Mathematik für die Informatik C

Hausaufgabenserie 9

Henri Heyden, Nike Pulow

stu240825, stu239549

A1

Voraussetzung

Sei $\xi, \eta, a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $\xi \cdot \eta > 0$

und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \xi(x-a)^2 + \eta(y-b)^2 + c$.

Behauptung

$\text{LMAX}(f) = \{(a, b)\}$, wenn $\xi < 0$ und $\text{LMIN}(f) = \{(a, b)\}$, wenn $\xi > 0$

Beweis

Nach dem Kombsatz. ist f eine C^2-Funktion.

Zunächst forme f um. Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \xi(x-a)^2 + \eta(y-b)^2 + c && \mid \text{Binom. Formeln} \\
&= \xi(x^2 - 2xa + a^2) + \eta(y^2 - 2yb + b^2) + c && \mid \text{Klammern auflösen} \\
&= \xi x^2 - \xi 2xa + \xi a^2 + \eta y^2 - \eta 2yb + \eta b^2 + c
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\partial_1 f(x) = 2\xi x - 2\xi a = 2\xi(x-a)$$

$$\partial_2 f(y) = 2\eta y - 2\eta b = 2\eta(y-b)$$

Des Weiteren gilt:

$$\partial_1\partial_1 f(x) = 2\xi$$

$$\partial_2\partial_1 f(y) = 0$$

$$\partial_1\partial_2 f(x) = 0$$

$$\partial_2\partial_2 f(y) = 2\eta$$

Somit gilt: $\mathrm{H}_f = \begin{bmatrix} 2\xi & 0 \\ 0 & 2\eta \end{bmatrix}$
Außerdem gilt:

$$\partial_1 f(x) = 0 \iff x = a$$

$$\partial_2 f(y) = 0 \iff y = b$$

Dann gilt also $\partial_1 f(a) = \partial_2 f(b) = 0$ somit ist (a, b) kritische Stelle.

Es gilt:

$$\mathrm{H}_f(a, b) = \begin{bmatrix} 2\xi & 0 \\ 0 & 2\eta \end{bmatrix}$$

und somit $\det(\mathrm{H}_f(a, b)) = 2\xi \cdot 2\eta - 0$

Da $\xi \cdot \eta > 0$ gilt $\det(\mathrm{H}_f(a, b)) > 0$, also ist $\mathrm{H}_f(a, b)$ definit.

Somit gilt $(a, b) \in \mathrm{LMAX}(f)$, wenn $\xi < 0$

und $(a, b) \in \mathrm{LMIN}$, wenn $\xi > 0$.

Die Behauptung folgt. $\square$

ANMERKUNGEN

Wir hatten vorletzte Serie schon die Zulassung, und Kliemanns Anmerkung erst gerade gelesen, dass wir, wenn wir die Zulassung erreicht haben, das Korrekturteam entlasten sollen, deswegen ist dies unsere letzte Abgabe.
Wir wünschen Ihnen noch viel Erfolg!