

Mathematik für die Informatik C

Hausaufgabenserie 3

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

Vor.:

Beh.:

Bew.:

A2

Vor.:

Beh.:

Bew.:

A3

Vor.: $\Omega := [0, 1], f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$,

Beh.: f ist gleichmäßig stetig aber nicht Lipschitz-stetig. Also sind nicht alle gleichmäßig stetigen Funktionen Lipschitz-stetig.

Bew.: f ist gleichmäßig stetig, da f stetig (MatheB) auf eine kompakte Menge ist, denn Ω ist beschränkt und abgeschlossen.

Wir werden nun zeigen, dass f jedoch nicht Lipschitz-stetig ist, also

$$\forall L > 0 : \exists x, y \in \Omega : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| > L \cdot |x - y|.$$

Sei $L > 0$ beliebig und $y := 0, x \neq 0$. Dann gilt:

$$|\sqrt{x}| > L \cdot |x| \quad | \quad x > 0$$

$$\iff \sqrt{x} > L \cdot x \quad | \quad \cdot x^{-1}, \cdot^{-1}$$

$$\iff \frac{x}{\sqrt{x}} < L^{-1} \quad | \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \text{ Potenzgesetze}$$

$$\iff \sqrt{x} < L^{-1} \quad | \quad \cdot^2, x > 0$$

$$\iff x < L^{-2}$$

Somit existiert für jedes $L > 0$ mindestens ein x , sodass das Lipschitz-Kriterium bricht, also ist f nicht Lipschitz-stetig, – was zu zeigen war. \square