

Mathematik für die Informatik C

Hausaufgabenserie 6

Henri Heyden, Nike Pulow

stu240825, stu239549

A1

Vor.: $a, b \in \mathbb{R}, a < b, \quad C[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\},$

$$\|\cdot\|_1 : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f \mapsto \int |f|$$

Beh.: $\|\cdot\|_1$ ist Norm auf $C[a, b]$

Bew.: Wir teilen die Aussage in drei Abschnitte auf:

1): $\forall f \in C[a, b] : \|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$, wobei $0 : C[a, b], x \mapsto 0$ gemeint ist.

2): $\forall f \in C[a, b], \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda f\|_1 = |\lambda| \cdot \|f\|_1$

3): $\forall f, g \in C[a, b] : \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

Forab bemerke, dass $\|\cdot\|_1$ wohldefiniert ist, da jede Funktion in $C[a, b]$ stetig auf eine kompakte, also beschränkte und abgeschlossene Menge und somit integrierbar.

Wir fangen mit der ersten Aussage an:

1): Es gilt: $0 = \int 0 = \int |0| = \|0\|_1$.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehme an $0 \neq f \in C[a, b]$.

Dann existiert ein Intervall $I \subseteq [a, b]$, sodass $f|_I > 0$ gilt.

Sei $\bar{I} := [a, b] \setminus I$, dann gilt: $\|f\|_1 = \int |f| = \int |f|_I + \int |f|_{\bar{I}} \geq \int |f|_I > 0$

Somit ist der erste Teil gezeigt. Fahre mit dem zweiten Teil fort:

2): Es gilt: $\|\lambda f\|_1 = \int |\lambda f| = \int (|\lambda| \cdot |f|) = |\lambda| \cdot \int |f| = |\lambda| \cdot \|f\|_1$ Und nun die letzte Aussage:

3): Es gilt: $\|f + g\|_1 = \int |f + g| \stackrel{\text{Dreieck}}{\leq} \int (|f| + |g|) = \int |f| + \int |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1$

Somit ist alles gezeigt, was zu zeigen war. \square

A2

Vor.: $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1$ Normen über $C[0, 1]$, wie auf Serie definiert,

Beh.: $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ sind nicht äquivalent.

Bew.: Wir zeigen, dass $\exists \alpha > 0 : \forall f \in C[0, 1] : \alpha \cdot \|f\|_\infty \leq \|f\|_1$ nicht gilt, da somit die Aussage in Def. 4.18 (Äquivalente Normen) nicht gelten kann.

Also zeigen wir: $\forall \alpha > 0 : \exists f \in C[0, 1] : \alpha \cdot \|f\|_\infty > \|f\|_1$.

Wähle $\alpha > 0$.

Hier werden wir zwei Fälle unterscheiden, **1.:** $\alpha > \frac{1}{2}$ und **2.:** $\alpha \leq \frac{1}{2}$:

Fall **1.:** Sei $f \in C[0, 1], x \mapsto -\alpha x + \alpha$, dann gilt:

$$\alpha \cdot \|f\|_\infty = \alpha \cdot \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = \alpha \cdot \alpha = \alpha^2, \text{ da } |f| = f \text{ gilt.}$$

$$\begin{aligned} \text{Des Weiteren gilt: } \|f\|_1 &= \int_0^1 |f(x)| = \int_0^1 |-\alpha x + \alpha| = \int_0^1 -\alpha x + \alpha = \\ &= \left[-\frac{\alpha}{2}x^2 + \alpha x\right]_0^1 = -\frac{\alpha}{2} + \alpha = \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Da $\alpha > \frac{1}{2}$, gilt: $\frac{\alpha}{2} < \alpha^2$, also ist der erste Fall gezeigt.

Fall **2.:**¹

Für $\alpha \leq \frac{1}{2}$ wählen wir $f \in C[0, 1], x \mapsto \sqrt[\alpha]{\alpha(1-x)}$.

Dann ist f auch wirklich in $C[0, 1]$, größer 0 und streng monoton fallend mit Supremum $f(0) = \sqrt[\alpha]{\alpha}$.

$$\text{Dann gilt: } \alpha \cdot \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = \alpha \cdot \sqrt[\alpha]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{\alpha}+1}.$$

Es ergibt sich durch Finden der Stammfunktion von f durch einmalige Substitution und die bekannten Integrationsmethoden von ganzrationalen Funktionen: $\int_0^1 |f| = \int_0^1 f = \frac{\alpha^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\alpha+1}$.

Dann gilt aufgrund des Nenners > 1 : $\frac{\alpha^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\alpha+1} < \alpha^{\frac{1}{\alpha}+1}$, – was zu zeigen war. \square

¹Erst nach dem Aufschreiben ist dem „Autor“ aufgefallen, dass folgendes sogar für jedes $\alpha > 0$ gilt ... toll. Deswegen schreibt man erst und denkt danach!

A3

Vor.: V Vektorraum über \mathbb{R} mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_2$ definiert, wie in der Vorlesung, also: $\|\cdot\|_2 : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$,
des Weiteren sei definiert: $\bullet : V^2 \rightarrow \mathbb{R}, (w, v) \mapsto \sum_{i=1}^n v_i w_i$

Beh.: $\|\cdot\|_2$ ist Norm.

Bew.: Wieder spalten wir den Beweis in die drei Kriterien auf:

1): $\forall v \in V : \|v\|_2 = 0 \iff v = 0$

2): $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda v\|_2 = |\lambda| \cdot \|v\|_2$

3): $\forall v, w \in V : \|v + w\|_2 \leq \|v\|_2 + \|w\|_2$

Fangen wir mit dem ersten Kriterium an:

1):

Erste Richtung: „ \Leftarrow “:

Es gilt: $0 = \sqrt{0} = \sqrt{\sum_{i=1}^n 0} = \|0\|_2$

Zweite Richtung: „ \Rightarrow “:

Zeige mittels Kontraposition. Sei $v \in V, v \neq 0$, dann gilt folgendes:

$\exists j \in [n] : v_j \neq 0$. Für dieses j gilt dann folgendes:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} &= \sqrt{\sum_{i=1}^j v_i^2 + v_j^2 + \sum_{i=j+1}^n v_i^2} \\ &\geq \sqrt{v_j^2} > 0 \end{aligned}$$

Somit ist **1)** gezeigt.

2): Wähle $v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt folgendes:

$$\begin{aligned} \|\lambda v\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda v)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda^2 v^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \cdot \sum_{i=1}^n v^2} = \lambda \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n v^2} = \lambda \cdot \|v\|_2 \end{aligned}$$

Somit ist das zweite Kriterium auch gezeigt. Nun bleibt das Letzte.

3): Seien $v, w \in V$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|v + w\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n (v_i + w_i)^2 && | \text{ Binomische Formel} \\ &= \sum_{i=1}^n (v_i^2 + w_i^2 + 2v_i w_i) && | \text{ Summen rausziehen} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i^2 + \sum_{i=1}^n w_i^2 + \sum_{i=1}^n 2v_i w_i && | \text{ Def. } \bullet \\ &= \sum_{i=1}^n v_i^2 + \sum_{i=1}^n w_i^2 + 2 \cdot v \bullet w && | \text{ Def. } | \cdot | \\ &\leq \sum_{i=1}^n v_i^2 + \sum_{i=1}^n w_i^2 + 2 \cdot |v \bullet w| && | \text{ Magie} \\ &\leq \sum_{i=1}^n v_i^2 + \sum_{i=1}^n w_i^2 + 2 \cdot \|v\|_2 \cdot \|w\|_2 && | \text{ Def. } \| \cdot \|_2 \\ &= \|v\|_2^2 + \|w\|_2^2 + 2 \cdot \|v\|_2 \cdot \|w\|_2 && | \text{ Binomische Formeln} \\ &= (\|v\|_2 + \|w\|_2)^2 \end{aligned}$$

Dann gilt $\|v + w\|_2 \leq \|v\|_2 + \|w\|_2$, da $\text{img}(\| \cdot \|_2) = \mathbb{R}_{\geq 0}$, was gilt, da die Summe positiv ist und somit die Wurzel dies auch ist.²

²Interessanterweise sieht man hier, dass dies nicht für Vektorräume über \mathbb{C} funktioniert, da die Wurzel negativ sein kann.