Mathematik für die Informatik C
Hausaufgabenserie 1

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

Vor.: $c \in [0, +\infty[, \;\; f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto c \cdot (x^2 - 3) \cdot e^{4x+1}$

$I_1 :=]-\infty, -2]; \;\; I_2 := [-2, \frac{3}{2}]; \;\; I_3 := [\frac{3}{2}, +\infty[$

Beh.:

Fall 1. $c \in]0, +\infty[$:

f ist streng monoton steigend in I_1, I_3 und streng monoton fallend in I_2

Somit gelte $LMAX(f) = \{-2\}, \;\; LMIN(f) = \{\frac{3}{2}\}$

Fall 2. $c = 0$:

f ist konstant in jedem Punkt, $LMAX(f) = LMIN(f) = \emptyset$.

Bew.: Wir wissen f ist differenzierbar in ihrer Domain durch den Kombinationssatz der Differenzierbarkeit. Es folgt durch bekannte Regeln die Ableitung: $f'(x) = 2c \cdot e^{4x+1} \cdot (2x^2 + x - 6)$.

Für Fall 2 ist der Beweis trivial, denn es gilt $f'(x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ somit folgt die Behauptung nach dem Monotoniekriterium.

Nun betrachten wir Fall 1. Da $c > 0$ wissen wir, dass c für die Vorzeichen der Ableitung zu vernachlässigen ist. Des Weiteren ist bekannt, dass e^{4x+1} auch für $x \in \mathbb{R}$ keine Nullstellen annimmt und immer positiv ist.

Definiere $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2 + x - 6$. Nach vorheriger Überlegung wissen wir $f'(x)$ ist genau dann 0, wenn $\phi(x) = 0$ gilt, sowie sind die Vorzeichen für alle $x \in \mathbb{R}$ gleich.

Für ϕ ergeben sich die Nullstellen $\phi^{\leftarrow}(0) = \{\frac{3}{2}, -2\}$.

Es gilt: $\phi(-3) = 9 > \phi(-2) = 0 > \phi(0) = -6 < \phi(\frac{3}{2}) = 0 < \phi(2) = 4$.

Die Behauptung folgt aus dem Monotoniekriterium. $\square$

A2

Vor.: $f : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar. Es gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$.

f ist stetig fortsetzbar in 0.

Beh.: f ist streng monoton steigend.

Bew.: Nach Voraussetzung ist f differenzierbar, also stetig. Es gilt nach Voraussetzung $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, folglich ist f wegen des Monotoniekriteriums streng monoton steigend in $]-\infty, 0[$ und $]0, +\infty$. Wegen der stetigen Fortsetzbarkeit von f nach 0 wissen wir auch, dass

$$\mathbb{R}_{\neq 0} \cup \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{R}_{\neq 0} \\ y^* & x = 0 \end{cases}$$

eine stetige Funktion ist. Da also f in jedem Punkt stetig ist, ist f streng monoton steigend.

$\square$