

MATHE C KLAUSURZETTEL

HENRI HEYDEN

stu240825

Analysis

Integrierbarkeit

RIEMANN SUMME

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, seien (x, ξ) Partition und Stützstellen aus $[a, b]$.

Dann nennen wir $R(f, x, \xi) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\xi_i)$ Riemann Summe.

INTEGRIERBARKEIT

Wir nennen f integrierbar, wenn

$\exists R_0 \in \mathbb{R} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x, \xi) \in \text{PS}(a, b, \delta) : |R(f, x, \xi) - R_0| < \epsilon$ gilt.

Das Integral ist eindeutig, schreibe $\int_a^b f$ oder $\int f$ hierfür.

Wir schreiben auch $\int f(x)dx := \int f$

Ist f integrierbar, dann kann man das Integral mit einer Beliebigen Folge an $(x_n, \xi_n)_n$ finden wessen Feinheit den Limes 0 hat, sodass die Riemann-Summe konvergiert.

f ist genau dann integrierbar, wenn für alle 2 solcher Folgen ihre Differenz immer zu 0 konvergiert.

STETIG UND KOMPAKT

Eine Funktion f :

...ist stetig in $x \in \text{dom}(f)$, wenn alle Funktionslimes zu x gleich sind.

...ist beschränkt, wenn ihre Domain eine obere und untere Schranke hat.

...ist abgeschlossen, wenn das komplement ihrer Domain offen ist.

...ist kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Ist eine Funktion kompakt stetig, dann ist sie gleichmäßig stetig und somit integrierbar.

ABSCHÄTZUNGEN

Für $f \leq g$ gilt: $\int f \leq \int g$.

Es gilt: $(b - a) \cdot \inf(f) \leq \int_a^b f \leq (b - a) \cdot \sup(f)$

Integrationstechniken

HAUPTSATZ DER DIFFERENZIALRECHNUNG

Schreibe $[\phi]_u^v := \phi(v) - \phi(u)$

Sei $f, F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $F' = f$ gilt.

Dann gilt: $\int f = F(\sup(\Omega)) - F(\inf(\Omega)) = F(b) - F(a) = [F]_a^b$ für $\Omega = [a, b]$.

STAMMFUNKTIONEN

Domain	$f(x)$	$F(x)$	args
\mathbb{R}	c	cx	$c \in \mathbb{R}$
\mathbb{R}	$\sum_{k=0}^n a_k x^k$	$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$	$a_0 \dots a_n \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}_{>0}$	x^{-1}	$\ln(x)$	
\mathbb{R}	b^x	$\frac{b^x}{\ln(b)}$	$b \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$
$\mathbb{R}_{>0}$	$\log_b(x)$	$\frac{x \ln(x) - x}{\ln(b)}$	$b \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$
$] - 1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	
\mathbb{R}	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	

PARTIELLE INTEGRATION

Für $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $\int_a^b f g' = [fg]_a^b - \int_a^b f' g$

SUBSTITUTION

Für f stetig reel und ϕ stetig differenzierbar reel mit $u, v \in \text{dom}(\phi)$, sodass $[u, v] \subseteq \text{dom}(\phi)$ und $\phi^{-1}([u, v]) \subseteq \text{dom}(f)$ ist, gilt:

$$\int_{\phi(u)}^{\phi(v)} f = \int_u^v (f \circ \phi) \cdot \phi'$$

Analytische Grundstrukturen

Differentiation im Mehrdimensionalen

Stochastik