Mathematik für die Informatik C
Hausaufgabenserie 4

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

Vor.: $0 < a < b < \pi$

Beh.: $\int_a^b \cos(x) \cdot \ln\left(\sqrt{1-\cos^2(x)}\right) = [\sin(x) \cdot (\ln(\sin(x)) - 1)]_a^b$

Bew.: Es gilt:

$$\int_a^b \cos(x) \cdot \ln\left(\sqrt{1-\cos^2(x)}\right) \qquad | \text{ Logarithmusgesetze}$$

$$= \int_a^b \cos(x) \cdot \frac{1}{2} \ln\left(1-\cos^2(x)\right) \qquad | \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \text{ (MatheB)}$$

$$= \int_a^b \cos(x) \cdot \frac{1}{2} \ln\left(1-(1-\sin^2(x))\right) \qquad | \text{ Klammern auflösen}$$

$$= \int_a^b \cos(x) \cdot \frac{1}{2} \ln\left(\sin^2(x)\right) \qquad | \text{ Logarithmusgesetze}$$

$$= \int_a^b \cos(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\ln\left(\sin(x)\right)$$

$$= \int_a^b \cos(x) \cdot \ln\left(\sin(x)\right)$$

$$= \int_a^b \ln\left(\sin(x)\right) \cdot \cos(x) \qquad | \text{ Partielle Integration}$$

$$= [\ln(\sin(x)) \cdot \sin(x)]_a^b - \int_a^b \left(\left(\frac{d}{dx}\ln(\sin(x))\right) \cdot \sin(x)\right) \qquad | \text{ Kettenregel}$$

$$= [\ln(\sin(x)) \cdot \sin(x)]_a^b - \int_a^b \left(\left(\frac{1}{\sin(x)} \cdot \frac{d}{dx}\sin(x)\right) \cdot \sin(x)\right)$$

$$= [\ln(\sin(x)) \cdot \sin(x)]_a^b - \int_a^b \left(\left(\frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x)\right) \cdot \sin(x)\right)$$

$$= [\ln(\sin(x)) \cdot \sin(x)]_a^b - \int_a^b \cos(x)$$

$$= [\ln(\sin(x)) \cdot \sin(x)]_a^b - [\sin(x)]_a^b \qquad \mid \text{Reinziehen}$$

$$= [\ln(\sin(x)) \cdot \sin(x) - \sin(x)]_a^b \qquad \mid \text{Ausklammern}$$

$$= [\sin(x) \cdot (\ln(\sin(x)) - 1)]_a^b$$

– was zu zeigen war. $\square$

A2

Vor.: $a, b \in]0, +\infty[$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \frac{e^{-ax^2}}{x^2+b^2}$

Beh.: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)$ konvergiert für alle a, b.

Bew.: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = f(-x)$ da $x^2 = (-x)^2$ gilt, weswegen wir nur zeigen müssen, dass $2 \cdot \int_0^{+\infty} f(x)$ konvergiert.

Um diese Konvergenz zu zeigen, wenden wir das Integralkriterium an, wir werden also zeigen, dass $\sum_n^{+\infty} = f(x)$ konvergiert.

$\sum_n^{+\infty} = f(x)$ ist nichts anderes als die Reihe über $f(x)$, wir zeigen, dass diese Reihe absolut konvergiert mithilfe des Quotientenkriteriums:

$$\lim_n \left| \frac{f(n)}{f(n-1)} \right|$$

$$= \lim_n \left| \frac{\frac{e^{-an^2}}{n^2+b^2}}{\frac{e^{-a(n-1)^2}}{(n-1)^2+b^2}} \right| \qquad \mid \text{Bruch umstellen}$$

$$= \lim_n \left| \frac{e^{-an^2} \cdot ((n-1)^2 + b^2)}{e^{-a(n-1)^2} \cdot (n^2 + b^2)} \right| \qquad \mid \text{Potenzgesetze}$$

$$= \lim_n \left| \frac{e^{-an^2} \cdot e^{a(n-1)^2} \cdot (n-1)^2 + b^2}{n^2 + b^2} \right| \qquad \text{| Bruch aufteilen}$$

$$= \lim_n \left| e^{-an^2} \cdot e^{a(n-1)^2} \cdot \frac{(n-1)^2 + b^2}{n^2 + b^2} \right| \qquad \text{| Binomische Formel}$$

$$= \lim_n \left| e^{-an^2} \cdot e^{a(n-1)^2} \cdot \frac{n^2 - 2n + 1 + b^2}{n^2 + b^2} \right| \qquad \text{| Bruch aufteilen}$$

$$= \lim_n \left| e^{-an^2} \cdot e^{a(n-1)^2} \cdot \frac{n^2 + b^2}{n^2 + b^2} - \frac{-2n + 1}{n^2 + b^2} \right| \qquad \text{| Rechter Term konvergiert zu 0}$$

$$= \lim_n \left| e^{-an^2} \cdot e^{a(n-1)^2} \right| \qquad \text{| Potenzgesetze}$$

$$= \lim_n \left| e^{-an^2 + a(n-1)^2} \right| \qquad \text{| Binomische Formel}$$

$$= \lim_n \left| e^{-an^2 + a(n^2 - 2n + 1)} \right| \qquad \text{| Aufklammern lol}$$

$$= \lim_n \left| e^{-an^2 + an^2 - a2n + a} \right| \qquad \text{| Vereinfachen}$$

$$= \lim_n \left| e^{-a2n + a} \right| \qquad \text{| } a > 0$$

$$= 0 < \qquad 1$$

Also konvergiert die Reihe über $f(x)$ absolut, wodurch das Integral konvergiert[1] − was zu zeigen war. □

[1] Konvergiert das Integral dann auch absolut?

A3

Vor.: $\Omega := [0,1],\ f : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x},$

Beh.: f ist gleichmäßig stetig aber nicht Lipschitz-stetig. Also sind nicht alle gleichmäßig stetigen Funktionen Lipschitz-stetig.

Bew.: f ist gleichmäßig stetig, da f stetig (MatheB) auf eine kompakte Menge ist, denn Ω ist beschränkt und abgeschlossen.

Wir werden nun zeigen, dass f jedoch nicht Lipschitz-stetig ist, also

$\forall L > 0 : \exists x, y \in \Omega : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| > L \cdot |x - y|.$

Sei $L > 0$ beliebig und $y := 0, x \neq 0$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& |\sqrt{x}| > L \cdot |x| && \mid x > 0 \\
\Longleftrightarrow & \sqrt{x} > L \cdot x && \mid \cdot x^{-1},\ \cdot^{-1} \\
\Longleftrightarrow & \frac{x}{\sqrt{x}} < L^{-1} && \mid \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \text{Potenzgesetze} \\
\Longleftrightarrow & \sqrt{x} < L^{-1} && \mid \cdot^2, x > 0 \\
\Longleftrightarrow & x < L^{-2}
\end{aligned}
$$

Somit existiert für jedes $L > 0$ mindestens ein x, y, sodass das Lipschitz-Kriterium bricht, also ist f nicht Lipschitz-stetig, $-$ was zu zeigen war. $\square$