Mathematatik für die Informatik C
Hausaufgabenserie 4

Henri Heyden, Nike Pulow
stu240825, stu239549

A1

Vor.: $0 < a < b < \pi$

Beh.: $\int_a^b \cos(x) \cdot \ln\left(\sqrt{1-\cos^2(x)}\right) = [\sin(x) \cdot (\ln(\sin(x)) - 1)]_a^b$

Bew.: Es gilt:

$$\int_a^b \cos(x) \cdot \ln\left(\sqrt{1-\cos^2(x)}\right) \qquad \text{| Logarithmusgesetze}$$

$$= \int_a^b \cos(x) \cdot \frac{1}{2} \ln\left(1-\cos^2(x)\right) \qquad \text{| } \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \text{ (MatheB)}$$

$$= \int_a^b \cos(x) \cdot \frac{1}{2} \ln\left(1-(1-\sin^2(x))\right) \qquad \text{| Klammern auflösen}$$

$$= \int_a^b \cos(x) \cdot \frac{1}{2} \ln\left(\sin^2(x)\right) \qquad \text{| Logarithmusgesetze}$$

$$= \int_a^b \cos(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\ln\left(\sin(x)\right)$$

$$= \int_a^b \cos(x) \cdot \ln\left(\sin(x)\right)$$

$$= \int_a^b \ln\left(\sin(x)\right) \cdot \cos(x) \qquad \text{| Partielle Integration}$$

$$= [\ln(\sin(x)) \cdot \sin(x)]_a^b - \int_a^b \left(\left(\frac{d}{dx} \ln(\sin(x))\right) \cdot \sin(x)\right) \qquad \text{| Kettenregel}$$

$$= [\ln(\sin(x)) \cdot \sin(x)]_a^b - \int_a^b \left(\left(\frac{1}{\sin(x)} \cdot \frac{d}{dx} \sin(x)\right) \cdot \sin(x)\right)$$

$$= [\ln(\sin(x)) \cdot \sin(x)]_a^b - \int_a^b \left(\left(\frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x)\right) \cdot \sin(x)\right)$$

$$= [\ln(\sin(x)) \cdot \sin(x)]_a^b - \int_a^b \cos(x)$$

$$= [\ln(\sin(x)) \cdot \sin(x)]_a^b - [\sin(x)]_a^b \qquad | \text{ Reinziehen}$$

$$= [\ln(\sin(x)) \cdot \sin(x) - \sin(x)]_a^b \qquad | \text{ Ausklammern}$$

$$= [\sin(x) \cdot (\ln(\sin(x)) - 1)]_a^b$$

– was zu zeigen war. $\square$

A2

Vor.:

Beh.:

Bew.:

A3

Vor.: $\Omega := [0,1],\ f : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x},$

Beh.: f ist gleichmäßig stetig aber nicht Lipschitz-stetig. Also sind nicht alle gleichmäßig stetigen Funktionen Lipschitz-stetig.

Bew.: f ist gleichmäßig stetig, da f stetig (MatheB) auf eine kompakte Menge ist, denn Ω ist beschränkt und abgeschlossen.

Wir werden nun zeigen, dass f jedoch nicht Lipschitz-stetig ist, also

$\forall L > 0 : \exists x, y \in \Omega : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| > L \cdot |x - y|.$

Sei $L > 0$ beliebig und $y := 0, x \neq 0$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& |\sqrt{x}| > L \cdot |x| && \mid x > 0 \\
\Longleftrightarrow & \sqrt{x} > L \cdot x && \mid \cdot x^{-1},\ \cdot^{-1} \\
\Longleftrightarrow & \frac{x}{\sqrt{x}} < L^{-1} && \mid \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \text{Potenzgesetze} \\
\Longleftrightarrow & \sqrt{x} < L^{-1} && \mid \cdot^{2}, x > 0 \\
\Longleftrightarrow & x < L^{-2}
\end{aligned}
$$

Somit existiert für jedes $L > 0$ mindestens ein x, y, sodass das Lipschitz-Kriterium bricht, also ist f nicht Lipschitz-stetig, $-$ was zu zeigen war. $\square$