Mathe C Klausurzettel

Henri Heyden – stu240825

Analysis

Integrierbarkeit

Riemann Summe
Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, seien (x, ξ) Partition und Stützstellen aus $[a, b]$.
Dann nennen wir $R(f, x, \xi) := \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \cdot f(\xi_i)$ Riemann Summe.

Integrierbarkeit
Wir nennen f integrierbar, wenn
$\exists R_0 \in \mathbb{R} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x, \xi) \in \mathrm{PS}(a, b, \delta) : |R(f, x, \xi) - R_0| < \epsilon$ gilt.
Das Integral ist eindeutig, schreibe $\int_a^b f$ oder $\int f$ hierfür.
Wir schreiben auch $\int f(x)\mathrm{d}x := \int f$
Ist f integrierbar, dann kann man das Integral mit einer Beliebigen Folge an $(x_n, \xi_n)_n$ finden wessen Feinheit den Limes 0 hat, sodass die Riemann-Summe konvergiert.
f ist genau dann integrierbar, wenn für alle 2 solcher Folgen ihre Differenz immer zu 0 konvergiert.

Stetig und Kompakt
Eine Funktion f:
…ist stetig in $x \in \mathrm{dom}(f)$, wenn alle Funktionslimetes zu x gleich sind.
…ist beschränkt, wenn ihre Domain eine obere und untere Schranke hat.
…ist abgeschlossen, wenn das komplement ihrer Domain offen ist.
…ist kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.
Ist eine Funktion kompakt stetig, dann ist sie gleichmäßig stetig und somit integrierbar.

Abschätzungen
Für $f \leq g$ gilt: $\int f \leq \int g$.
Es gilt: $(b - a) \cdot \inf(f) \leq \int_a^b f \leq (b - a) \cdot \sup(f)$

Integrationstechniken

Hauptsatz der Differenzialrechnung
Schreibe $[\phi]_u^v := \phi(v) - \phi(u)$
Sei $f, F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ so, dass $F' = f$ gilt.
Dann gilt: $\int f = F(\sup(\Omega)) - F(\inf(\Omega)) = F(b) - F(a) = [F]_a^b$ für $\Omega = [a, b]$.

Partielle Integration
Für $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt: $\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$

Substitution
Für f stetig reel und ϕ stetig differenzierbar reel mit $u, v \in \mathrm{dom}(\phi)$,
sodass $[u, v] \subseteq \mathrm{dom}(\phi)$ und $\phi^{\rightarrow}([u, v]) \subseteq \mathrm{dom}(f)$ ist, gilt:

$$\int_{\phi(u)}^{\phi(v)} f = \int_u^v (f \circ \phi) \cdot \phi'$$

Stammfunktionen

Domain	$f(x)$	$F(x)$	args
$\mathbb{R}$	c	cx	$c \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$	$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$	$a_0 \dots a_n \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}_{>0}$	x^{-1}	$\ln(x)$	
$\mathbb{R}$	b^x	$\frac{b^x}{\ln(b)}$	$b \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$
$\mathbb{R}_{>0}$	$\log_b(x)$	$\frac{x\ln(x)-x}{\ln(b)}$	$b \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$
]-1, 1[	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	

Uneigentliche Integrale

Integral über $x^{-\alpha}$
1) $\forall \alpha > 1 : \int_1^{+\infty} x^{-\alpha} \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1}$. Für $\alpha \in]0,1]$ divergiert das Integral.
2) $\forall \alpha \in]0,1[: \int_0^1 x^{-\alpha} \mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}$. Für $\alpha \geq 1$ divergiert das Integral.

Vergleichskriterium
Seien $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über alle Teilintervalle und $|f| \leq g$.
Konvergiert das uneigentliche Integral über g, dann konvergiert das uneigentliche Integral über f.

Integralkriterium
Warnung nicht im Skript, trotzdem leichtes Argument.
Sei $p \in \mathbb{Z}$ und $f : [p, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ monoton fallend.
Dann ist f integrierbar genau dann, wenn $\sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ konvergiert.
Zur Motivation betrachte $\sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ als obere Schranke und Annäherung des Integrals mittels Riemann Summe mit gleichmäßiger Feinheit 1.

Analytische Grundstrukturen

Metrische Räume

Metrik
Eine Metrik ist eine Funktion $d : M^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit folgenden Eigenschaften:
1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (positive Definitheit)
2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Eigenschaften der Metrik
Für Metrische Räume gelten alle analytischen Gesetze und Sätze aus MatheB nur mit jeder Metrik nicht nur der Betragsmetrik. Somit sind Begriffe wir Stetigkeit, Limes, Kompaktheit, Funktionslimes etc. äquivalent.

Normierte Räume

Norm
Sei V Vektorraum, dann ist $|| \cdot ||$ Norm auf V, wenn folgende Gesetze gelten:
1) $||v|| = 0 \iff v = 0$
2) $||\lambda|| = |\lambda| \cdot ||v||$
3) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

BEISPIELNORMEN ÜBER $\mathbb{R}^n$
Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$, dann ist $||\cdot||_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \sqrt[k]{\sum_{i=1}^n |v_i|}$ Norm
Die Funktion $||\cdot||_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \max_{i\in[n]} |v_i|$ ist Norm

EIGENSCHAFTEN DER NORM
Es gilt $||-v|| = ||v||$
Außerdem ist $V^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, (u,v) \mapsto ||u-v||$ Metrik. Somit lassen sich analytische Grundbegriffe für Vektorräume komposieren und alle Eigentschaften der Metrischen Räume für jene Metrik anwenden.
Normen sind stetig. Also $||\cdot||$ ist eine stetige Funktion.

ÄQUIVALENZ VON NORMEN
Seien $(V, ||\cdot||)$ und $(V, ||\cdot||')$ normierte Räume. Wir nennen $||\cdot||$ und $||\cdot||'$ äquivalent, wenn folgendes gilt: $\exists \alpha, \beta > 0 : \forall v \in V : \alpha||v|| \leq ||v||' \leq \beta||v||$
Umgebungen über äquivalente Normen sind äquivalent, genau wie Konvergenz mit den gleichen Limetes, Stetigkeiten und Kompaktheiten.
Auf endlich dimensionalen Vektorräumen sind alle Normen äquivalent.

Differentation im Mehrdimensionalen

Es seien V, W Vektorräume über $\mathbb{R}$, $\Omega \subseteq V$.

Differenzierbarkeit

DEFINITON DER DIFFERENZIERBARKEIT
Wir nennen $f : \Omega \longrightarrow W$ differenzierbar in v, wenn

$$\exists \phi \in \mathrm{L}(V,W) : \lim_{\tilde{v} \longrightarrow v} \frac{||f(\tilde{v}) - (f(v) + \phi(\tilde{v} - v))||_W}{||\tilde{v} - v||_V} = 0_{\mathbb{R}}$$

gilt. Dann nennen wir ϕ Ableitung von f und schreiben $D(f) := \phi$. Offenbar da ϕ linear stetig ist, existiert eine Matrix für ϕ. Folgende Definiton ist äquivalent:

$$\exists \phi \in \mathrm{L}(V,W) : \lim_{h \longrightarrow 0_V} \frac{||f(v+h) - (f(v) + \phi(h))||_W}{||h||_V} = 0_{\mathbb{R}}$$

Gilt $V = W = \mathbb{R}$, dann ist die Definiton äquivalent zur Differenzierbarkeit im bekannten Sinne.

Ableitungsregeln

Ist f differenzierbar, dann sind alle Komponentenfunktionen von f $(V, \mathbb{R})$-differenzierbar.

KOMBINATIONSSÄTZE
Für $\lambda : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $f, g : \Omega \longrightarrow V$ differenzierbar gelten folgende Regeln:
1) $D(f+g) = D(f) + D(g)$
2) $D(\lambda f) = \lambda D(f)$
3) $D\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{D(\lambda)}{\lambda^2}$
4) $D\left(\frac{f}{\lambda}\right) = \frac{\lambda D(f) - f D(\lambda)}{\lambda^2}$

Partielle Ableitungen

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $i \in [n], j \in [d], v \in \Omega$.

PARTIELLE DIFFERENZIERBARKEIT
Wir nennen f_j partiell differenzierbar in v nach der i-ten Variable, wenn $f_{j,v,i}$ in v_i differenzierbar ist.
Wir definieren $\partial_i f_j(v) := f'_{j,v,i}(v_i)$.

BEISPIEL
Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^4, (x, y) \mapsto \left(x + y, xy, x^2 + 3y - 6, -2\sqrt{y}\right)$.
Dann gilt:
$\partial_1 f_2(x, y) = y, \quad \partial_1 f_3(x, y) = 2x, \quad \partial_1 f_4(x, y) = 0,$
$\partial_2 f_1(x, y) = 1, \quad \partial_2 f_3(x, y) = 3$

GRADIENT UND JACOBI-MATRIX
Wir definieren den Gradienten von f_j als $\text{grad}_{f_j}(v) := (\partial_1 f_j(v), \dots, \partial_n f_j(v))$.
Des Weiteren definieren wir die Jacobi-Matrix von f:

$$\mathbf{J}_f(v) := \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(v) & \dots & \partial_n f_1(v) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_d(v) & \dots & \partial_n f_d(v) \end{bmatrix}$$

Somit gilt:

$$\mathbf{J}_f(v) = \begin{bmatrix} \text{grad}_{f_1}(v) \\ \vdots \\ \text{grad}_{f_d}(v) \end{bmatrix}$$

Ist f differenzierbar in v, dann ist $\mathbf{J}_f(v)$ Ableitung von f, aber Achtung: Vollständige partielle Differenzierbarkeit impliziert NICHT totale Differenzierbarkeit!

TOTALE DIFFERENZIERBARKEIT AUS PARTIELLER DIFFERENZIERBARKEIT
Ist f vollständig partiell differenzierbar und alle Ableitung sind stetig, dann ist f total differenzierbar.

C^1-FUNKTIONEN UND C^2-FUNKTIONEN
Wir nennen $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine C^1-Funktion, wenn sie vollständig stetig partiell differenzierbar ist. Somit ist also eine C^1-Funktion total differenzierbar.
f ist C^1-Funktion, wenn all ihre Komponentenfunktionen aus Kombinationen von Projektionen stetiger differenzierbaren eindimensionalen Funktionen bestehen.
Wir nennen $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion, wenn sie eine C^1-Funktion ist, und $\forall i \in [n] : \partial_i f$ stetig partiell differenzierbar ist.
Dies ist äquivalent dazu, dass grad_f eine C^1-Funktion ist.
Die partielle Ableitung von $\partial_i f$ nach der j-ten Variable bezeichnen wir mit $\partial_j \partial_i f$.

HESSE-MATRIX
Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion, wir definieren die Hesse-Matrix von f als:

$$\mathbf{H}_f := \begin{bmatrix} \partial_1 \partial_1 f(v) & \dots & \partial_1 \partial_n f(v) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(v) & \dots & \partial_n \partial_n f(v) \end{bmatrix}$$

offenbar gilt: $\mathbf{H}_f(v) = (\mathbf{J}_{\text{grad}_f}(v))^\top$, denn die Spalten der Hesse-Matrix sind die Gradienten der Komponentenfunktionen von grad_f.
Die Transposition ist auch nicht nötig, da die Hesse-Matrix symmetrisch ist.
Das heißt es gilt: $\forall i, j \in [n]$: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$.

Lokale Extremstellen

DEFINITON
Wir nennen $v \in \Omega$ eine lokale Maximumstelle/Minimumstelle von f, wenn gilt:
$\exists U \in \mathcal{U}(v) : \forall u \in U : f(u) \leq f(v)$ bzw. $f(u) \geq f(v)$.
Wir bezeichnen die Menge der lokalen Maximumstellen $\text{LMAX}(f)$ und die Menge der lokalen Minimumstellen $\text{LMIN}(f)$. Die Vereinigung beider Mengen ist $\text{LEXT}(f)$.

DEFINITHEIT
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, dann nennen wir $A \ldots$
…positiv definit, wenn $\forall k \in [n] : \det(A_k) > 0$
…negativ definit, wenn $\forall k \in [n] : \det(A_k) < 0$
…indifinit, sonst.

DEFINITHEIT DER HESSE-MATRIX
Definiere die Menge der kritischen Stellen von f als $K(f) := \text{grad}_f^{\leftarrow}(0_{\mathbb{R}^n})$.
Es gilt für alle $v \in K(f)$:
1) $\mathbf{H}_f(v)$ positiv definit $\Longrightarrow v \in \text{LMIN}(f)$
2) $\mathbf{H}_f(v)$ negativ definit $\Longrightarrow v \in \text{LMAX}(f)$
3) $\mathbf{H}_f(v)$ indifinit $\Longrightarrow v \notin \text{LEXT}(f)$

DEFINITHEIT EINER 2×2-MATRIX
Definiere $A := \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
1) A positiv definit $\Longleftrightarrow a > 0 \wedge \det(A) > 0$.
2) A negativ definit $\Longleftrightarrow a < 0 \wedge \det(A) > 0$.
3) A indefinit $\Longleftrightarrow \det(A) < 0$

Stochastik

Mathematische Modellierung des Zufalls

σ-ALGEBRA, EVENTRAUM
Sei $\Omega \neq \emptyset$ Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ definieren wir $A^c := \Omega \setminus A$.
Wir nennen $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra über Ω, wenn gilt:
1) $\Omega \in \mathcal{E}$
2) $\forall A \in \mathcal{E} : A^c \in \mathcal{E}$
3) $\forall (A_i)_i \in \mathcal{S}(\mathcal{E}) : \bigcup_i A_i \in \mathcal{E}$
Wir nennen $(\Omega, \mathcal{E})$ **Eventraum** und Ω **Ergebnisraum**.
Die Elemente von $\mathcal{E}$ nennen wir **Event** und die Elemente von Ω **Ergebnis**.
Einen E'Raum nennen wir diskret, wenn Ω abzählbar ist

BEISPIELE
Für Ω ist $\{\emptyset, \Omega\}$ σ-Algebra über Ω. Dann ist $(\Omega, \{\emptyset, \Omega\})$ Eventraum, genau wie $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

WAHRSCHEINLICHKEITSMASS
Sei $(\Omega, \mathcal{E})$ Eventraum. Sei eine Funktion $\mathbb{P} : \mathcal{E} \longrightarrow [0, 1]$, dann nennen wir $\mathbb{P}$ Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{E})$, wenn gilt:
1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2) $\forall (A_i)_i \in \mathcal{S}(\mathcal{E}), \bigcap_i A_i = \emptyset : \mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$
Das Tripel $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ nennen wir Wahrscheinlichkeitsraum.

GRUNDLEGENDE EIGENSCHAFTEN DER WAHRSCHEINLICHKEIT

1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2) $\forall A, B \in \mathcal{E}, A \cap B = \emptyset\colon \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

3) $\forall A, B \in \mathcal{E}, A \subseteq B\colon \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$

4) $\forall A \in \mathcal{E} : \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

5) $\forall A, B \in \mathcal{E}\colon \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

UNIFORMES W'MASS

Nun beachte, dass wenn $\mathbb{P}(A)$ und $\mathbb{P}(B)$ bekannt sind für $A \cap B = \emptyset$, dass dann auch $\mathbb{P}(A \cup B)$ berechnet werden kann. Somit lassen sich Wahrscheinlichkeitsmaße konstruieren, wenn $\forall \omega \in \Omega : \mathbb{P}(\omega)$ bekannt ist. Eines solcher W'Maße ist das Uniforme mit $\mathbb{P}(\omega) := \frac{1}{|\Omega|}$. Dann gilt: $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

KONDITIONIERUNG

Seien $A, B \in \mathcal{E}$ so, dass $\mathbb{P}(B) > 0$. Wir definieren die W'keit von A konditioniert auf B, oder W'keit von A gegeben B als $\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

BAYES

Für $A, B \in \mathcal{E}$ mit $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$ gilt: $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \cdot \mathbb{P}(B|A)$

ODDS

Wir definieren für $A, B \in \mathcal{E}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ die Odds von A konditioniert auf B, bzw die Odds von A als:

$$\mathrm{Od}(A|B) := \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A^c|B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A^c \cap B)} & \mathbb{P}(A|B < 1) \\ +\infty & \mathbb{P}(A|B = 1) \end{cases}$$

$$\mathrm{Od}(A) := \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A^c)} & \mathbb{P}(A < 1) \\ +\infty & \mathbb{P}(A = 1) \end{cases}$$

Folgende Umrechnungsregeln gelten:

$o := \frac{p}{1-p}$ sind die odds für p Wahrscheinlichkeit.

$p := \frac{o}{o+1}$ ist die Wahrscheinlichkeit für o odds.

UNABHÄNGIGKEIT

Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine endliche Familie von Events. Wir nennen diese unabhängig, wenn gilt:

$\forall I' \subseteq I\colon \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I'} A_i\right) = \prod_{i \in I'} \mathbb{P}(A_i)$

Zufallsvariablen über diskreten Wahrscheinlichkeitsräumen

ZUFALLSVARIABLEN

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ diskreter W'Raum.

Wir nennen alle Funktionen $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen.

EVENTS ÜBER ZUFALLSVARIABLEN

Sei ϕ ein logischer Ausdruck der Form: „$X \in U / X \leq u / X = u$", dann bezeichnen wir damit das Event, für das für $X(\omega)$ der Ausdruck gilt für alle $\omega \in \Omega$. Somit lassen sich Events mit ZW elegant konstruieren, und es lassen sich Wahrscheinlichkeiten wie $\mathbb{P}(X = u) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = u\})$ berechnen.

Gesetze der neuen Events
1) $\mathbb{P}(\bot \mid \beta) = 0 \wedge \mathbb{P}(\top|\beta) = 1$
2) $\mathbb{P}(\neg\phi \mid \beta) = 1 - \mathbb{P}(\phi|\beta)$
3) $\mathbb{P}(\phi\vee\psi \mid \beta) = \mathbb{P}(\phi|\beta) + \mathbb{P}(\psi|\beta) - \mathbb{P}(\phi\wedge\psi|\beta)$

Verteilungen über Zufallsvariablen

Verteilung
Man sieht, dass die Funktion $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1], U \mapsto \mathbb{P}(X \in U)$ ein W'maß für den Eventraum $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ergibt gegeben der ZW X und dem diskretem Eventraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Diese Funktion nennen wir Verteilung von X.

Träger
Wir definieren den **Träger** von X als: $\mathrm{supp}(X) := \{u \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X = u) > 0\}$.
Offenbar ist $X^{\rightarrow}(\Omega) = \mathrm{img}(X)$ abzählbar (da Ω abzählbar ist), und es gilt: $\mathrm{supp}(X) \subseteq \mathrm{img}(X)$, also ist der Träger einer ZW über diskreten W'räumen abzählbar.
Somit schreibt man auch $\mathbb{P}(X{\in}U) = \mathbb{P}(X{\in}U \cap \mathrm{supp}(X)) = \sum_{u\in U\cap\mathrm{supp}(X)} \mathbb{P}(X{=}u) =: \sum_{u\in U} \mathbb{P}(X{=}u)$.

Probability Mass Function (PMF)
Wir nennen $\rho_X \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1],\ u \mapsto \mathbb{P}(X = u)$ die PMF von X.