Mathematik für die Informatik C

Hausaufgabenserie 9

Henri Heyden, Nike Pulow

stu240825, stu239549

A1

Voraussetzung

Sei $\xi, \eta, a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $\xi \cdot \eta > 0$

und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \xi(x-a)^2 + \eta(y-b)^2 + c$.

Behauptung

$\textsc{Lmax}(f) = \{(a, b)\}$, wenn $\xi < 0$ und $\textsc{Lmin}(f) = \{(a, b)\}$, wenn $\xi > 0$

Beweis

Nach dem Kombsatz. ist f eine C^2-Funktion.

Zunächst forme f um. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \xi(x-a)^2 + \eta(y-b)^2 + c && \mid \text{Binom. Formeln} \\ &= \xi(x^2 - 2xa + a^2) + \eta(y^2 - 2yb + b^2) + c && \mid \text{Klammern auflösen} \\ &= \xi x^2 - \xi 2xa + \xi a^2 + \eta y^2 - \eta 2yb + \eta b^2 + c \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\partial_1 f(x) = 2\xi x - 2\xi a = 2\xi(x-a)$$

$$\partial_2 f(y) = 2\eta y - 2\eta b = 2\eta(y-b)$$

Des Weiteren gilt:

$$\partial_1 \partial_1 f(x) = 2\xi$$

$$\partial_2 \partial_1 f(y) = 0$$

$$\partial_1 \partial_2 f(x) = 0$$

$$\partial_2 \partial_2 f(y) = 2\eta$$

Somit gilt: $\mathrm{H}_f = \begin{bmatrix} 2\xi & 0 \\ 0 & 2\eta \end{bmatrix}$
Außerdem gilt:

$$\partial_1 f(x) = 0 \iff x = a$$

$$\partial_2 f(y) = 0 \iff y = b$$

Dann gilt also $\partial_1 f(a) = \partial_2 f(b) = 0$ somit ist (a, b) kritische Stelle.

Es gilt:

$$\mathrm{H}_f(a, b) = \begin{bmatrix} 2\xi & 0 \\ 0 & 2\eta \end{bmatrix}$$

und somit $\det(\mathrm{H}_f(a, b)) = 2\xi \cdot 2\eta - 0$

Da $\xi \cdot \eta > 0$ gilt $\det(\mathrm{H}_f(a, b)) > 0$, also ist $\mathrm{H}_f(a, b)$ definit.

Somit gilt $(a, b) \in \textsc{Lmax}(f)$, wenn $\xi < 0$

und $(a, b) \in \textsc{Lmin}$, wenn $\xi > 0$.

Die Behauptung folgt. $\square$