BERECHNUNGEN UND LOGIK
HAUSAUFGABENSERIE 9

HENRI HEYDEN, NIKE PULOW
stu240825, stu239549

A1

Vor.: Sei β beliebige Belegung für die Formeln $\varphi, \psi \in F_{AL}$.

Beh.: $\neg(\varphi \vee \psi) \vDash\Dashv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

Bew.:

Fall 1.: $([\![\varphi]\!]_\beta, [\![\psi]\!]_\beta) = (0, 0)$.

Es gilt:

$$[\![\neg(\varphi \vee \psi)]\!]_\beta = f_\neg([\![\varphi \vee \psi]\!]_\beta) = f_\neg(f_\vee([\![\varphi]\!]_\beta, [\![\psi]\!]_\beta)) = f_\neg(f_\vee(0, 0))$$

$$= f_\neg(0) = 1 = f_\wedge(1, 1) = f_\wedge(f_\neg(0), f_\neg(0)) = f_\wedge(f_\neg([\![\varphi]\!]_\beta), f_\neg([\![\psi]\!]_\beta))$$

$$= f_\wedge([\![\varphi]\!]_\beta, [\![\psi]\!]_\beta) = [\![\neg\varphi \wedge \neg\psi]\!]_\beta$$

Fall $([\![\varphi]\!]_\beta, [\![\psi]\!]_\beta) = (1, 1)$ analog.

Fall $([\![\varphi]\!]_\beta, [\![\psi]\!]_\beta) = (0, 1)$.

Es gilt:

$$[\![\neg(\varphi \vee \psi)]\!]_\beta = f_\neg([\![\varphi \vee \psi]\!]_\beta) = f_\neg(f_\vee([\![\varphi]\!]_\beta, [\![\psi]\!]_\beta)) = f_\neg(f_\vee(0, 1))$$

$$= f_\neg(1) = 0 = f_\wedge(1, 0) = f_\wedge(f_\neg(0), f_\neg(1)) = f_\wedge(f_\neg([\![\varphi]\!]_\beta), f_\neg([\![\psi]\!]_\beta))$$

$$= f_\wedge([\![\varphi]\!]_\beta, [\![\psi]\!]_\beta) = [\![\neg\varphi \wedge \neg\psi]\!]_\beta$$

Fall $([\![\varphi]\!]_\beta, [\![\psi]\!]_\beta) = (1, 0)$ folgt aus Kommutativität $\square$

Analog folgt der Beweis auch durch Ablesen einer Tabelle wo jeweilige Ausdrücke ausgewertet werden für alle möglichen Belegungen.

A2

Vor.: $n \in \mathbb{N}_0, \varphi_0, \dots \varphi_{n-1}$ Formeln.

Beh.: $\neg \bigwedge_{i=0}^{n-1} \varphi_i \vDash\Dashv \bigvee_{i=0}^{n-1} \neg\varphi_i$

Bew.: Wir zeigen mittels Induktion:

(IB): Es gilt: $\neg(\wedge(\top)) \vDash\Dashv \neg(\top) \vDash\Dashv \bot \vDash\Dashv \vee(\bot) \vDash\Dashv \vee(\neg(\top))$

Anderer Fall analog.

(IS): Sei angenommen **(IH)** $\neg \bigwedge_{i=0}^{n-2} \varphi_i \vDash\Dashv \bigvee_{i=0}^{n-2} \neg\varphi_i$.

Zu zeigen ist dann: $\neg \bigwedge_{i=0}^{n-1} \varphi_i \vDash\Dashv \bigvee_{i=0}^{n-1} \neg\varphi_i$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\neg \bigwedge_{i=0}^{n-1} \varphi_i &\vDash\Dashv \neg\left(\bigwedge_{i=0}^{n-2} \varphi_i \wedge \varphi_{n-1}\right) && \mid \textbf{(IB)} \text{ bzw. Bearbeitung von A1} \\
&\vDash\Dashv \neg \bigwedge_{i=0}^{n-2} \varphi_i \vee \neg\varphi_{n-1} && \mid \textbf{(IH)}\text{, Ersetzungslemma} \\
&\vDash\Dashv \bigvee_{i=0}^{n-2} \neg\varphi_i \vee \neg\varphi_{n-1} \vDash\Dashv \bigvee_{i=0}^{n-1} \neg\phi_i
\end{aligned}$$

Somit sind Induktionsbasis und Induktionsschritt gezeigt. $\square$

A4

Vor.: $\Phi \subseteq F_{AL}$ und $\varphi \in F_{AL}$. $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar.

Beh.: $\Phi \vDash \varphi$ genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar.

Bew.: Wenn $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar ist, gilt $[\![\Phi \cup \{\neg\varphi\}]\!]_\beta = 0$ wegen der Definition von Erfüllbarkeit. Betrachte zwei Fälle:

(1) $[\![\Phi]\!]_\beta = 1$.

Damit $[\![\Phi \cup \{\neg\varphi\}]\!]_\beta = 0$ gelten kann, muss $[\![\neg\varphi]\!]_\beta = 1$ gelten. Daraus folgt $[\![\varphi]\!]_\beta = 1$. Dann gilt $\Phi \vDash \varphi$, da $[\![\Phi]\!]_\beta = 1$, also $\beta \vDash \Phi$, und $[\![\varphi]\!]_\beta = 1$, also $\beta \vDash \varphi$.

(2) $[\![\Phi]\!]_\beta = 0$

Damit $[\![\Phi \cup \{\neg\varphi\}]\!]_\beta = 0$ gelten kann, muss $[\![\varphi]\!]_\beta = 1$ gelten. Dann gilt auch $[\![\varphi]\!]_\beta = 0$.

Dann wissen wir acuh, dass es keine passende Belegung β für Φ und φ gibt, sodass $[\![\Phi]\!]_\beta = 1$ und $[\![\varphi]\!]_\beta = 1$ gelten. Es gilt also auf Grund der Nicht-Existenz von passenden Belegungen β:

$\Phi \vDash \varphi$.

$\square$

A6

a)

$$
\begin{aligned}
& (\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg(X_1 \wedge (X_3 \vee \neg X_2)) && \text{Distributivität} \\
\models\!\!\!\!\dashv\quad & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg((X_1 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2)) && \text{De Morgan} \\
\models\!\!\!\!\dashv\quad & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg(X_1 \wedge X_3) \wedge \neg(X_1 \wedge \neg X_2) && \text{De Morgan} \\
\models\!\!\!\!\dashv\quad & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee \neg\neg X_2) && \text{Doppelnegation} \\
\models\!\!\!\!\dashv\quad & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee X_2) &&
\end{aligned}
$$

Wir erhalten $\varphi \bigwedge \bigvee = \{\{\neg X_0, X_4\}, \{\neg X_1, \neg X_3\}, \{\neg X_1, X_2\}\}$.

b)

$$
\begin{aligned}
& (\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg(X_1 \wedge (X_3 \vee \neg X_2)) && \text{DeMorgan} \\
\models\!\!\!\!\dashv\quad & (\neg X_0 \vee X_4) \wedge \neg X_1 \vee \neg(X_3 \vee \neg X_2) && \text{Kommutativität} \\
\models\!\!\!\!\dashv\quad & \neg X_1 \wedge (\neg X_0 \vee X_4) \vee \neg(X_3 \vee \neg X_2) && \text{Distributivität} \\
\models\!\!\!\!\dashv\quad & (\neg X_1 \wedge \neg X_0) \vee (\neg X_1 \wedge X_4) \vee \neg(X_3 \vee \neg X_2) && \text{De Morgan} \\
\models\!\!\!\!\dashv\quad & (\neg X_1 \wedge \neg X_0) \vee (\neg X_1 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge \neg\neg X_2) && \text{Doppelnegation} \\
\models\!\!\!\!\dashv\quad & (\neg X_1 \wedge \neg X_0) \vee (\neg X_1 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge X_2) &&
\end{aligned}
$$

Wir erhalten $\varphi \bigvee \bigwedge = \{\{\neg X_1, \neg X_0\}, \{\neg X_1, X_4\}, \{\neg X_3, X_2\}\}$.

A7

Definiere $\varphi := \bigwedge \bigvee \{\{X_2, X_1, X_5\}, \{\neg X_4, X_2, \neg X_3\}, \{\neg X_1\}, \{X_4, X_5, \neg X_2\},$
$\{\neg X_4, X_1\}, \{X_2, \neg X_5, \neg X_3\}, \{X_3, X_1\}, \{\neg X_5, \neg X_2\}\}$

Wir zeigen $\varphi \vDash \bot$ mittels Resolutionsbeweis.

1.	$\{\neg X_1\}$	Voraussetzung
2.	$\{X_3, X_1\}$	Voraussetzung
3.	$\{X_3\}$	Resolution mit X_1 aus 1 und 2
4.	$\{X_2, \neg X_5, \neg X_3\}$	Voraussetzung
5.	$\{X_2, \neg X_5\}$	Resolution mit X_3 aus 3 und 4
6.	$\{\neg X_5, \neg X_2\}$	Voraussetzung
7.	$\{\neg X_5\}$	Resolution mit X_2 aus 5 und 6
8.	$\{X_2, X_1, X_5\}$	Voraussetzung
9.	$\{X_2, X_1\}$	Resolution mit X_5 aus 7 und 8
10.	$\{X_2\}$	Resolution mit X_1 aus 1 und 9
11.	$\{X_4, X_5, \neg X_2\}$	Voraussetzung
12.	$\{X_4, X_5\}$	Resolution mit X_2 aus 10 und 11

13. $\{X_4\}$ Resolution mit X_5 aus 7 und 12

14. $\{\neg X_4, X_1\}$ Voraussetzung

15. $\{X_1\}$ Resolution mit X_4 aus 13 und 14

16. $\{\}$ Resolution mit X_1 aus 1 und 15

Damit ist gezeigt, was zu zeigen war. $\square$