Mathematik für die Informatik C
Hausaufgabenserie 2

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

Vor.: $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beh.: f ist integrierbar und es gilt: $\int f = 0$.

Bew.:

Wir werden zeigen:

$$\forall (x^{(n)}, \xi^{(n)})_n \in \mathcal{S}(\mathrm{PS}(a,b)), \lim_n \mu(x^{(n)}) = 0 : \lim_n R(f, x^{(n)}, \xi^{(n)}) = 0$$

Nehme also an, dass wir zwei beliebige Folgen $(x^{(n)}, \xi^{(n)})_n \in \mathcal{S}(\mathrm{PS}(a,b))$ haben für die gilt: $\lim_n \mu(x^{(n)}) = 0$.

Für jedes $\xi^{(n)}$ (wir schreiben ab nun $\xi := \xi^{(n)}$) gibt es zwei Fälle:

Fall 1: $1 \notin f^{\to}(\xi)$.

Dann gilt: $\forall \phi \in \xi : \phi \neq 0$. Hieraus lässt sich schließen $f^{\to}(\xi) = \{0\}$

Dann sieht man leicht, dass $\lim_n R(f, x^{(n)}, \xi^{(n)}) = 0$, gilt aufgrund der Definition der Riemann-Summe.

Fall 2: $1 \in f^{\to}(\xi)$.

Dann gilt: $0 \in \xi$ und $f^{\leftarrow}(1) = 0$. Es existiert also genau ein $\phi \in \xi$, sodass $f(\phi) = 1$ gilt mit $\phi = 0$.

Definiere folgende Mengen:

$\Gamma_n := \{\phi \in \xi \mid f(\phi) = 1\},\ \Delta_n := \{\phi \in \xi \mid f(\phi) = 0\}$.

Nach vorheriger Überlegung gilt $|\Gamma_n| = 1$ und man sieht leicht $|\Delta_n| = n - 1$.

Jetzt können wir zeigen, dass $\lim_n R(f, x^{(n)}, \xi^{(n)}) = 0$ gilt[1]:

$$\begin{aligned}
\lim_n R(f, x^{(n)}, \xi^{(n)}) &= \lim_n \sum_{j=1}^{n} l(x^{(n)}, j) \cdot f(\xi_j^{(n)}) && \mid \text{Reihenfolge der Tupel ist egal, } |\Gamma_n|, |\Delta_n| \\
&= \lim_n \left(\sum_{j=1}^{1} l(x^{(n)}, j) \cdot f(\phi) + \sum_{j=2}^{n} l(x^{(n)}, j) \cdot f(\xi_j^{(n)}) \right) \\
&= \lim_n \left(\sum_{j=1}^{1} l(x^{(n)}, j) \cdot f(0) + \sum_{j=2}^{n} l(x^{(n)}, j) \cdot f(1) \right) && \mid \text{Auswerten} \\
&= \lim_n \left(\sum_{j=1}^{1} l(x^{(n)}, j) \cdot 1) + \sum_{j=2}^{n} l(x^{(n)}, j) \cdot 0 \right) \\
&= \lim_n \sum_{j=1}^{1} l(x^{(n)}, j)) \\
&= \lim_n l(x^{(n)}, j) && |\text{Def. } \mu,\ \mu \to 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nach Konvergenzkriterium ist somit f integrierbar mit Integral $\int f = 0$ $\square$

[1] Im 2. Schritt meinen wir damit, dass wenn die Komponenten der Tupel so getauscht werden, dass der Wert für $\xi_1 = \phi = 0$ gilt, dass dann sich das Integral nicht ändert.

A2

Vor.: $n \in \mathbb{N}_1$, definiere $\delta^{(n)} := \frac{b-a}{n}$ sowie $(x^{(n)}, \xi^{(n)}) \in \mathrm{PS}(a,b)$ mit:

$$x_j^{(n)} := a + j\delta^{(n)} \qquad j \in [n]_0$$

$$\xi_j^{(n)} := a + (j-1)\delta^{(n)} \qquad j \in [n]_1$$

Definiere $f : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$.

1)

Beh.: Es gilt $R(f, x^{(n)}, \xi^{(n)}) = \delta^{(n)} \frac{e^b - e^a}{e^{\delta^{(n)}} - 1}$.

Bew.: Zunächst wenden wir die Definition der Riemann-Summe an und formen dann so um, dass die Geometrische Summenformel anwendbar ist:

$$\begin{aligned}
R(f, x^{(n)}, \xi^{(n)}) &= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(\xi_j) && \text{Def. } x_j, \xi_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} ((a + j\frac{b-a}{n}) - (a + (j-1)\frac{b-a}{n})) \\
&\qquad\qquad f(a + (j-1)\frac{b-a}{n}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a + (j-1)\frac{b-a}{n}) && \text{Def. } \delta^{(n)}\text{, Konstante} \\
&= \delta^{(n)} \sum_{j=1}^{n} f(a + (j-1)\frac{b-a}{n}) && f \text{ anwenden, Def. } \delta^{(n)} \\
&= \delta^{(n)} \sum_{j=1}^{n} e^a \left(e^{\delta^{(n)}}\right)^{j-1} && e^a \text{ Konstante}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta^{(n)} e^a \sum_{j=1}^{n} \left(e^{\delta^{(n)}}\right)^{j-1} && q := e^{\delta^{(n)}} \\
&= \delta^{(n)} e^a \sum_{j=1}^{n} q^{j-1} && \text{Geometrische Summenformel} \\
&= \delta^{(n)} e^a \frac{q^n - 1}{q - 1} && \text{Def. } q \\
&= \delta^{(n)} e^a \frac{\left(e^{\delta^{(n)}}\right)^n - 1}{e^{\delta^{(n)}} - 1} && \text{Def.}\delta^{(n)} \\
&= \delta^{(n)} e^a \frac{\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^n - 1}{e^{\delta^{(n)}} - 1} && \text{Potenzregeln} \\
&= \delta^{(n)} e^a \frac{e^{b-a} - 1}{e^{\delta^{(n)}} - 1} && \text{Bruchregeln} \\
&= \delta^{(n)} \frac{e^a}{1} \frac{e^{b-a} - 1}{e^{\delta^{(n)}} - 1} && \text{Ausmultiplizieren} \\
&= \delta^{(n)} \frac{e^a e^{b-a} - e^a}{e^{\delta^{(n)}} - 1} \\
&= \delta^{(n)} \frac{e^{b-a}}{e^{\delta^{(n)}} - 1} && \text{Potenzregeln} \\
&= \delta^{(n)} \frac{e^b - e^a}{e^{\delta^{(n)}} - 1}
\end{aligned}
$$

Damit ist gezeigt, was zu zeigen war.

$\square$

2)

Beh.: $\lim_n R(f, x^{(n)}, \xi^{(n)}) = e^b - e^a$

Bew.: Es gilt nach vorheriger Aufgabe: $\lim_n R(f, x^{(n)}, \xi^{(n)}) = \lim_n \left(\delta^{(n)} \cdot \frac{e^b - e^a}{e^{\delta^{(n)}} - 1} \right)$.

Betrachte folgende Umformung[2]:

$$\lim_n \left(\delta^{(n)} \cdot \frac{e^b - e^a}{e^{\delta^{(n)}} - 1} \right)$$

$$= (e^b - e^a) \cdot \lim_n \left(\frac{\delta^{(n)}}{e^{\delta^{(n)}} - 1} \right) \qquad | \text{ Einsetzen}$$

$$= (e^b - e^a) \cdot \lim_n \left(\frac{\frac{b-a}{n}}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1} \right) \qquad | \text{ Stetigkeit, L'Hôpital für } id_{\mathbb{N}}$$

$$= (e^b - e^a) \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\frac{a-b}{n^2}}{\frac{(a-b) \cdot e^{\frac{b-a}{n}}}{n^2}} \right) \qquad | \text{ Zwei mal kürzen}$$

$$= (e^b - e^a) \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{e^{\frac{b-a}{n}}} \right) \qquad | \text{ Stetigkeit, } \frac{b-a}{n} \to 0$$

$$= (e^b - e^a) \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{e^0} \right)$$

$$= (e^b - e^a)$$

Was zu zeigen war. $\square$

[2]Wenn wir die Regel von L'Hôpital anwenden, dann betrachten wir nicht mehr eine Folge, sondern ALLE Funktionswertfolgen. n wird zur Folgenkomponente einer Folge mit Limes $+\infty$. Jedoch da der Funktionslimes dann für alle Funktionswertfolgen gilt, gilt er auch für die Folge $(id_{\mathbb{N}}(k))_k$. Da wir alle Funktionswertfolgen betrachten, nimmt n also auch diese Werte an, weswegen wir, wenn wir für alle Funktionswertfolgen den Funktionslimes zeigen, damit dann auch den Limes der originalen Folge zeigen, da diese eine Teilfolge der Funktionswertfolgen ist. Eine Diskussion über dieses Thema lässt sich hier nachlesen. Wir betrachten also damit den Zähler und den Nenner als Abbildungen von n über $\mathbb{R}_1$. Man sieht beide haben Funktionslimes 0 und sind differenzierbar, also sind sie für L'Hôpital verwendbar.