Mathematik für die Informatik C
Hausaufgabenserie 8

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

A2

Vor.: Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, v \mapsto \ldots,$[1]

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \ldots \\ e^{-||(x,y,t)||^2} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix} + z \sum_{i=1}^5 e_i + \phi(t,z,x) \sum_{i=1, i\neq 2}^5 e_i$$ [2]

Beh.: Es gilt:

$$\text{grad}_{f_2}(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} -2x \cdot e^{-x^2-y^2-t^2} \\ -2y \cdot e^{-x^2-y^2-t^2} \\ 1 \\ -2t \cdot e^{-x^2-y^2-t^2} \end{bmatrix}$$

Bew.: Zuerst, sehen wir: $z \sum_{i=1}^5 e_i = z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

und: $\phi(t,z,x) \sum_{i=1, i\neq 2}^5 e_i = \phi(t,z,x) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

[1] Der Rest interessiert uns nicht, warum sehen wir später.
[2] Auch hier interessieren uns Teile nicht.

Da wir die zweite Komponentenfunktion betrachten, gilt somit:

$f_2(x, y, z, t) = e^{-||(x,y,t)||^2} + z + 0 = e^{-(x^2+y^2+t^2)} + z = e^{-x^2-y^2-t^2} + z$.[3]

Nach den bekannten Ableitungsregeln ergeben sich folgende partielle Ableitungen:

$$\delta_1 f_2(x) = -2x \cdot e^{-x^2-y^2-t^2}$$

$$\delta_2 f_2(y) = -2y \cdot e^{-x^2-y^2-t^2}$$

$$\delta_3 f_2(z) = 1$$

$$\delta_4 f_2(t) = -2t \cdot e^{-x^2-y^2-t^2}$$

Die Behauptung folgt. $\square$

A3

Vor.: $\mathrm{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \alpha \mapsto \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$

Beh.: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \mathrm{R}(\alpha) \cdot \mathrm{R}(\beta) = \mathrm{R}(\alpha + \beta)$

Bew.: Es gilt:

$$\mathrm{R}(\alpha) \cdot \mathrm{R}(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \qquad | \text{ Matrix Multiplikation}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) & -\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) & -\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \end{bmatrix} \qquad | \text{ Ausklammern, Umstellen}$$

[3] Hier sieht man warum die Teile uns egal sind: Da wir nur die zweite Komponentenfunktion betrachten, kürzt sich der Rest weg.

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) & -(\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)) \\ \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) \end{bmatrix} \qquad | \text{ Additionstheoreme}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \mathrm{R}(\alpha+\beta)$$

– was zu zeigen war. $\square$