# Berechnungen und Logik
# Hausaufgabenserie 3

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

## A1

### a)

$f_1$ erfüllt nicht das notwendige Kriterium des linear beschränktem Wachstums, denn es gilt folgendes: Für alle $w \in A^*$ gilt: $|f_1(w)| = |1^{|w|^2}| = |w|^2$. Des Weiteren gilt jedoch: $\forall c \in \mathbb{N} : \exists w \in A^* : |w|^2 > c \cdot (|x| + 1)$, mit $w : |w| = 2c > 0$, denn es gilt dann: $|w|^2 = 4c^2 > 2c^2 + c$ (Beachte $|w| > 0$).

$\square$

### b)

$f_2$ erfüllt auch nicht das notwendige Kriterium des linear beschränktem Wachstums. Wir zeigen dafür $\forall c \in \mathbb{N} : \exists w \in A^* : |f_2(w)| > c \cdot (|w| + 1)$
Hierfür wähle $w := v_0 v_1 v_3 \ldots v_n$ mit $n := \max(2c, 3)$ und $v_i \neq \epsilon$ für $i \in [n]$, dann gilt: $|f_2(w)| = \frac{n^2+n}{2} = \frac{4c^2+2c}{2} = 2c^2 + c > 2c^2 + 2$ aufgrund der gaußschen Summenformel und der Definition von $f_2$.
Dann gilt: $|f_2(w)| > c \cdot (|w| + 1)$, was zu zeigen war. $\square$

## A2

Zunächst zeigen wir $f_M = f$ für $x = 1^m$ per Induktion über $m$.

Induktionsanfang: Für $m = 0$ gilt: $\hat{\alpha}(+1, 1^0) = \hat{\alpha}(+1, \epsilon = \epsilon)$ und für $m = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(+1, 1^1) &= \hat{\alpha}(+1, \epsilon)\alpha(\hat{\delta}(+1, \epsilon), 1) && \text{Eigenschaft } \hat{\alpha} \\
&= \epsilon\alpha(+1, 1) \\
&= \epsilon 0 = 0
\end{aligned}$$

Induktionsschritt: Für $m > 1$ gilt mit $m = m_0 + (m-1), m_0 = 1$:

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(+1, 1^{m_0+(m-1)}) &= \hat{\alpha}(+1, 1^{m_0})\alpha(\hat{\delta}(+1, 1^{m_0}), 1^{m-1}) && \text{Eigenschaft } \hat{\alpha} \\
&= \hat{\alpha}(+1, 1^{m_0})\alpha(+1, 1^{m-1}) && \hat{\delta} \text{ bekannt} \\
&= \hat{\alpha}(+1, 1^1)\alpha(+1, 1^{m-1}) && \hat{\alpha}(+1, 1) \text{ bekannt} \\
&= 0\alpha(+1, 1^{m-1}) \\
&= 0^m
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir $f_M = f$ für den Fall $x = 1^m 0 y$, hier per Induktion über $y$.

Induktionsanfang: Für $|y| = 0$, also $y = \epsilon$ gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(+1, 1^m 0) &= \hat{\alpha}(+1, 1^m)\alpha(\hat{\delta}(+1, 1^m), 0) && \text{Eigenschaft } \hat{\alpha} \\
&= 0^m \alpha(\hat{\delta}(+1, 1^m), 0) && \hat{\alpha}(+1, 1^m) \text{ bekannt}
\end{aligned}$$

$$= 0^m \alpha(+1, 0) \qquad \hat{\delta} \text{ bekannt}$$

$$= 0^m 1$$

$$= 0^m 1y = f(x) \qquad y = \epsilon$$

Induktionsschritt: Für $|y| > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(+1, 1^m 0y) &= \hat{\alpha}(+1, 1^m 0)\alpha(\hat{\delta}(+1, 1^m 0), y) \\
&= \hat{\alpha}(+1, 1^m 0)\alpha(\delta(\hat{\delta}(+1, 1^m), 0), y) \\
&= \hat{\alpha}(+1, 1^m 0)\alpha(\delta(+1, 0), y) && \hat{\delta} \text{ bekannt} \\
&= \hat{\alpha}(+1, 1^m 0)\alpha(=, y) \\
&= \hat{\alpha}(+1, 1^m)\alpha(\hat{\delta}(+1, 1^m), 0)\alpha(=, y) && \text{Eigenschaft } \hat{\alpha} \\
&= \hat{\alpha}(+1, 1^m)\alpha(+1, 0)\alpha(=, y) && \hat{\delta} \text{ bekannt} \\
&= \hat{\alpha}(+1, 1^m)1\alpha(=, y) && \alpha(+1, 0) \text{ bekannt} \\
&= \hat{\alpha}(+1, 1^m)1y && \alpha(=, y) = y \\
&= 0^m 1y && \hat{\alpha}(+1, 1^m) \text{ bekannt}
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, was zu zeigen war. $\square$

## A3

Da $f$ und $\lambda : B^* \to B^*, w \mapsto wv$ sequenziell[1] sind, gilt nach Bonusaufgabe 7, dass $\tilde{f}$ sequenziell ist, da $\tilde{f} = \lambda \circ f$ gilt. $\square$

## A4

### a)

Induktionsbasis: Sei $u, v \in A^*, |u| = |v| = 1$. Dann gilt:

$$\hat{\delta}(q, uv)$$

$$=\delta(\hat{\delta}(q, u), v) \quad | \text{ Def. } \hat{\delta}$$

$$=\delta(\delta(\hat{\delta}(q, \epsilon), u), v)$$

$$=\delta(\delta(q, u), v) \quad | \text{ 2· Def. } \hat{\delta}$$

$$=\delta(\delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \epsilon), \epsilon), u), v)$$

$$=\delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \epsilon), u), v) \quad | \text{ Def. } \hat{\delta}$$

$$=\delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \epsilon), u), \epsilon), v)$$

$$=\hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \epsilon), u), v)$$

$$=\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v)$$

[1] $\lambda$ ist tatsächlich sequenziell, betrachte dafür die jeweiligen Identitätsfunktionen als Zustands und Ausgabefunktionen und $\phi : Q \to B^*, q \mapsto v$ als die finale Ausgabefunktion, für $Q := \{z_0\}$.

Hier sieht man auch, dass die Basis gilt, wenn eines der Wörter das leere Wort ist, da wir das im Beweis selber gezeigt hatten zwischen Schritt 3 und 6.

Induktionsschritt: Sei $w \in A^*, a \in A$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&\hat{\delta}(q, wa) \\
=&\delta(\hat{\delta}(q, w), a) && \mid \text{Def. } \hat{\delta} \\
=&\delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, w), \epsilon), a) \\
=&\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, w), a)
\end{aligned}
$$

Damit wurde die Aussage induktiv gezeigt. □

**b)**

Induktionsbasis: Sei $q \in Q$, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&\hat{\alpha}(q, \epsilon) \\
=&\hat{\alpha}(\hat{\delta}(q, \epsilon), \epsilon) \\
=&\epsilon \cdot \hat{\alpha}(\hat{\delta}(q, \epsilon), \epsilon) \\
=&\hat{\alpha}(q, \epsilon) \cdot \hat{\alpha}(\hat{\delta}(q, \epsilon), \epsilon)
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt: Sei $q \in Q$, $w \in A^*$, $a \in A$, dann gilt:

$$\hat{\alpha}(q, wa)$$

$$=\hat{\alpha}(q, w) \cdot \alpha(\hat{\delta}(q, w), a) \qquad | \; q' := \hat{\delta}(q, w)$$

$$=\hat{\alpha}(q, w) \cdot \alpha(q', a)$$

$$=\hat{\alpha}(q, w) \cdot \epsilon \cdot \alpha(q', a) \qquad | \text{ Def. } \hat{\delta}, \hat{\alpha}$$

$$=\hat{\alpha}(q, w) \cdot \hat{\alpha}(q', \epsilon) \cdot \alpha(\hat{\delta}(q', \epsilon), a) \qquad | \text{ Def. } \hat{\alpha}$$

$$=\hat{\alpha}(q, w) \cdot \hat{\alpha}(q', a) \qquad | \text{ Def. } q'$$

$$=\hat{\alpha}(q, w) \cdot \hat{\alpha}(\hat{\delta}(q, w), a)$$

Damit wurde die Aussage induktiv gezeigt. □

## A7

maybe