Mathematik für die Informatik C
Hausaufgabenserie 6

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

Vor.: $a, b \in \mathbb{R}, a < b, \quad C[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\},$

$|| \cdot ||_1 : C[a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f \mapsto \int |f|$

Beh.: $|| \cdot ||_1$ ist Norm auf $C[a,b]$

Bew.: Wir teilen die Aussage in drei Abschnitte auf:

1): $\forall f \in C[a,b] : ||f||_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$, wobei $0 : C[a,b], x \mapsto 0$ gemeint ist.

2): $\forall f \in C[a,b], \lambda \in \mathbb{R} : ||\lambda f||_1 = |\lambda| \cdot ||f||_1$

3): $\forall f, g \in C[a,b] : ||f + g|| \leq ||f||_1 + ||g||_1$

Forab bemerke, dass $|| \cdot ||_1$ wohldefiniert ist, da jede Funktion in $C[a,b]$ stetig auf eine kompakte, also beschränkte und abgeschlossene Menge und somit integrierbar.

Wir fangen mit der ersten Aussage an:

1): Es gilt: $0 = \int 0 = \int |0| = ||0||_1$.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehme an $0 \neq f \in C[a,b]$.

Dann existiert ein Intervall $I \subseteq [a,b]$, sodass $f^{\rightarrow}(I) > 0$ gilt.

Sei $\overline{I} := [a,b] \setminus I$, dann gilt: $||f||_1 = \int |f| = \int |f_{|I}| + \int |f_{|\overline{I}}| \geq \int |f_{|I}| > 0$

Somit ist der erste Teil gezeigt. Fahre mit dem zweiten Teil fort:

2): Es gilt: $||\lambda f||_1 = \int |\lambda f| = \int (|\lambda| \cdot |f|) = |\lambda| \cdot \int |f| = |\lambda| \cdot ||f||_1$ Und nun die letzte Aussage:

3): Es gilt: $||f+g||_1 = \int |f+g| \overset{\text{Dreieck.}}{\leq} \int (|f| + |g|) = \int |f| + \int |g| = ||f||_1 + ||g||_1$

Somit ist alles gezeigt, was zu zeigen war. $\square$

A2

Vor.: $||\cdot||_\infty, ||\cdot||_1$ Normen über $C[0,1]$, wie auf Serie definiert,

Beh.: $||\cdot||_\infty$ und $||\cdot||_1$ sind nicht äquivalent.

Bew.: Wir zeigen, dass $\exists \alpha > 0 : \forall f \in C[0,1] : \alpha \cdot ||f||_\infty \leq ||f||_1$ nicht gilt, da somit die Aussage in Def. 4.18 (Äquivalente Normen) nicht gelten kann.

Also zeigen wir: $\forall \alpha > 0 : \exists f \in C[0,1] : \alpha \cdot ||f||_\infty > ||f||_1$.

Wähle $\alpha > 0$.

Hier werden wir zwei Fälle unterscheiden, **1.:** $\alpha > \frac{1}{2}$ und **2.:** $\alpha \leq \frac{1}{2}$:

Fall **1.:** Sei $f \in C[0,1], x \mapsto -\alpha x + \alpha$, dann gilt:

$\alpha \cdot ||f||_\infty = \alpha \cdot \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \alpha \cdot \alpha = \alpha^2$, da $|f| = f$ gilt.

Des Weiteren gilt: $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)| = \int_0^1 |-\alpha x + \alpha| = \int_0^1 -\alpha x + \alpha = \left[-\frac{\alpha}{2}x^2 + ax\right]_0^1 = -\frac{\alpha}{2} + \alpha = \frac{\alpha}{2}$

Da $a > \frac{1}{2}$, gilt: $\frac{\alpha}{2} < \alpha^2$, also ist der erste Fall gezeigt.

Fall **2.:**[1]

Für $\alpha \leq \frac{1}{2}$ wählen wir $f \in C[0,1], x \mapsto \sqrt[\alpha]{\alpha(1-x)}$.

Dann ist f auch wirklich in $C[0,1]$, größer 0 und streng monoton fallend mit Supremum $f(0) = \sqrt[\alpha]{\alpha}$.

Dann gilt: $\alpha \cdot \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \alpha \cdot \sqrt[\alpha]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{\alpha}+1}$.

Es ergibt sich durch Finden der Stammfunktion von f durch einmalige Substitution und die bekannten Integrationsmethoden von ganzrationalen Funktionen: $\int_0^1 |f| = \int_0^1 f = \frac{\alpha^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\alpha+1}$.

Dann gilt aufgrund des Nenners > 1: $\frac{\alpha^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\alpha+1} < \alpha^{\frac{1}{\alpha}+1}$, – was zu zeigen war. □

Vor.:

[1] Erst nach dem Aufschreiben ist dem „Autor“ aufgefallen, dass folgendes sogar für jedes $\alpha > 0$ gilt ... toll.

Beh.:

Bew.: