Mathematik für die Informatik C
Hausaufgabenserie 2

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

Vor.: $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beh.: f ist integrierbar und es gilt: $\int f = 0$.

Bew.:

Wir werden zeigen:

$$\forall (x^{(n)}, \xi^{(n)})_n \in \mathcal{S}(\mathrm{PS}(a, b)), \lim_n \mu(x^{(n)}) = 0 : \lim_n R(f, x^{(n)}, \xi^{(n)}) = 0$$

Nehme also an, dass wir zwei beliebige Folgen $(x^{(n)}, \xi^{(n)})_n \in \mathcal{S}(\mathrm{PS}(a, b))$ haben für die gilt: $\lim_n \mu(x^{(n)}) = 0$.

Für jedes ξ (Hier alle Tupel, also alle Folgekomponenten aller der eben referierten Folgen) gibt es zwei Fälle:

Fall 1: $1 \notin f^{\to}(\xi)$.

Dann gilt: $\forall \phi \in \xi : \phi \neq 0$. Hieraus lässt sich schließen $f^{\to}(\xi) = \{0\}$

Dann sieht man leicht, dass $\lim_n R(f, x^{(n)}, \xi^{(n)}) = 0$, gilt aufgrund der Definition der Riemann-Summe.

Fall 2: $1 \in f^{\to}(\xi)$.

Dann gilt: $0 \in \xi$ und $f^{\leftarrow}(1) = 0$. Es existiert also genau eine $\phi \in \xi$, sodass $f(\phi) = 1$ gilt mit $\phi = 0$.

Definiere folgende Mengen:

$\Gamma_n := \{\phi \in \xi \mid f(\phi) = 1\},\ \Delta_n := \{\phi \in \xi \mid f(\phi) = 0\}$.

Nach vorheriger Überlegung gilt $|\Gamma| = 1$ und man sieht leicht $|\Delta| = n - 1$.

Jetzt können wir zeigen, dass $\lim_n R(f, x^{(n)}, \xi^{(n)}) = 0$ gilt[1]:

$$\begin{aligned}
\lim_n R(f, x^{(n)}, \xi^{(n)}) &= \lim_n \sum_{j=1}^{n} l(x^{(n)}, j) \cdot f(\xi_j^{(n)}) && \mid \text{Reihenfolge der Summe ist egal, } |\Gamma|, |\Delta| \\
&= \lim_n \left(\sum_{j=1}^{1} l(x^{(n)}, j) \cdot f(\phi) + \sum_{j=2}^{n} l(x^{(n)}, j) \cdot f(\xi_j^{(n)}) \right) \\
&= \lim_n \left(\sum_{j=1}^{1} l(x^{(n)}, j) \cdot f(0) + \sum_{j=2}^{n} l(x^{(n)}, j) \cdot f(1) \right) && \mid \text{Auswerten} \\
&= \lim_n \left(\sum_{j=1}^{1} l(x^{(n)}, j) \cdot 1) + \sum_{j=2}^{n} l(x^{(n)}, j) \cdot 0 \right) \\
&= \lim_n \sum_{j=1}^{1} l(x^{(n)}, j)) \\
&= \lim_n l(x^{(n)}, j) && |\text{Def. } \mu,\ \mu \to 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nach Konvergenzkriterium ist somit f integrierbar mit Integral $\int f = 0$ $\square$

A2

1)

2)

[1] Im 2. Schritt meinen wir damit, dass wenn die Komponenten der Tupel so getauscht werden, dass der Wert für $\xi_1 = \phi = 0$ gilt, dass dann sich das Integral nicht ändert.