

Mathematik für die Informatik C

Hausaufgabenserie 7

Henri Heyden, Nike Pulow

stu240825, stu239549

A1

Vor.: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beh.: f ist partiell differenzierbar in \mathbb{R}^2 mit:

$$\delta_1 f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \cdot (x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und:

$$\delta_2 f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot (x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bew.: Beachte für $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

Es gilt: $f = \pi_1 \pi_2 \cdot \frac{\pi_1^2 - \pi_2^2}{\pi_1^2 + \pi_2^2}$. Somit ist f nach dem Kombinationssatz partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, da diese Menge offen ist.

Dann folgt aus der Quotientenregel und einmaligem Ausklammern die Behauptung für Differenzialwerte von $f(x, y)$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Nun für $(x, y) = (0, 0)$:

Fall 1: $x \rightarrow 0, y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x, 0) - (f(0, 0) + 0)}{x - 0} \right) \quad | \quad f(0, 0) = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x, 0)}{x} \right) \quad | \quad \text{Einsetzen}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cdot 0 \cdot \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0}}{x} \right) \quad | \quad \text{Vereinfachen}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 0 \cdot 1$$

$$= 0$$

Fall 2: $y \rightarrow 0, x = 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{f(0, y) - (f(0, 0) + 0)}{|0 - y|} \right) \quad | \quad f(0, 0) = 0$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{f(0, y)}{y} \right) \quad | \quad \text{Einsetzen}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y \cdot 0 \cdot \frac{-y^2}{y^2}}{y} \right) \quad | \quad \text{Vereinfachen}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} 0 \cdot -1$$

$$= 0$$

Somit ist die Behauptung für Differenzialwerte von $f(x, y)$ mit

$(x, y) \in \{(0, 0)\}$ auch gezeigt. Die Behauptung ist somit gezeigt. □

A2

Vor.: V, W sind normierte Räume, $\phi \in L(V, W)$, $b \in W$,

$$f : V \rightarrow W, v \mapsto \phi(v) + b$$

Beh.: f ist differenzierbar für alle $v \in V$ mit $D_{V,W}f(v) = \phi$

Bew.: Da $f = \phi + b$ gilt (hier b als Konstante Funktion), und ϕ, b differenzierbar sind, ist f differenzierbar.

Es ergibt sich folgender Grenzwert:

$$\begin{aligned} & \lim_{\tilde{v} \rightarrow v} \left(\frac{f(\tilde{v}) - (f(v) + \phi(\tilde{v} - v))}{\|\tilde{v} - v\|_V} \right) && | \text{ Einsetzen} \\ &= \lim_{\tilde{v} \rightarrow v} \left(\frac{\phi(\tilde{v}) + b - (\phi(v) + b + \phi(\tilde{v} - v))}{\|\tilde{v} - v\|_V} \right) && | \text{ Vereinfachen und ausklammern} \\ &= \lim_{\tilde{v} \rightarrow v} \left(\frac{\phi(\tilde{v}) - \phi(v) - \phi(\tilde{v} - v)}{\|\tilde{v} - v\|_V} \right) && | \text{ Additivität, Homogenität, ausklammern} \\ &= \lim_{\tilde{v} \rightarrow v} \left(\frac{\phi(\tilde{v}) - \phi(v) - \phi(\tilde{v}) + \phi(v)}{\|\tilde{v} - v\|_V} \right) && | \text{ Vereinfachen} \\ &= \lim_{\tilde{v} \rightarrow v} \left(\frac{0}{\|\tilde{v} - v\|_V} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist ϕ Differenzialquotient von f . □

A3

Vor.: Seien V, W endlich dimensionaler Vektorräume, $\Omega \subseteq V$, v Basishäufungspunkt von Ω in V mit Basis B und Koeffizientenfolge $(t_k)_k$ und $f : \Omega \rightarrow W$ (V, W) -differenzierbar in v mit Ableitungen ϕ, ψ .

Beh.: $\phi = \psi$

Bew.: Nehme die Kontraposition an, also sei $\phi \neq \psi$.

Sei $x \in B$ so, dass $\psi(x) \neq \phi(x)$ gilt. Da v BHP¹ von Ω ist, ist 0 BHP von $\Omega - v$, da $\forall b \in B : (t_k \cdot (b + x))_k \in \mathcal{S}((\Omega - v) \setminus \{0\})$ gilt. Es gilt unter anderem $\text{span}(B) = \text{span}(B + x)$, da x sich als Linearkombination der Basisvektoren darstellen lässt². Es gilt: $\lim_k t_k \cdot (b + x) = 0_V$

Dann gilt für $b = x$:

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_k \left(\frac{f(v + t_k \cdot (b + x)) - (f(v) + \phi(t_k \cdot (b + x)))}{\|t_k \cdot (b + x)\|} \right) \\
&\quad - \lim_k \left(\frac{f(v + t_k \cdot (b + x)) - (f(v) + \psi(t_k \cdot (b + x)))}{\|t_k \cdot (b + x)\|} \right) \quad | \text{Kombinationssatz Limes, } x = b \\
&= \lim_k \left(\frac{f(v + t_k \cdot 2x) - (f(v) + \phi(t_k \cdot 2x))}{\|t_k \cdot 2x\|} \right. \\
&\quad \left. - \frac{f(v + t_k \cdot 2x) - (f(v) + \psi(t_k \cdot 2x))}{\|t_k \cdot 2x\|} \right) \quad | \text{Kürzen über Brüche, Rausziehen} \\
&= \lim_k \left(\frac{\psi(t_k \cdot 2x) - \phi(t_k \cdot 2x)}{|t_k| \cdot \|2x\|} \right) \quad | \text{Homogenität} \\
&= \lim_k \left(\frac{t_k \cdot \psi(2x) - t_k \cdot \phi(2x)}{|t_k| \cdot \|2x\|} \right) \quad | \text{Ausklammern, Klammern auflösen} \\
&= \lim_k \left(\frac{t_k \cdot (\psi(2x) - \phi(2x))}{|t_k| \cdot \|2x\|} \right) \quad | \text{Homogenität}
\end{aligned}$$

¹Basishäufungspunkt

²In diesem Fall ist das die jeweilige Basiskomponente.

$$\begin{aligned}
&= \lim_k \left(\frac{2t_k \cdot (\psi(x) - \phi(x))}{|t_k| \cdot ||2x||} \right) && | \frac{t_k}{|t_k|} \rightarrow \pm 1 \text{ für } (t_k)_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\pm) \\
&= \pm \lim_k \left(\frac{2 \cdot (\psi(x) - \phi(x))}{||2x||} \right) && | \text{Keine Folge übrig} \\
&= \pm \frac{2 \cdot (\psi(x) - \phi(x))}{||2x||} && | \phi(x) \neq \psi(x), ||2x|| > 0 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Somit wurde die Annahme dass ϕ und ψ verschiedene Ableitungen von f sind ad absurdum geführt.

Hiermit ist die Gegenaussage, also was zu zeigen war gezeigt. \square