), u), v) && | \text{ Def. } \hat{\delta} \\ &= \delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \epsilon), u), \epsilon), v) \\ &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \epsilon), u), v) \\ &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v) \end{aligned}$$

¹ λ ist tatschlich sequenziell, betrachte dafur die jeweiligen Identittsfunktionen als Zustands und Ausgabefunktionen und $\phi : Q \rightarrow B^*, q \mapsto v$ als die finale Ausgabefunktion, fur $Q := \{z_0\}$.

Hier sieht man auch, dass die Basis gilt, wenn eines der Wörter das leere Wort ist, da wir das im Beweis selber gezeigt hatten zwischen Schritt 3 und 6.

Induktionsschritt: Sei $w \in A^*$, $a \in A$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 & \hat{\delta}(q, wa) \\
 &= \delta(\hat{\delta}(q, w), a) && | \text{ Def. } \hat{\delta} \\
 &= \delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, w), \epsilon), a) \\
 &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, w), a)
 \end{aligned}$$

Damit wurde die Aussage induktiv gezeigt. □

b)

A7

maybe baby