Berechnungen und Logik
Hausaufgabenserie 9

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

Vor.: Sei β beliebige Belegung für die Formeln $\varphi, \psi \in F_{AL}$.

Beh.: $\neg(\varphi \vee \psi) \models\!\dashv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

Bew.:

Fall 1.: $([\![\varphi]\!]_\beta, [\![\psi]\!]_\beta) = (0, 0)$.

Es gilt:

$$[\![\neg(\varphi \vee \psi)]\!]_\beta = f_\neg([\![\varphi \vee \psi]\!]_\beta) = f_\neg(f_\vee([\![\varphi]\!]_\beta, [\![\psi]\!]_\beta)) = f_\neg(f_\vee(0, 0))$$

$$= f_\neg(0) = 1 = f_\wedge(1, 1) = f_\wedge(f_\neg(0), f_\neg(0)) = f_\wedge(f_\neg([\![\varphi]\!]_\beta), f_\neg([\![\psi]\!]_\beta))$$

$$= f_\wedge([\![\varphi]\!]_\beta, [\![\psi]\!]_\beta) = [\![\neg\varphi \wedge \neg\psi]\!]_\beta$$

Andere Fälle analog oder mittels Tabelle. $\square$

A2

Vor.: $n \in \mathbb{N}_0, \varphi_0, \ldots \varphi_{n-1}$ Formeln.

Beh.: $\neg \bigwedge_{i=0}^{n-1} \varphi_i \models\mathrel{\reflectbox{$\models$}} \bigvee_{i=0}^{n-1} \neg\varphi_i$

Bew.: Wir zeigen mittels Induktion:

(IB): Es gilt: $\neg(\wedge(\top)) \models\mathrel{\reflectbox{$\models$}} \neg(\top) \models\mathrel{\reflectbox{$\models$}} \bot \models\mathrel{\reflectbox{$\models$}} \vee(\bot) \models\mathrel{\reflectbox{$\models$}} \vee(\neg(\top))$[1]

Anderer Fall analog.

(IS): Sei angenommen **(IH)** $\neg \bigwedge_{i=0}^{n-2} \varphi_i \models\mathrel{\reflectbox{$\models$}} \bigvee_{i=0}^{n-2} \neg\varphi_i$.

Zu zeigen ist dann: $\neg \bigwedge_{i=0}^{n-1} \varphi_i \models\mathrel{\reflectbox{$\models$}} \bigvee_{i=0}^{n-1} \neg\varphi_i$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\neg \bigwedge_{i=0}^{n-1} \varphi_i &\models\mathrel{\reflectbox{$\models$}} \neg\left(\bigwedge_{i=0}^{n-2} \varphi_i \wedge \varphi_{n-1}\right) && \mid \textbf{(IB)} \text{ bzw. Bearbeitung von A1} \\
&\models\mathrel{\reflectbox{$\models$}} \neg \bigwedge_{i=0}^{n-2} \varphi_i \vee \neg\varphi_{n-1} && \mid \textbf{(IH)}, \text{ Ersetzungslemma} \\
&\models\mathrel{\reflectbox{$\models$}} \bigvee_{i=0}^{n-2} \neg\varphi_i \vee \neg\varphi_{n-1} \models\mathrel{\reflectbox{$\models$}} \bigvee_{i=0}^{n-1} \neg\phi_i
\end{aligned}$$

Somit sind Induktionsbasis und Induktionsschritt gezeigt. $\square$

[1] Hmm, ich wünschte, der Text wäre ein bisschen fetter…

A4

Vor.: $\Phi \subseteq F_{AL}$ und $\varphi \in F_{AL}$. $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar.

Beh.: $\Phi \vDash \varphi$ genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar.

Bew.: Wenn $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar ist, gilt $[\![\Phi \cup \{\neg\varphi\}]\!]_\beta = 0$ wegen der Definition von Erfüllbarkeit. Betrachte zwei Fälle:

(1) $[\![\Phi]\!]_\beta = 1$.

Damit $[\![\Phi \cup \{\neg\varphi\}]\!]_\beta = 0$ gelten kann, muss $[\![\neg\varphi]\!]_\beta = 1$ gelten. Daraus folgt $[\![\varphi]\!]_\beta = 1$. Dann gilt $\Phi \vDash \varphi$, da $[\![\Phi]\!]_\beta = 1$, also $\beta \vDash \Phi$, und $[\![\varphi]\!]_\beta = 1$, also $\beta \vDash \varphi$.

(2) $[\![\Phi]\!]_\beta = 0$

Damit $[\![\Phi \cup \{\neg\varphi\}]\!]_\beta = 0$ gelten kann, muss $[\![\varphi]\!]_\beta = 1$ gelten. Dann gilt auch $[\![\varphi]\!]_\beta = 0$.

Dann wissen wir acuh, dass es keine passende Belegung β für Φ und φ gibt, sodass $[\![\Phi]\!]_\beta = 1$ und $[\![\varphi]\!]_\beta = 1$ gelten. Es gilt also auf Grund der Nicht-Existenz von passenden Belegungen β:

$\Phi \vDash \varphi$.

$\square$

A6

a)

$$
\begin{array}{lll}
 & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg(X_1 \wedge (X_3 \vee \neg X_2)) & \text{Distributivität} \\
\models\mathrel{\mkern-3mu}\Dashv & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg((X_1 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2)) & \text{De Morgan} \\
\models\mathrel{\mkern-3mu}\Dashv & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg(X_1 \wedge X_3) \wedge \neg(X_1 \wedge \neg X_2) & \text{De Morgan} \\
\models\mathrel{\mkern-3mu}\Dashv & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee \neg\neg X_2) & \text{Doppelnegation} \\
\models\mathrel{\mkern-3mu}\Dashv & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee X_2) &
\end{array}
$$

Wir erhalten $\varphi \bigwedge \bigvee = \{\{\neg X_0, X_4\}, \{\neg X_1, \neg X_3\}, \{\neg X_1, X_2\}\}$.

b)

$$
\begin{array}{lll}
 & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg(X_1 \wedge (X_3 \vee \neg X_2)) & \text{DeMorgan} \\
\models\mathrel{\mkern-3mu}\Dashv & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg X_1 \vee \neg(X_3 \vee \neg X_2) & \text{Kommutativität} \\
\models\mathrel{\mkern-3mu}\Dashv & \neg X_1 \wedge (\neg X_0 \vee X_4) \vee \neg(X_3 \vee \neg X_2) & \text{Distributivität} \\
\models\mathrel{\mkern-3mu}\Dashv & (\neg X_1 \wedge \neg X_0) \vee (\neg X_1 \wedge X_4) \vee \neg(X_3 \vee \neg X_2) & \text{De Morgan} \\
\models\mathrel{\mkern-3mu}\Dashv & (\neg X_1 \wedge \neg X_0) \vee (\neg X_1 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge \neg\neg X_2) & \text{Doppelnegation} \\
\models\mathrel{\mkern-3mu}\Dashv & (\neg X_1 \wedge \neg X_0) \vee (\neg X_1 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge X_2) &
\end{array}
$$

Wir erhalten $\varphi \bigvee \bigwedge = \{\{\neg X_1, \neg X_0\}, \{\neg X_1, X_4\}, \{\neg X_3, X_2\}\}$.

A7