1 Vektorji in matrike

1.1 Vektor je *urejena n-terica stevil*, ki jo obicajno zapisemo kot stolpec

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1.2 Produkt *vektorja* $\vec{x}$ s skalarjem α je vektor

$$\alpha\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

1.3 Vsota *vektorjev* $\vec{x}$ in $\vec{y}$ je vektor

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

1.4 Nicelni vektor $\vec{0}$ je tisti vektor, za katerega je $\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$ za vsak vektor $\vec{a}$. Vse komponente nicelnega vektorja so enake 0. Vsakemu vektorju $\vec{a}$ pripada nasprotni vektor -$\vec{a}$, tako da je $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ Razlika vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vsota $\vec{a} + (-\vec{b})$ in jo navadno zapisemo kot $\vec{a} - \vec{b}$.

Lastnosti vektorske vsote

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutativnost)
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (asociativnost)
- $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$ (distributivnost)

1.5 Linearna kombinacija vektorjev $\vec{x}$ in $\vec{y}$ je vsota

$$a\vec{x} + b\vec{y}$$

1.6 Skalarni produkt vektorjev

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ je stevilo}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

alternativno:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = ||\vec{x}||||\vec{y}|| \cos\phi$$

Lastnosti skalarnega produkta

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (komutativnost)
- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$ (aditivnost)
- $\vec{x} \cdot (a\vec{y}) = a(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (a\vec{x}) \cdot \vec{y}$ (homogenost)
- $\forall \vec{x}$ *velja* $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$

1.7 Dolzina vektorja $\vec{x}$ je

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

1.8 Enotski vektor je vektor z dolzino 1.
1.9 Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}||||\vec{v}||,$$

enakost velja, v primeru, da sta vektorja vzporedna.
1.10 Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||.$$

1.11 Vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ sta ortogonalna (pravokotna) natakno takrat, kadar je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

1.12 Ce je ϕ kot med vektorjema $\vec{x}$ in $\vec{y}$, potem je

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}||||\vec{y}||} = \cos\phi$$

1.13 Vektorski produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

Lastnosti vektorskega produkta

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (aditivnost)
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ (!komutativnost)
- $(a\vec{a}) \times \vec{b} = a(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (a\vec{b})$ (homogenost)
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ *je* $\perp$ *na vektorja* $\vec{a}$ *in* $\vec{b}$
- $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}||||\vec{b}|| \sin\phi$
- Dolzina vektorskega produkta je ploscina paralelograma, katerega vektorja oklepata

1.14 Mesani produkt$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ vektorjev $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ v R^3 je skalarni produkt vektorjev $\vec{a} \times \vec{b}$ in $\vec{c}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Lastnosti mesanega produkta

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
- $(x\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = x(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (homogenost)
- $(\vec{a}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{v}, \vec{c})$
- Absolutna vrednost mesanega produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je enaka prostornini paralepipeda

Premice v R^3
Premico določata smerni vektor $\vec{p} = [a, b, c]^T$ in točka $A(x_0, y_0, z_0)$.

- Parametrična oblika: $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}$, $t \in R$
- Kanonična oblika: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

Ravnine v R^3
Ravnina z normalo $\vec{n} = [a, b, c]^T$ skozi točko $A(x_0, y_0, z_0)$ ima enačbo

$$(\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n} = 0$$

oziroma

$$ax + by + cz = d$$

Razdalje
Razdalja od tocke P do ravnine, v kateri lezi tocka A :

$$\cos\phi = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r_P} - \vec{r_A})}{||\vec{n}||||\vec{r_P} - \vec{r_A}||} \text{ oz. } d = |\frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}(\vec{r_P} - \vec{r_A})|$$

Razdalja od tocke P do premice, katera gre skozi tocko A:

$$d = \frac{||\vec{e} \times (\vec{r_P} - \vec{r_A})||}{||\vec{e}||}$$

Projekcije vektorjev

Naj bo $proj_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{x}$ projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$. Izracunamo jo po sledeci formuli:

$$proj_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$$

1.15 Matrika dimenzije $m \times n$ je tabela $m \times n$ stevil, urejenih v m vrstic in n stolpcev:

$$A^{m\times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

1.16 Matrika, katere elementi so enaki nic povsod zunaj glavne diagonale, se imenuje diagonalna matrika. Za diagonalno matriko je $a_{ij} = 0$, kadarkoli velja $i \neq j$

1.17 Matrika $A^{n\times n}$ je spodnjetrikotna, kadar so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \ kadar\ je\ i < j$$

1.18 Matrika $A^{n\times n}$ je zgornjetrikotna, kadar so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \ kadar\ je\ i > j$$

1.19 Matrika je trikotna, ce je zgornjetrikotna ali spodnjetrikotna.

1.20 Dve matriki A in B sta enaki natanko takrat, kadar imata enaki dimenziji in kadar so na istih mestih v obeh matrikah enaki elementi:

$$A^{m\times n} = B^{p\times q} \implies m = p \text{ in } n = q,$$
$$a_{ij} = b_{ij} \ za\ vsak\ i = 1, ..., m \text{ in } j = 1, ..., n$$

1.21 Produkt matrike s skalarjem dobimo tako, da vsak element matrike pomnozimo s *skalarjem*

$$aA^{m\times n} = \begin{bmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} & \dots & ax_{1n} \\ ax_{21} & ax_{22} & ax_{23} & \dots & ax_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax_{m1} & ax_{m2} & ax_{m3} & \dots & ax_{mn} \end{bmatrix}$$

1.22 Vsoto dveh matrik enake dimenzije dobimo tako, da sestejemo istolezne elemente obeh matrik:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & ax_{12} + b_{12} & \dots & ax_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & ax_{22} + b_{22} & \dots & ax_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & ax_{m2} + b_{m3} & \dots & ax_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Osnovne matricne operacije

- $A + B = B + A$ (komutativnost)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativnost)
- $a(A + B) = aA + aB$ (mnozenje s skalarjem)
- $A + (-A) = 0$
- $x(yA) = (xy)A \ in\ 1 \cdot A = A$

1.23 Transponirana matrika k matriki A reda $m \times n$ je matrika reda $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Lastnosti transponiranja matrik

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $(xA)^T = xA^T$
- $(A^T)^T = A$

1.24 Produkt matrike A in vektorja $\vec{x}$ je linearna kombinacija stolpcev matrike A, utezi linearne kombinacije so komponente vektorja $\vec{x}$:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

1.25 Produkt vrstice $\vec{x}$ z matriko A je linearna kombinacija vrstic matrike A, koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice $\vec{y}$:

$$\vec{y} \cdot A = \begin{bmatrix} y_1, y_2, y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\vec{u} \\ y_2\vec{v} \\ y_3\vec{w} \end{bmatrix}$$

1.26 Produkt matrik A in B je matrika, katere stolpci so zaporedoma produkti matrike A s stolpci matrike B:

$$AB = A\begin{bmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \end{bmatrix}$$

1.27 Element c_{ij} v $i - ti$ vrstici in $j - tem$ stolpcu produkta C = AB je skalarni produkt $i - te$ vrstice A in $j - tega$ stolpca matrike B

$$c_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

1.28 Produkt matrik A in B je matrika, katere vrstice so zaporedoma produkti vrstic matrike A z matriko B:

$$\begin{bmatrix} i - ta\ vrstica\ A \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} i - ta\ vrstica\ AB \end{bmatrix}$$

Lastnosti matricnega produkta

- $AB \neq BA$ (!komutativnost)
- $(xA)B = x(AB) = A(xB)$ (homogenost)
- $C(A + B) = CA + CB$ (distributivnost)
- $A(BC) = (AB)C$ (asociativnost)
- $(AB)^T = B^T A^T$

V splosnem; komutativnost matricnega mnozenja velja samo, ko sta matriki diagonalizabilni.

1.29 Vrstice matrike A z n stolpci naj bodo $a^1, \dots, a^n$, stolpci matrike B z n vrsticami pa $b_1, \dots, b_n$. Potem je

$$AB = a^1 b_1 + \dots + a^n b_n$$

1.30 Ce delitev na bloke v matriki A ustreza delitvi v matirki B, potem lahko matriki pomnozimo blocno:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

1.31 Kvadratna matrika I_k reda $k \times k$, ki ima vse diagonalne elemente enake 1, vse ostale elemente pa 0 ima lastnost, da za vsako matriko A reda $m \times n$ velja $AI_n = A$ in $I_m A = A$. Matrika I_k se imenuje enotska ali identicna matirka.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

1.32 Cauchy-Schwarzova neenakost: Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}||||\vec{v}||$$

Enakost velja, v primeru, da vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ kažeta v isto ali nasprotno smer.

1.33 Trikotniška neenakost: Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$$

2 Sistemi linearnih enacb

2.1 Kvadratna matrika A je obrnljiva, ce obstaja taka matrika A^{-1}, da je

$$AA^{-1} = I \; in \; A^{-1}A = I$$

Matrika A^{-1} (ce obstaja) se imenuje matriki A inverzna matrika. Matrika, ki ni obrnljiva, je singularna. Matrika **NI** obrnljiva, kadar je $rang(A) < n$!

2.2 Kvadratna matirka reda n je obrnljiva natanko tedaj, ko pri gaussovi eliminaciji dobimo n pivotov.

2.3 Vsaka obrnljiva matrika ima eno samo inverzno matriko.

2.4 Inverzna matrika inverzne matrike A^{-1} je matrika A

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2.5 Ce je matrika A obrnljiva, potem ima sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ edino resitev $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

2.6 Ce obstaja nenicelna resitev $\vec{x}$ enacbe $A\vec{x} = \vec{0}$, matrika A ni obrnljiva(je singularna).

2.7 Ce sta matirki A in B istega reda obrnljivi, je obrnljiv tudi produkt $A \cdot B$ in

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Pozor! Pravilo

$$(AB)^p = A^p B^p$$

velja le v primeru, ko matriki A in B komutirata, torej $AB = BA$.

2.8 Inverz transponirane matrike je transponirana matrika inverza

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2.9 Inverz diagonalne matrike z diagonalnimi elementi a_{ii} je diagonalna matrika, ki ima na diagonali elemente a_{ii}^{-1}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

2.10 Za izracun inverza matrike A, uporabimo gausovo eliminacijo nad matriko $[A|I]$

$$[A|I] = [I|A^{-1}]$$

2.11 Matrika A je simetricna $\Leftrightarrow A^T = A$. Za elemente a_{ij} simetricne matirke velja $a_{ij} = a_{ji}$. Za simetricno matriko vedno velja, da je kvadratna $A \in R^{n \times n}$.

2.12 Ce je matrika A simetricna in obrnljiva, je tudi A^{-1} simetricna.

2.13 Ce je R poljubna (lahko tudi pravokotna) matrika, sta $R^T R$ in RR^T simetricni matriki.

3 Vektorski prostori

3.1 Realni vektorski prostor V je mnozica "vektorjev" skupaj z pravili za

- sestevanje vektorjev,
- mnozenje vektorja z realnim stevilom (skalarjem)

Ce sta $\vec{x}$ in $\vec{y}$ poljubna vektorja v V, morajo biti v V tudi

- vsota $\vec{x} + \vec{y}$ in
- produkti $\alpha\vec{x}$ za vse $\alpha \in R$

V vektorskem prostoru V morajo biti tudi VSE linearne kombinacije $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$

Pravila za operacije v vektorskih prostorih

Operaciji sestevanja vektorjev in mnozenja vektorja s skalarjem v vektorskem prostoru morajo zadoscati naslednjim pravilom:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativnost)
- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (asociativnost)
- obstaja en sam nenicelni vektor $\vec{0}$, da velja $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- za vsak $\vec{x}$ obstaja natanko en $-\vec{x}$, da je $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
- $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ (distributivnost)
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

3.2 Podmnozica U vektorskega prostora V je *vektorski podprostor*, ce je za vsak par vektorjev $\vec{x}$ in $\vec{y}$ iz U in vsako realno stevilo α tudi

- $\vec{x} + \vec{y} \in U$ in
- $\alpha\vec{x} \in U$.

3.3 Mnozica vektorjev U je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je vsaka linearna kombinacija vektorjev iz U tudi v U.

Lastnosti vektorskih podprostorov

- Vsak vektorski podprostor nujno vsebuje nicelni vektor $\vec{0}$
- Presek dveh podprostorov vektorskega podprostora je tudi podprostor

3.4 Stolpicni prostor C(A) matrike $A \in R^{m \times n}$ je tisti podprostor vektorskega prostora R^m, ki vsebuje natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike A.

Izracunamo ga tako, da matriko A transponiramo in izvedemo operacijo gaussove eliminacije nad A^T. Vrstice katere ostanejo po gaussivi eliminaciji so linearno neodvisni vektorji, kateri tvorijo stoplicni prostor matrike A, $C(A)$. *neformalno: linearna ogrinjaca stolpcev matrike (npr. ce imas 5 stolpcev pa lahko 2 zapises kot linearno kombinacijo ostalih 3 bo imel column space 3 elemente)*

3.5 Sistem linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je reslijv natanko tedaj, ko je vektor $\vec{b} \in C(A)$

3.6 Naj bo matrika $A \in R^{m \times n}$. Mnozica resitev homogenega sistema linearnih enacb je podprostor v vektorskem prostoru R^n.

3.7 Mnozica vseh resitev sistema linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ se imenuje nicelni prostor matirke A. Oznacujemo ga z N(A). *neformalno: mnozica vektorjev, ki se z neko matriko zmnozijo v nicelni vektor. Matriko A samo eliminiras po gaussu in nato dobljene resitve enacis z 0.*

3.8 Ce je matrika A kvadratna in obrnljiva, potem N(A) vsebuje samo vektor $\vec{0}$

3.9 Matrika ima *stopnicasto* obliko, kadar se vsaka od njenih vrstic zacne z vsaj eno niclo vec kot prejsnja vrstica.

3.10 Prvi element, razlicen od nic v vsaki vrstici, je *pivot*. Stevilo pivotov v matriki se imenuje rang matrike. Rang matrike A zapisemo kot $rang(A)$.

3.11 Rang matrike ni vecji od stevila vrstic in ni vecji od stevila stolpcev matrike.

3.12

Stevilo prostih neznank matrike = st. stolpcev - rang matrike

3.13

1. Visoka in ozka matrika $(m > n)$ ima poln stolpicni rang, kadar je $rang(A) = n$
2. Nizka in siroka matrika $(m < n)$ ima poln vrsticni rang, kadar je $rang(A) = m$
3. Kvadratna matrika $(n = m)$ ima poln rang, kadar je $rang(A) = m = n$

3.14 Za vsako matriko A s polnim stolpicnim rangom $r = n \leq m$, velja:

1. Vsi stolpci A so pivotni stolpci
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ nima prostih neznank, zato tudi nima posebnih resitev
3. Nicelni prostor $N(A)$ vsebuje le nicelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$
4. Kadar ima sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ resitev(kar ni vedno res!), je resitev ena sama
5. Reducirana vrsticna oblika matrike (A) se da zapisati kot

$$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \times n \ enotska \ matrika \\ m - n \ vrstic \ samih \ nicel \end{bmatrix}$$

3.15 Za vsako matriko A s polnim vrsticnim rangom $r = m \leq n$ velja:

1. Vse vrstice so pivotne, ni prostih vrstic in U (stopnicasta oblika) in R(reducirana stopnicasta oblika) nimata nicelnih vrstic
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je resljiv za vsak vektor $\vec{b}$
3. Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ ima $n - r = n - m$ prostih neznank, zato tudi prav toliko posebnih resitev
4. Stolpicni prostor $C(A)$ je ves prostor R^m

3.16 Za vsako kvadratno matriko A polnega ranga (rang(A) = m = n) velja:

1. Reducirana vrsticna oblika matrike A je enotska matrika
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ ima natancno eno resitev za vsak vektor desnih strani $\vec{b}$
3. Matrika A je obrnljiva
4. Nicelni prostor matrike A je samo nicelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$
5. Stolpicni prostor matrike A je cel prostor $C(A) = R^m$

3.17 Vektorji $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$ so linearno neodvisni, ce je

$$0\vec{x_1} + 0\vec{x_2} + \cdots + 0\vec{x_n}$$

edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka vektorju $\vec{0}$. Vektorji $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$ so linearno odvisni, *ce niso linearno neodvisni*.

3.18 Ce so vektorji *odvisni*, lahko vsaj enega izrazimo z ostalimi.

3.19 Ce je med vektorji $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ tudi nicelni vektor, so vektorji *linearno odvisni*.

3.20 Vsaka mnozica n vektorjev iz R^n je odvisna, kadar je $n > m$.

3.21 Stolpci matrike A so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima homogena enacba $A\vec{x} = \vec{0}$ edino resitev $\vec{x} = \vec{0}$.

3.22 Kadar je $rang(A) = n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisni. Kadar je pa $rang(A) < n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisni.

3.23 Kadar je $rang(A) = m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisne. Kadar je pa $rang(A) < m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisne.

3.24 Vrsticni prostor matrike A je podprostor v R^n, ki ga razpenjajo vrstice matrike A.

3.25 Vrsticni prostor matrike A je $C(A^T)$, stolpicni prostor matrike A^T.

3.26 *Baza vektorskega prostora* je mnozica vektorjev, ki

1. je linearno neodvisna in
2. napenja cel prostor.

3.27 Vsak vektor iz vektorskega prostora lahko na en sam nacin izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

3.28 Vektorji $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$ so baza prostora R^n natanko tedaj, kadar je matrika, sestavljena iz stolpcev $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$, obrnljiva.

3.29 Prostor R^n ima za $n > 0$ neskoncno mnogo razlicnih baz.

3.30 Ce sta mnozici vekotrjev $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_m}$ in $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ obe bazi istega vektorskega prostora, potem je $m = n \implies$ vse baze istega vektorskega prostora imajo isto stevilo vektorjev.

3.31 *Dimenzija* vektroskega prostora je stevilo baznih vektorjev.

3.32 Dimenziji stolpicnega prostora $C(A)$ in vrsticnega prostora $C(A^T)$ sta enaki rangu matrike A

$$dim(C(A)) = dim(C(A^T)) = rang(A).$$

3.33 Dimenzija nicelnega prostora $N(A)$ matrike A z n stolpci in ranga r je enaka $dim(N(A)) = n - r$.

3.34 Stolpicni prostor $C(A)$ in vrsticni prostor $C(A^T)$ imata oba dimenzijo r. Dimenzija nicelnega prostora $N(A)$ je $n - r$, Dimenzija levega nicelnega prostora $N(A^T)$ pa je $m - r$.

3.35 Vsako matriko ranga 1 lahko zapisemo kot produkt(stolpcnega) vektorja z vrsticnim vektorjem $A = \vec{u}\vec{v}^T$.

4 Linearne preslikave

4.1 Preslikava $A : U \to V$ je linearna, ce velja

1. aditivnost: $A(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = A\vec{u}_1 + A\vec{u}_2$ za vse $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$,
2. homogenost: $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$ za vse $\alpha \in R$ in $\vec{u} \in U$.

Oziroma v enem koraku:

$$A(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) = \alpha A(\vec{u}_1) + \beta A(\vec{u}_2).$$

Pozor! Preslikava ni linearna, ce $A(\vec{0}) \neq \vec{0}$.

4.2 Preslikava $A : U \to V$ je linearna natanko tedaj, ko velja

$$A(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = \alpha_1 A\vec{u}_1 + \alpha_2 A\vec{u}_2$$

za vse $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ in vse $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$.

4.3 Ce je A *linearna preslikava*, je $A\vec{0} = \vec{0}$.

4.4 Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava in $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{u}_i$ linearna kombinacija vektorjev. Potem je A$(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A\vec{u}_i$.

4.5 Naj bo $\beta = \{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}\}$ baza za vektorski prostor U. Potem je linearna preslikava $A : U \to V$ natanko dolocena, ce poznamo slike baznih vektorjev.

4.6 Naj bo $\beta = \{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}\}$ baza za U in $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$. Potem obstaja natanko ena linearna preslikava $A : U \to V$, za katero je $A\vec{u}_i = \vec{v}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$.

4.7 Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava. Potem mnozico

$$kerA = \{\vec{u} \in U; A\vec{u} = \vec{0}\}$$

imenujemo *jedro* linearne preslikave. Ker je $A\vec{0} = \vec{0}$, je $\vec{0} \in$ ker A za vse A. Zato je jedro vedno neprazna mnozica. *Ce je matrika* $A\phi$ ***enotska*** *preslikava za* ϕ*, potem velja*

$$ker\phi = N(A).$$

4.8 Jedro linearne preslikave $A : U \to V$ je vektorski podprostor v U.

4.9 Mnozico

$$im\ A = \{\vec{v} \in V; obstaja\ tak\ \vec{u} \in U,\ da\ je\ \vec{v} = A\vec{u}\}$$

imenujemo *slika* linearne preslikave $A : U \to V$. *Ce je matrika* $A\phi$ ***enotska*** *preslikava za* ϕ*, potem velja*

$$im\phi = C(A).$$

4.10 Ce je $A : U \to V$ linearna preslikava, potem je njena slika $im\ A$ vektorski podprostor v V.

4.11 Ce je $A : U \to V$ linearna preslikava, in je rang matrike te preslikave v standardni bazi poln, potem lahko sklepamo, da ima ta preslikava **trivialno jedro**.

5 Ortogonalnost

5.1 Podprostora U in V vektorskega prostora sta med seboj ortogonalna, ce je vsak vektor $\vec{u} \in U$ ortogonalen na vsak vektor $\vec{v} \in V$.

5.2 Za vsako matriko $A \in R^{m \times n}$ velja:

1. Nicelni prostor $N(A)$ in vrsticni prostor $C(A^T)$ sta ortogonalna podprostora R^n
2. Levi nicelni prostor $N(A^T)$ in stolpicni prostor $C(A)$ sta ortogonalna podprostora prostora R^m.

5.3 Ortogonalni komplement $V^\perp$ podprostora V vsebuje VSE vektorje, ki so ortogonalni na V.

5.4 Naj bo A matrika dimenzije $m \times n$.

- Nicelni prostor $N(A)$ je ortogonalni komplement vrsticnega prostora $C(A^T)$ v prostoru R^n
- Levi nicelni prostor $N(A^T)$ je ortogonalni komplement stolpicnega prostora $C(A)$ v prostoru R^m.

krajse:

$$N(A) = C(A^T)^\perp$$
$$N(A^T) = C(A)^\perp$$

tukaj lahko vedno pomnozimo s komplementom, da dobimo npr.

$$N(A)^\perp = C(A^T)$$

dodatek:

$$dimN(A) = st.stolpcev - rang(A)$$
$$dimN(A^T) = st.vrstic - rang(A)$$
$$dimC(A) = dimC(A^T) = rang(A)$$

5.5 Za vsak vektor $\vec{y}$ v stolpicnem prostoru $C(A)$ obstaja v vrsticnem prostoru $C(A^T)$ en sam vektor $\vec{x}$, da je $A\vec{x} = \vec{y}$.

5.6 Ce so stolpci matrike A linearno neodvisni, je matrika $A^T A$ obrnljiva.

5.7 Matrika P je projekcijska, kadar

- je simetricna: $P^T = P$ in
- velja $P^2 = P$.

5.8 Ce je P projekcijska matrika, ki projecira na podprostor U, potem je $I - P$ projekcijska matrika, ki projecira na $U^\perp$, ortogonalni komplement podprostora U.

5.9 Vektorji $\vec{q_1}, \vec{q_2}, \ldots, \vec{q_n}$ so ortonormiranim kadar so ortogonalni in imanjo vsi dolzino 1, torej

$$\vec{q_i}^T \vec{q_i} = \begin{cases} 0\ ko\ je\ i \neq j\ pravokotni\ vektorji \\ 1\ ko\ je\ i = j\ enotski\ vektorji \end{cases}$$

za matriko $Q = [\vec{q_1}, \vec{q_2} \ldots \vec{q_n}]$ velja $Q^T Q = I$.

5.10 Vektorji $\vec{q_1}, \ldots, \vec{q_n}$ naj bodo ortonormirani v prostoru R^m. Potem za matriko

$$Q = [\vec{q_1}\vec{q_2} \ldots \vec{q_n}]$$

velja, da je $Q^T Q = I_n$ enotska matrika reda n.

5.11 Matrika Q je ortogonalna, kadar je

1. kvadratna in
2. ima ortonormirane stolpce.

5.12 Ce je Q ortogonalna matirka, potem je obrnljiva in

$$Q^{-1} = Q^T$$
$$dimU^\perp = n - dimU$$
$$(U^\perp)^\perp = U$$

5.13 Mnozenje z ortogonalno matriko ohranja dolzino vektorjev in kote med njimi. Ce je Q ortogonalna matrika, potem je

$$||Q\vec{x}|| = ||\vec{x}|| \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in}$$
$$(Q\vec{x})^T Q\vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in } \vec{y}$$

5.14 Ce sta Q_1 in Q_2 ortogonalni matriki, je tudi produkt $Q = Q_1 Q_2$ ortogonalna matrika.

5.15 **Gram-Schmidtova** ortogonalizacija. Za vhod uporabimo Linearno ogrinjaco linearno neodvisnih vekotrjev. Po gramschmidtovi ortogonalizaciji pa dobimo paroma ortogonalne vektorje. Postopek:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1$$
$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - proj_{\vec{u}_1}\vec{v}_2$$
$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - proj_{\vec{u}_1}\vec{v}_3 - proj_{\vec{u}_2}\vec{v}_3$$
$$\vdots$$

Po tem postopku dobimo paroma ortogonalne vektorje po Gram-Schmidtovi ortogonalizaciji.

5.16 **QR Razcep:** Iz linearno neodvisnih vektorjev $a_1, \ldots, a_n$ z *Gram-Schmidtovo* ortogonalizacijo dobimo ortonormirane vektorje $q_1, \ldots, q_n$. Matriki A in Q s temi stolpci zadoscajo enacbi $A = QR$, kjer je R zgornjetrikotna matrika.

- Najprej z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo poiscemo linearno neodvisne vektorje matrike A
- Vektorje normiramo in jih zapisemo v matriko Q.
- Matriko R dobimo tako, da matriko Q^T pomnozimo z matriko A

$$R = Q^T A$$

Tako smo prisli do vseh elementov v QR razcepu matrike A.

Sedaj ko imamo izracunane vse elemente lahko zapisemo se projekcijsko matriko. To je matrika pravokotne projekcije na $C(Q) = C(A)$. Njen izracun je preprost:

$$QQ^T = pravokotna\ projekcija\ na\ C(Q) = C(A)$$

Sedaj lahko to projekcijsko matriko pomnozimo z desne s poljubnim vektorjem in ugotovimo kam se preslika v prostoru $C(A)$. V nasprotnem primeru, ce bi pa zeleli imeti projekcijsko matriko, s katero bi radi videli kam se vektor preslika v prostoru $N(A^T)$, bi pa od identicne matrike odsteli projekcijsko matriko za $C(Q)$.

$$I - QQ^T = pravokotna\ projekcija\ na\ C(A)^\perp\ = N(A^T)$$

5.17 Vektorski prostor ι je mnozica vseh neskoncnih zaporedij $\vec{u}$ s koncno dolzino

$$||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u_1}^2 + \vec{u_2}^2 + \cdots < \infty$$

5.18 Predoloceni sistemi

$$A^T A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^T \vec{f}$$

Kjer je A matrika sistemov linearnih enacb in $\vec{f}$ vektor pricakovanih resitev po gaussovi eliminaciji zgornje enacbe, dobimo spremenljivke, ki predstavljao najboljso aproksimacijo vseh kombinaicij rezultatov in vhodnih spremenljivk.

6 Determinante

6.1 Determinanta enotske matirke je $det(I) = 1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\ in \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

6.2 Determinanta spremeni predznak, ce med seboj zamenjamo dve vrstici.

Dodatna lastnost:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$$

6.3 Determinanta je linearna funkcija vsake vrstice posebej. To pomeni, da se

1. determinanta pomnozi s faktorjem t, ce eno vrstico determinante(vsak element v tej vrstici) pomnozimo s faktorjem t.

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

2. determinanta je vsota dveh determinant, ki se razlikujeta le v eni vrstici, ce je v provitni determinanti ta vrstica vsota obeh vrstic, ostale vrstice pa so enake v vseh treh determinantah.

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

Pozor! Kadar mnozimo matriko A s skalarjem t, se vsak element matrike pomnozi s skalarjem. Ko racunamo determinanto produkta matirke s skalarjem tA, skalar t izpostavimo iz vsake vrstice posebej, zato je $det(tA) = t^n det(A)$, kjer je n stevilo vrstic (ali stolpcev) determinante.

6.4 Matrika, ki ima dve enaki vrstici, ima determinanto enako 0.

6.5 Ce v matriki od poljubne vrstice odstejemo mnogokratnik neke druge vrstice, se njena determinanta ne spremeni.

6.6 Naj bo A poljubna kvadratna matirka $n \times n$ in U njena vrsticno-stopnicasta oblika, ki jo dobimo z *Gaussovo eliminacijo*. Potem je

$$det(A) = \pm det(U).$$

6.7 Determinanta, ki ima vrstico samih nicel, je enaka 0.

6.8 Determinanta trikotne matrike A je produkt diagonalnih elementov:

$$det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

6.9 Determinanta singularne matrike je enaka 0, determinanta obrnljive matrike je razlicna od 0.

6.10 Determinanta produkta dveh matrik je enaka produktu determinant obeh matrik:

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

6.11 Determinanta inverzne matrike je enaka

$$det(A^{-1}) = 1/det(A)$$

in determinanta potence A^n matrike A je

$$det(A^n) = (det(A))^n$$

ter determinanta transponirane matrike je enaka determinanti originalne matrike, saj ko naredimo razvoj po vrsticah, pridemo do enakih elementov po diagonali.

$$det(A) = det(A^T).$$

6.12 Transponirana matrika A^T ima isto determinanto kot A.

6.13 Recap dovoljenih operacij nad determinanto

1. Ce zamenjamo dve vrstici, se **spremeni** predznak determinante

2. Vrednost determinante se ne spremeni, ce neki vrstici pristejemo poljuben veckratnik katerekoli druge vrstice.

3. Ce vse elemente neke vrstice pomnozimo z istim stevilom α, se vrednost determinante pomnozi z α.

6.14 Vsaka lastnost, ki velja za vrstice determinante, velja tudi za njene **stolpce**. Med drugim:

- Determinanta spremeni predznak, ce med seboj zamenjamo dva stolpca

- Determinanta je enaka 0, ce sta dva stolpca enaka

- Determinanta je enaka 0, ce so v vsaj enem stolpcu same nicle.

6.15 (kofaktorska formula) Ce je A kvadratna matrika reda n, njeno determinanto lahko izracunamo z razvojem po $i - ti$ vrstici

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}.$$

Kofaktorje C_{ij} izracunamo kot $C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, kjer je D_{ij} determinanta, ki jo dobimo, ce v A izbrisemo i-to vrstico in j-ti stolpec.

6.16 Inverzna matrika A^{-1} matrike A je transponirana matrika kofaktorjev, deljena z determinanto $|A|$:

$$A^{-1} = \frac{C^T}{det(A)},$$

kjer je C matrika kofaktorjev matrike A.

6.17 Ploscina paralelograma, dolocenega z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b} \in R^2$ je enaka $\det([\vec{a}\vec{b}])$, to je absolutni vrednosti determinante s stolpcema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

6.18 Mesani produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je enak determinanti matrike, ki ima te tri vektorje kot stolpce.

6.19 Naj bo A matrika $R^{n\times n}$

$$A\ je\ obrnljiva \iff detA \neq 0$$

$$A^{-1}\ ne\ obstaja \iff detA = 0$$

7 L. vrednosti in vektorji

7.1 Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$, za katerega je $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ lastni vektor. Stevilo λ je lastna vrednost. **Pozor!** Nicelni vektor $\vec{0}$ ne more biti lastni vektor. Lahko pa je lastna vrednost enaka 0.

7.2 Ce ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor $\vec{x}$, potem ima matrika A^2 lastno vrednost λ^2 in isti lastni vektor $\vec{x}$.

7.3 Ce ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor $\vec{x}$, potem ima matrika A^k lastno vrednost λ^k in isti lastni vektor $\vec{x}$.

7.4 Ce ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor $\vec{x}$, potem ima inverzna matrika lastno vrednost $1/\lambda$ in isti lastni vektor $\vec{x}$.

7.5 Sled kvadratne matrike A reda n je vsota njenih diagonalnih elementov.

$$sled(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

7.6 Sled matrike je enaka vsoti vseh lastnih vrednosti, stetih z njihovo veckratnostjo. Ce so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike reda n, potem je sled enaka *vsoti*

$$sled(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n,$$

determinanta matrike pa *produktu* lastnih vrednosti

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \ldots \lambda_n.$$

Lastnosti sledi Za matrike $A, B, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja

1. $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$,
2. $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$,
3. $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$,
4. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$,
5. $\mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$ za vsako obrnljivo matriko P.
6. $\mathrm{tr}(ABP) = \mathrm{tr}(APB$, ce so A,B,P simetricne matirke.
7. $\mathrm{tr}(ABP) = \mathrm{tr}(A^T B^T P^T)$.

Za poljubna vektorja $x, y \in \mathbb{R}^n$ velja:

$$\mathrm{tr}(xy^T) = \mathrm{tr}(x^T y)$$

7.7 Ce ima matrika A lastno vrednost λ, ki ji pripada lastni vektor $\vec{x}$, potem ima matrika $A+cI$ lastno vrednost $\lambda+c$ z istim lastnim vektorjem $\vec{x}$ (velja samo z enotskimi matrikami I).

7.8 Lastne vrednosti trikotne matrike so enake diagonalnim elementom.

7.9 Denimo, da ima matrika $A \in R^{n\times n}$ n linearno neodvisnih lastnih vektorjev $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$. Ce jih zlozimo kot stolpce v matriko S

$$S = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n],$$

potem je T =: $S^{-1}AS$ diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ na diagonali

$$S^{-1}AS = T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Pozor! Lastni vektorji v matriki S morajo biti v istem vrstnem redu kot lastne vrednosti v matriki T.

7.10 Ce je $A = STS^{-1}$, potem je $A^k = ST^kS^{-1}$ za vsak $k \in N$.

7.12 Vse lastne vrednosti realne simetricne matrike so realne.

7.13 Lastni vektorji realne simetricne matrike, ki pripadajo razlicnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.

7.14 Schurov izrek Za vsako kvadratno matriko reda n, ki ima le realne lastne vrednosti, obstaja taka ortogonalna matrika Q, da je

$$Q^T AQ = T$$

zgornjetrikotna matrika, ki ima lastne vrednosti(lahko so kompleksne) matrike A na diagonali.

7.15 Spektralni izrek Vsako simetricno matriko A lahko razcepimo v produkt $A = QTQ^T$, kjer je Q ortogonalna matrika lastnih vektorjev, T pa diagonalna z lastnimi vrednostmi matrike A na diagonali.

7.16 Vsako realno simetricno matriko lahko zapisemo kot linearno kombinacijo matrik ranga 1

$$A = \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^T + \lambda_2 \vec{q}_2 \vec{q}_2^T + \cdots + \lambda_n \vec{q}_n \vec{q}_n^T,$$

kjer so $\vec{q}_i$ stolpci matrike Q (torej lastni vektorji matrike A).

7.17 Za simetricno nesingularno matriko A je stevilo pozitivnih pivotov enako stevilu pozitivnih lastnih vrednosti.

7.18 Kvadratna matrika je pozitivno definirana, kadar so vse njene lastne vrednosti pozitivne.

7.19 Kvadratna matrika reda 2 je pozitivno definirana natanko tedaj, kadar sta pozitivni sled in determinanta matrike.

7.20 Simetricna matrika A reda n je pozitivno definirana natanko tedaj, ko je za vsak vektor $\vec{x} \neq \vec{0} \in R^n$

$$\vec{x}^T A\vec{x} > 0$$

7.21 Ce sta matriki A in B pozitivno definitni, je pozitivno definitna tudi njuna vsota $A + B$.

7.22 Matrika A je pozitivno definitna, kadar so vse njene vodilne glavne poddeterminante pozitivne.

7.23 Ce so stolpci matrike R linearno neodvisni, je matrika $A = R^T R$ pozitivno definitna.

7.24 Za vsako simetricno pozitivno definitno matriko A obstaja zgornjetrikotna matrika R, da je $A = R^T R$.

7.25 Simetricna matrka reda n, ki ima eno od spodnjih lastnosti, ima tudi ostale stiri:

1. Vseh n pivotov je pozitivnih;
2. Vseh n vodilnih glavnih determinant je pozitivnih;
3. Vseh n lastnih vrednosti je pozitivnih;
4. Za vsak $\vec{x} \neq \vec{0}$ je $\vec{x}^T A\vec{x} > 0$;
5. $A = R^T R$ za neko matriko R z linearno neodvisnimi stolpci.

7.26 Vsako realno $m \times n$ matriko A lahko zapisemo kot produkt $A = UEV^T$, kjer je matrika U ortogonalna $m \times m$, E diagonalna $m \times n$ in V ortogonalna $n \times n$.

7.27 Ce je matrika A simetricna in so vsej njeni elementi realni, potem je njen rang enak stevilu nenicelnih lastnih vrednosti matrike A.

$$rang(A) = \text{stevilo } \lambda A$$

7.28 Diagonalizacija oz *podobnost* matrik. Matriki A in B sta *podobni*, ce imata obe iste lastne vrednosi. Diagonalno matriko sestavimo tako, da v njeno diagonalo vpisemo lastne vrednosti. Matriko P pa sestavimo iz njenih lastnih vektorjev; po stolpcih.

$$A = PDP^{-1} \text{ oz.}$$
$$D = P^{-1}AP$$

7.29 Spektralni razcep Naj bodo vekotrji $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_n$ ONB iz l. vektorjev marike A za l. vrednost $\lambda_1, \ldots, \lambda n$, potem lahko matriko A zapisemo kot:

$$A = \lambda_1 \vec{q_1} \vec{q_1}^T + \cdots + \lambda_n \vec{q_n} \vec{q_n}^T$$

7.30 Nekaj lastnosti simetricnih matrik

- Vse lastne vrednosti simetricne matrike so realne. Lastni vektorji realne simetricne matrike, ki pripadajo razlicnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.

- Vsako realno simetricno matriko A lahko zapisemo kot $A = QDQ^T$, kjer je Q ortogonalna matrika lastnih vektorjev, D pa diagonalna matrika, ki ima na diagonali pripadajoce lastne vrednosti matrike A.

8 Napredna linearna algebra

8.1 Schurov izrek

(Schur): Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Potem obstaja ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in zgornje trikotna matrika Z, ki ima na diagonali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, da velja

$$A = QZQ^{-1} = QZQ^T.$$

Postopek za izračun Schurovega razcepa: Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Potem obstajata ortogonalna matrika Q in zgornje trikotna matrika Z z diagonalnimi elementi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, da velja

$$A = QZQ^T.$$

Ponavljaj:

1. Najdemo normirani lastni vektor q_1: $Aq_1 = \lambda_1 q_1$, $q_1^T q_1 = 1$, ter ortonormirano bazo $\{q_2, \dots, q_n\}$ pravokotnega komplementa. Sestavimo $Q_1 = [q_1\ q_2\ \dots\ q_n]$.

2. Izračunamo
$$T_1 = Q_1^T A Q_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

3. Postopek ponavljamo na bloku A_2 (in naslednjih blokih), dokler ne dobimo zgornje trikotne matrike Z in ortogonalne matrike Q, za kateri velja $A = QZQ^T$.

- **Posledica:** Vsaka matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je podobna zgornje trikotni matriki.

- **Posledica:** Vsaka simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonalno podobna diagonalni matriki.

- **Posledica:** Če ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lastne vrednosti enake $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, potem je
$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$
in
$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

- **Posledica (Cayley-Hamilton):** Če je $\Delta_A(x) = \det(A - xI_n)$ karakteristični polinom matrike A, potem velja $\Delta_A(A) = 0$.

8.2 Vektorski produkt

Za matriki $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiramo

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B).$$

Za produkt $\langle A, B\rangle : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ velja za vse matrike $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

1. $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$,
2. $\langle \alpha A + \beta B, C\rangle = \alpha\langle A, C\rangle + \beta\langle B, C\rangle$,
3. $\langle A, A\rangle \geq 0$,
4. $\langle A, A\rangle = 0$ natanko tedaj, ko je $A = 0$.

Zato $\langle A, B\rangle$ imenujemo skalarni produkt matrik A in B.

Za matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ in $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$ velja

$$\langle A, BC\rangle = \langle B^T A, C\rangle = \langle AC^T, B\rangle.$$

Frobeniusova norma matrike $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je definirana kot

$$\|A\|_F = \|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)}.$$

Velja:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2.$$

Eckart, Young: Naj bo $A = U\Sigma V^T$ razcep singularnih vrednosti matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \geq n$, kjer $U = [u^{(1)} \dots u^{(m)}]$ in $\mathbb{R}^{m\times m}$ in $V = [v^{(1)} \dots v^{(n)}]$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Potem je matrika A_k iz $\mathbb{R}^{m\times n}$ ranga k, $k \leq n$, ki je med vsemi matrikami ranga k v Frobeniusovi normi najbližje matriki A, enaka

$$A_k = \sigma_1 u^{(1)}(v^{(1)})^T + \sigma_2 u^{(2)}(v^{(2)})^T + \dots + \sigma_k u^{(k)}(v^{(k)})^T$$

in velja

$$\|A - A_k\|_F = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_n^2}.$$

(Velja torej $\|A - A_k\|_F \leq \|A - X\|_F$ za $\|A - X\|_F$ za vse matrike $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$, za katere velja $\mathrm{rank}(X) = k$.)

Poseben primer; simetrične matrike: Če je matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična ($A = A^T$), jo lahko zapišemo s pomočjo *spekralnega razcepa*

$$A = V\Lambda V^T,$$

kjer je V ortogonalna matrika lastnih vektorjev in $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonalna matrika lastnih vrednosti.

- Pri simetrični matriki se SVD poenostavi, saj so singularne vrednosti natanko
$$\sigma_i = |\lambda_i|,$$
in levi ter desni singularni vektorji sovpadajo z lastnimi vektorji matrike. Posledica:
$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$$

- Zato lahko A zapišemo kot
$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v^{(i)}(v^{(i)})^T,$$
kjer so $v^{(i)}$ ortonormirani lastni vektorji.

- Najboljša aproksimacija ranga k v Frobeniusovi normi je dobljena tako, da ohranimo tiste lastne vrednosti z največjo absolutno vrednostjo in njihove lastne vektorje:
$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{(i)} v^{(i)}(v^{(i)})^T,$$

Tako velja:

$$\|A - A_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_{(i)}^2}.$$

8.3 Kroneckerjev produkt

Kroneckerjev produkt (tudi tenzorski produkt) matrik $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ je $mp \times nq$ matrika

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp\times nq}.$$

Če so matrike A, B, C in D primerne velikosti, potem veljajo naslednje enakosti:

1. $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2. $\alpha \otimes A = A \otimes \alpha = \alpha A$ za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$
4. $(A+B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C$ in $A\otimes(B+C) = A\otimes B + A\otimes C$
5. $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$
6. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.
7. $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.
8. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ če A in B obrnljivi.
9. $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$
10. $\mathrm{rang}(A \otimes B) = \mathrm{rang}(A)\mathrm{rang}(B)$
11. Če ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lastne vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ in ima matrika B lastne vrednosti $\mu_1, \ldots, \mu_n$, potem je množica lastnih vrednosti matrike $A \otimes B$ enaka:

    $$S_\lambda = \{\lambda_i \mu_j; \lambda_i \text{ lastna vrednost } A, \mu_j \text{ lastna vrednost } B\}$$

    $$\text{in } |S_\lambda| \leq mn$$

    Ravno tako velja potem za lastne vektorje $v_i \otimes w_j$, da dobimo lastne vektorje matrike $A \otimes B$.
12. Če $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, potem je $\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n$.

Posledica:

$$||A \otimes B||_F = ||A||_F \cdot ||B||_F$$

8.4 Kroneckerjeva vsota

Kroneckerjeva vsota je definirana za kvadratni matriki A in B:

$$A \oplus B = A \otimes I_m + I_n \otimes B$$

kjer $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

Če so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti A za lastne vektorje $u_1, \ldots, u_n$ in $\mu_1, \ldots, \mu_m$ lastne vrednosti B za lastne vektorje $v_1, \ldots, v_n$, potem so

$$\lambda_i + \mu_j, \quad i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m$$

lastne vrednosti za $A \oplus B$, lastni vektorji pa so

$$u_i \otimes v_j$$

za i in j. Lastni vektorji $A \oplus B$ so enaki $u_i \otimes v_j$.

8.5 Vektorizacija

Za matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ označimo vektorizacijo matrike A kot

$$\mathrm{vec}(A) = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}.$$

vec je preslikava iz $\mathbb{R}^{m\times n}$ v $\mathbb{R}^{mn}$.

Za vektorja $\vec{a} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ velja:

$$\mathrm{vec}(\vec{a}\vec{b}^T) = \vec{b} \otimes \vec{a}$$

Za matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ in $C \in \mathbb{R}^{p\times r}$ velja:

$$\mathrm{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\mathrm{vec}(B).$$

8.6 Definitnost matrik

Spomnimo se, da ima simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vse lastne vrednosti realne.

Simetrični matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pravimo

- **pozitivno semidefinitna**, če je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$ za vse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **pozitivno definitna**, če je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ za vse neničelne $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **negativno semidefinitna**, če je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0$ za vse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **negativno definitna**, če je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$ za vse neničelne $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **nedefinitna**, če je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ za nekatere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in $\mathbf{y}^T A\mathbf{y} < 0$ za nekatere $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Posledica: Naj $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična z lastnimi vrednostmi $\lambda_i, \ldots, \lambda_n$.

- A je **PSD** (pozitivno semidefinitna) $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0$ za $i = 1, \ldots, n$.
- A je **PD** (pozitivno definitna) $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$ za $i = 1, \ldots, n$.
- A je **NSD** (negativno semidefinitna) $\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0$ za $i = 1, \ldots, n$.
- A je **ND** (negativno definitna) $\Leftrightarrow \lambda_i < 0$ za $i = 1, \ldots, n$.
- A je **nedefinirana** $\Leftrightarrow$ ima tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti.
- A je **PD** $\Leftrightarrow A$ je **PSD** in A obrnljiva.

(Sylvester). Simetrična matrika A je pozitivno definitna natanko tedaj, ko so determinante vseh vodilnih glavnih podmatrik matrike A pozitivne.

$$\det \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{bmatrix} > 0 \quad \sim \text{PD}$$

Simetrična matrika A je negativno definitna natanko tedaj, ko je determinanta vsake $k \times k$ vodilne glavne podmatrike A pozitivna, če je k sodo število, ter negativna, če je k liho število.

$$\det \begin{bmatrix} - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \end{bmatrix} \quad \sim \text{ND}$$

Izrek: Naj $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična ranga r. Velja

- A je PSD $\Leftrightarrow$ obstaja $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, da je $A = BB^T$.

- A je PD $\Leftrightarrow$ obstaja $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je $A = BB^T$.
- A je NSD $\Leftrightarrow$ obstaja $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, da je $A = -BB^T$.
- A je ND $\Leftrightarrow$ obstaja $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je $A = -BB^T$.
- A je nedefinirana $\Leftrightarrow$ obstaja tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti.

(Razcep Choleskega). Obrnljiva matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima razcep Choleskega

$$A = LL^T,$$

kjer je $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spodnje trikotna matrika, natanko tedaj, ko je A simetrična in pozitivno definitna.

Z uporabo spodnjega (rekurzivnega) algoritma: Simetrično matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zapišemo v bločni obliki

$$A_1 := A = \begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{bmatrix}$$

in definiramo

$$L_1 := \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0^T \\ \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} b & I_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Tedaj je

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{bmatrix} = L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & B - \frac{1}{a_{11}} bb^T \end{bmatrix} L_1^T.$$

Ponovimo na simetrični matriki $A_2 := B - \frac{1}{a_{11}} bb^T \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.

Naj bodo $L_2, L_3, \ldots, L_n$ matrike, ki jih dobimo v ponovljenih korakih. Matrika L je potem

$$L = L_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & L_3 \end{bmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & L_n \end{bmatrix}$$

8.7 Vektorski prostori

Realni vektorski prostor V je množica **vektorjev** v, za katere imamo definirani dve notranji operaciji

- seštevanje vektorjev ($u, v \in V \Rightarrow u + v \in V$),
- množenje vektorjev z realnimi števili ($v \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v = \alpha \cdot v \in V$),

z lastnostmi

1. $u + v = v + u$ in $(u + v) + w = u + (v + w)$,
2. obstaja ničelni vektor 0 in velja $v + 0 = 0 + v = v$,
3. za vsak $v \in V$ obstaja nasprotni vektor $-v$, za katerega velja $v + (-v) = (-v) + v = 0$,
4. $1 \cdot v = v$ za vsak $v \in V$,
5. $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$,
6. $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$,
7. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,

za poljubne $u, v, w \in V$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Izrek: Naj bo V vektorski prostor. Potem velja

1. V vsebuje ničelni vektor 0,
2. v vsakem vektorskem prostoru V je ničelni vektor 0 en sam,
3. $\alpha \cdot 0 = 0$ za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$,
4. $0 \cdot v = 0$ za vsak $v \in V$.

Za vektorje $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ in skalare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ imenujemo vektor

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

linearna kombinacija vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Denimo, ničelni vektor 0 je

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_n$$

je linearna kombinacija poljubnih vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Linearno kombinacijo z izključno ničelnimi koeficienti imenujemo **trivialna linearna kombinacija**.

Če je podmnožica U vektorskega prostora V

(1) zaprta za seštevanje ($u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$) in

(2) zaprta za množenje vektorjev z realnimi števili ($v \in U, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v \in U$),

potem jo imenujemo **vektorski podprostor** prostora V.

Izrek: Podmnožica U vektorskega prostora V je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je poljubna linearna kombinacija $\alpha u + \beta v$ vektorjev $u, v \in U$ tudi vsebovana v U.

Vsak vektorski podprostor po (2) vsebuje tudi vektor $0 \cdot v = 0$. Zatorej podmnožica vektorskega prostora, ki ne vsebuje ničelnega vektorja, ne more biti vektorski podprostor.

Ker lastnosti (1)-(7) veljajo za poljubne elemente vektorskega prostora V, veljajo tudi za vse elemente vektorskega podprostora U v V. Poleg tega je vektorski podprostor po definiciji zaprt za seštevanje in množenje s števili. Zatorej je vsak vektorski podprostor hkrati tudi vektorski prostor.

8.7.1 Linearna ogrinjača

$\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je množica vseh linearnih kombinacij vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Ker je linearna kombinacija linearnih kombinacij vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ zopet linearna kombinacija vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$, je po Izreku 2 linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linearni podprostor v V. Pravimo, da vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **napenjajo prostor** $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Ne le, da je linearna ogrinjača vektorski prostor. Velja celo več.

Linearna ogrinjača vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$, vektorskega prostora V je najmanjši vektorski podprostor v V, ki vsebuje vektorje $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

8.7.2 Baza vektorskega prostora

Vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n$ v V so **linearno odvisni**, če obstaja vektor v_k, ki je linearna kombinacija ostalih $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n$:

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n,$$

kjer $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n$ v V so **linearno neodvisni**, če niso linearno odvisni. Ekvivalentno, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ v V so linearno neodvisni, če je njihova trivialna linearna kombinacija edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka ničelnemu vektorju 0. Z drugimi besedami, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ v V so linearno neodvisni, če iz

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

sledi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Množica vektorjev $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je **baza** vektorskega prostora V, če

(B1) so $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linearno neodvisni in

(B2) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ napenjajo prostor V.

Izrek: Vsak vektorski prostor ima neštevno baz. Vse baze vektorskega prostora imajo enako število vektorjev.

Dimenzija prostora V je enaka moči (poljubne) baze prostora V. Označimo jo z $\dim V$.

Izrek: Za vsako bazo vektorskega prostora V je zapis poljubnega vektorja $v \in V$ kot linearna kombinacija baznih vektorjev vedno enoličen.

8.7.3 Linearne preslikave

Naj bosta V in U vektorska prostora. Preslikava $\tau : V \to U$ je **linearna preslikava**, če velja

(1) $\tau(v + u) = \tau(v) + \tau(u)$ za vsaka $v, u \in V$ in

(2) $\tau(\alpha v) = \alpha\tau(v)$ za vsak $v \in V$ in vsak $\alpha \in \mathbb{R}$.

Preslikava $\tau : V \to U$ je linearna natanko tedaj, ko velja

$$\tau(\alpha v + \beta u) = \alpha\tau(v) + \beta\tau(u)$$

za vse $v, u \in V$ ter vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Za poljubno linearno preslikavo $\tau : V \to U$ velja $\tau(0_V) = 0_U$.

Naj bodo $\tau, \psi : V \to U$ ter $\theta : U \to W$ linearne preslikave in naj bo $\gamma \in \mathbb{R}$.

(1) **Vsota** $\tau + \psi : V \to U$ je preslikava, definirana s predpisom

$$(\tau + \psi)(v) = \tau(v) + \psi(v).$$

(2) **Produkt s skalarjem** $\gamma\tau : V \to U$ je preslikava, definirana s predpisom

$$(\gamma\tau)(v) = \gamma\tau(v).$$

(3) **Kompozitum** $\theta \circ \tau : V \to W$ je preslikava, definirana s predpisom

$$(\theta \circ \tau)(v) = \theta(\tau(v)).$$

Izrek: Vsota, produkt s skalarjem in kompozitum linearnih preslikav so linearne preslikave.

Posledica: Množica vseh linearnih preslikav iz vektorskega prostora V v vektorski prostor U je vektorski prostor

Izrek: Naj bodo $\tau, \psi : V \to U$ ter $\theta : U \to W$ linearne preslikave in naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Matrika, ki ustreza vsoti preslikav $\tau + \psi$, je enaka vsoti matrik posameznih preslikav.

$$A^C_{\tau+\psi,B} = A^C_{\tau,B} + A^C_{\psi,B}$$

2. Matrika, ki ustreza produktu s skalarjem $\alpha\tau$, je enaka večkratniku matrike preslikave.

$$A^C_{\alpha\tau,B} = \alpha A^C_{\tau,B}$$

3. Matrika, ki ustreza kompozitumu preslikav, je enaka produktu matrik posameznih preslikav.

$$A^D_{\theta\circ\tau,B} = A^D_{\theta,C} \cdot A^C_{\tau,B}$$

4. Matrika, ki ustreza inverzu obrnljive preslikave, je enaka inverzu matrike te preslikave. Torej, če je τ obrnljiva preslikava, je obrnljiva tudi matrika $A^C_{\tau,B}$. Velja

$$A^B_{\tau^{-1},C} = (A^C_{\tau,B})^{-1}$$

.

Neničelnemu vektorju v v V pravimo *lastni vektor* linearne preslikave $\tau : V \to V$, če velja

$$\tau(v) = \lambda v.$$

Številu λ pravimo *lastna vrednost* linearne preslikave τ.

Izrek: Vsaka lastna vrednost linearne preslikave τ je tudi lastna vrednost poljubne matrike A_τ, ki pripada preslikavi τ. Vse matrike, ki pripadajo dani linearni preslikavi τ imajo enake lastne vrednosti.

Pravimo, da je linearno preslikavo $\tau : V \to V$ mogoče *diagonalizirati*, če obstaja baza, v kateri pripada preslikavi diagonalna matrika.

Izrek: Linearno preslikavo $\tau : V \to V$ je mogoče diagonalizirati natanko tedaj, ko obstaja baza prostora V sestavljena iz lastnih vektorjev preslikave τ.

Naj bo $\tau : V \to U$ linearna preslikava vektorskega prostora V v vektorski prostor U.

Def: Jedro linearne preslikave τ je množica $\ker(\tau)$ vseh vektorjev $v \in V$, za katere velja

$$\tau(v) = 0.$$

Def: Slika linearne preslikave je množica $\mathrm{im}(\tau) = \{\tau(v) : v \in V\} \subseteq U$.

Izrek: Jedro $\ker\tau$ linearne preslikave $\tau : V \to U$ je vektorski podprostor v V, slika $\mathrm{im}\tau$ pa vektorski podprostor v U.

Izrek: Naj bo $\tau : V \to U$ linearna preslikava iz vektorskega prostora V v vektorski prostor U.

1. τ je injektivna natanko tedaj, ko je $\ker\tau = \{0\}$.
2. τ je surjektivna natanko tedaj, ko je $\mathrm{im}\tau = U$.

Izrek: Naj bo $\tau : V \to U$ linearna preslikava in naj bo $A = A_{\tau,B,C}$ matrika, ki pripada preslikavi τ. Potem je

1. $\dim(\mathrm{im}(\tau)) = \mathrm{rank}(A)$,
2. $\dim(\ker(\tau)) + \dim(\mathrm{im}(\tau)) = \dim(V)$.

Posledica:

Naj bo $\tau : V \to U$ linearna preslikava, $\dim V = \dim U = n$ in naj bo A neka matrika, ki pripada τ. Naslednje trditve so ekvivalentne: (1) τ je bijektivna; (2) τ je injektivna; (3) τ je surjektivna; (4) A je obrnljiva; (5) $\ker\tau = \{0\}$; (6) $N(A) = \{0\}$; (7) $\mathrm{im}\,\tau = U$; (8) $C(A) = \mathbb{R}^n$; (9) rang matrike A je n; (10) vrstice matrike A so linearno neodvisne; (11) vrstice matrike A razpenjajo $\mathbb{R}^n$; (12) vrstice matrike A tvorijo bazo $\mathbb{R}^n$; (13) stolpci matrike A so linearno neodvisni; (14) stolpci matrike A razpenjajo $\mathbb{R}^n$; (15) stolpci matrike A tvorijo bazo $\mathbb{R}^n$; (16) $\det A \neq 0$; (17) homogeni sistem $Ax = 0$ ima le trivialno rešitev; (18) sistem $Ax = b$ ima rešitev za vsak $b \in \mathbb{R}^n$.

9 Analiza

9.1 Funkcije več spremenljivk

Funkcija več spremenljivk

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

kjer

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

je funkcija, ki predpiše realno vrednost $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ vsaki točki $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Množici D_f pravimo **definicijsko območje** funkcije f.

V primeru, ko je $n = 2$, je graf funkcije $f = f(x, y) : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ploskev v $\mathbb{R}^3$.

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in D_f\}$$

Nivojska krivulja (ali nivojnica) funkcije $f = f(x,y)$ je množica vseh točk $(x,y) \in D_f$, za katere velja $f(x,y) = c$ za dano realno število $c \in \mathbb{R}$. Tako vsaka točka $(x,y) \in D_f$ leži na natanko eni nivojski krivulji in zato se definicijsko območje D_f razsloji na nivojske krivulje.

9.1.1 Parcialni odvod

Parcialni odvod funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v točki $\mathrm{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ po spremenljivki x_i definiramo kot

$$f_{x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a)}{h}.$$

Tako nam torej parcialni odvod funkcije f po x_i, v točki $\mathrm{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pove relativno spremembo funkcisjke vrednosti pri zelo majhni spremembi spremenljivke x_i, kjer so ostale spremenljivke fiksne.

9.1.2 Gradient funkcije

Vektor

$$(\nabla f)(a) = (f_{x_1}(a), f_{x_2}(a), \ldots, f_{x_n}(a))$$

imenujemo **gradient** funkcije f v točki a.

Smerni odvod funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v točki $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ **v smeri vektorja** $\vec{e}$ je enak

$$f_{\vec{e}}(a) = (\nabla f)(a) \cdot \frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{x_i}(a) e_i}{\|\vec{e}\|}$$

Za funkcijo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ velja:

1. Gradient funkcije f v točki a kaže v smeri najhitrejšega naraščanja funkcije f v točki a.
2. V primeru $n = 2$ je gradient funkcije $f = f(x,y)$ v točki a pravokoten na nivojsko krivuljo v tej točki.
3. Smerni odvod $f_{\vec{e}}(a)$ je relativna sprememba funkcisjke vrednosti $f(a)$ ob majhnem premiku iz točke a v smeri vektorja $\vec{e}$. Zato velja:
   - Če je $f_{\vec{e}}(a) > 0$, potem f ob majhnem pomiku iz točke a v smeri vektorja $\vec{e}$ narašča.
   - Če je $f_{\vec{e}}(a) < 0$, potem f ob majhnem pomiku iz točke a v smeri vektorja $\vec{e}$ pada.

9.1.3 Linearna aproksimacija

Za dano funkcijo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lahko v točki $\mathrm{a} + \mathrm{h}$ blizu a njeno funkcijso vrednost ocenimo s formulo

$$f(a + h) \approx f(a) + (\nabla f(a)) \cdot h.$$

9.1.4 Visji odvodi

Parcialne odvode drugega reda izračunamo s parcialnim odvajanjem parcialnih odvodov prvega reda. Definiramo jih kot

$$f_{x_i x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right).$$

$n \times n$ matriko

$$H_f(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]_{i,j=1,\ldots,n}$$

imenujemo *Hessejeva matrika* funkcije f v točki x. Če sta pri tem $f_{x_i x_j}, f_{x_j x_i}$ zvezni funkciji, potem sta omenjena druga parcialna odvoda enaka. Zato je v primeru, ko so vsi parcialni odvodi $f_{x_i x_j}$ zvezni, Hessejeva matrika $H_f(x,y)$ simetrična matrika.

9.1.5 Vektorska funkcija

Za vektorsko funkcijo

$$F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

kjer je

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})]^T$$

je m-terica funkcij več spremenljivk.

9.1.6 Jacobijeva matrika

Jacobijeva matrika vektorske funkcije

$$F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

je $m \times n$ matrika prvih odvodov funkcij $f_1, \ldots, f_m$:

$$J_F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Absolutna vrednost determinante Jacobijeve matrike vektorske funkcije

$$F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

pove, za kakšen faktor funkcija lokalno raztegne prostor.

9.2 Večkratni integrali

9.2.1 Izrek (Fubini, 1)

Če je $f : R \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na pravokotniku $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$, potem

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx.$$

9.2.2 Dvojni integrali

Če je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ neko omejeno območje in če $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, izberimo tak pravokotnik R, da velja $D \subseteq R$. Sedaj definiramo dvojni integral funkcije f na območju D kot

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R F(x,y)\,dx\,dy,$$

kjer

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

9.2.3 Izrek (Fubini, 2)

1. Če je $D = \{(x,y); a \le x \le b \text{ in } \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ in $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, potem je
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx.$$
2. Če je $D = \{(x,y); \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y) \text{ in } c \le y \le d\} \subseteq \mathbb{R}^2$ in $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, potem je
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy.$$

9.2.4 Izrek o menjavi spremenljivk

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Če je $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, takašna menjava spremenljivk, da je $\det J_{\varphi,\psi} \neq 0$, potem

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v))\, |\det J_{\varphi,\psi}|\, du\, dv.$$

Podobno, če je $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ter $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$, takašna menjava spremenljivk, da je $\det J_{\varphi,\psi,\chi} \neq 0$, potem velja

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_{D'} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w))\, |\det J_{\varphi,\psi,\chi}|\, du\, dv\, dw.$$

9.2.5 Primeri menjave spremenljivk

1. **Polarne koordinate** v $\mathbb{R}^2$ so podane z
$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$
$$r \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \text{in velja} \quad |\det J_{\text{polar}}| = r.$$
2. **Cilindrične koordinate** v $\mathbb{R}^3$ so podane z
$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$
$$r > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}, \quad \text{in velja} \quad |\det J_{\text{cylindrical}}| = r.$$
3. **Sferične koordinate** v $\mathbb{R}^3$ so podane z
$$x = r\cos\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\cos\theta, \quad z = r\sin\theta,$$
$$r > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$
$$\text{in velja} \quad |\det J_{\text{spherical}}| = r^2\cos\theta.$$

9.3 Optimizacija

9.4 Klasifikacija Lokalnih ekstremov

Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ter a v definicijskem območju funkcije f. Če za vse točke $x \neq a$, ki so "dovolj blizu" točke a (tj. $\|x - a\| < \varepsilon$ za nek dovolj majhen ε) velja $f(x) < f(a)$, potem pravimo, da ima funkcija f v točki a **lokalni maksimum**.

Če za vse točke $x \neq a$, ki so "dovolj blizu" točke a (tj. $\|x-a\| < \varepsilon$ za nek dovolj majhen ε) velja $f(x) > f(a)$, potem pravimo, da ima funkcija f v točki a **lokalni minimum**.

Če je funkcija f zvezno parcialno odvedljiva, potem je jasno, da ima lahko lokalne ekstreme le v stacionarnih točkah. Torej je potreben pogoj za lokalni ekstrem funkcije f v točki a:

$$(\nabla f)(a) = 0,$$

kar pomeni, da moramo lokalne ekstreme iskati zgolj med stacionarnimi točkami.

9.4.1 Izrek

Naj bo a stacionarna točka dvakrat parcialno zvezno odvedljive funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1. Če so vse lastne vrednosti matrike $H_f(a)$ pozitivne, ima f v a lokalni minimum.
2. Če so vse lastne vrednosti matrike $H_f(a)$ negativne, ima f v a lokalni maksimum.
3. Če so vse lastne vrednosti matrike $H_f(a)$ neničelne, vendar različno predznačene, lokalnega ekstrema v a ni.
4. Če je kakšna od lastnih vrednosti matrike $H_f(a)$ enaka 0, o lokalnih ekstremih funkcije f v točki a iz matrike $H_f(a)$ ne moremo sklepati.

9.4.2 Lokalni ekstremi z omejitvami

Pogosto naletimo na problem iskanja ekstremalnih vrednosti funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pri pogojih

$$g_1(x) = g_2(x) = \ldots = g_m(x) = 0.$$

Izkaže se, da lahko lokalni ekstremi funkcije f pri pogoju $g_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m$, nastopijo le v stacionarnih točkah funkcije

$$L = f - \lambda_1 g_1 - \ldots - \lambda_m g_m,$$

ki je funkcija $n + m$ spremenljivk $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Funkciji L pravimo **Lagrangeova funkcija**, novim spremenljivkam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ pa **Lagrangevi multiplikatorji**.
Omenjeni pogoj ni zadosten. Nekatere kritične točke funkcije L so ekstremalne točke funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pod pogoji $g_1(x) = g_2(x) = \ldots = g_m(x) = 0$, ostale pa ne.

9.4.3 Odvodi vektorskih funkcij

Naj bo $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}$ vektorska funkcija na spremenljivk $\mathrm{x} = (x_1, ..., x_n)$.

Spomnimo se, da je odvod vektorske funkcije F po vektorju spremenljivk $\tilde{x}$ definiran kot

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}} = J_F(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\tilde{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\tilde{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\tilde{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\tilde{x}) \end{bmatrix}$$

Drugi odvod funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (tu m = 1) pa kot

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}\right)^T$$

.

Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konveksna na D, če velja

$$f(t\tilde{x} + (1 - t)\tilde{y}) \leq tf(\tilde{x}) + (1 - t)f(\tilde{y})$$

za vse $\tilde{x}, \tilde{y} \in D$ in za vse $t \in [0, 1]$. Funkcija f je konkavna na D, če je funkcija $-f$ konveksna na D.

9.4.4 Pravila za odvajanje vektorskih funkcij

1. $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{x}} = I_n$
2. Če je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, potem $\frac{\partial A\tilde{x}}{\partial \tilde{x}} = A$.
3. Če je $\tilde{a} \in \mathbb{R}^n$, potem $\frac{\partial \tilde{a}^T\tilde{x}}{\partial \tilde{x}} = \tilde{a}^T$.
4. Če je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, potem $\frac{\partial(\tilde{x}^T A\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = \tilde{x}^T(A + A^T)$.
5. Če je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika, potem velja $\frac{\partial(\tilde{x}^T A\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = 2\tilde{x}^T A$.
6. $\frac{\partial\|\tilde{x}\|^2}{\partial \tilde{x}} = 2\tilde{x}^T$.
7. Če $\tilde{z} = \tilde{z}(\tilde{x})$ in $\tilde{y} = \tilde{y}(\tilde{x})$, potem $\frac{\partial(\tilde{y}^T\tilde{z})}{\partial \tilde{x}} = \tilde{y}^T\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{z}^T\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}}$.
8. Če $G : D_G \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ in $F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ in $H = F \circ G$, potem $\frac{\partial H}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial F}{\partial G}(\tilde{G}(\tilde{x}))\frac{\partial G}{\partial \tilde{x}}$.

9.4.5 Izrek

Dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konveksna natanko tedaj, ko je $\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2}$ pozitivno semidefinitna matrika na D, in je konkavna natanko tedaj, ko je $\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2}$ negativno semidefinitna matrika na D.

9.4.6 Prirejene funckije

Naj bodo $f, g_i, h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dane funkcije več spremenljivk. Radi bi našli rešitev naslednjega problema

$$(\mathrm{P})^* \quad \min f(\vec{x})$$

pri pogojih

$$g_i(\vec{x}) \le 0 \quad za\ i = 1, 2, \ldots, m$$
$$h_j(\vec{x}) = 0 \quad za\ j = 1, 2, \ldots, r.$$

Definirajmo še množice D_g, D_h:

$$D_g = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\vec{x}) \le 0 \quad za\ i = 1, 2, \ldots, m\},$$

$$D_h = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : h_j(\vec{x}) = 0 \quad za\ j = 1, 2, \ldots, r\}$$

$$D = D_f \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} D_g\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{r} D_h\right).$$

Sedaj lahko problem (P^*) zapišemo ekvivalentno kot

$$(\mathrm{P})^* \quad \min_{\vec{x} \in D} f(\vec{x}).$$

Definirajmo Lagrangevo funkcijo

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{\mu}) = f(\vec{x}) - \vec{\lambda}^T \mathbf{G}(\vec{x}) - \vec{\mu}^T \mathbf{H}(\vec{x})$$
$$= f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\vec{x}) - \sum_{j=1}^{r} \mu_j h_j(\vec{x}),$$

kjer je

$$\mathbf{G}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) \end{pmatrix}, \mathbf{H}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} h_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ h_r(\vec{x}) \end{pmatrix},$$

$$\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}, \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_r \end{pmatrix}.$$

Funkcijo

$$K(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) = \inf_{\vec{x} \in D} L(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{\mu}) = \inf_{\vec{x} \in D} \{f(\vec{x}) - \vec{\lambda}^T \mathbf{G}(\vec{x}) - \vec{\mu}^T \mathbf{H}(\vec{x})\}$$

imenujemo **prirejena funkcija** problema (P^*). Pri tem spremenljivke $\vec{\lambda}$ in $\vec{\mu}$ imenujemo **prirejene spremenljivke**. Opazimo:

1. $K(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$ je konkavna funkcija (neodvisno od lastnosti funkcij f, g_i, h_j originalnega problema).
2. Če je $\lambda_i \le 0$ za $i = 1, 2, \ldots, m$, potem velja $K(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) \le \min_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$ za vse $\vec{\lambda}$ ter vse $\vec{\mu}$.

Problem

$$(\mathrm{D}^*) \quad \max_{\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{\mu}} K(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$$

pri pogojih

$$\lambda_i \le 0 \quad za\ i = 1, 2, \ldots, m$$

imenujemo **prirejeni problem** problema (P^*).

Označimo z $\vec{x}^*$ vektor iz D, ki reši problem (P^*) in $\vec{\lambda}^*$, $\vec{\mu}^*$ prirejene spremenljivke, ki rešita prirejeni problem (D^*). Naj bo torej $p^* = f(\vec{x}^*)$ rešitev problema (P^*) in $d^* = K(\vec{\lambda}^*, \vec{\mu}^*)$ rešitev problema (D^*). Potem iz (2) sledi

$$d^* \le p^*.$$

Če

- je (P^*) linearni program (t.j., f je linearna in h_j so afine funkcije), ali če
- so f, g_i konveksne funkcije in h_j afine,

potem velja $d^* = p^*$.

V primeru, ko je $d^* = p^*$, sledi, da morajo $\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*$ in $\vec{\mu}^*$ zadostiti Karush-Kuhn-Tuckerjevim pogojem:

$$\frac{\partial L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*, \vec{\mu}^*)}{\partial \vec{x}} = 0,$$
$$g_i(\vec{x}^*) \le 0 \quad za\ i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$h_j(\vec{x}^*) = 0 \quad za\ j = 1, 2, \ldots, r,$$
$$\lambda_i^* \le 0 \quad za\ i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$\lambda_i^* g_i(\vec{x}^*) = 0 \quad za\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

9.5 Dodatek 2: Ponovitev analize

Odvodi

1. $\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$
2. $x^n = nx^{n-1}$
3. $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
5. $\sin(ax) = a\cos ax$
6. $\cos(ax) = -a\sin(ax)$
7. $\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $e^a x = ae^{ax}$
9. $a^x = a^x \ln a$
10. $x^x = x^x(1 + \ln x)$
11. $lnx = \frac{1}{x}$
12. $log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
13. $\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
16. $\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$
17. **Verižni zakon (chain rule):** Če $y = f(u)$ in $u = g(x)$, potem $\frac{dy}{dx} = f'(u)\frac{du}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
18. **Posebno uporabno:** (afina notranja funkcija) $\frac{d}{dx} f(ax + b) = a \cdot f'(ax + b)$.
19. **Tipične "chain" oblike (z u=u(x)):** $\frac{d}{dx} u^n = n\, u^{n-1}\, u'$, $\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $\frac{d}{dx} \ln|u| = \frac{u'}{u}$.
20. $\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \cdot u'$, $\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \cdot u'$, $\frac{d}{dx} \tan u = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.
21. $\frac{d}{dx} e^u = e^u\, u'$, $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln(a)\, u'$.
22. $\frac{d}{dx} \arcsin u = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $\frac{d}{dx} \arccos u = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{u'}{1+u^2}$.

Integrali

1. $\int x^a\, dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & a \neq -1 \\ \ln|x| + C & a = -1 \end{cases}$
2. $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$
4. $\int e^x\,dx = e^x + C$
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \cos(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C$
7. $\int \sin(ax)\,dx = \frac{-\cos(ax)}{a} + C$
8. $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$
12. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$
13. $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$
14. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
15. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$
16. **Zamenjava spremenljivke:** Če $u = g(x)$ in $du = g'(x)dx$, potem velja: $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$
17. **Metoda per partes:** Če $u = u(x)$ in $v' = v'(x)$, potem velja: $\int u\,v'\,dx = uv - \int u'\,v\,dx$