Berechnungen und Logik
Hausaufgabenserie 9

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

Vor.: Sei β beliebige Belegung für die Formeln $\varphi, \psi \in F_{AL}$.

Beh.: $\neg(\varphi \vee \psi) \vDash\Dashv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

Bew.:

Fall 1.: $(\llbracket\varphi\rrbracket_\beta, \llbracket\psi\rrbracket_\beta) = (0, 0)$.

Es gilt:

$$\llbracket\neg(\varphi \vee \psi)\rrbracket_\beta = f_\neg(\llbracket\varphi \vee \psi\rrbracket_\beta) = f_\neg(f_\vee(\llbracket\varphi\rrbracket_\beta, \llbracket\psi\rrbracket_\beta)) = f_\neg(f_\vee(0, 0))$$

$$= f_\neg(0) = 1 = f_\wedge(1, 1) = f_\wedge(f_\neg(0), f_\neg(0)) = f_\wedge(f_\neg(\llbracket\varphi\rrbracket_\beta), f_\neg(\llbracket\psi\rrbracket_\beta))$$

$$= f_\wedge(\llbracket\varphi\rrbracket_\beta, \llbracket\psi\rrbracket_\beta) = \llbracket\neg\varphi \wedge \neg\psi\rrbracket_\beta$$

Andere Fälle analog oder mittels Tabelle. $\square$

A2

Vor.: $n \in \mathbb{N}_0, \varphi_0, \dots \varphi_{n-1}$ Formeln.

Beh.: $\neg \bigwedge_{i=0}^{n-1} \varphi_i \models\!\dashv \bigvee_{i=0}^{n-1} \neg\varphi_i$

Bew.: Wir zeigen mittels Induktion:

(IB): Es gilt: $\neg(\wedge(\top)) \models\!\dashv \neg(\top) \models\!\dashv \bot \models\!\dashv \vee(\bot) \models\!\dashv \vee(\neg(\top))$[1]

Anderer Fall analog.

(IS): Sei angenommen **(IH)** $\neg \bigwedge_{i=0}^{n-2} \varphi_i \models\!\dashv \bigvee_{i=0}^{n-2} \neg\varphi_i$.

Zu zeigen ist dann: $\neg \bigwedge_{i=0}^{n-1} \varphi_i \models\!\dashv \bigvee_{i=0}^{n-1} \neg\varphi_i$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\neg \bigwedge_{i=0}^{n-1} \varphi_i &\models\!\dashv \neg \left(\bigwedge_{i=0}^{n-2} \varphi_i \wedge \varphi_{n-1} \right) && \mid \textbf{(IB)} \text{ bzw. Bearbeitung von A1} \\
&\models\!\dashv \neg \bigwedge_{i=0}^{n-2} \varphi_i \vee \neg\varphi_{n-1} && \mid \textbf{(IH)}, \text{ Ersetzungslemma} \\
&\models\!\dashv \bigvee_{i=0}^{n-2} \neg\varphi_i \vee \neg\varphi_{n-1} \models\!\dashv \bigvee_{i=0}^{n-1} \neg\phi_i
\end{aligned}$$

Somit sind Induktionsbasis und Induktionsschritt gezeigt. $\square$

[1] Hmm, ich wünschte, der Text wäre ein bisschen fetter...

A4

Vor.: $\Phi \subseteq F_{AL}$ und $\varphi \in F_{AL}$. $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar.

Beh.: $\Phi \vDash \varphi$

Bew.: Wenn Es gilt $[\![\Phi \cup \{\neg\varphi\}]\!]_\beta = 0$ wegen der Definition von Erfüllbarkeit.

Betrachte zwei Fälle:

(1) $[\![\Phi]\!]_\beta = 1$.

Damit $[\![\Phi \cup \{\neg\varphi\}]\!]_\beta = 0$ gelten kann, muss $[\![\neg\varphi]\!]_\beta = 0$ gelten, da $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vDash\!\!\!\Dashv$ $(\neg\Phi) \wedge \neg\varphi$. Daraus folgt $[\![\varphi]\!]_\beta = 1$. Dann gilt $\Phi \vDash \varphi$, da $[\![\Phi]\!]_\beta = 1$, also $\beta \vDash \Phi$, und $[\![\varphi]\!]_\beta = 1$, also $\beta \vDash \varphi$.

(2) $[\![\Phi]\!]_\beta = 0$

Für $[\![\Phi \cup \{\neg\varphi\}]\!]_\beta = 0$ ist der Wert von φ egal. Es gilt $[\![\Phi]\!]_\beta = 0 \Rightarrow \Phi \vDash \varphi$.

$\square$

A6

a)

$$
\begin{array}{llr}
 & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg(X_1 \wedge (X_3 \vee \neg X_2)) & \text{Distributivität} \\
\vDash\!\!\!\Dashv & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg((X_1 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2)) & \text{De Morgan} \\
\vDash\!\!\!\Dashv & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg(X_1 \wedge X_3) \wedge \neg(X_1 \wedge \neg X_2) & \text{De Morgan} \\
\vDash\!\!\!\Dashv & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee \neg\neg X_2) & \text{Doppelnegation} \\
\vDash\!\!\!\Dashv & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee X_2) &
\end{array}
$$

Wir erhalten $\varphi \bigwedge \bigvee = \{\{\neg X_0, X_4\}, \{\neg X_1, \neg X_3\}, \{\neg X_1, X_2\}\}$.

b)

	$(\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg(X_1 \wedge (X_3 \vee \neg X_2))$	DeMorgan
$\models\!\!\!\!=\!\!\!\!\dashv$	$(\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg X_1 \vee \neg(X_3 \vee \neg X_2)$	Kommutativität
$\models\!\!\!\!=\!\!\!\!\dashv$	$\neg X_1 \wedge (\neg X_0 \vee X_4) \vee \neg(X_3 \vee \neg X_2)$	Distributivität
$\models\!\!\!\!=\!\!\!\!\dashv$	$(\neg X_1 \wedge \neg X_0) \vee (\neg X_1 \wedge X_4) \vee \neg(X_3 \vee \neg X_2)$	De Morgan
$\models\!\!\!\!=\!\!\!\!\dashv$	$(\neg X_1 \wedge \neg X_0) \vee (\neg X_1 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge \neg\neg X_2)$	Doppelnegation
$\models\!\!\!\!=\!\!\!\!\dashv$	$(\neg X_1 \wedge \neg X_0) \vee (\neg X_1 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge X_2)$	

Wir erhalten $\varphi \bigvee \bigwedge = \{\{\neg X_1, \neg X_0\}, \{\neg X_1, X_4\}, \{\neg X_3, X_2\}\}$.

A7

Definiere $\varphi := \bigwedge \bigvee \{\{X_2, X_1, X_5\}, \{\neg X_4, X_2, \neg X_3\}, \{\neg X_1\}, \{X_4, X_5, \neg X_2\}, \{\neg X_4, X_1\}, \{X_2, \neg X_5, \neg X_3\}, \{X_3, X_1\}, \{\neg X_5, \neg X_2\}\}$

Wir zeigen $\varphi \models \bot$ mittels Resolutionsbeweis.

1.	$\{\neg X_1\}$	Voraussetzung
2.	$\{X_3, X_1\}$	Voraussetzung
3.	$\{X_3\}$	Resolution mit X_1 aus 1 und 2

4.	$\{X_2, \neg X_5, \neg X_3\}$	Voraussetzung
5.	$\{X_2, \neg X_5\}$	Resolution mit X_3 aus 3 und 4
6.	$\{\neg X_5, \neg X_2\}$	Voraussetzung
7.	$\{\neg X_5\}$	Resolution mit X_2 aus 5 und 6
8.	$\{X_2, X_1, X_5\}$	Voraussetzung
9.	$\{X_2, X_1\}$	Resolution mit X_5 aus 7 und 8
10.	$\{X_2\}$	Resolution mit X_1 aus 1 und 9
11.	$\{X_4, X_5, \neg X_2\}$	Voraussetzung
12.	$\{X_4, X_5\}$	Resolution mit X_2 aus 10 und 11
13.	$\{X_4\}$	Resolution mit X_5 aus 7 und 12
14.	$\{\neg X_4, X_1\}$	Voraussetzung
15.	$\{X_1\}$	Resolution mit X_4 aus 13 und 14
16.	$\{\}$	Resolution mit X_1 aus 1 und 15

Damit ist gezeigt, was zu zeigen war. $\square$