Mathematik für die Informatik C
Hausaufgabenserie 7

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

Vor.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beh.: f ist partiell differenzierbar in $\mathbb{R}^2$ mit:

$$\delta_1 f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \cdot (x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und:

$$\delta_2 f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot (x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bew.: Beachte für $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

Es gilt: $f = \pi_1\pi_2 \cdot \frac{\pi_1^2-\pi_2^2}{\pi_1^2+\pi_2^2}$ Somit ist f nach dem Kombinationssatz partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, da diese Menge offen ist.

Dann folgt aus der Quotientenregel und einmaligem Ausklammern die Behauptung für Differenzialwerte von $f(x, y)$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Nun für $(x, y) = (0, 0)$:

Fall 1: $x \to 0, y = 0$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x,0) - (f(0,0) + 0)}{x - 0}\right) \qquad | \ f(0,0) = 0$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x,0)}{x}\right) \qquad | \text{ Einsetzen}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x \cdot 0 \cdot \frac{x^2-0}{x^2+0}}{x}\right) \qquad | \text{ Vereinfachen}$$

$$= \lim_{x\to 0} 0 \cdot 1$$

$$=0$$

Fall 2: $y \to 0, x = 0$

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{f(0,y) - (f(0,0) + 0)}{|0 - y|}\right) \qquad | \ f(0,0) = 0$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{f(0,y)}{y}\right) \qquad | \text{ Einsetzen}$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{y \cdot 0 \cdot \frac{-y^2}{y^2}}{y}\right) \qquad | \text{ Vereinfachen}$$

$$= \lim_{y\to 0} 0 \cdot -1$$

$$=0$$

Somit ist die Behauptung für Differenzialwerte von $f(x, y)$ mit $(x, y) \in \{(0, 0)\}$ auch gezeigt. Die Behauptung ist somit gezeigt. $\square$

A2

Vor.:

Beh.:

Bew.:

A3

Vor.:

Beh.:

Bew.: