Berechnungen und Logik
Hausaufgabenserie 6

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

a)

Vor.: Sei A Alphabet. $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$, wobei $\cdot^R : A^* \to A^*$ wie folgt:

IB für $w \in A^*, a \in A$: $(a \cdot r)^R := r^R \cdot a$

IS für $a \in A \cup \{\epsilon\}$: $a^R := a$

Außerdem: $\cdot // \cdot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (a,b) \mapsto \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ und: $\cdot\%\cdot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (a,b) \mapsto a - b \cdot \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$.

Diese beiden Operatoren sind Implementierungen der bekannten

abgerundeten ganzzahligen Division und dem Modulo.

Beh.: L_1 ist nicht regulär.

Bew.: Wir zeigen dies, indem wir die Kontraposition des Pumping-Lemmas zeigen, d.h. es ist zu zeigen: $\forall m \in \mathbb{N}_{\geq 1} : \exists w \in \{a,b\}^m : \forall x,y,z \in \{a,b\}^*, w = xyz, |y| \geq 1 :$

$$\exists i,j \in \mathbb{N}, v \in \{a,b\}^* : xy^izv \in L_1 \not\Leftrightarrow xy^jzv \in L_1$$

Sei also $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Wähle $w = a^{(m//2)-1} \cdot b \cdot b^{m\%2} \cdot b \cdot a^{(m//2)-1}$.

Im Falle, dass m ungerade ist, haben wir also ein „extra“ b in der Mitte, sodass das Wort w Palindrom ist und gleichzeitig immer noch wahrlich genauso lang wie m ist.

Sei dementsprechend xyz eine Zerlegung von w mit $|y| \geq 1$. Wir wählen $v = (xyz)^R$.

Dann gilt offenbar für $i = 1$: $xy^izv = xyzv = xyz(xyz)^R \in L_1$.

Jedoch gilt für $j = 2$: $xy^jzv = xyyzv = xyyz(xyz)^R \notin L_1$, da $|y| \geq 1$ vorausgesetzt.

Also gilt $xy^izv \in L_1 \not\Rightarrow xy^jzv \in L_1$, woraus folgt: $xy^izv \in L_1 \not\Leftrightarrow xy^jzv \in L_1$,

– was zu zeigen war. $\square$

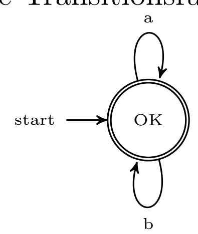
b)

L_2 ist die Menge der Palindrome über $\{a, b\}$ vereint mit der Menge an Wörtern, die keine Palindrome sind, es folgt: $L_2 = \{a, b\}^*$, somit lässt sich ein DEA konstruieren, der einfach jedes Wort aus $\{a, b\}^*$ akzeptiert:

$$\mathcal{A} := \{\{\text{OK}\}, \{a, b\}, \{((\text{OK}, a), \text{OK}), ((\text{OK}, b), \text{OK})\}, \text{OK}, \{\text{OK}\}\}$$

Diese Funktionsschreibweise ist etwas umständlich, aber bei kleinen Relationen lässt sich die Tupelschreibweise verwenden. Man sieht, dass diese Transitionsfunktion immer OK auf sich selbst abbildet und wohldefiniert ist.

Es ergibt sich folgendes Zustandsdiagramm:



c)

Vor.: $L_3 := \{0^{(2^n)} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
Beh.: L_3 ist nicht regulär.
Bew.: Wir verwenden das gleiche Schema, wie in **a)**.
Die Quantorenkette werden wir jetzt nicht ausschreiben.
Sei also $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, wähle $w := 0^{(2^n)}$ und $xyz := w$ mit $|y| \geq 1$.
Wähle $v := xyz$, dann gilt: $xy^1zv = xyzxyz \in L_3$, also existiert ein $i = 1$.
Sei $j = 2$, dann gilt folgendes: $xy^jzv = xyyzv = yyxzv$. Es gilt, dass jeder Buchstabe der Wörter 0 ist, weswegen wir uns nur die Kardinalitäten dieser Kompositionen anschauen werden.
Es gilt: $|y| \in [1, 2^m]_{\mathbb{N}}$, da $|xyz| = 2^m$ gilt, was die maximale Kardinalität von y ist, und da $|y| \geq 1$ gilt.
Es folgt: $|yyxzv| = |y| + 2^m + 2^m = |y| + 2^{m+1}$.
Damit diese Kardinalität eine Zweierpotenz sein soll, müsste $|y| \geq 2^{m+1}$ gelten, aber da $|y|$ maximal 2^m ist, fehlt uns im besten Fall immer noch ein Viertel.
Damit gilt somit $xy^izv \in L_3 \not\Rightarrow xy^jzv \in L_3$, – was wie zuvor, zu zeigen war. $\square$

d)

Vor.: $L_4 := \{w^R bwbw^R \in \{a,b\}^* \mid w \in \{b\}^*\}$
Beh.: L_4 ist regulär.
Bew.: Es gilt $\forall w \in \{b\}^* : w^R = w$, da w schließlich nur aus dem gleichen Buchstaben besteht. Betrachte die folgende Umformung:

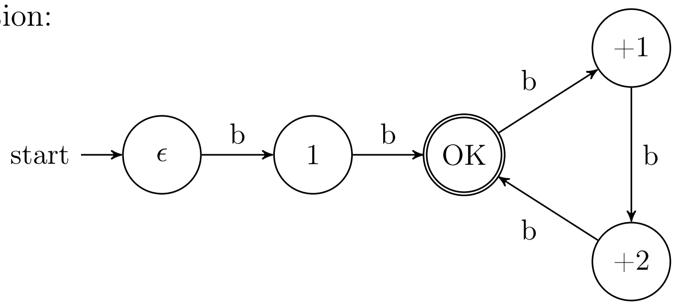
$\{w^R bwbw^R \in \{a,b\}^* \mid w \in \{b\}^*\}$ $\quad$ |Folgerung, Komposition ist immer aus $\{b\}^*$

$=\{wbwbw \mid w \in \{b\}^*\}$ $\quad$ | Reihenfolge macht keinen Unterschied, weil nur b's im Wort sind

$=\{bbwww \mid w \in \{b\}^*\}$ $\quad$ | Rausziehen (wir betrachten das Bild)

$=bb \cdot \{www \mid w \in \{b\}^*\}$ $\quad$ | Def. $\cdot^*$ für Mengen

$=bb \cdot \{w \in \{b\}^* \mid |w| \in 3\mathbb{N}\}$
Wir suchen also Wörter für die Folgendes gilt: $w : w \in \{b\}^* |w| = 3n + 2$ für $n \in \mathbb{N}$.
Hiermit lässt sich ein DEA komposieren, der L_4 erkennt, welcher dargestellt ist in folgender Illustration:



Dieser Automat erkennt genau L_4, so ist L_4 regulär. $\square$

A2

a)

Vor.: $A := \{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow\}, L_1 := \{p \in A^* \mid p \text{ beginnt und endet am selben Punkt.}\}$

Beh.: L_1 ist nicht regulär.

Bew.: Wir zeigen wieder nach Pumping-Lemma, d.h. es ist zu zeigen:

$\forall m \in \mathbb{N}_{\geq 1}:$

$\exists w \in A^m : \forall x, y, z \in A^*, w = xyz, |y| \geq 1 :$

$\exists i, j \in \mathbb{N}, v \in A^* : xy^izv \in L_1 \not\Leftrightarrow xy^jzv \in L_1$

Sei also $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Setze $w := \rightarrow^m$ und $v := \leftarrow^m$.[1]

Sei $xyz := w$ mit $|y| \geq 1$ Zerlegung von w.

Dann gilt **Fall 1 ($i = 1$):** $xy^izv = xyzv \in L_1$, da $|w| = |v|$.

Des Weiteren gilt **Fall 2 ($j = 2$):** $xy^jzv = xyyzv = yxyzv = ywz = \rightarrow^{|y|} \cdot \rightarrow^{|m|} \cdot \leftarrow^{|m|}$

Da $|y| \geq 1$ folgt: $\rightarrow^{|y|} \neq \epsilon$. Mit $y \in \{\rightarrow\}^+$ gilt somit $xy^jzw \notin L_1$.

Also gilt: $\exists i, j \in \mathbb{N}, v \in A^* : xy^izv \in L_1 \not\Leftrightarrow xy^jzv \in L_1$, – was zu zeigen war. $\square$

[1] „*Perfectly balanced, – as all things should be.*"

b)

Vor.: $L_2 := \{a^{m \cdot n} \mid n, m \in \mathbb{N}_{>1}\} \cup \{\epsilon, a\}$, $\mathbb{P} \subset \mathbb{N} : 2 \in \mathbb{P}, p \in \mathbb{P} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_{>1} : p \cdot n \notin \mathbb{P}$

Beh.: L_2 ist nicht regulär.

Bew.: Es gilt: $L_2 = \{a^{m \cdot n} \mid n, m \in \mathbb{N}_{>1}\} \cup \{\epsilon, a\} = \{a^p \mid p \notin \mathbb{P}\}$. Sei hierfür bewusst, dass die Menge der Primzahlen gleiche Kardinalität zur Menge der natürlichen Zahlen hat, also dass $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}|$ gilt.

Lemma $\forall L : L \in \text{Reg} \Leftrightarrow \overline{L} \in \text{Reg}$:

„$\Rightarrow$“:

Sei $M := \{Q, A, \delta, I, F\}$ NEA der L akzeptiert, dann ist $\overline{M} := \{Q, A, \delta, F, I\}$ ein NEA, der $\overline{L}$ akzeptiert. Folgt aus Definition von NEA und Akzeptanz bzw. Berechnung.

„$\Leftarrow$“:

folgt aus vorherigen Teil, denn F, I lassen sich zurücktauschen. ■

Nach dem Lemma zeigen wir somit, dass $\overline{L_2}$ nicht regulär ist. Es gilt: $\overline{L_2} = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$

Wir zeigen wieder mittels des Pumping-Lemmas.

Nehme also $m \in \mathbb{N}$, sei $w := a^m$, sei $xyz := w$ Zerlegung von w mit $|y| \geq 1$.

Sei auch $v := a^{p-|m|}$, wobei $p := \min(\mathbb{P}_{\geq m})$ gilt.[2]

Dann gilt Folgendes:

Sei $i := 0$, dann gilt: $xy^izv = xzv = a^{m-1} \cdot a^{p-m} = a^{m-1+p-m} = a^{p-1} \notin \overline{L_2}$, da nach Def. $\mathbb{P}$ der Abstand von zwei Primzahlen größer als 2 sein muss, denn $2|(p \pm 1)$ gilt.

Sei $j := 0$, dann gilt: $xy^jzv = xyzv = a^m \cdot a^{p-m} = a^{m+p-m} = a^p \in \overline{L_2}$, nach $\overline{L_2}$.

Dann gilt: $\exists i, j \in \mathbb{N}, v \in \{a\}^* : xy^izv \in \overline{L_2} \not\Leftrightarrow xy^jzv \in \overline{L_2}$. Damit ist $\overline{L_2}$ nicht regulär, folglich ist auch L_2 nicht regulär, – was zu zeigen war. □

[2] Es „sei“ hier auch wieder bewusst, dass es abzählbar unendliche Primzahlen gibt.

A3

a)

Im Folgenden definieren wir DTM_{Pal} als die deterministische Turing Maschine, welche die Sprache $L = \{ww^R \in A^* \mid w \in A^*\}$ für ein Alphabet $A = \{a, b\}$ entscheidet. Die Idee ist, dass immer der erste noch nicht gelesene Buchstabe auf dem Band mit dem letzten noch nicht gelesenen Buchstaben auf dem Band vergleichen wird. Sind diese beiden Buchstaben gleich, fährt die Turing Maschine mit dem nächsten Buchstaben-Paar fort. Es ist also essentiell, dass es aus dem ersten Zustand q_0 zwei Zustände q_1 und q_2 gibt, in denen gespeichert wird, welches Symbol gelesen wird. In diesen Zuständen wird dann geblieben, bis das Ende des Bandes erreicht wird (also ein $\textvisiblespace$gelesen wird). Dann entscheidet die Turing Maschine, ob das am Ende des Bandes gelesene Zeichen gleich dem Zeichen am Anfang des Bandes ist. Ist dem so, fährt der Kopf zurück an den Anfang des Bandes - es muss also jedes Zeichen, welches Teil eines Vergleiches ist, durch ein $\textvisiblespace$ersetzt werden. Jene Zeichen hingegen, welche nur gelesen werden, wenn der Kopf von einem Ende des Bandes zum anderen fährt, werden nicht verändert.
Ist nun ein Zeichen am Ende des Bandes nicht das gleiche, wie jenes, welches zum Vergleich am Anfang des Bandes gelesen wurde, so wird der verwerfende Zustand q_{rej} erreicht. Es wird q_{rej} auch erreicht, wenn nur ein zu vergleichendes Zeichen übrig ist, nicht aber ein zweites. In diesem Fall ist die Anzahl der Buchstaben des Eingabewortes ungerade und gehört damit nicht zu L. Liest die Turing Maschine im Zustand q_0 jedoch ein $\textvisiblespace$, dann ist das Eingabewort entweder leer, oder das Eingabewort ein Palindrom gerader Länge und damit Teil der zu entscheidenen Sprache L. Dann wird der Zustand q_{acc} erreicht.

Wir definieren nun die Maschine DTM_{Pal} formal und als Diagramm: [3]

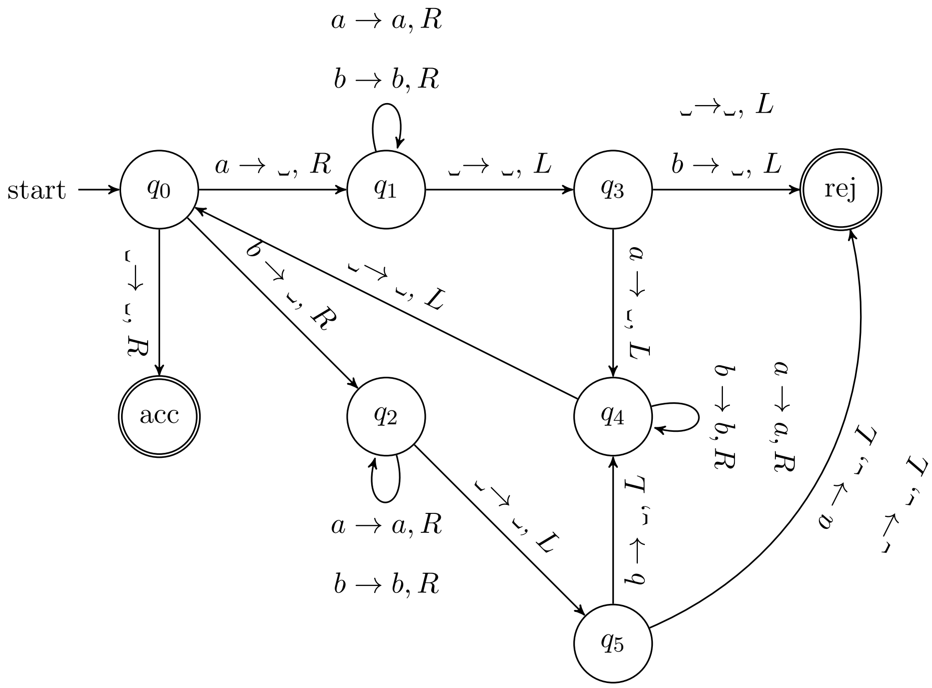
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{rej}, q_{acc}\}$ mit q_0 als initialen Zustand, q_{rej} als verwerfenden Zustand und q_{acc} als akzeptierenden Zustand.

$A = \{a, b\}$

$\Gamma = \{a, b, ␣\}$

[3] Beim nochmaligen Lesen der Aufgabenstellung stellen wir fest, dass lediglich ein Zustandsdiagramm von Nöten gewesen wäre. Wir sehen die längere Ausführung und folgende Definition hier nun als Übung an, welche gleichzeitig auch deutlich machen sollte, warum die Korrektheit unserer Konstruktion gilt, wenngleich nicht explizit ein Nebensatz dahingehend formuliert wurde.

δ	(q, a)	$\rightarrow$	(q, a, r)
	(q_0, a)		$(q_1, \text{\textvisiblespace}, R)$
	(q_0, b)		$(q_2, \text{\textvisiblespace}, R)$
	$(q_0, \text{\textvisiblespace})$		$(q_{acc}\text{\textvisiblespace}, R)$
	(q_1, a)		(q_1, a, R)
	(q_1, b)		(q_1, b, R)
	$(q_1, \text{\textvisiblespace})$		$(q_3, \text{\textvisiblespace}, L)$
	(q_2, a)		(q_2, a, R)
	(q_2, b)		(q_2, b, R)
	$(q_2, \text{\textvisiblespace})$		$(q_5, \text{\textvisiblespace}, L)$
	(q_3, a)		$(q_4, \text{\textvisiblespace}, L)$
	(q_3, b)		$(q_{rej}, \text{\textvisiblespace}, L)$
	$(q_3, \text{\textvisiblespace})$		$(q_{rej}, \text{\textvisiblespace}, L)$
	(q_4, a)		(q_4, a, R)
	(q_4, b)		(q_4, b, R)
	$(q_4, \text{\textvisiblespace})$		$(q_0, \text{\textvisiblespace}, L)$
	(q_5, a)		$(q_{rej}, \text{\textvisiblespace}, L)$
	(q_5, b)		$(q_4, \text{\textvisiblespace}, L)$
	$(q_5, \text{\textvisiblespace})$		$(q_{rej}, \text{\textvisiblespace}, L)$



b)

Für das Wort *abba* erhalten wir mit DTM_{Pal} folgende Berechnung:

1. q_0bba ␣

2. ␣q_1ba ␣

3. ␣bq_1a ␣

4. ␣bbq_1 ␣

5. ␣$bbaq_3$

6. ␣bbq_4 ␣

7. ␣bq_4 ␣␣

8. ␣q_4b ␣␣

9. q_0bb ␣␣

10. ␣q_2b ␣␣

11. $\sqcup\sqcup q_2 \sqcup\sqcup$

12. $\sqcup\sqcup b q_5 \sqcup$

13. $\sqcup\sqcup q_4 \sqcup\sqcup$

14. $\sqcup q_0 \sqcup\sqcup\sqcup$

15. $\sqcup\sqcup q_{acc} \sqcup\sqcup$

c)

Für das Wort *abbb* erhalten wir mit DTM_{Pal} folgende Berechnung:

1. $q_0 bbb \sqcup$

2. $\sqcup q_1 bb \sqcup$

3. $\sqcup b q_1 b \sqcup$

4. $\sqcup bb q_1 \sqcup$

5. $\sqcup bbb q_3$

6. $\sqcup bb q_{rej} \sqcup$

A4

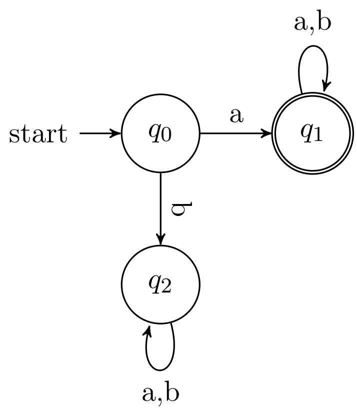
a)

Diese Aussage ist korrekt. Es lässt sich für jede Sprache ein DEA konstruieren, von dessen Startzustand aus für alle Eingaben ein weiterer Zustand q_{1M} existiert, welcher bei Bedarf eingehende Transitionen besitzt.

b)

Diese Aussage ist inkorrekt. Es kann für Wörter beliebig langer Länge kein DEA konzipiert werden, dessen akzeptierenden Zustände keine ausgehenden Transitionen akzeptiert.

Betrachte beispielsweise einen Automaten M, welcher alle Wörter einer Sprache $A = \{a, b\}$ erkennt, welche mit dem Buchstaben a beginnen. Dieser lässt sich für beliebig lange Wörter nur mit einer ausgehenden Transition für den akzeptierenden Zustand konstruieren.



c)

Diese Aussage ist inkorrekt. Betrachte dafür wieder den Automaten aus Aufgabenteil b. Es ist bei diesem notwendig, für das erste Eingabesymbol eine Trennung durch Zustände vorzunehmen. In diesem Fall sind beide vom Startzustand erreichbaren Zustände nur durch unterschiedliche Eingabesymbole $a \in A$ erreichbar.

d)

Diese Aussage ist nach Ausschlussprinzip korrekt. Darüber hinaus gilt per Definition, dass bei einem DEA für jeden Zustand Transitionen für alle Eingabesymbole definiert sind. Das führt zu der Erkenntnis, dass für jede durch einen DEA erkennbare Sprache ein oder mehrere Äuffangzustände"definiert werden können, welche dieser Eigenschaft entsprechen.