Mathematik für die Informatik C
Hausaufgabenserie 3

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

Vor.:

Beh.:

Bew.:

A2

Vor.:

Beh.:

Bew.:

A3

Vor.: $\Omega := [0,1],\ f : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x},$

Beh.: f ist gleichmäßig stetig aber nicht Lipschitz-stetig. Also sind nicht alle gleichmäßig stetigen Funktionen Lipschitz-stetig.

Bew.: f ist gleichmäßig stetig, da f stetig (MatheB) auf eine kompakte Menge ist, denn Ω ist beschränkt und abgeschlossen.

Wir werden nun zeigen, dass f jedoch nicht Lipschitz-stetig ist, also

$\forall L > 0 : \exists x, y \in \Omega : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| > L \cdot |x - y|$.

Sei $L > 0$ beliebig und $y := 0, x \neq 0$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& |\sqrt{x}| > L \cdot |x| && \mid x > 0 \\
\Longleftrightarrow & \sqrt{x} > L \cdot x && \mid \cdot x^{-1},\ \cdot^{-1} \\
\Longleftrightarrow & \frac{x}{\sqrt{x}} < L^{-1} && \mid \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \text{Potenzgesetze} \\
\Longleftrightarrow & \sqrt{x} < L^{-1} && \mid \cdot^{2}, x > 0 \\
\Longleftrightarrow & x < L^{-2}
\end{aligned}
$$

Somit existiert für jedes $L > 0$ mindestens ein x, y, sodass das Lipschitz-Kriterium bricht, also ist f nicht Lipschitz-stetig, − was zu zeigen war. $\square$