Mathematik für die Informatik C
Hausaufgabenserie 7

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

Vor.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beh.: f ist partiell differenzierbar in $\mathbb{R}^2$ mit:

$$\delta_1 f(x,y) = \begin{cases} \frac{y \cdot (x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und:

$$\delta_2 f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot (x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bew.: Beachte für $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

Es gilt: $f = \pi_1\pi_2 \cdot \frac{\pi_1^2-\pi_2^2}{\pi_1^2+\pi_2^2}$ Somit ist f nach dem Kombinationssatz partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, da diese Menge offen ist.

Dann folgt aus der Quotientenregel und einmaligem Ausklammern die Behauptung für Differenzialwerte von $f(x,y)$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Nun für $(x, y) = (0, 0)$:

Fall 1: $x \to 0, y = 0$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x,0) - (f(0,0) + 0)}{x - 0} \right) \qquad | \ f(0,0) = 0$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x,0)}{x} \right) \qquad | \text{ Einsetzen}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x \cdot 0 \cdot \frac{x^2-0}{x^2+0}}{x} \right) \qquad | \text{ Vereinfachen}$$

$$= \lim_{x\to 0} 0 \cdot 1$$

$$=0$$

Fall 2: $y \to 0, x = 0$

$$\lim_{y\to 0} \left(\frac{f(0,y) - (f(0,0) + 0)}{|0 - y|} \right) \qquad | \ f(0,0) = 0$$

$$= \lim_{y\to 0} \left(\frac{f(0,y)}{y} \right) \qquad | \text{ Einsetzen}$$

$$= \lim_{y\to 0} \left(\frac{y \cdot 0 \cdot \frac{-y^2}{y^2}}{y} \right) \qquad | \text{ Vereinfachen}$$

$$= \lim_{y\to 0} 0 \cdot -1$$

$$=0$$

Somit ist die Behauptung für Differenzialwerte von $f(x, y)$ mit

$(x, y) \in \{(0, 0)\}$ auch gezeigt. Die Behauptung ist somit gezeigt. $\square$

A2

Vor.: V, W sind normierte Räume, $\phi \in \mathrm{L}(V, W)$, $b \in W$,

$f : V \to W, v \mapsto \phi(v) + b$

Beh.: f ist differenzierbar für alle $v \in V$ mit $D_{V,W} f(v) = \phi$

Bew.: Da $f = \phi + b$ gilt (hier b als Konstante Funktion), und ϕ, b differenzierbar sind, ist f differenzierbar.

Es ergibt sich folgender Grenzwert:

$$\lim_{\tilde{v} \to v} \left(\frac{f(\tilde{v}) - (f(v) + \phi(\tilde{v} - v))}{||\tilde{v} - v||_V} \right) \qquad | \text{ Einsetzen}$$

$$= \lim_{\tilde{v} \to v} \left(\frac{\phi(\tilde{v}) + b - (\phi(v) + b + \phi(\tilde{v} - v))}{||\tilde{v} - v||_V} \right) \qquad | \text{ Vereinfachen und ausklammern}$$

$$= \lim_{\tilde{v} \to v} \left(\frac{\phi(\tilde{v}) - \phi(v) - \phi(\tilde{v} - v)}{||\tilde{v} - v||_V} \right) \qquad | \text{ Additivität, Homogenität, ausklammern}$$

$$= \lim_{\tilde{v} \to v} \left(\frac{\phi(\tilde{v}) - \phi(v) - \phi(\tilde{v}) + \phi(v)}{||\tilde{v} - v||_V} \right) \qquad | \text{ Vereinfachen}$$

$$= \lim_{\tilde{v} \to v} \left(\frac{0}{||\tilde{v} - v||_V} \right)$$

$=0$

Also ist ϕ Differenzialquotient von f. $\square$

A3

Vor.:

Beh.:

Bew.: