

# Berechnungen und Logik

## Hausaufgabenserie 🧑

Henri Heyden, Nike Pulow

stu240825, stu239549

**A1**

**Vor.:**  $A = 0, 1, \bar{\cdot} : A^* \rightarrow A^*, ab \mapsto \begin{cases} 0, & ab = 1 \\ 1, & ab = 0 \\ \bar{b} \cdot \bar{a}, & \text{sonst} \end{cases}$

$f : A^* \rightarrow A^*, w \mapsto w\bar{w}$

**Beh.:**  $f$  ist nicht sequenziell.

**Bew.:** Wir werden zeigen, dass  $f$  nicht das notwendige Kriterium des linearen Abstandswachstums erfüllt.

Es ist also zu zeigen:  $\forall c \in \mathbb{N} : \exists x, y \in A^* : d(f(x), f(y)) > c \cdot d(x, y)$ .

Sei  $c \in \mathbb{N}$ ,  $x := 1^c$ ,  $y := 1^{c-1}0$ .

Dann gilt:  $c \cdot d(x, y) = c \cdot 2$

Um ein bisschen besser die andere Seite zu vereinfachen, werden wir zwei Hilfsfunktion definieren:

$$\bar{\cdot}' : A^* \rightarrow A^*, ab \mapsto \begin{cases} 0, & ab = 1 \\ 1, & ab = 0 \\ \bar{a} \cdot \bar{b}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f' : A^* \rightarrow A^*, w \mapsto w \cdot \text{rev}(\bar{x}')$$

Nach den Definitionen von  $\bar{\cdot}$  und  $\cdot'$  sieht man leicht, dass  $f = f'$  gilt.

Somit berechnen wir  $d(f(x), f(y))$  wie folgt:

$$\begin{aligned}
 & d(f(x), f(y)) && | \text{ Def. } f' \\
 & = d\left(1^c \cdot 0^c, 1^{c-1} \cdot 0 \cdot \text{rev}\left(\overline{1^{c-1} \cdot 0}\right)\right) && | \text{ Def. } \cdot' \\
 & = d\left(1^c \cdot 0^c, 1^{c-1} \cdot 0 \cdot \text{rev}\left(0^{c-1} \cdot 1\right)\right) && | \text{ Def. rev} \\
 & = d\left(1^c \cdot 0^c, 1^{c-1} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0^{c-1}\right) && | \text{ Rausfiltern von größtem Prefix, Def. } d \\
 & = |1 \cdot 0^c| + |0 \cdot 1 \cdot 0^{c-1}| && | \text{ Def. } |\cdot| \\
 & = 2 + |0^c| + |1 \cdot 0^{c-1}| && | \text{ Def. } |\cdot| \\
 & = 2 + 2c
 \end{aligned}$$

Dann gilt somit:  $c \cdot d(x, y) = 2c < 2c + 2 = d(f(x), f(y))$  – was zu zeigen war.  $\square$

## A2

a)

$\mathcal{A}$  akzeptiert Wörter, die eine ungerade Anzahl an 0 haben.

$\mathcal{B}$  akzeptiert Wörter, die eine ungerade Anzahl an 1 haben.

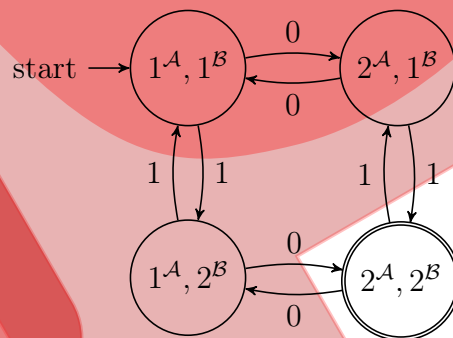
$\mathcal{C}$  akzeptiert Wörter, die eine ungerade Anzahl an 0 haben und eine gerade Anzahl an 1 haben.

Letzteres ergibt sich, da  $\mathcal{C}$  aus den Transitionsfunktionen von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  besteht, nur, dass diese auf die Zustände von  $\mathcal{C}$  abbilden, welche, wie ihre Namen anspielen, aus  $\{1^{\mathcal{A}}, 2^{\mathcal{A}}\} \times \{1^{\mathcal{B}}, 2^{\mathcal{B}}\}$  sind.

Jegliche originellen Transitionsfunktionen haben zwei isomorphe Komplemente in  $\mathcal{C}$ .

b)

Der komposierte Automat  $\mathcal{C}$  wird durch folgendes Bild dargestellt:



Der Gedanke ist der gleiche, wie in a), nur, dass wir den Endzustand verschieben auf den Zustand, der nur erreicht werden kann, wenn die Anzahl an Nullen und Einsen ungerade ist.

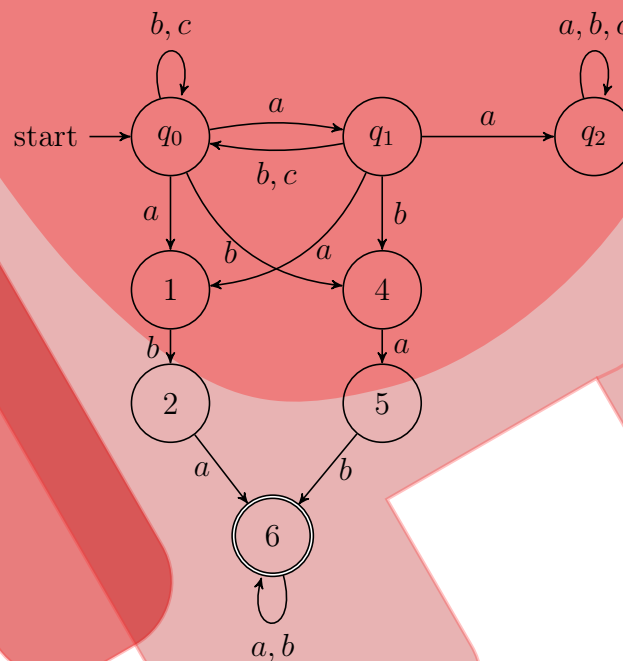
c)

Da  $\mathcal{A}$  DEA ist, können wir einfach  $Q^{\mathcal{A}} \setminus F^{\mathcal{A}}$  als Menge der Endzustände verwenden, um  $\overline{L(\mathcal{A})}$  zu erhalten, da ein Wort akzeptiert wird nach Definition, wenn der Automat in einem Endzustand endet. Jedes Wort, das keinen Endzustand im Automaten hervorruft, wird somit nicht akzeptiert.

Um genau diese Wörter zu finden, muss man nur die derzeitigen Endzustände falsifizieren und die ehemaligen nicht Endzustände als neue Endzustände setzen – genau dann erreichen wir  $\overline{L(\mathcal{A})}$ .

### A3

a)



Da wir nur mit 6 enden wollen, sind  $q_0$  und  $q_1$  keine Endzustände mehr, jedoch erfüllen sie beide ihre ehemaligen Aufgaben, sowohl als auch existiert ein Teilisomorphismus zu den Zuständen und ihren Transitionsfunktionen über 0, 3.

b)

Da wir die kombinierten Wörter aus  $L(A_1)$  und  $L(A_2)$  suchen, müssen wir alle Endzustände von  $A_1$  eliminieren aber als „Startzustände“ für  $A_2$  markieren. Damit ist gemeint, dass alle Transitionsfunktionen und Zustände von  $A_2$  ein isomorphes Komplement in  $C$  haben müssen wobei die Endzustände von  $A_1$  auch alle Eigenschaften von den Startzuständen von  $A_2$  besitzen müssen. Wir übertragen also alle Zustände und die Transitionsfunktion von  $A_2$  so, dass die ehemaligen Endzustände von  $A_1$  in die ehemaligen Startzustände von  $A_2$  übergehen und nach der Transition sich genau so verhalten.

Bei vielen Endzuständen von  $A_1$  und Startzuständen von  $A_2$  kann die Darstellung unübersichtlich werden, deswegen empfiehlt sich eine andere Notation, bei der man die Startpfeile von den Startzuständen von  $A_2$  unbeschriftet von den Endzuständen von  $A_1$  schreiben kann verwendet, sodass die Darstellung ähnlicher zu den originellen Automaten aussieht.

**A4**