Berechnungen und Logik
Hausaufgabenserie 6

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

a)

Vor.: Sei A Alphabet. $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$, wobei $\cdot^R : A^* \to A^*$ wie folgt:

IB für $w \in A^*, a \in A$: $(a \cdot r)^R := r^R \cdot a$

IS für $a \in A \cup \{\epsilon\}$: $a^R := a$

Außerdem: $\cdot // \cdot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (a,b) \mapsto \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ und: $\cdot\%\cdot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (a,b) \mapsto a - b \cdot \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$.

Diese beiden Operatoren sind Implementierungen der bekannten

abgerundeten ganzzahligen Division und dem Modulo.

Beh.: L_1 ist nicht regulär.

Bew.: Wir zeigen dies, indem wir die Kontraposition des Pumping-Lemmas zeigen, d.h. es ist zu zeigen: $\forall m \in \mathbb{N}_{\geq 1} : \exists w \in \{a,b\}^m : \forall x,y,z \in \{a,b\}^*, w = xyz, |y| \geq 1 :$

$$\exists i,j \in \mathbb{N}, v \in \{a,b\}^* : xy^izv \in L_1 \not\Leftrightarrow xy^jzv \in L_1$$

Sei also $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Wähle $w = a^{(m//2)-1} \cdot b \cdot b^{m\%2} \cdot b \cdot a^{(m//2)-1}$.

Im Falle, dass m ungerade ist, haben wir also ein „extra“ b in der Mitte, sodass das Wort w Palindrom ist und gleichzeitig immer noch wahrlich genauso lang wie m ist.

Sei dementsprechend xyz eine Zerlegung von w mit $|y| \geq 1$. Wir wählen $v = (xyz)^R$.

Dann gilt offenbar für $i = 1$: $xy^izv = xyzv = xyz(xyz)^R \in L_1$.

Jedoch gilt für $j = 2$: $xy^jzv = xyyzv = xyyz(xyz)^R \notin L_1$, da $|y| \geq 1$ vorausgesetzt.

Also gilt $xy^izv \in L_1 \not\Rightarrow xy^jzv \in L_1$, woraus folgt: $xy^izv \in L_1 \not\Leftrightarrow xy^jzv \in L_1$,

– was zu zeigen war. $\square$

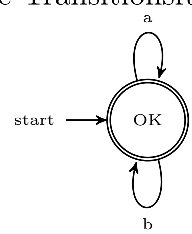
b)

L_2 ist die Menge der Palindrome über $\{a, b\}$ vereint mit der Menge an Wörtern, die keine Palindrome sind, es folgt: $L_2 = \{a, b\}^*$, somit lässt sich ein DEA konstruieren, der einfach jedes Wort aus $\{a, b\}^*$ akzeptiert:

$$\mathcal{A} := \{\{\text{OK}\}, \{a, b\}, \{((\text{OK}, a), \text{OK}), ((\text{OK}, b), \text{OK})\}, \text{OK}, \{\text{OK}\}\}$$

Diese Funktionsschreibweise ist etwas umständlich, aber bei kleinen Relationen lässt sich die Tupelschreibweise verwenden. Man sieht, dass diese Transitionsfunktion immer OK auf sich selbst abbildet und wohldefiniert ist.

Es ergibt sich folgendes Zustandsdiagramm:



c)

Vor.: $L_3 := \{0^{(2^n)} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
Beh.: L_3 ist nicht regulär.
Bew.: Wir verwenden das gleiche Schema, wie in **a)**.
Die Quantorenkette werden wir jetzt nicht ausschreiben.
Sei also $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, wähle $w := 0^{(2^m)}$ und $xyz := w$ mit $|y| \geq 1$.
Wähle $v := xyz$, dann gilt: $xy^1zv = xyzxyz \in L_3$, also existiert ein $i = 1$.
Sei $j = 2$, dann gilt folgendes: $xy^jzv = xyyzv = yyxzv$. Es gilt, dass jeder Buchstabe der Wörter 0 ist, weswegen wir uns nur die Kardinalitäten dieser Kompositionen anschauen werden.
Es gilt: $|y| \in [1, 2^m]_{\mathbb{N}}$, da $|xyz| = 2^m$ gilt, was die maximale Kardinalität von y ist, und da $|y| \geq 1$ gilt.
Es folgt: $|yyxzv| = |y| + 2^m + 2^m = |y| + 2^{m+1}$.
Damit diese Kardinalität eine Zweierpotenz sein soll, müsste $|y| \geq 2^{m+1}$ gelten, aber da $|y|$ maximal 2^m ist, fehlt uns im besten Fall immer noch ein Viertel.
Damit gilt somit $xy^izv \in L_3 \not\Rightarrow xy^jzv \in L_3$, – was wie zuvor, zu zeigen war. $\square$

d)

Vor.: $L_4 := \{w^R bwbw^R \in \{a,b\}^* \mid w \in \{b\}^*\}$
Beh.: L_4 ist regulär.
Bew.: Es gilt $\forall w \in \{b\}^* : w^R = w$, da w schließlich nur aus dem gleichen Buchstaben besteht. Betrachte die folgende Umformung:

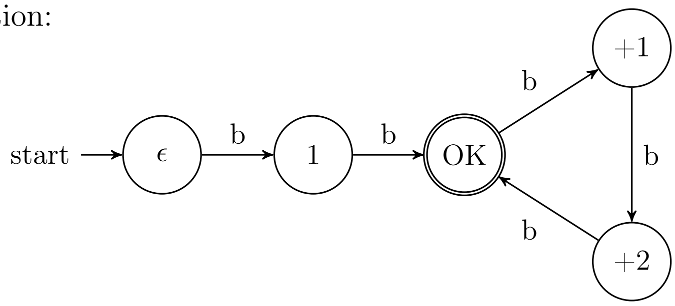
$\{w^R bwbw^R \in \{a,b\}^* \mid w \in \{b\}^*\}$ |Folgerung, Komposition ist immer aus $\{b\}^*$

$=\{wbwbw \mid w \in \{b\}^*\}$ | Reihenfolge macht keinen Unterschied, weil nur b's im Wort sind

$=\{bbwww \mid w \in \{b\}^*\}$ | Rausziehen (wir betrachten das Bild)

$=bb \cdot \{www \mid w \in \{b\}^*\}$ | Def. $\cdot^*$ für Mengen

$=bb \cdot \{w \in \{b\}^* \mid |w| \in 3\mathbb{N}\}$
Wir suchen also Wörter für die Folgendes gilt: $w : w \in \{b\}^* |w| = 3n + 2$ für $n \in \mathbb{N}$.
Hiermit lässt sich ein DEA komposieren, der L_4 erkennt, welcher dargestellt ist in folgender Illustration:



Dieser Automat erkennt genau L_4, so ist L_4 regulär. □

A2

a)

Vor.: $A := \{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow\}, L_1 := \{p \in A^* \mid p \text{ beginnt und endet am selben Punkt.}\}$

Beh.: L_1 ist nicht regulär.

Bew.: Wir zeigen wieder nach Pumping-Lemma, d.h. es ist zu zeigen:

$$\forall m \in \mathbb{N}_{\geq 1} :$$

$$\exists w \in A^m : \forall x, y, z \in A^*, w = xyz, |y| \geq 1 :$$

$$\exists i, j \in \mathbb{N}, v \in A^* : xy^i zv \in L_1 \not\Leftrightarrow xy^j zv \in L_1$$

Sei also $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Setze $w := \rightarrow^m$ und $v := \leftarrow^m$.[1]

Sei $xyz := w$ mit $|y| \geq 1$ Zerlegung von w.

Dann gilt **Fall 1** $(i = 1)$**:** $xy^i zv = xyzv \in L_1$, da $|w| = |v|$.

Des Weiteren gilt **Fall 2** $(j = 2)$**:** $xy^j zv = xyyzv = yxyzv = ywz = \rightarrow^{|y|} \cdot \rightarrow^{|m|} \cdot \leftarrow^{|m|}$

Da $|y| \geq 1$ folgt: $\rightarrow^{|y|} \neq \epsilon$. Mit $y \in \{\rightarrow\}^+$ gilt somit $xy^j zw \notin L_1$.

Also gilt: $\exists i, j \in \mathbb{N}, v \in A^* : xy^i zv \in L_1 \not\Leftrightarrow xy^j zv \in L_1$, – was zu zeigen war. $\square$

[1] „*Perfectly balanced, – as all things should be.*"

b)

Vor.: $L_2 := \{a^{m \cdot n} \mid n, m \in \mathbb{N}_{>1}\} \cup \{\epsilon, a\}$, $\mathbb{P} \subset \mathbb{N} : 2 \in \mathbb{P}, p \in \mathbb{P} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_{>1} : p \cdot n \notin \mathbb{P}$

Beh.: L_2 ist nicht regulär.

Bew.: Es gilt: $L_2 = \{a^{m \cdot n} \mid n, m \in \mathbb{N}_{>1}\} \cup \{\epsilon, a\} = \{a^p \mid p \notin \mathbb{P}\}$. Sei hierfür bewusst, dass die Menge der Primzahlen gleiche Kardinalität zur Menge der natürlichen Zahlen hat, also dass $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}|$ gilt.

Lemma $\forall L : L \in \text{Reg} \Leftrightarrow \overline{L} \in \text{Reg}$:

„$\Rightarrow$“:

Sei $M := \{Q, A, \delta, I, F\}$ NEA der L akzeptiert, dann ist $\overline{M} := \{Q, A, \delta, F, I\}$ ein NEA, der $\overline{L}$ akzeptiert. Folgt aus Definition von NEA und Akzeptanz bzw. Berechnung.

„$\Leftarrow$“:

folgt aus vorherigen Teil, denn F, I lassen sich zurücktauschen. $\blacksquare$

Nach dem Lemma zeigen wir somit, dass $\overline{L_2}$ nicht regulär ist. Es gilt: $\overline{L_2} = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$

Wir zeigen wieder mittels des Pumping-Lemmas.

Nehme also $m \in \mathbb{N}$, sei $w := a^m$, sei $xyz := w$ Zerlegung von w mit $|y| \geq 1$.

Sei auch $v := a^{p-|m|}$, wobei $p := \min(\mathbb{P}_{\geq m})$ gilt.[2]

Dann gilt Folgendes:

Sei $i := 0$, dann gilt: $xy^izv = xzv = a^{m-1} \cdot a^{p-m} = a^{m-1+p-m} = a^{p-1} \notin \overline{L_2}$, da nach Def. $\mathbb{P}$ der Abstand von zwei Primzahlen größer als 2 sein muss, denn $2|(p \pm 1)$ gilt.

Sei $j := 0$, dann gilt: $xy^jzv = xyzv = a^m \cdot a^{p-m} = a^{m+p-m} = a^p \in \overline{L_2}$, nach $\overline{L_2}$.

Dann gilt: $\exists i, j \in \mathbb{N}, v \in \{a\}^* : xy^izv \in \overline{L_2} \not\Leftrightarrow xy^jzv \in \overline{L_2}$. Damit ist $\overline{L_2}$ nicht regulär, folglich ist auch L_2 nicht regulär, – was zu zeigen war. $\square$

[2]Es „sei“ hier auch wieder bewusst, dass es abzählbar unendliche Primzahlen gibt.