Mathematik für die Informatik C
Hausaufgabenserie 7

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

Vor.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beh.: f ist partiell differenzierbar in $\mathbb{R}^2$ mit:

$$\delta_1 f(x,y) = \begin{cases} \frac{y \cdot (x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und:

$$\delta_2 f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot (x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bew.: Beachte für $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

Es gilt: $f = \pi_1\pi_2 \cdot \frac{\pi_1^2-\pi_2^2}{\pi_1^2+\pi_2^2}$ Somit ist f nach dem Kombinationssatz partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, da diese Menge offen ist.

Dann folgt aus der Quotientenregel und einmaligem Ausklammern die Behauptung für Differenzialwerte von $f(x,y)$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Nun für $(x, y) = (0, 0)$:

Fall 1: $x \to 0, y = 0$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x,0)-(f(0,0)+0)}{x-0}\right) \qquad \mid f(0,0)=0$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x,0)}{x}\right) \qquad \mid \text{Einsetzen}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot 0\cdot \frac{x^2-0}{x^2+0}}{x}\right) \qquad \mid \text{Vereinfachen}$$

$$=\lim_{x\to 0} 0\cdot 1$$

$$=0$$

Fall 2: $y \to 0, x = 0$

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{f(0,y)-(f(0,0)+0)}{|0-y|}\right) \qquad \mid f(0,0)=0$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{f(0,y)}{y}\right) \qquad \mid \text{Einsetzen}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{y\cdot 0\cdot \frac{-y^2}{y^2}}{y}\right) \qquad \mid \text{Vereinfachen}$$

$$=\lim_{y\to 0} 0\cdot -1$$

$$=0$$

Somit ist die Behauptung für Differenzialwerte von $f(x, y)$ mit

$(x, y) \in \{(0, 0)\}$ auch gezeigt. Die Behauptung ist somit gezeigt. $\square$

A2

Vor.: V, W sind normierte Räume, $\phi \in \mathrm{L}(V, W)$, $b \in W$,

$f : V \to W, v \mapsto \phi(v) + b$

Beh.: f ist differenzierbar für alle $v \in V$ mit $D_{V,W} f(v) = \phi$

Bew.: Da $f = \phi + b$ gilt (hier b als Konstante Funktion), und ϕ, b differenzierbar sind, ist f differenzierbar.

Es ergibt sich folgender Grenzwert:

$$\lim_{\tilde{v} \to v} \left(\frac{f(\tilde{v}) - (f(v) + \phi(\tilde{v} - v))}{||\tilde{v} - v||_V} \right) \qquad | \text{ Einsetzen}$$

$$= \lim_{\tilde{v} \to v} \left(\frac{\phi(\tilde{v}) + b - (\phi(v) + b + \phi(\tilde{v} - v))}{||\tilde{v} - v||_V} \right) \qquad | \text{ Vereinfachen und ausklammern}$$

$$= \lim_{\tilde{v} \to v} \left(\frac{\phi(\tilde{v}) - \phi(v) - \phi(\tilde{v} - v)}{||\tilde{v} - v||_V} \right) \qquad | \text{ Additivität, Homogenität, ausklammern}$$

$$= \lim_{\tilde{v} \to v} \left(\frac{\phi(\tilde{v}) - \phi(v) - \phi(\tilde{v}) + \phi(v)}{||\tilde{v} - v||_V} \right) \qquad | \text{ Vereinfachen}$$

$$= \lim_{\tilde{v} \to v} \left(\frac{0}{||\tilde{v} - v||_V} \right)$$

$=0$

Also ist ϕ Ableitung von f. $\square$

A3

Vor.: Seien V, W endlich dimensionaler Vektorräume, $\Omega \subseteq V$, v Basishäufungspunkt von Ω in V mit Basis B und Koeffizientenfolge $(t_k)_k$ und $f : \Omega \to W$ (V, W)-differenzierbar in v mit Ableitungen ϕ, ψ.

Beh.: $\phi = \psi$

Bew.: Nehme die Kontraposition an, also sei $\phi \neq \psi$.

Sei $x \in B$ so, dass $\psi(x) \neq \phi(x)$ gilt. Da v BHP[1] von Ω ist, ist 0 BHP von $\Omega - v$, da $\forall b \in B : (t_k \cdot (b+x))_k \in \mathcal{S}((\Omega - v) \setminus \{0\})$ gilt. Es gilt unter anderem $\text{span}(B) = \text{span}(B + x)$, da x sich als Linearkombination der Basisvektoren darstellen lässt[2]. Es gilt: $\lim_k t_k \cdot (b + x) = 0_V$

Dann gilt für $b = x$:

$$0 = \lim_k \left(\frac{f(v + t_k \cdot (b+x)) - (f(v) + \phi(t_k \cdot (b+x)))}{||t_k \cdot (b+x)||} \right)$$

$$- \lim_k \left(\frac{f(v + t_k \cdot (b+x)) - (f(v) + \psi(t_k \cdot (b+x)))}{||t_k \cdot (b+x)||} \right) \qquad | \text{ Kombinationssatz Limes, } x = b$$

$$= \lim_k (\frac{f(v + t_k \cdot 2x) - (f(v) + \phi(t_k \cdot 2x))}{||t_k \cdot 2x||}$$

$$- \frac{f(v + t_k \cdot 2x) - (f(v) + \psi(t_k \cdot 2x))}{||t_k \cdot 2x||}) \qquad | \text{ Kürzen über Brüche, Rausziehen}$$

$$= \lim_k \left(\frac{\psi(t_k \cdot 2x) - \phi(t_k \cdot 2x)}{|t_k| \cdot ||2x||} \right) \qquad | \text{ Homogenität}$$

$$= \lim_k \left(\frac{t_k \cdot \psi(2x) - t_k \cdot \phi(2x)}{|t_k| \cdot ||2x||} \right) \qquad | \text{ Ausklammern, Klammern auflösen}$$

$$= \lim_k \left(\frac{t_k \cdot (\psi(2x) - \phi(2x))}{|t_k| \cdot ||2x||} \right) \qquad | \text{ Homogenität}$$

[1] Basishäufungspunkt

[2] In diesem Fall ist das die jeweilige Basiskomponente.

$$= \lim_k \left(\frac{2t_k \cdot (\psi(x) - \phi(x))}{|t_k| \cdot ||2x||} \right) \qquad \Big|\ \frac{t_k}{|t_k|} \to \pm 1 \text{ für } (t_k)_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\pm)$$

$$= \pm \lim_k \left(\frac{2 \cdot (\psi(x) - \phi(x))}{||2x||} \right) \qquad \Big|\ \text{Keine Folge übrig}$$

$$= \pm \frac{2 \cdot (\psi(x) - \phi(x))}{||2x||} \qquad \Big|\ \phi(x) \neq \psi(x),\ ||2x|| > 0$$

$$\neq 0$$

Somit wurde die Annahme dass ϕ und ψ verschiedene Ableitungen von f sind ad absurdum geführt.

Hiermit ist die Gegenaussage, also was zu zeigen war gezeigt. $\square$