MATHE C KLAUSURZETTEL

HENRI HEYDEN
stu240825

Analysis

Integration

RIEMANN SUMME
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, seien (x, ξ) Partition und Stützstellen aus $[a,b]$.
Dann nennen wir $R(f, x, \xi) := \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \cdot f(\xi_i)$ Riemann Summe.

INTEGRIERBARKEIT
Wir nennen f integrierbar, wenn
$\exists R_0 \in \mathbb{R} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x, \xi) \in \mathrm{PS}(a, b, \delta) : |R(f, x, \xi) - R_0| < \epsilon$ gilt.
Das Integral ist eindeutig, schreibe $\int_a^b f$ oder $\int f$ hierfür.
Wir schreiben auch $\int f(x)\mathrm{d}x := \int f$
Ist f integrierbar, dann kann man das Integral mit einer Beliebigen Folge an $(x_n, \xi_n)_n$ finden wessen Feinheit den Limes 0 hat, sodass die Riemann-Summe konvergiert.
f ist genau dann integrierbar, wenn für alle 2 solcher Folgen ihre Differenz immer zu 0 konvergiert.

STETIG UND KOMPAKT
Eine Funktion f:
…ist stetig in $x \in \mathrm{dom}(f)$, wenn alle Funktionslimetes zu x gleich sind.
…ist beschränkt, wenn ihre Domain eine obere und untere Schranke hat.
…ist abgeschlossen, wenn das komplement ihrer Domain offen ist.
…ist kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.
Ist eine Funktion kompakt stetig, dann ist sie gleichmäßig stetig und somit integrierbar.

ABSCHÄTZUNGEN
Für $f \leq g$ gilt: $\int f \leq \int g$.
Es gilt: $(b-a) \cdot \inf(f) \leq \int_a^b f \leq (b-a) \cdot \sup(f)$

Hauptsatz der Differenzialrechnung

Sei $f, F : \Omega \to \mathbb{R}$ so, dass $F' = f$ gilt.
Dann gilt: $\int f = F(\sup(f)) - F(\inf(f)) = F(b) - F(a)$ für $\Omega = [a,b]$.

Stochastik