Berechnungen und Logik
Hausaufgabenserie 3

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

a)

f_1 erfüllt nicht das notwendige Kriterium des linear beschränktem Wachstums, denn es gilt folgendes: Für alle $w \in A^*$ gilt: $|f_1(w)| = |1^{|w|^2}| = |w|^2$. Des Weiteren gilt jedoch: $\forall c \in \mathbb{N} : \exists w \in A^* : |w|^2 > c \cdot (|x| + 1)$, mit $w : |w| = 2c > 0$, denn es gilt dann: $|w|^2 = 4c^2 > 2c^2 + c$ (Beachte $|w| > 0$).

$\square$

b)

f_2 erfüllt auch nicht das notwendige Kriterium des linear beschränktem Wachstums. Wir zeigen dafür $\forall c \in \mathbb{N} : \exists w \in A^* : |f_2(w)| > c \cdot (|w| + 1)$
Hierfür wähle $w := v_0 v_1 v_3 \dots v_n$ mit $n := \max(2c, 3)$ und $v_i \neq \epsilon$ für $i \in [n]$, dann gilt: $|f_2(w)| = \frac{n^2+n}{2} = \frac{4c^2+2c}{2} = 2c^2 + c > 2c^2 + 2$ aufgrund der gaußschen Summenformel und der Definition von f_2.
Dann gilt: $|f_2(w)| > c \cdot (|w| + 1)$, was zu zeigen war. $\square$

A2

Zunächst zeigen wir $f_M = f$ für $x = 1^m$ per Induktion über m.

Induktionsanfang: Für $m = 0$ gilt: $\hat{\alpha}(+1, 1^0) = \hat{\alpha}(+1, \epsilon = \epsilon)$ und für $m = 1$ gilt:

$$\hat{\alpha}(+1, 1^1) = \hat{\alpha}(+1, \epsilon)\alpha(\hat{\delta}(+1, \epsilon), 1) \qquad \text{Eigenschaft } \hat{\alpha}$$

$$= \epsilon\alpha(+1, 1)$$

$$= \epsilon 0 = 0$$

Induktionsschritt: Für $m > 1$ gilt mit $m = m_0 + (m - 1), m_0 = 1$:

$$\hat{\alpha}(+1, 1^{m_0+(m-1)}) = \hat{\alpha}(+1, 1^{m_0})\alpha(\hat{\delta}(+1, 1^{m_0}), 1^{m-1}) \qquad \text{Eigenschaft } \hat{\alpha}$$

$$= \hat{\alpha}(+1, 1^{m_0})\alpha(+1, 1^{m-1}) \qquad \hat{\delta} \text{ bekannt}$$

$$= \hat{\alpha}(+1, 1^1)\alpha(+1, 1^{m-1}) \qquad \hat{\alpha}(+1, 1) \text{ bekannt}$$

$$= 0\alpha(+1, 1^{m-1})$$

$$= 0^m$$

Nun zeigen wir $f_M = f$ für den Fall $x = 1^m 0 y$, hier per Induktion über y.

Induktionsanfang: Für $|y| = 0$, also $y = \epsilon$ gilt:

$$\hat{\alpha}(+1, 1^m 0) = \hat{\alpha}(+1, 1^m)\alpha(\hat{\delta}(+1, 1^m), 0) \qquad \text{Eigenschaft } \hat{\alpha}$$

$$= 0^m \alpha(\hat{\delta}(+1, 1^m), 0) \qquad \hat{\alpha}(+1, 1^m) \text{ bekannt}$$

$$= 0^m \alpha(+1, 0) \qquad \hat{\delta} \text{ bekannt}$$

$$= 0^m 1$$

$$= 0^m 1y = f(x) \qquad y = \epsilon$$

Induktionsschritt: Für $|y| > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(+1, 1^m 0y) &= \hat{\alpha}(+1, 1^m 0)\alpha(\hat{\delta}(+1, 1^m 0), y) \\
&= \hat{\alpha}(+1, 1^m 0)\alpha(\delta(\hat{\delta}(+1, 1^m), 0), y) \\
&= \hat{\alpha}(+1, 1^m 0)\alpha(\delta(+1, 0), y) && \hat{\delta} \text{ bekannt} \\
&= \hat{\alpha}(+1, 1^m 0)\alpha(=, y) \\
&= \hat{\alpha}(+1, 1^m)\alpha(\hat{\delta}(+1, 1^m), 0)\alpha(=, y) && \text{Eigenschaft } \hat{\alpha} \\
&= \hat{\alpha}(+1, 1^m)\alpha(+1, 0)\alpha(=, y) && \hat{\delta} \text{ bekannt} \\
&= \hat{\alpha}(+1, 1^m)1\alpha(=, y) && \alpha(+1, 0) \text{ bekannt} \\
&= \hat{\alpha}(+1, 1^m)1y && \alpha(=, y) = y \\
&= 0^m 1y && \hat{\alpha}(+1, 1^m) \text{ bekannt}
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, was zu zeigen war. $\square$

A3

Da f und $\lambda : B^* \to B^*, w \mapsto wv$ sequenziell[1] sind, gilt nach Bonusaufgabe 7, dass $\tilde{f}$ sequenziell ist, da $\tilde{f} = \lambda \circ f$ gilt. $\square$

A4

a)

Induktionsbasis: Sei $u, v \in A^*, |u| = |v| = 1$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&\hat{\delta}(q, uv) \\
=&\delta(\hat{\delta}(q, u), v) && \mid \text{Def. } \hat{\delta} \\
=&\delta(\delta(\hat{\delta}(q, \epsilon), u), v) \\
=&\delta(\delta(q, u), v) && \mid 2\cdot \text{ Def. } \hat{\delta} \\
=&\delta(\delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \epsilon), \epsilon), u), v) \\
=&\delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \epsilon), u), v) && \mid \text{Def. } \hat{\delta} \\
=&\delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \epsilon), u), \epsilon), v) \\
=&\hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \epsilon), u), v) \\
=&\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v)
\end{aligned}
$$

[1] λ ist tatsächlich sequenziell, betrachte dafür die jeweiligen Identitätsfunktionen als Zustands und Ausgabefunktionen und $\phi : Q \to B^*, q \mapsto v$ als die finale Ausgabefunktion, für $Q := \{z_0\}$.

Hier sieht man auch, dass die Basis gilt, wenn eines der Wörter das leere Wort ist, da wir das im Beweis selber gezeigt hatten zwischen Schritt 3 und 6.

Induktionsschritt: Sei $w \in A^*, a \in A$. Dann gilt:

$$\hat{\delta}(q, wa)$$

$$=\delta(\hat{\delta}(q, w), a) \qquad | \text{ Def. } \hat{\delta}$$

$$=\delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, w), \epsilon), a)$$

$$=\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, w), a)$$

Damit wurde die Aussage induktiv gezeigt. $\square$

b)

A7

Voraussetzung: A, B, C sind Mengen und $f : B \rightharpoonup C$ und $g : A \rightharpoonup B$ partielle Funktionen. $f \circ g$ ist eine Komposition, gegeben durch:

$$f \circ g : A \rightharpoonup C, x \mapsto (f \circ g)(x) := \begin{cases} f(g(x)), & \text{falls } g(x) \text{und } f(g(x)) \text{ definiert,} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung: Sind f und g sequentielle Funktionen, so ist auch ihre Komposition eine sequentielle Funktion.

Beweis:

Wir zeigen, dass die Komposition $f \circ g$ linear beschränktes Abstandswachstum besitzt. Zu zeigen ist also: $\exists c \in \mathbb{N}$ mit $d(f \circ g(x), f \circ g(y)) \leq c \cdot d(x, y)$.

Wenn f und g sequentielle Funktionen sind, dann gilt:

(1) $d(g(x_1), g(y_1)) \leq c_1 \cdot d(x_1, y_1)$ für alle $x_1, y_1 \in A$ und

(2) $d(f(x_2), f(y_2)) \leq c_2 \cdot d(x_2, y_2)$ für alle $x_2, y_2 \in B$.

Durch die Definition der Komposition wissen wir, dass $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ gilt, falls $g(x)$ und $f(g(x))$ definiert sind.

Bekannt durch die Voraussetzung ist, wenn ein $x \in dom(g)$ eine valide Eingabe ist, dann bildet g auf B ab, wobei nach Voraussetzung $B = dom(f)$ gilt. Für jede Eingabe $x \in dom(g)$ ist also auch $f(g(x))$ definiert.

Wähle nun ein $c \in \mathbb{N}$ so, dass $c := max(c_1, c_2)$ so gilt, dass:

$d(f(g(x)), f(g(y))) \leq c \cdot d(x, y)$ für alle $x, y \in dom(g)$.

Damit ist gezeigt, was zu zeigen war. $\square$