Berechnungen und Logik
Hausaufgabenserie 4

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

Vor.: $A = 0, 1, \bar{\cdot} : A^* \to A^*, ab \mapsto \begin{cases} 0, & ab = 1 \\ 1, & ab = 0 \\ \overline{b} \cdot \overline{a}, & \text{sonst} \end{cases}$

$f : A^* \to A^*, w \mapsto w\overline{w}$

Beh.: f ist nicht sequenziell.

Bew.: Wir werden zeigen, dass f nicht das notwendige Kriterium des linearen Abstandswachstums erfüllt.

Es ist also zu zeigen: $\forall c \in \mathbb{N} : \exists x, y \in A^* : d(f(x), f(y)) > c \cdot d(x, y)$.

Sei $c \in \mathbb{N},\ x := 1^c,\ y := 1^{c-1}0$.

Dann gilt: $c \cdot d(x, y) = c \cdot 2$

Um ein bisschen besser die andere Seite zu vereinfachen, werden wir zwei Hilfsfunktion definieren:

$$\bar{\cdot}' : A^* \to A^*, ab \mapsto \begin{cases} 0, & ab = 1 \\ 1, & ab = 0 \\ \overline{a} \cdot \overline{b}, & sonst \end{cases}$$

$$f' : A^* \to A^*, w \mapsto w \cdot \mathrm{rev}(\overline{x}')$$

Nach den Definitionen von $\overline{\cdot}$ und $\overline{\cdot}'$ sieht man leicht, dass $f = f'$ gilt.

Somit berechnen wir $d(f(x), f(y))$ wie folgt:

$$
\begin{aligned}
&d(f(x), f(y)) && \mid \text{Def. } f' \\
=&d\left(1^c \cdot 0^c,\ 1^{c-1} \cdot 0 \cdot \mathrm{rev}\left(\overline{1^{c-1} \cdot 0}'\right)\right) && \mid \text{Def. } \overline{\cdot}' \\
=&d(1^c \cdot 0^c,\ 1^{c-1} \cdot 0 \cdot \mathrm{rev}\left(0^{c-1} \cdot 1\right)) && \mid \text{Def. rev} \\
=&d(1^c \cdot 0^c,\ 1^{c-1} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0^{c-1}) && \mid \text{Rausfiltern von größtem Prefix, Def. } d \\
=&|1 \cdot 0^c| + |0 \cdot 1 \cdot 0^{c-1}| && \mid \text{Def. } |\cdot| \\
=&2 + |0^c| + |1 \cdot 0^{c-1}| && \mid \text{Def. } |\cdot| \\
=&2 + 2c
\end{aligned}
$$

Dann gilt somit: $c \cdot d(x, y) = 2c < 2c + 2 = d(f(x), f(y))$ – was zu zeigen war. $\square$