

# 1 Vektorji in matrike

**1.1** Vektor je *urejena n-terica števil*, ki jo običajno zapišemo kot stolpec

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

**1.2** Produkt *vektorja*  $\vec{x}$  s skalarjem  $\alpha$  je vektor

$$\alpha \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

**1.3** Vsota *vektorjev*  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  je vektor

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

**1.4** Nicelni vektor  $\vec{0}$  je tisti vektor, za katerega je  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  za vsak vektor  $\vec{a}$ . Vse komponente nicelnega vektorja so enake 0. Vsakemu vektorju  $\vec{a}$  priprada nasprotni vektor  $-\vec{a}$ , tako da je  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ . Razlika vektorjev  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  je vsota  $\vec{a} + (-\vec{b})$  in jo navadno zapišemo kot  $\vec{a} - \vec{b}$ .

**Lastnosti vektorske vsote**

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (komutativnost)
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  (asociativnost)
- $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$  (distributivnost)

**1.5** Linearna kombinacija vektorjev  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  je vsota

$$a\vec{x} + b\vec{y}$$

**1.6** Skalarni produkt vektorjev

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ je stevilo}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

*alternativno:*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = ||\vec{x}|| ||\vec{y}|| \cos \phi$$

**Lastnosti skalarnega produkta**

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$  (komutativnost)
- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$  (aditivnost)
- $\vec{x} \cdot (\alpha \vec{y}) = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y}$  (homogenost)
- $\forall \vec{x} \text{ velja } \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$

**1.7** Dolžina vektorja  $\vec{x}$  je

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

**1.8** Enotski vektor je vektor z dolžino 1.

**1.9** Za poljubna vektorja  $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$  velja:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| ||\vec{v}||,$$

enakost velja, v primeru, da sta vektorja vzporedna.

**1.10** Za poljubna vektorja  $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$  velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||.$$

**1.11** Vektorja  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  sta ortogonalna (pravokotna) natakno takrat, kadar je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

**1.12** Če je  $\phi$  kot med vektorjema  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$ , potem je

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}|| ||\vec{y}||} = \cos \phi$$

**1.13** Vektorski produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

**Lastnosti vektorskega produkta**

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$  (aditivnost)
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$  (!komutativnost)
- $(a\vec{a}) \times \vec{b} = a(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (a\vec{b})$  (homogenost)
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \times \vec{b}$  je  $\perp$  na vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$
- $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \sin \phi$
- Dolžina vektorskega produkta je ploscina paralelograma, katerega vektorja oklepata

**1.14** Mesani produkt  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  vektorjev  $\vec{a}, \vec{b}$  in  $\vec{c}$  v  $R^3$  je skalarni produkt vektorjev  $\vec{a} \times \vec{b}$  in  $\vec{c}$ :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

**Lastnosti mesanega produkta**

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
- $(x\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = x(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  (homogenost)
- $(\vec{a}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{v}, \vec{c})$
- Absolutna vrednost mesanega produkta  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  je enaka prostornini paralepipeda

**Premice v  $R^3$**

Premico določata smerni vektor  $\vec{p} = [a, b, c]^T$  in točka  $A(x_0, y_0, z_0)$ .

- Parametrična oblika:  $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}, t \in R$
- Kanonična oblika:  $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$

**Ravnine v  $R^3$**

Ravnina z normalo  $\vec{n} = [a, b, c]^T$  skozi točko  $A(x_0, y_0, z_0)$  ima enačbo

$$(\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n} = 0$$

oziroma

$$ax + by + cz = d$$

**Razdalje**

Razdalja od točke  $P$  do ravnine, v kateri leži točka  $A$  :

$$\cos \phi = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_A)}{||\vec{n}|| ||\vec{r}_P - \vec{r}_A||} \text{ oz. } d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_A)|}{||\vec{n}||}$$

Razdalja od točke  $P$  do premice, katere gre skozi točko  $A$ :

$$d = \frac{||\vec{c} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_A)||}{||\vec{c}||}$$

## Projekcije vektorjev

Naj bo  $proj_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{x}$  projekcija vektorja  $\vec{b}$  na vektor  $\vec{a}$ . Izračunamo jo po sledeci formuli:

$$proj_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$$

**1.15** Matrika dimenzije  $m \times n$  je tabela  $m \times n$  števil, urejenih v  $m$  vrstic in  $n$  stolpcev:

$$A^{m \times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

**1.16** Matrika, katere elementi so enaki nič povsod zunaj glavne diagonale, se imenuje diagonalna matrika. Za diagonalno matriko je  $a_{ij} = 0$ , kadarkoli velja  $i \neq j$

**1.17** Matrika  $A^{n \times n}$  je spodnjetrokotna, kadar so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i < j$$

**1.18** Matrika  $A^{n \times n}$  je zgornjetrokotna, kadar so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i > j$$

**1.19** Matrika je trikotna, če je zgornjetrokotna ali spodnjetrokotna.

**1.20** Dve matriki  $A$  in  $B$  sta enaki natanko takrat, kadar imata enaki dimenziji in kadar so na istih mestih v obeh matrikah enaki elementi:

$$A^{m \times n} = B^{p \times q} \implies m = p \text{ in } n = q, \\ a_{ij} = b_{ij} \text{ za vsak } i = 1, \dots, m \text{ in } j = 1, \dots, n$$

**1.21** Produkt matrike s skalarjem dobimo tako, da vsak element matrike pomnožimo s *skalarjem*

$$aA^{m \times n} = \begin{bmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} & \dots & ax_{1n} \\ ax_{21} & ax_{22} & ax_{23} & \dots & ax_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax_{m1} & ax_{m2} & ax_{m3} & \dots & ax_{mn} \end{bmatrix}$$

**1.22** Vsoto dveh matrik enake dimenzije dobimo tako, da seštejemo istolezne elemente obeh matrik:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & ax_{12} + b_{12} & \dots & ax_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & ax_{22} + b_{22} & \dots & ax_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & ax_{m2} + b_{m3} & \dots & ax_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

## Osnovne matricne operacije

- $A + B = B + A$  (komutativnost)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$  (asociativnost)
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$  (množenje s skalarjem)
- $A + (-A) = 0$
- $x(yA) = (xy)A$  in  $1 \cdot A = A$

**1.23** Transponirana matrika k matriki  $A$  reda  $m \times n$  je matrika reda  $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \\ A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

## Lastnosti transponiranja matrik

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $(A^T)^T = A$

**1.24** Produkt matrike  $A$  in vektorja  $\vec{x}$  je linearna kombinacija stolpcev matrike  $A$ , utezi linearne kombinacije so komponente vektorja  $\vec{x}$ :

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

**1.25** Produkt vrstice  $\vec{x}$  z matriko  $A$  je linearna kombinacija vrstic matrike  $A$ , koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice  $\vec{y}$ :

$$\vec{y} \cdot A = [y_1, y_2, y_3] \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\vec{u} \\ y_2\vec{v} \\ y_3\vec{w} \end{bmatrix}$$

**1.26** Produkt matrik  $A$  in  $B$  je matrika, katere stolpci so zaporedoma produkti matrike  $A$  s stolpci matrike  $B$ :

$$AB = A [b_1, b_2, \dots, b_n] = [Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n]$$

**1.27** Element  $c_{ij}$  v  $i$ -ti vrstici in  $j$ -tem stolpcu produkta  $C = AB$  je skalarni produkt  $i$ -te vrstice  $A$  in  $j$ -tega stolpca matrike  $B$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

**1.28** Produkt matrik  $A$  in  $B$  je matrika, katere vrstice so zaporedoma produkti vrstic matrike  $A$  z matriko  $B$ :

$$[i\text{-ta vrstica } A] B = [i\text{-ta vrstica } AB]$$

## Lastnosti matricnega produkta

- $AB \neq BA$  (!komutativnost)
- $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$  (homogenost)
- $C(A + B) = CA + CB$  (distributivnost)
- $A(BC) = (AB)C$  (asociativnost)
- $(AB)^T = B^T A^T$

V splošnem; komutativnost matricnega množenja velja samo, ko sta matriki diagonalizabilni.

**1.29** Vrstice matrike  $A$  z  $n$  stolpci naj bodo  $a^1, \dots, a^n$ , stolpci matrike  $B$  z  $n$  vrsticami pa  $b_1, \dots, b_n$ . Potem je

$$AB = a^1 b_1 + \dots + a^n b_n$$

**1.30** Če delitev na bloke v matriki  $A$  ustreza delitvi v matriki  $B$ , potem lahko matriki pomnožimo blocno:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

**1.31** Kvadratna matrika  $I_k$  reda  $k \times k$ , ki ima vse diagonalne elemente enake 1, vse ostale elemente pa 0 ima lastnost, da za vsako matriko  $A$  reda  $m \times n$  velja  $AI_n = A$  in  $I_m A = A$ . Matrika  $I_k$  se imenuje enotska ali identična matrika.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

**1.32 Cauchy-Schwarzova neenakost:** Za poljubna vektorja  $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$  velja:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| ||\vec{v}||$$

Enakost velja, v primeru, da vektorja  $\vec{u}$  in  $\vec{v}$  kažeta v isto ali nasprotno smer.

**1.33 Trikotniška neenakost:** Za poljubna vektorja  $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$  velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$$

## 2 Sistemi linearnih enacb

**2.1** Kvadratna matrika A je obrnljiva, ce obstaja taka matrika  $A^{-1}$ , da je

$$AA^{-1} = I \text{ in } A^{-1}A = I$$

Matrika  $A^{-1}$  (ce obstaja) se imenuje matriki A inverzna matrika. Matrika, ki ni obrnljiva, je singularna. Matrika **NI** obrnljiva, kadar je  $\text{rang}(A) < n$  !

**2.2** Kvadratna matirka reda  $n$  je obrnljiva natanko tedaj, ko pri gaussovi eliminaciji dobimo  $n$  pivotov.

**2.3** Vsaka obrnljiva matrika ima eno samo inverzno matriko.

**2.4** Inverzna matrika inverzne matrike  $A^{-1}$  je matrika A

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

**2.5** Ce je matrika A obrnljiva, potem ima sistem enacb  $A\vec{x} = \vec{b}$  edino resitev  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

**2.6** Ce obstaja nenicelna resitev  $\vec{x}$  enacbe  $A\vec{x} = \vec{0}$ , matrika A ni obrnljiva(je singularna).

**2.7** Ce sta matirki A in B istega reda obrnljivi, je obrnljiv tudi produkt  $A \cdot B$  in

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

**Pozor!** Pravilo

$$(AB)^p = A^p B^p$$

velja le v primeru, ko matriki A in B komutirata, torej  $AB = BA$ .

**2.8** Inverz transponirane matrike je transponirana matrika inverza

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

**2.9** Inverz diagonalne matrike z diagonalnimi elementi  $a_{ii}$  je diagonalna matrika, ki ima na diagonalni elemente  $a_{ii}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

**2.10** Za izracun inverza matrike A, uporabimo gausovo eliminacijo nad matriko  $[A|I]$

$$[A|I] = [I|A^{-1}]$$

**2.11** Matrika A je simetricna  $\Leftrightarrow A^T = A$ . Za elemente  $a_{ij}$  simetricne matirke velja  $a_{ij} = a_{ji}$ . Za simetricno matriko vedno velja, da je kvadratna  $A \in R^{n \times n}$ .

**2.12** Ce je matrika A simetricna in obrnljiva, je tudi  $A^{-1}$  simetricna.

**2.13** Ce je R poljubna (lahko tudi pravokotna) matrika, sta  $R^T R$  in  $RR^T$  simetricni matriki.

## 3 Vektorski prostori

**3.1** Realni vektorski prostor V je mnozica "vektorjev" skupaj z pravili za

- seštevanje vektorjev,
- mnozenje vektorja z realnim stevilom (skalarjem)

Ce sta  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  poljubna vektorja v V, morajo biti v V tudi

- vsota  $\vec{x} + \vec{y}$  in
- produkti  $\alpha\vec{x}$  za vse  $\alpha \in R$

V vektorskem prostoru V morajo biti tudi VSE linearne kombinacije  $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$

**Pravila za operacije v vektorskih prostorih**

Operaciji seštevanja vektorjev in mnozenja vektorja s skalarjem v vektorskem prostoru morajo zadoscati naslednjim pravilom:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$  (komutativnost)
- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$  (asociativnost)
- obstaja en sam nenicelni vektor  $\vec{0}$ , da velja  $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- za vsak  $\vec{x}$  obstaja natanko en  $-\vec{x}$ , da je  $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
- $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$  (distributivnost)
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

**3.2** Podmnozica U vektorskega prostora V je *vektorski podprostor*, ce je za vsak par vektorjev  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  iz U in vsako realno stevilo  $\alpha$  tudi

- $\vec{x} + \vec{y} \in U$  in
- $\alpha\vec{x} \in U$ .

**3.3** Mnozica vektorjev U je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je vsaka linearna kombinacija vektorjev iz U tudi v U.

**Lastnosti vektorskih podprostorov**

- Vsak vektorski podprostor nujno vsebuje nicelni vektor  $\vec{0}$
- Presek dveh podprostorov vektorskega podprostora je tudi podprostor

**3.4** Stolpicni prostor C(A) matrike  $A \in R^{m \times n}$  je tisti podprostor vektorskega prostora  $R^m$ , ki vsebuje natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike A.

Izracunamo ga tako, da matriko A transponiramo in izvedemo operacijo gaussove eliminacije nad  $A^T$ . Vrstice katere ostanejo po gaussovi eliminaciji so linearno neodvisni vektorji, kateri tvorijo stolpicni prostor matrike A,  $C(A)$ . *neformalno: linearna ogrinjaca stolpcev matrike (npr. ce imas 5 stolpcev pa lahko 2 zapises kot linearno kombinacijo ostalih 3 bo imel column space 3 elemente)*

**3.5** Sistem linearnih enacb  $A\vec{x} = \vec{b}$  je resljiv natanko tedaj, ko je vektor  $\vec{b} \in C(A)$

**3.6** Naj bo matrika  $A \in R^{m \times n}$ . Mnozica resitev homogenega sistema linearnih enacb je podprostor v vektorskem prostoru  $R^n$ .

**3.7** Mnozica vseh resitev sistema linearnih enacb  $A\vec{x} = \vec{0}$  se imenuje nicelni prostor matirke A. Oznacujemo ga z N(A). *neformalno: mnozica vektorjev, ki se z neko matriko zmnozijo v nicelni vektor. Matriko A samo eliminiras po gausso in nato dobljene resitve enacis z 0.*

**3.8** Če je matrika A kvadratna in obrnljiva, potem  $N(A)$  vsebuje samo vektor  $\vec{0}$

**3.9** Matrika ima *stopnicasto* obliko, kadar se vsaka od njenih vrstic začne z vsaj eno ničlo več kot prejsnja vrstica.

**3.10** Prvi element, različen od nič v vsaki vrstici, je *pivot*. Stevilo pivotov v matriki se imenuje rang matrike. Rang matrike A zapisemo kot  $\text{rang}(A)$ .

**3.11** Rang matrike ni večji od števila vrstic in ni večji od števila stolpcev matrike.

**3.12**

$$\text{Stevilo prostih neznank matrike} = \text{st. stolpcev} - \text{rang matrike}$$

**3.13**

1. Visoka in ozka matrika ( $m > n$ ) ima poln stolpicni rang, kadar je  $\text{rang}(A) = n$

2. Nizka in široka matrika ( $m < n$ ) ima poln vrsticni rang, kadar je  $\text{rang}(A) = m$

3. Kvadratna matrika ( $n = m$ ) ima poln rang, kadar je  $\text{rang}(A) = m = n$

**3.14** Za vsako matriko A s polnim stolpicnim rangom  $r = n \leq m$ , velja:

1. Vsi stolpci A so pivotni stolpci
2. Sistem enačb  $A\vec{x} = \vec{0}$  nima prostih neznank, zato tudi nima posebnih rešitev
3. Nicelni prostor  $N(A)$  vsebuje le nicelni vektor  $N(A) = \{\vec{0}\}$
4. Kadar ima sistem enačb  $A\vec{x} = \vec{b}$  rešitev (kar ni vedno res!), je rešitev ena sama
5. Reducirana vrstična oblika matrike (A) se da zapisati kot

$$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \times n \text{ enotska matrika} \\ m - n \text{ vrstic samih ničel} \end{bmatrix}$$

**3.15** Za vsako matriko A s polnim vrsticnim rangom  $r = m \leq n$  velja:

1. Vse vrstice so pivotne, ni prostih vrstic in U (stopnicasta oblika) in R (reducirana stopnicasta oblika) nimata nicelnih vrstic
2. Sistem enačb  $A\vec{x} = \vec{b}$  je resljiv za vsak vektor  $\vec{b}$
3. Sistem  $A\vec{x} = \vec{b}$  ima  $n - r = n - m$  prostih neznank, zato tudi prav toliko posebnih rešitev
4. Stolpicni prostor  $C(A)$  je ves prostor  $R^m$

**3.16** Za vsako kvadratno matriko A polnega ranga ( $\text{rang}(A) = m = n$ ) velja:

1. Reducirana vrstična oblika matrike A je enotska matrika
2. Sistem enačb  $A\vec{x} = \vec{b}$  ima natanko eno rešitev za vsak vektor desnih strani  $\vec{b}$
3. Matrika A je obrnljiva
4. Nicelni prostor matrike A je samo nicelni vektor  $N(A) = \{\vec{0}\}$
5. Stolpicni prostor matrike A je cel prostor  $C(A) = R^m$

**3.17** Vektorji  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  so linearno neodvisni, ce je

$$0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_n$$

edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka vektorju  $\vec{0}$ . Vektorji  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  so linearno odvisni, ce niso linearno neodvisni.

**3.18** Če so vektorji *odvisni*, lahko vsaj enega izrazimo z ostalimi.

**3.19** Če je med vektorji  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  tudi nicelni vektor, so vektorji *linearno odvisni*.

**3.20** Vsaka množica n vektorjev iz  $R^n$  je odvisna, kadar je  $n > m$ .

**3.21** Stolpci matrike A so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima homogena enačba  $A\vec{x} = \vec{0}$  edino rešitev  $\vec{x} = \vec{0}$ .

**3.22** Kadar je  $\text{rang}(A) = n$ , so stolpci matrike  $A \in R^{m \times n}$  linearno neodvisni. Kadar je pa  $\text{rang}(A) < n$ , so stolpci matrike  $A \in R^{m \times n}$  linearno odvisni.

**3.23** Kadar je  $\text{rang}(A) = m$ , so vrstice matrike  $A \in R^{m \times n}$  linearno neodvisne. Kadar je pa  $\text{rang}(A) < m$ , so vrstice matrike  $A \in R^{m \times n}$  linearno odvisne.

**3.24** Vrsticni prostor matrike A je podprostor v  $R^n$ , ki ga razpenjajo vrstice matrike A.

**3.25** Vrsticni prostor matrike A je  $C(A^T)$ , stolpicni prostor matrike  $A^T$ .

**3.26** Baza vektorskega prostora je množica vektorjev, ki

1. je linearno neodvisna in
2. napenja cel prostor.

**3.27** Vsak vektor iz vektorskega prostora lahko na en sam način izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

**3.28** Vektorji  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  so baza prostora  $R^n$  natanko tedaj, kadar je matrika, sestavljena iz stolpcev  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ , obrnljiva.

**3.29** Prostor  $R^n$  ima za  $n > 0$  neskončno mnogo različnih baz.

**3.30** Če sta množici vektorjev  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$  in  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  obe bazi istega vektorskega prostora, potem je  $m = n \implies$  vse baze istega vektorskega prostora imajo isto število vektorjev.

**3.31** Dimenzija vektorskega prostora je število baznih vektorjev.

**3.32** Dimenziji stolpicnega prostora  $C(A)$  in vrsticnega prostora  $C(A^T)$  sta enaki rang matrike A

$$\dim(C(A)) = \dim(C(A^T)) = \text{rang}(A).$$

**3.33** Dimenzija nicelnega prostora  $N(A)$  matrike A z n stolpci in ranga r je enaka  $\dim(N(A)) = n - r$ .

**3.34** Stolpicni prostor  $C(A)$  in vrsticni prostor  $C(A^T)$  imata oba dimenzijo r. Dimenzija nicelnega prostora  $N(A)$  je  $n - r$ , Dimenzija levega nicelnega prostora  $N(A^T)$  pa je  $m - r$ .

**3.35** Vsako matriko ranga 1 lahko zapisemo kot produkt (stolpcnega) vektorja z vrsticnim vektorjem  $A = \vec{u}\vec{v}^T$ .

## 4 Linearne preslikave

**4.1** Preslikava  $A : U \rightarrow V$  je linearna, ce velja

1. aditivnost:  $A(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = A\vec{u}_1 + A\vec{u}_2$  za vse  $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ ,
2. homogenost:  $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$  za vse  $\alpha \in R$  in  $\vec{u} \in U$ .

Oziroma v enem koraku:

$$A(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) = \alpha A(\vec{u}_1) + \beta A(\vec{u}_2).$$

**Pozor!** Preslikava ni linearna, ce  $A(\vec{0}) \neq \vec{0}$ .

**4.2** Preslikava  $A : U \rightarrow V$  je linearna natanko tedaj, ko velja

$$A(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = \alpha_1 A\vec{u}_1 + \alpha_2 A\vec{u}_2$$

za vse  $\alpha_1, \alpha_2 \in R$  in vse  $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ .

**4.3** Če je A *linearna preslikava*, je  $A\vec{0} = \vec{0}$ .

**4.4** Naj bo  $A : U \rightarrow V$  linearna preslikava in  $\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{u}_i$  linearna kombinacija vektorjev. Potem je  $A(\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{u}_i$ .

**4.5** Naj bo  $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  baza za vektorski prostor U. Potem je linearna preslikava  $A : U \rightarrow V$  natanko določena, ce poznamo slike baznih vektorjev.

**4.6** Naj bo  $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  baza za  $U$  in  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ . Potem obstaja natanko ena linearna preslikava  $A : U \rightarrow V$ , za katero je  $A\vec{u}_i = \vec{v}_i$  za  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**4.7** Naj bo  $A : U \rightarrow V$  linearna preslikava. Potem množico

$$\ker A = \{\vec{u} \in U; A\vec{u} = \vec{0}\}$$

imenujemo *jedro* linearne preslikave. Ker je  $A\vec{0} = \vec{0}$ , je  $\vec{0} \in \ker A$  za vse  $A$ . Zato je jedro vedno neprazna množica. *Ce je matrika  $A$   $\phi$  enotska preslikava za  $\phi$ , potem velja*

$$\ker \phi = N(A).$$

**4.8** Jedro linearne preslikave  $A : U \rightarrow V$  je vektorski podprostor v  $U$ .

**4.9** Množico

$$\operatorname{im} A = \{\vec{v} \in V; \text{obstaja tak } \vec{u} \in U, \text{ da je } \vec{v} = A\vec{u}\}$$

imenujemo *slika* linearne preslikave  $A : U \rightarrow V$ . *Ce je matrika  $A$   $\phi$  enotska preslikava za  $\phi$ , potem velja*

$$\operatorname{im} \phi = C(A).$$

**4.10** Ce je  $A : U \rightarrow V$  linearna preslikava, potem je njena slika  $\operatorname{im} A$  vektorski podprostor v  $V$ .

**4.11** Ce je  $A : U \rightarrow V$  linearna preslikava, in je rang matrike te preslikave v standardni bazi poln, potem lahko sklepamo, da ima ta preslikava **trivialno jedro**.

## 5 Ortogonalnost

**5.1** Podprostora  $U$  in  $V$  vektorskega prostora sta med seboj ortogonalna, ce je vsak vektor  $\vec{u} \in U$  ortogonalen na vsak vektor  $\vec{v} \in V$ .

**5.2** Za vsako matriko  $A \in R^{m \times n}$  velja:

- Nicelni prostor  $N(A)$  in vrsticni prostor  $C(A^T)$  sta ortogonalna podprostora  $R^n$
- Levi nicelni prostor  $N(A^T)$  in stolpicni prostor  $C(A)$  sta ortogonalna podprostora prostora  $R^m$ .

**5.3** Ortogonalni komplement  $V^\perp$  podprostora  $V$  vsebuje VSE vektorje, ki so ortogonalni na  $V$ .

**5.4** Naj bo  $A$  matrika dimenzije  $m \times n$ .

- Nicelni prostor  $N(A)$  je ortogonalni komplement vrsticnega prostora  $C(A^T)$  v prostoru  $R^n$
- Levi nicelni prostor  $N(A^T)$  je ortogonalni komplement stolpicnega prostora  $C(A)$  v prostoru  $R^m$ .

**krajse:**

$$\begin{aligned} N(A) &= C(A^T)^\perp \\ N(A^T) &= C(A)^\perp \end{aligned}$$

tukaj lahko vedno pomnožimo s komplementom, da dobimo npr.

$$N(A)^\perp = C(A^T)$$

*dodatek:*

$$\begin{aligned} \dim N(A) &= \text{st.stolpcev} - \text{rang}(A) \\ \dim N(A^T) &= \text{st.vrstic} - \text{rang}(A) \\ \dim C(A) &= \dim C(A^T) = \text{rang}(A) \end{aligned}$$

**5.5** Za vsak vektor  $\vec{y}$  v stolpicnem prostoru  $C(A)$  obstaja v vrsticnem prostoru  $C(A^T)$  en sam vektor  $\vec{x}$ , da je  $A\vec{x} = \vec{y}$ .

**5.6** Ce so stolpci matrike  $A$  linearno neodvisni, je matrika  $A^T A$  obrnljiva.

**5.7** Matrika  $P$  je projekcijska, kadar

- je simetrična:  $P^T = P$  in

- velja  $P^2 = P$ .

**5.8** Ce je  $P$  projekcijska matrika, ki projecira na podprostor  $U$ , potem je  $I - P$  projekcijska matrika, ki projecira na  $U^\perp$ , ortogonalni komplement podprostora  $U$ .

**5.9** Vektorji  $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n$  so ortonormiranim kadar so ortogonalni in imajo vsi dolžino 1, torej

$$\vec{q}_i^T \vec{q}_i = \begin{cases} 0 & \text{ko je } i \neq j \text{ pravokotni vektorji} \\ 1 & \text{ko je } i = j \text{ enotski vektorji} \end{cases}$$

za matriko  $Q = [\vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots \vec{q}_n]$  velja  $Q^T Q = I$ .

**5.10** Vektorji  $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$  naj bodo ortonormirani v prostoru  $R^m$ . Potem za matriko

$$Q = [\vec{q}_1 \vec{q}_2 \dots \vec{q}_n]$$

velja, da je  $Q^T Q = I_n$  enotska matrika reda  $n$ .

**5.11** Matrika  $Q$  je ortogonalna, kadar je

- kvadratna in
- ima ortonormirane stolpce.

**5.12** Ce je  $Q$  ortogonalna matirka, potem je obrnljiva in

$$\begin{aligned} Q^{-1} &= Q^T \\ \dim U^\perp &= n - \dim U \\ (U^\perp)^\perp &= U \end{aligned}$$

**5.13** Množenje z ortogonalno matriko ohranja dolžino vektorjev in kote med njimi. Ce je  $Q$  ortogonalna matrika, potem je

$$\begin{aligned} \|Q\vec{x}\| &= \|\vec{x}\| \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in} \\ (Q\vec{x})^T Q\vec{y} &= \vec{x}^T \vec{y} \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in } \vec{y} \end{aligned}$$

**5.14** Ce sta  $Q_1$  in  $Q_2$  ortogonalni matriki, je tudi produkt  $Q = Q_1 Q_2$  ortogonalna matrika.

**5.15 Gram-Schmidtova** ortogonalizacija. Za vhod uporabimo Linearno ogrinjaco linearno neodvisnih vekotrjev. Po gram-schmidtovi ortogonalizaciji pa dobimo paroma ortogonalne vektorje. Postopek:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{v}_1 \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \text{proj}_{\vec{u}_1} \vec{v}_2 \\ \vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \text{proj}_{\vec{u}_1} \vec{v}_3 - \text{proj}_{\vec{u}_2} \vec{v}_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Po tem postopku dobimo paroma ortogonalne vektorje po Gram-Schmidtovi ortogonalizaciji.

**5.16 QR Razcep:** Iz linearno neodvisnih vektorjev  $a_1, \dots, a_n$  z *Gram-Schmidtovo* ortogonalizacijo dobimo ortonormirane vektorje  $q_1, \dots, q_n$ . Matriki  $A$  in  $Q$  s temi stolpci zadoscajo enacbi  $A = QR$ , kjer je  $R$  zgornjetrikotna matrika.

- Najprej z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo poiscemo linearno neodvisne vektorje matrike  $A$
- Vektorje normiramo in jih zapisemo v matriko  $Q$ .
- Matriko  $R$  dobimo tako, da matriko  $Q^T$  pomnožimo z matriko  $A$

$$R = Q^T A$$

Tako smo prisli do vseh elementov v QR razcepu matrike  $A$ .

Sedaj ko imamo izracunane vse elemente lahko zapisemo se projekcijsko matriko. To je matrika pravokotne projekcije na  $C(Q) = C(A)$ . Njen izracun je preprost:

$$QQ^T = \text{pravokotna projekcija na } C(Q) = C(A)$$

Sedaj lahko to projekcijsko matriko pomnožimo z desne s poljubnim vektorjem in ugotovimo kam se preslika v prostoru  $C(A)$ . V nasprotnem primeru, če bi pa zeleli imeti projekcijsko matriko, s katero bi radi videli kam se vektor preslika v prostoru  $N(A^T)$ , bi pa od identične matrike odsteli projekcijsko matriko za  $C(Q)$ .

$$I - QQ^T = \textit{pravokotna projekcija na } C(A)^\perp = N(A^T)$$

**5.17** Vektorski prostor  $\iota$  je množica vseh neskončnih zaporedij  $\vec{u}$  s končno dolžino

$$||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u_1}^2 + \vec{u_2}^2 + \dots < \infty$$

### 5.18 Predoloceni sistemi

$$A^T A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^T \vec{f}$$

Kjer je A matrika sistemov linearnih enačb in  $\vec{f}$  vektor pričakovanih resitev po gaussovi eliminaciji zgornje enačbe, dobimo spremenljivke, ki predstavljajo najboljso aproksimacijo vseh kombinacij rezultatov in vhodnih spremenljivk.

## 6 Determinante

**6.1** Determinanta enotske matirke je  $det(I) = 1$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ in } \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

**6.2** Determinanta spremeni predznak, če med seboj zamenjamo dve vrstici.

Dodatna lastnost:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A) \det(B)$$

**6.3** Determinanta je linearna funkcija vsake vrstice posebej. To pomeni, da se

- determinanta pomnoži s faktorjem t, če eno vrstico determinante(vsak element v tej vrstici) pomnožimo s faktorjem t.

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- determinanta je vsota dveh determinant, ki se razlikujeta le v eni vrstici, če je v prvotni determinanti ta vrstica vsota obeh vrstic, ostale vrstice pa so enake v vseh treh determinantah.

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

**Pozor!** Kadar množimo matriko A s skalarjem t, se vsak element matrike pomnoži s skalarjem. Ko računamo determinanto produkta matirke s skalarjem  $tA$ , skalar  $t$  izpostavimo iz vsake vrstice posebej, zato je  $det(tA) = t^n det(A)$ , kjer je  $n$  število vrstic (ali stolpcev) determinante.

**6.4** Matrika, ki ima dve enaki vrstici, ima determinanto enako 0.

**6.5** Če v matriki od poljubne vrstice odštejemo mnogokratnik neke druge vrstice, se njena determinanta ne spremeni.

**6.6** Naj bo  $A$  poljubna kvadratna matirka  $n \times n$  in  $U$  njena vrstično-stopnicasta oblika, ki jo dobimo z *Gaussovo eliminacijo*. Potem je

$$det(A) = \pm det(U).$$

**6.7** Determinanta, ki ima vrstico samih nicel, je enaka 0.

**6.8** Determinanta trikotne matrike  $A$  je produkt diagonalnih elementov:

$$det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

**6.9** Determinanta singularne matrike je enaka 0, determinanta obrnljive matrike je različna od 0.

**6.10** Determinanta produkta dveh matrik je enaka produktu determinant obeh matrik:

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

**6.11** Determinanta inverzne matrike je enaka

$$det(A^{-1}) = 1/det(A)$$

in determinanta potence  $A^n$  matrike A je

$$det(A^n) = (det(A))^n$$

ter determinanta transponirane matrike je enaka determinanti originalne matrike, saj ko naredimo razvoj po vrsticah, pridemo do enakih elementov po diagonalni.

$$det(A) = det(A^T).$$

**6.12** Transponirana matrika  $A^T$  ima isto determinanto kot A.

**6.13 Recap dovoljenih operacij nad determinanto**

- Ce zamenjamo dve vrstici, se **spremeni** predznak determinante
- Vrednost determinante se ne spremeni, če neki vrstici pristevamo poljuben večkratnik katerekoli druge vrstice.
- Ce vse elemente neke vrstice pomnožimo z istim številom  $\alpha$ , se vrednost determinante pomnoži z  $\alpha$ .

**6.14** Vsaka lastnost, ki velja za vrstice determinante, velja tudi za njene **stolpce**. Med drugim:

- Determinanta spremeni predznak, če med seboj zamenjamo dva stolpca
- Determinanta je enaka 0, če sta dva stolpca enaka
- Determinanta je enaka 0, če so v vsaj enem stolpcu same nicle.

**6.15 (kofaktorska formula)** Če je A kvadratna matrika reda n, njeno determinanto lahko izračunamo z razvojem po  $i - ti$  vrstici

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}.$$

Kofaktorje  $C_{ij}$  izračunamo kot  $C_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$ , kjer je  $D_{ij}$  determinanta, ki jo dobimo, če v A izbrisemo i-to vrstico in j-ti stolpec.

**6.16** Inverzna matrika  $A^{-1}$  matrike A je transponirana matrika kofaktorjev, deljena z determinanto  $|A|$ :

$$A^{-1} = \frac{C^T}{det(A)},$$

kjer je C matrika kofaktorjev matrike A.

**6.17** Ploščina paralelograma, določenega z vektorjema  $\vec{a}$  in  $\vec{b} \in R^2$  je enaka  $det([\vec{a}\vec{b}])$ , to je absolutni vrednosti determinante s stolpcema  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ .

**6.18** Mesani produkt vektorjev  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  in  $\vec{c}$  je enak determinanti matrike, ki ima te tri vektorje kot stolpce.

**6.19** Naj bo A matrika  $R^{n \times n}$

$$A \text{ je obrnljiva} \iff det A \neq 0$$

$$A^{-1} \text{ ne obstaja} \iff det A = 0$$

**7.1** Vektor  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , za katerega je  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$  lastni vektor. Stevilo  $\lambda$  je lastna vrednost. **Pozor!** Nicelni vektor  $\vec{0}$  ne more biti lastni vektor. Lahko pa je lastna vrednost enaka 0.

**7.2** Če ima matrika  $A$  lastno vrednost  $\lambda$  in lastni vektor  $\vec{x}$ , potem ima matrika  $A^2$  lastno vrednost  $\lambda^2$  in isti lastni vektor  $\vec{x}$ .

**7.3** Če ima matrika  $A$  lastno vrednost  $\lambda$  in lastni vektor  $\vec{x}$ , potem ima matrika  $A^k$  lastno vrednost  $\lambda^k$  in isti lastni vektor  $\vec{x}$ .

**7.4** Če ima matrika  $A$  lastno vrednost  $\lambda$  in lastni vektor  $\vec{x}$ , potem ima inverzna matrika lastno vrednost  $1/\lambda$  in isti lastni vektor  $\vec{x}$ .

**7.5** Sled kvadratne matrike  $A$  reda  $n$  je vsota njenih diagonalnih elementov.

$$\text{sled}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + \dots + a_{nn}.$$

**7.6** Sled matrike je enaka vsoti vseh lastnih vrednosti, steti z njihovo večkratnostjo. Če so  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  lastne vrednosti matrike reda  $n$ , potem je sled enaka *vsoti*

$$\text{sled}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 + \dots + \lambda_n,$$

determinanta matrike pa *produktu* lastnih vrednosti

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

**Lastnosti sledi** Za matrike  $A, B, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  velja

1.  $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$ ,
2.  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ ,
3.  $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$ ,
4.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ ,
5.  $\text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(A)$  za vsako obrnljivo matriko  $P$ .
6.  $\text{tr}(ABP) = \text{tr}(APB)$ , ce so  $A, B, P$  simetricne matirke.
7.  $\text{tr}(ABP) = \text{tr}(A^T B^T P^T)$ .

Za poljubna vektorja  $x, y \in \mathbb{R}^n$  velja:

$$\text{tr}(xy^T) = \text{tr}(x^T y)$$

**7.7** Če ima matrika  $A$  lastno vrednost  $\lambda$ , ki ji pripada lastni vektor  $\vec{x}$ , potem ima matrika  $A + cI$  lastno vrednost  $\lambda + c$  z istim lastnim vektorjem  $\vec{x}$  (velja samo z enotskimi matrikami  $I$ ).

**7.8** Lastne vrednosti trikotne matrike so enake diagonalnim elementom.

**7.9** Denimo, da ima matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$   $n$  linearno neodvisnih lastnih vektorjev  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ . Če jih zlozimo kot stolpce v matriko  $S$

$$S = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n],$$

potem je  $T = S^{-1}AS$  diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  na diagonalni

$$S^{-1}AS = T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

**Pozor!** Lastni vektorji v matriki  $S$  morajo biti v istem vrstnem redu kot lastne vrednosti v matriki  $T$ .

**7.10** Če je  $A = STS^{-1}$ , potem je  $A^k = ST^k S^{-1}$  za vsak  $k \in \mathbb{N}$ .

**7.12** Vse lastne vrednosti realne simetricne matrike so realne.

**7.13** Lastni vektorji realne simetricne matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.

**7.14 Schurov izrek** Za vsako kvadratno matriko reda  $n$ , ki ima le realne lastne vrednosti, obstaja taka ortogonalna matrika  $Q$ , da je

zgornjetrikotna matrika, ki ima lastne vrednosti (lahko so kompleksne) matrike  $A$  na diagonalni.

**7.15 Spektralni izrek** Vsako simetricno matriko  $A$  lahko razcepimo v produkt  $A = QTQ^T$ , kjer je  $Q$  ortogonalna matrika lastnih vektorjev,  $T$  pa diagonalna z lastnimi vrednostmi matrike  $A$  na diagonalni.

**7.16** Vsako realno simetricno matriko lahko zapisemo kot linearno kombinacijo matrik ranga 1

$$A = \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^T + \lambda_2 \vec{q}_2 \vec{q}_2^T + \dots + \lambda_n \vec{q}_n \vec{q}_n^T,$$

kjer so  $\vec{q}_i$  stolpci matrike  $Q$  (torej lastni vektorji matrike  $A$ ).

**7.17** Za simetricno nesingularno matriko  $A$  je stevilo pozitivnih pivotov enako številu pozitivnih lastnih vrednosti.

**7.18** Kvadratna matrika je pozitivno definirana, kadar so vse njene lastne vrednosti pozitivne.

**7.19** Kvadratna matrika reda 2 je pozitivno definirana natanko tedaj, kadar sta pozitivni sled in determinanta matrike.

**7.20** Simetricna matrika  $A$  reda  $n$  je pozitivno definirana natanko tedaj, ko je za vsak vektor  $\vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0$$

**7.21** Če sta matriki  $A$  in  $B$  pozitivno definitni, je pozitivno definitna tudi njuna vsota  $A + B$ .

**7.22** Matrika  $A$  je pozitivno definitna, kadar so vse njene vodilne glavne poddeterminante pozitivne.

**7.23** Če so stolpci matrike  $R$  linearno neodvisni, je matrika  $A = R^T R$  pozitivno definitna.

**7.24** Za vsako simetricno pozitivno definitno matriko  $A$  obstaja zgornjetrikotna matrika  $R$ , da je  $A = R^T R$ .

**7.25** Simetricna matrika reda  $n$ , ki ima eno od spodnjih lastnosti, ima tudi ostale stiri:

1. Vseh  $n$  pivotov je pozitivnih;
2. Vseh  $n$  vodilnih glavnih determinant je pozitivnih;
3. Vseh  $n$  lastnih vrednosti je pozitivnih;
4. Za vsak  $\vec{x} \neq \vec{0}$  je  $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$ ;
5.  $A = R^T R$  za neko matriko  $R$  z linearno neodvisnimi stolpci.

**7.26** Vsako realno  $m \times n$  matriko  $A$  lahko zapisemo kot produkt  $A = UEV^T$ , kjer je matrika  $U$  ortogonalna  $m \times m$ ,  $E$  diagonalna  $m \times n$  in  $V$  ortogonalna  $n \times n$ .

**7.27** Če je matrika  $A$  simetricna in so vsej njeni elementi realni, potem je njen rang enak številu nenicelnih lastnih vrednosti matrike  $A$ .

$$\text{rang}(A) = \text{stevilo } \lambda A$$

**7.28 Diagonalizacija oz podobnost** matrik. Matriki  $A$  in  $B$  sta podobni, ce imata obe iste lastne vrednosti. Diagonalno matriko sestavimo tako, da v njeno diagonalo vpisemo lastne vrednosti. Matriko  $P$  pa sestavimo iz njenih lastnih vektorjev; po stolpcih.

$$A = PDP^{-1} \text{ oz. } D = P^{-1}AP$$

**7.29 Spektralni razcep** Naj bodo vektorji  $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$  ONB iz 1. vektorjev matrike  $A$  za l. vrednost  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , potem lahko matriko  $A$  zapisemo kot:

$$A = \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^T + \dots + \lambda_n \vec{q}_n \vec{q}_n^T$$

**7.30 Nekaj lastnosti simetricnih matrik**

- Vse lastne vrednosti simetrične matrike so realne. Lastni vektorji realne simetrične matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.

- Vsako realno simetrično matriko  $A$  lahko zapisemo kot  $A = QDQ^T$ , kjer je  $Q$  ortogonalna matrika lastnih vektorjev,  $D$  pa diagonalna matrika, ki ima na diagonalni pripadajoče lastne vrednosti matrike  $A$ .

## 8 Napredna linearna algebra

### 8.1 Schurov izrek

(Schur): Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrika z lastnimi vrednostmi  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Potem obstaja ortogonalna matrika  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  in zgornje trikotna matrika  $Z$ , ki ima na diagonalni  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , da velja

$$A = QZQ^{-1} = QZQ^T.$$

**Postopek za izračun Schurovega razcepa:** Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrika z lastnimi vrednostmi  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Potem obstajata ortogonalna matrika  $Q$  in zgornje trikotna matrika  $Z$  z diagonalnimi elementi  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , da velja

$$A = QZQ^T.$$

#### Ponavljaj:

1. Najdemo normirani lastni vektor  $q_1$ :  $Aq_1 = \lambda_1 q_1$ ,  $q_1^T q_1 = 1$ , ter ortonormirano bazo  $\{q_2, \dots, q_n\}$  pravokotnega komplementa. Sestavimo  $Q_1 = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$ .

2. Izračunamo

$$T_1 = Q_1^T A Q_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

3. Postopek ponavljamo na bloku  $A_2$  (in naslednjih blokih), dokler ne dobimo zgornje trikotne matrike  $Z$  in ortogonalne matrike  $Q$ , za kateri velja  $A = QZQ^T$ .

- **Posledica:** Vsaka matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je podobna zgornje trikotni matriki.
- **Posledica:** Vsaka simetrična matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je ortogonalno podobna diagonalni matriki.
- **Posledica:** Če ima matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  lastne vrednosti enake  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , potem je

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

in

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

- **Posledica (Cayley-Hamilton):** Če je  $\Delta_A(x) = \det(A - xI_n)$  karakteristični polinom matrike  $A$ , potem velja  $\Delta_A(A) = 0$ .

### 8.2 Vektorski produkt

Za matriki  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  in  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  definiramo

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B).$$

Za produkt  $\langle A, B \rangle : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  velja za vse matrike  $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  in za vse  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

1.  $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$ ,
2.  $\langle \alpha A + \beta B, C \rangle = \alpha \langle A, C \rangle + \beta \langle B, C \rangle$ ,
3.  $\langle A, A \rangle \geq 0$ ,

4.  $\langle A, A \rangle = 0$  natanko tedaj, ko je  $A = 0$ .

Zato  $\langle A, B \rangle$  imenujemo skalarni produkt matrik  $A$  in  $B$ .

Za matrike  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$  in  $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$  velja

$$\langle A, BC \rangle = \langle B^T A, C \rangle = \langle AC^T, B \rangle.$$

**Frobeniusova norma matrike**  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  je definirana kot

$$\|A\|_F = \|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}.$$

Velja:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2.$$

**Eckart, Young:** Naj bo  $A = U\Sigma V^T$  razcep singularnih vrednosti matrike  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$ , kjer  $U = [u^{(1)} \dots u^{(m)}]$  in  $\mathbb{R}^{m \times m}$  in  $V = [v^{(1)} \dots v^{(n)}]$  in  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Potem je matrika  $A_k$  iz  $\mathbb{R}^{m \times n}$  ranga  $k$ ,  $k \leq n$ , ki je med vsemi matrikami ranga  $k$  v Frobeniusovi normi najbližje matriki  $A$ , enaka

$$A_k = \sigma_1 u^{(1)} (v^{(1)})^T + \sigma_2 u^{(2)} (v^{(2)})^T + \dots + \sigma_k u^{(k)} (v^{(k)})^T$$

in velja

$$\|A - A_k\|_F = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_n^2}.$$

(Velja torej  $\|A - A_k\|_F \leq \|A - X\|_F$  za  $\|A - X\|_F$  za vse matrike  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , za katere velja  $\text{rank}(X) = k$ .)

**Poseben primer; simetrične matrike:** Če je matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simetrična ( $A = A^T$ ), jo lahko zapišemo s pomočjo *spekralnega razcepa*

$$A = V\Lambda V^T,$$

kjer je  $V$  ortogonalna matrika lastnih vektorjev in  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  diagonalna matrika lastnih vrednosti.

- Pri simetrični matriki se SVD poenostavi, saj so singularne vrednosti natanko

$$\sigma_i = |\lambda_i|,$$

in levi ter desni singularni vektorji sovpadajo z lastnimi vektorji matrike. Posledica:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}$$

- Zato lahko  $A$  zapišemo kot

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i v^{(i)} (v^{(i)})^T,$$

kjer so  $v^{(i)}$  ortonormirani lastni vektorji.

- Najboljša aproksimacija ranga  $k$  v Frobeniusovi normi je dobljena tako, da ohranimo tiste lastne vrednosti z največjo absolutno vrednostjo in njihove lastne vektorje:

$$A_k = \sum_{i=1}^k \lambda_{(i)} v^{(i)} (v^{(i)})^T,$$

Tako velja:

$$\|A - A_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^n \lambda_{(i)}^2}.$$

### 8.3 Kroneckerjev produkt

Kroneckerjev produkt (tudi tenzorski produkt) matrik  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  in  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$  je  $mp \times nq$  matrika

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}.$$

Če so matrike  $A, B, C$  in  $D$  primerne velikosti, potem veljajo naslednje enakosti:

1.  $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2.  $\alpha \otimes A = A \otimes \alpha = \alpha A$  za vsak  $\alpha \in \mathbb{R}$
3.  $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$
4.  $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$  in  $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$
5.  $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$
6.  $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ .
7.  $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ .
8.  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$  če  $A$  in  $B$  obrnljivi.
9.  $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$
10.  $\text{rang}(A \otimes B) = \text{rang}(A)\text{rang}(B)$
11. Če ima matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  lastne vrednosti  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  in ima matrika  $B$  lastne vrednosti  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , potem je množica lastnih vrednosti matrike  $A \otimes B$  enaka:

$$S_\lambda = \{\lambda_i \mu_j; \lambda_i \text{ lastna vrednost } A, \mu_j \text{ lastna vrednost } B\}$$

$$\text{in } |S_\lambda| \leq mn$$

Ravno tako velja potem za lastne vektorje  $v_i \otimes w_j$ , da dobimo lastne vektorje matrike  $A \otimes B$ .

12. Če  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  in  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , potem je  $\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n$ .

Posledica:

$$\|A \otimes B\|_F = \|A\|_F \cdot \|B\|_F$$

### 8.4 Kroneckerjeva vsota

Kroneckerjeva vsota je definirana za kvadratni matriki  $A$  in  $B$ :

$$A \oplus B = A \otimes I_m + I_n \otimes B$$

kjer  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

Če so  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  lastne vrednosti  $A$  za lastne vektorje  $u_1, \dots, u_n$  in  $\mu_1, \dots, \mu_m$  lastne vrednosti  $B$  za lastne vektorje  $v_1, \dots, v_n$ , potem so

$$\lambda_i + \mu_j, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$$

lastne vrednosti za  $A \oplus B$ , lastni vektorji pa so

$$u_i \otimes v_j$$

za  $i$  in  $j$ . Lastni vektorji  $A \oplus B$  so enaki  $u_i \otimes v_j$ .

### 8.5 Vektorizacija

Za matriko  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  označimo vektorizacijo matrike  $A$  kot

$$\text{vec}(A) = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}.$$

$\text{vec}$  je preslikava iz  $\mathbb{R}^{m \times n}$  v  $\mathbb{R}^{mn}$ .

Za vektorja  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$  velja:

$$\text{vec}(\vec{a}\vec{b}^T) = \vec{b} \otimes \vec{a}$$

Za matrike  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  in  $C \in \mathbb{R}^{p \times r}$  velja:

$$\text{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\text{vec}(B).$$

### 8.6 Definitnost matrik

Spomnimo se, da ima simetrična matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vse lastne vrednosti realne.

Simetrični matriki  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pravimo

- **pozitivno semidefinitna**, če je  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$  za vse  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- **pozitivno definitna**, če je  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$  za vse neničelne  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- **negativno semidefinitna**, če je  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0$  za vse  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- **negativno definitna**, če je  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0$  za vse neničelne  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- **ndefinitna**, če je  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$  za nekatere  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  in  $\mathbf{y}^T A \mathbf{y} < 0$  za nekatere  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

Posledica: Naj  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simetrična z lastnimi vrednostmi  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

- $A$  je **PSD** (pozitivno semidefinitna)  $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0$  za  $i = 1, \dots, n$ .
- $A$  je **PD** (pozitivno definitna)  $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$  za  $i = 1, \dots, n$ .
- $A$  je **NSD** (negativno semidefinitna)  $\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0$  za  $i = 1, \dots, n$ .
- $A$  je **ND** (negativno definitna)  $\Leftrightarrow \lambda_i < 0$  za  $i = 1, \dots, n$ .
- $A$  je **ndefinirana**  $\Leftrightarrow$  ima tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti.
- $A$  je **PD**  $\Leftrightarrow A$  je **PSD** in  $A$  obrnljiva.

**(Sylvester).** Simetrična matrika  $A$  je pozitivno definitna natanko tedaj, ko so determinante vseh vodilnih glavnih podmatrik matrike  $A$  pozitivne.

$$\det \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{bmatrix} > 0 \quad \sim \text{PD}$$

Simetrična matrika  $A$  je negativno definitna natanko tedaj, ko je determinanta vsake  $k \times k$  vodilne glavne podmatrike  $A$  pozitivna, če je  $k$  sodo število, ter negativna, če je  $k$  liho število.

$$\det \begin{bmatrix} - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \end{bmatrix} \sim \text{ND}$$

Izrek: Naj  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simetrična ranga  $r$ . Velja

- $A$  je PSD  $\Leftrightarrow$  obstaja  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ , da je  $A = BB^T$ .

- $A$  je PD  $\Leftrightarrow$  obstaja  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , da je  $A = BB^T$ .
- $A$  je NSD  $\Leftrightarrow$  obstaja  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ , da je  $A = -BB^T$ .
- $A$  je ND  $\Leftrightarrow$  obstaja  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , da je  $A = -BB^T$ .
- $A$  je nedefinirana  $\Leftrightarrow$  obstaja tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti.

**(Razcep Choleskega).** Obrnljiva matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ima razcep Choleskega

$$A = LL^T,$$

kjer je  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  spodnje trikotna matrika, natanko tedaj, ko je  $A$  simetrična in pozitivno definitna.

Z uporabo spodnjega (rekurzivnega) algoritma: Simetrično matriko  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zapišemo v bločni obliki

$$A_1 := A = \begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{bmatrix}$$

in definiramo

$$L_1 := \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0^T \\ \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}b & I_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Tedaj je

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{bmatrix} = L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & B - \frac{1}{a_{11}}bb^T \end{bmatrix} L_1^T.$$

Ponovimo na simetrični matriki  $A_2 := B - \frac{1}{a_{11}}bb^T \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ .

Naj bodo  $L_2, L_3, \dots, L_n$  matrike, ki jih dobimo v ponovljenih korakih. Matrika  $L$  je potem

$$L = L_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & L_3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & L_n \end{bmatrix}$$

## 8.7 Vektorski prostori

**Realni vektorski prostor**  $V$  je množica **vektorjev**  $v$ , za katere imamo definirani dve notranji operaciji

- seštevanje vektorjev ( $u, v \in V \Rightarrow u + v \in V$ ),
- množenje vektorjev z realnimi števili ( $v \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v = \alpha \cdot v \in V$ ),

z lastnostmi

1.  $u + v = v + u$  in  $(u + v) + w = u + (v + w)$ ,
2. obstaja ničelni vektor  $0$  in velja  $v + 0 = 0 + v = v$ ,
3. za vsak  $v \in V$  obstaja nasprotni vektor  $-v$ , za katerega velja  $v + (-v) = (-v) + v = 0$ ,
4.  $1 \cdot v = v$  za vsak  $v \in V$ ,
5.  $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$ ,
6.  $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ ,
7.  $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ ,

za poljubne  $u, v, w \in V$  in  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Izrek:** Naj bo  $V$  vektorski prostor. Potem velja

1.  $V$  vsebuje ničelni vektor  $0$ ,
2. v vsakem vektorskem prostoru  $V$  je ničelni vektor  $0$  en sam,
3.  $\alpha \cdot 0 = 0$  za vsak  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

4.  $0 \cdot v = 0$  za vsak  $v \in V$ .

Za vektorje  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  in skalarje  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  imenujemo vektor

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

**linearna kombinacija vektorjev**  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Denimo, ničelni vektor  $0$  je

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

je linearna kombinacija poljubnih vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ . Linearno kombinacijo z izključno ničelnimi koeficienti imenujemo **trivialna linearna kombinacija**.

Če je podmnožica  $U$  vektorskega prostora  $V$

- (1) zaprta za seštevanje ( $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$ ) in
- (2) zaprta za množenje vektorjev z realnimi števili ( $v \in U, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v \in U$ ),

potem jo imenujemo **vektorski podprostor** prostora  $V$ .

**Izrek:** Podmnožica  $U$  vektorskega prostora  $V$  je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je poljubna linearna kombinacija  $\alpha u + \beta v$  vektorjev  $u, v \in U$  tudi vsebovana v  $U$ .

Vsak vektorski podprostor po (2) vsebuje tudi vektor  $0 \cdot v = 0$ . Zatorej podmnožica vektorskega prostora, ki ne vsebuje ničelnega vektorja, ne more biti vektorski podprostor.

Ker lastnosti (1)-(7) veljajo za poljubne elemente vektorskega prostora  $V$ , veljajo tudi za vse elemente vektorskega podprostora  $U$  v  $V$ . Poleg tega je vektorski podprostor po definiciji zaprt za seštevanje in množenje s števili. Zatorej je vsak vektorski podprostor hkrati tudi vektorski prostor.

### 8.7.1 Linearna ogrinjača

$\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n$  je množica vseh linearnih kombinacij vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

Ker je linearna kombinacija linearnih kombinacij vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  zopet linearna kombinacija vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , je po Izreku 2 linearna ogrinjača  $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  linearni podprostor v  $V$ . Pravimo, da vektorji  $v_1, v_2, \dots, v_n$  **napenjajo prostor**  $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .

Ne le, da je linearna ogrinjača vektorski prostor. Velja celo več.

Linearna ogrinjača vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , vektorskega prostora  $V$  je najmanjši vektorski podprostor v  $V$ , ki vsebuje vektorje  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

### 8.7.2 Baza vektorskega prostora

Vektorji  $v_1, v_2, \dots, v_n$  v  $V$  so **linearno odvisni**, če obstaja vektor  $v_k$ , ki je linearna kombinacija ostalih  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n$ :

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n,$$

kjer  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ .

Vektorji  $v_1, v_2, \dots, v_n$  v  $V$  so **linearno neodvisni**, če niso linearno odvisni. Ekvivalentno,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  v  $V$  so linearno neodvisni, če je njihova trivialna linearna kombinacija edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka ničelnemu vektorju  $0$ . Z drugimi besedami,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  v  $V$  so linearno neodvisni, če iz

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

sledi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Množica vektorjev  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  je **baza** vektorskega prostora  $V$ , če

(B1) so  $v_1, v_2, \dots, v_n$  linearno neodvisni in

(B2)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  napenjaajo prostor  $V$ .

**Izrek:** Vsak vektorski prostor ima neštevno baz. Vse baze vektorskega prostora imajo enako število vektorjev.

*Dimenzija prostora*  $V$  je enaka moči (poljubne) baze prostora  $V$ . Označimo jo z  $\dim V$ .

**Izrek:** Za vsako bazo vektorskega prostora  $V$  je zapis poljubnega vektorja  $v \in V$  kot linearna kombinacija baznih vektorjev vedno enoličen.

8.7.3 Linearne preslikave

Naj bosta  $V$  in  $U$  vektorska prostora. Preslikava  $\tau : V \rightarrow U$  je **linearna preslikava**, če velja

- (1)  $\tau(v + u) = \tau(v) + \tau(u)$  za vsaka  $v, u \in V$  in
- (2)  $\tau(\alpha v) = \alpha \tau(v)$  za vsak  $v \in V$  in vsak  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Preslikava  $\tau : V \rightarrow U$  je linearna natanko tedaj, ko velja

$$\tau(\alpha v + \beta u) = \alpha \tau(v) + \beta \tau(u)$$

za vse  $v, u \in V$  ter vse  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Za poljubno linearno preslikavo  $\tau : V \rightarrow U$  velja  $\tau(0_V) = 0_U$ . Naj bodo  $\tau, \psi : V \rightarrow U$  ter  $\theta : U \rightarrow W$  linearne preslikave in naj bo  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

- (1) **Vsota**  $\tau + \psi : V \rightarrow U$  je preslikava, definirana s predpisom

$$(\tau + \psi)(v) = \tau(v) + \psi(v).$$

- (2) **Produkt s skalarjem**  $\gamma \tau : V \rightarrow U$  je preslikava, definirana s predpisom

$$(\gamma \tau)(v) = \gamma \tau(v).$$

- (3) **Kompozitum**  $\theta \circ \tau : V \rightarrow W$  je preslikava, definirana s predpisom

$$(\theta \circ \tau)(v) = \theta(\tau(v)).$$

**Izrek:** Vsota, produkt s skalarjem in kompozitum linearnih preslikav so linearne preslikave.

**Posledica:** Množica vseh linearnih preslikav iz vektorskega prostora  $V$  v vektorski prostor  $U$  je vektorski prostor

**Izrek:** Naj bodo  $\tau, \psi : V \rightarrow U$  ter  $\theta : U \rightarrow W$  linearne preslikave in naj bo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- 1. Matrika, ki ustreza vsoti preslikav  $\tau + \psi$ , je enaka vsoti matrik posameznih preslikav.

$$A_{\tau+\psi,B}^C = A_{\tau,B}^C + A_{\psi,B}^C$$

- 2. Matrika, ki ustreza produktu s skalarjem  $\alpha \tau$ , je enaka večkratniku matrike preslikave.

$$A_{\alpha \tau,B}^C = \alpha A_{\tau,B}^C$$

- 3. Matrika, ki ustreza kompozitumu preslikav, je enaka produktu matrik posameznih preslikav.

$$A_{\theta \circ \tau,B}^D = A_{\theta,C}^D \cdot A_{\tau,B}^C$$

- 4. Matrika, ki ustreza inverzu obrnljive preslikave, je enaka inverzu matrike te preslikave. Torej, če je  $\tau$  obrnljiva preslikava, je obrnljiva tudi matrika  $A_{\tau,B}^C$ . Velja

$$A_{\tau^{-1},C}^B = (A_{\tau,B}^C)^{-1}$$

Neničelnemu vektorju  $v$  v  $V$  pravimo *lastni vektor* linearne preslikave  $\tau : V \rightarrow V$ , če velja

$$\tau(v) = \lambda v.$$

Številu  $\lambda$  pravimo *lastna vrednost* linearne preslikave  $\tau$ .

**Izrek:** Vsaka lastna vrednost linearne preslikave  $\tau$  je tudi lastna vrednost poljubne matrike  $A_\tau$ , ki pripada preslikavi  $\tau$ . Vse matrike, ki pripadajo dani linearni preslikavi  $\tau$  imajo enake lastne vrednosti.

Pravimo, da je linearno preslikavo  $\tau : V \rightarrow V$  mogoče *diagonalizirati*, če obstaja baza, v kateri pripada preslikavi diagonalna matrika.

**Izrek:** Linearno preslikavo  $\tau : V \rightarrow V$  je mogoče diagonalizirati natanko tedaj, ko obstaja baza prostora  $V$  sestavljena iz lastnih vektorjev preslikave  $\tau$ .

Naj bo  $\tau : V \rightarrow U$  linearna preslikava vektorskega prostora  $V$  v vektorski prostor  $U$ .

**Def:** Jedro linearne preslikave  $\tau$  je množica  $\ker(\tau)$  vseh vektorjev  $v \in V$ , za katere velja

$$\tau(v) = 0.$$

**Def:** Slika linearne preslikave je množica  $\text{im}(\tau) = \{\tau(v) : v \in V\} \subseteq U$ .

**Izrek:** Jedro  $\ker \tau$  linearne preslikave  $\tau : V \rightarrow U$  je vektorski podprostor v  $V$ , slika  $\text{im} \tau$  pa vektorski podprostor v  $U$ .

**Izrek:** Naj bo  $\tau : V \rightarrow U$  linearna preslikava iz vektorskega prostora  $V$  v vektorski prostor  $U$ .

- 1.  $\tau$  je injektivna natanko tedaj, ko je  $\ker \tau = \{0\}$ .
- 2.  $\tau$  je surjektivna natanko tedaj, ko je  $\text{im} \tau = U$ .

**Izrek:** Naj bo  $\tau : V \rightarrow U$  linearna preslikava in naj bo  $A = A_{\tau,B,C}$  matrika, ki pripada preslikavi  $\tau$ . Potem je

- 1.  $\dim(\text{im}(\tau)) = \text{rank}(A)$ ,
- 2.  $\dim(\ker(\tau)) + \dim(\text{im}(\tau)) = \dim(V)$ .

Posledica:

Naj bo  $\tau : V \rightarrow U$  linearna preslikava,  $\dim V = \dim U = n$  in naj bo  $A$  neka matrika, ki pripada  $\tau$ . Naslednje trditve so ekvivalentne: (1)  $\tau$  je bijektivna; (2)  $\tau$  je injektivna; (3)  $\tau$  je surjektivna; (4)  $A$  je obrnljiva; (5)  $\ker \tau = \{0\}$ ; (6)  $N(A) = \{0\}$ ; (7)  $\text{im} \tau = U$ ; (8)  $C(A) = \mathbb{R}^n$ ; (9) rang matrike  $A$  je  $n$ ; (10) vrstice matrike  $A$  so linearno neodvisne; (11) vrstice matrike  $A$  razpenjajo  $\mathbb{R}^n$ ; (12) vrstice matrike  $A$  tvorijo bazo  $\mathbb{R}^n$ ; (13) stolpci matrike  $A$  so linearno neodvisni; (14) stolpci matrike  $A$  razpenjajo  $\mathbb{R}^n$ ; (15) stolpci matrike  $A$  tvorijo bazo  $\mathbb{R}^n$ ; (16)  $\det A \neq 0$ ; (17) homogeni sistem  $Ax = 0$  ima le trivialno rešitev; (18) sistem  $Ax = b$  ima rešitev za vsak  $b \in \mathbb{R}^n$ .

9 Analiza

9.1 Funkcije več spremenljivk

Funkcija več spremenljivk

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

kjer

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

je funkcija, ki predpiše realno vrednost  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$  vsaki točki  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ . Množici  $D_f$  pravimo **definijsko območje** funkcije  $f$ .

V primeru, ko je  $n = 2$ , je graf funkcije  $f = f(x, y) : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ploskev v  $\mathbb{R}^3$ .

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D_f\}$$

**Nivojska krivulja** (ali nivojnica) funkcije  $f = f(x, y)$  je množica vseh točk  $(x, y) \in D_f$ , za katere velja  $f(x, y) = c$  za dano realno število  $c \in \mathbb{R}$ . Tako vsaka točka  $(x, y) \in D_f$  leži na natanko eni nivojski krivulji in zato se definicijsko območje  $D_f$  razsloji na nivojske krivulje.

### 9.1.1 Parcialni odvod

Parcialni odvod funkcije  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  v točki  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  po spremenljivki  $x_i$  definiramo kot

$$f_{x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a)}{h}.$$

Tako nam torej parcialni odvod funkcije  $f$  po  $x_i$ , v točki  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  pove relativno spremembo funkcisjke vrednosti pri zelo majhni spremembi spremenljivke  $x_i$ , kjer so ostale spremenljivke fiksne.

### 9.1.2 Gradient funkcije

#### Vektor

$$(\nabla f)(a) = (f_{x_1}(a), f_{x_2}(a), \dots, f_{x_n}(a))$$

imenjujemo **gradient** funkcije  $f$  v točki  $a$ .

**Smerni odvod funkcije**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  v točki  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  v smeri vektorja  $\vec{e}$  je enak

$$f_{\vec{e}}(a) = (\nabla f)(a) \cdot \frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} = \sum_{i=1}^n \frac{f_{x_i}(a) e_i}{\|\vec{e}\|}$$

Za funkcijo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  velja:

- Gradient funkcije  $f$  v točki  $a$  kaže v smeri najhitrejšega naraščanja funkcije  $f$  v točki  $a$ .
- V primeru  $n = 2$  je gradient funkcije  $f = f(x, y)$  v točki  $a$  pravokoten na nivojsko krivuljo v tej točki.
- Smerni odvod  $f_{\vec{e}}(a)$  je relativna sprememba funkcisjke vrednosti  $f(a)$  ob majhnem premiku iz točke  $a$  v smeri vektorja  $\vec{e}$ . Zato velja:
  - Če je  $f_{\vec{e}}(a) > 0$ , potem  $f$  ob majhnem pomiku iz točke  $a$  v smeri vektorja  $\vec{e}$  narašča.
  - Če je  $f_{\vec{e}}(a) < 0$ , potem  $f$  ob majhnem pomiku iz točke  $a$  v smeri vektorja  $\vec{e}$  pada.

### 9.1.3 Linearna aproksimacija

Za dano funkcijo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lahko v točki  $\mathbf{a} + \mathbf{h}$  blizu  $\mathbf{a}$  njeno funkcijo vrednost ocenimo s formulo

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \approx f(\mathbf{a}) + (\nabla f(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{h}.$$

### 9.1.4 Visji odvodi

Parcialne odvode drugega reda izračunamo s parcialnim odvajanjem parcialnih odvodov prvega reda. Definiramo jih kot

$$f_{x_i x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right).$$

$n \times n$  matriko

$$H_f(x) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]_{i,j=1,\dots,n}$$

imenujemo *Hessejeva matrika* funkcije  $f$  v točki  $x$ . Če sta pri tem  $f_{x_i x_j}, f_{x_j x_i}$  zvezni funkciji, potem sta omenjena druga parcialna odvoda enaka. Zato je v primeru, ko so vsi parcialni odvodi  $f_{x_i x_j}$  zvezni, Hessejeva matrika  $H_f(x, y)$  simetrična matrika.

### 9.1.5 Vektorska funkcija

Za vektorsko funkcijo

$$F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

kjer je

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})]^T$$

je  $m$ -terica funkcij več spremenljivk.

### 9.1.6 Jacobijeva matrika

Jacobijeva matrika vektorske funkcije

$$F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

je  $m \times n$  matrika prvih odvodov funkcij  $f_1, \dots, f_m$ :

$$J_F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Absolutna vrednost determinante Jacobijeve matrike vektorske funkcije

$$F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

pove, za kakšen faktor funkcija lokalno raztegne prostor.

## 9.2 Večkratni integrali

### 9.2.1 Izrek (Fubini, 1)

Če je  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija na pravokotniku  $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ , potem

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

### 9.2.2 Dvojni integrali

Če je  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  neko omejeno območje in če  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija, izberimo tak pravokotnik  $R$ , da velja  $D \subseteq R$ . Sedaj definiramo dvojni integral funkcije  $f$  na območju  $D$  kot

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R F(x, y) dx dy,$$

kjer

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

### 9.2.3 Izrek (Fubini, 2)

- Če je  $D = \{(x, y); a \leq x \leq b \text{ in } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$  in  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija, potem je

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

- Če je  $D = \{(x, y); \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y) \text{ in } c \leq y \leq d\} \subseteq \mathbb{R}^2$  in  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija, potem je

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

9.2.4 Izrek o menjavi spremenljivk

Naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija na  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Če je  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$ , takašna menjava spremenljivk, da je  $\det J_{\varphi, \psi} \neq 0$ , potem

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |\det J_{\varphi, \psi}| \, du \, dv.$$

Podobno, če je  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija na  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  ter  $x = \varphi(u, v, w)$ ,  $y = \psi(u, v, w)$ ,  $z = \chi(u, v, w)$ , takašna menjava spremenljivk, da je  $\det J_{\varphi, \psi, \chi} \neq 0$ , potem velja

$$\begin{aligned} & \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iiint_{D'} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) |\det J_{\varphi, \psi, \chi}| \, du \, dv \, dw. \end{aligned}$$

9.2.5 Primeri menjave spremenljivk

1. **Polarne koordinate** v  $\mathbb{R}^2$  so podane z

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, \\ r &\geq 0, & \varphi &\in [0, 2\pi], \quad \text{in velja} \quad |\det J_{\text{polar}}| = r. \end{aligned}$$

2. **Cilindrične koordinate** v  $\mathbb{R}^3$  so podane z

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & z &= z, \\ r &> 0, & \varphi &\in [0, 2\pi], & z &\in \mathbb{R}, \quad \text{in velja} \quad |\det J_{\text{cylindrical}}| = r. \end{aligned}$$

3. **Sferične koordinate** v  $\mathbb{R}^3$  so podane z

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \theta, & y &= r \sin \varphi \cos \theta, & z &= r \sin \theta, \\ r &> 0, & \varphi &\in [0, 2\pi], & \theta &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ &\text{in velja} & |\det J_{\text{spherical}}| &= r^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

9.3 Optimizacija

9.4 Klasifikacija Lokalnih ekstremov

Naj bo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ter a v definicijskem območju funkcije  $f$ . Če za vse točke  $x \neq a$ , ki so "dovolj blizu" točke a (tj.  $\|x - a\| < \varepsilon$  za nek dovolj majhen  $\varepsilon$ ) velja  $f(x) < f(a)$ , potem pravimo, da ima funkcija  $f$  v točki a **lokalni maksimum**.

Če za vse točke  $x \neq a$ , ki so "dovolj blizu" točke a (tj.  $\|x - a\| < \varepsilon$  za nek dovolj majhen  $\varepsilon$ ) velja  $f(x) > f(a)$ , potem pravimo, da ima funkcija  $f$  v točki a **lokalni minimum**.

Če je funkcija  $f$  zvezno parcialno odvedljiva, potem je jasno, da ima lahko lokalne ekstreme le v stacionarnih točkah. Torej je potreben pogoj za lokalni ekstrem funkcije  $f$  v točki a:

$$(\nabla f)(a) = 0,$$

kar pomeni, da moramo lokalne ekstreme iskati zgolj med stacionarnimi točkami.

9.4.1 Izrek

Naj bo  $a$  stacionarna točka dvakrat parcialno zvezno odvedljive funkcije  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Če so vse lastne vrednosti matrike  $H_f(a)$  pozitivne, ima  $f$  v  $a$  lokalni minimum.
- Če so vse lastne vrednosti matrike  $H_f(a)$  negativne, ima  $f$  v  $a$  lokalni maksimum.
- Če so vse lastne vrednosti matrike  $H_f(a)$  neničelne, vendar različno predznačene, lokalnega ekstrema v  $a$  ni.
- Če je kakšna od lastnih vrednosti matrike  $H_f(a)$  enaka 0, o lokalnih ekstremih funkcije  $f$  v točki  $a$  iz matrike  $H_f(a)$  ne moremo sklepati.

9.4.2 Lokalni ekstremi z omejitvami

Pogosto naletimo na problem iskanja ekstremalnih vrednosti funkcije  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pri pogojih

$$g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_m(x) = 0.$$

Izkaže se, da lahko lokalni ekstremi funkcije  $f$  pri pogoju  $g_i(x) = 0, i = 1, \dots, m$ , nastopijo le v stacionarnih točkah funkcije

$$L = f - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_m g_m,$$

ki je funkcija  $n + m$  spremenljivk  $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ . Funkciji  $L$  pravimo **Lagrangeova funkcija**, novim spremenljivkam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  pa **Lagrangevi multiplikatorji**. Omenjeni pogoj ni zadosten. Nekatere kritične točke funkcije  $L$  so ekstremalne točke funkcije  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pod pogoji  $g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_m(x) = 0$ , ostale pa ne.

9.4.3 Odvodi vektorskih funkcij

Naj bo  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}$  vektorska funkcija na spremenljivk  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Spomnimo se, da je odvod vektorske funkcije  $F$  po vektorju spremenljivk  $\tilde{x}$  definiran kot

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}} = J_F(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\tilde{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\tilde{x}) \end{bmatrix}$$

Drugi odvod funkcije  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (tu  $m = 1$ ) pa kot

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} \right)^T$$

Funkcija  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je konveksna na  $D$ , če velja

$$f(t\tilde{x} + (1-t)\tilde{y}) \leq tf(\tilde{x}) + (1-t)f(\tilde{y})$$

za vse  $\tilde{x}, \tilde{y} \in D$  in za vse  $t \in [0, 1]$ . Funkcija  $f$  je konkavna na  $D$ , če je funkcija  $-f$  konveksna na  $D$ .

9.4.4 Pravila za odvajanje vektorskih funkcij

- $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{x}} = I_n$
- Če je  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , potem  $\frac{\partial A\tilde{x}}{\partial \tilde{x}} = A$ .
- Če je  $\tilde{a} \in \mathbb{R}^n$ , potem  $\frac{\partial \tilde{a}^T \tilde{x}}{\partial \tilde{x}} = \tilde{a}^T$ .
- Če je  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , potem  $\frac{\partial (\tilde{x}^T A \tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = \tilde{x}^T (A + A^T)$ .
- Če je  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simetrična matrika, potem velja  $\frac{\partial (\tilde{x}^T A \tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = 2\tilde{x}^T A$ .
- $\frac{\partial \|\tilde{x}\|^2}{\partial \tilde{x}} = 2\tilde{x}^T$ .
- Če  $\tilde{z} = \tilde{z}(\tilde{x})$  in  $\tilde{y} = \tilde{y}(\tilde{x})$ , potem  $\frac{\partial (\tilde{y}^T \tilde{z})}{\partial \tilde{x}} = \tilde{y}^T \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{z}^T \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}}$ .
- Če  $G : D_G \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  in  $H = F \circ G$ , potem  $\frac{\partial H}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial F}{\partial G}(\tilde{G}(\tilde{x})) \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}}$ .

### 9.4.5 Izrek

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  konveksna množica in naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  dvakrat zvezno odvedljiva. Potem velja:

- $f$  je **konveksna** ( $\cup$ ) natanko tedaj, ko  $\nabla^2 f(x)$  je **pozitivno semidefinitna** na  $D$ , tj.  $\nabla^2 f(x) \succeq 0$  za vsak  $x \in D$ , ter je **strogo konveksna** natanko tedaj, ko  $\nabla^2 f(x)$  je **pozitivno definitna** na  $D$ , tj.  $\nabla^2 f(x) \succ 0$  za vsak  $x \in D$ ;
- $f$  je **konkavna** ( $\cap$ ) natanko tedaj, ko  $\nabla^2 f(x)$  je **negativno semidefinitna** na  $D$ , tj.  $\nabla^2 f(x) \preceq 0$  za vsak  $x \in D$ , ter je **strogo konkavna** natanko tedaj, ko  $\nabla^2 f(x)$  je **negativno definitna** na  $D$ , tj.  $\nabla^2 f(x) \prec 0$  za vsak  $x \in D$ .

### 9.5 Prirejene funkcije

Naj bodo  $f, g_i, h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dane funkcije več spremenljivk. Radi bi našli rešitev problema

$$(P^*) \quad \min_{\vec{x}} f(\vec{x})$$

pri pogojih

$$g_i(\vec{x}) = 0 \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, m, \quad h_j(\vec{x}) \leq 0 \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, r.$$

Naj bo  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  domena funkcije  $f$ . Definirajmo še množice

$$D_{g_i} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\vec{x}) = 0\} \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$D_{h_j} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : h_j(\vec{x}) \leq 0\} \quad (j = 1, \dots, r),$$

in

$$D = D_f \cap \left( \bigcap_{i=1}^m D_{g_i} \right) \cap \left( \bigcap_{j=1}^r D_{h_j} \right).$$

Sedaj lahko problem  $(P^*)$  zapišemo ekvivalentno kot

$$(P^*) \quad \min_{\vec{x} \in D} f(\vec{x}).$$

Definirajmo Lagrangevo funkcijo

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{\mu}) = f(\vec{x}) - \vec{\lambda}^T \mathbf{G}(\vec{x}) - \vec{\mu}^T \mathbf{H}(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\vec{x}) - \sum_{j=1}^r \mu_j h_j(\vec{x}),$$

kjer je

$$\mathbf{G}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} h_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ h_r(\vec{x}) \end{pmatrix},$$
$$\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}, \quad \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_r \end{pmatrix}.$$

Funkcijo

$$K(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) = \inf_{\vec{x} \in D} L(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{\mu}) = \inf_{\vec{x} \in D} \left\{ f(\vec{x}) - \vec{\lambda}^T \mathbf{G}(\vec{x}) - \vec{\mu}^T \mathbf{H}(\vec{x}) \right\}$$

imenujemo **prirejena funkcija** problema  $(P^*)$ . Pri tem spremenljivke  $\vec{\lambda}$  in  $\vec{\mu}$  imenujemo **prirejene spremenljivke**. Opazimo:

1.  $K(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$  je konkavna funkcija.
2. Če je  $\mu_j \leq 0$  za  $j = 1, 2, \dots, r$ , potem velja

$$K(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) \leq \min_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$$

za vse  $\vec{\lambda}$  ter vse  $\vec{\mu} \leq \vec{0}$ .

### Problem

$$(D^*) \quad \max_{\vec{\lambda}, \vec{\mu}} K(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$$

pri pogoju

$$\mu_j \leq 0 \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, r$$

imenujemo **prirejeni problem** problema  $(P^*)$ .

Označimo  $z$   $\vec{x}^* \in D$  rešitev problema  $(P^*)$  ter  $z$   $(\vec{\lambda}^*, \vec{\mu}^*)$  rešitev problema  $(D^*)$ . Naj bo  $p^* = f(\vec{x}^*)$  in  $d^* = K(\vec{\lambda}^*, \vec{\mu}^*)$ . Potem velja

$$d^* \leq p^*.$$

V primeru, ko velja  $d^* = p^*$ , morajo  $\vec{x}^*$ ,  $\vec{\lambda}^*$  in  $\vec{\mu}^*$  zadostiti Karush–Kuhn–Tuckerjevimi (KKT) pogojem:

$$(\text{stacionarnost}) \quad \nabla_{\vec{x}} L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*, \vec{\mu}^*) = 0,$$

$$(\text{primarna dopustnost}) \quad g_i(\vec{x}^*) = 0 \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, m,$$

$$h_j(\vec{x}^*) \leq 0 \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, r,$$

$$(\text{dualna dopustnost}) \quad \mu_j^* \leq 0 \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, r,$$

$$(\text{komplementarna utesnjenost}) \quad \mu_j^* h_j(\vec{x}^*) = 0 \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, r.$$

**Trditev 2.** Naj bodo  $f, h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  konveksne in dvakrat zvezno odvedljive funkcije ter

$$\mathbf{G}(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b} \quad \text{za neko matriko } A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ in vektor } \vec{b} \in \mathbb{R}^m.$$

Če  $(\vec{x}', \vec{\lambda}', \vec{\mu}')$  zadošča sistemu (KKT), potem je  $\vec{x}'$  rešitev problema  $(P^*)$ ,  $(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')$  rešitev problema  $(D^*)$  in velja  $p^* = d^*$ .

### 9.6 Dodatek 2: Ponovitev analize

#### Odvodi

1.  $\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$
2.  $x^n = nx^{n-1}$
3.  $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4.  $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
5.  $\sin(ax) = a \cos ax$
6.  $\cos(ax) = -a \sin(ax)$
7.  $\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
8.  $e^a x = ae^{ax}$
9.  $a^x = a^x \ln a$
10.  $x^x = x^x (1 + \ln x)$
11.  $\ln x = \frac{1}{x}$
12.  $\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
13.  $\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14.  $\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15.  $\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
16.  $\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$

#### Integrali

1.  $\int x^a dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & a \neq -1 \\ \ln|x| + C & a = -1 \end{cases}$
2.  $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
3.  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
4.  $\int e^x dx = e^x + C$
5.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6.  $\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C$
7.  $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C$
8.  $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

9.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
10.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$
11.  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$
12.  $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$
13.  $\int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \arctan x + C$
14.  $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
15.  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C$
16. **Zamenjava spremenljivke:** Če  $u = g(x)$  in  $du = g'(x)dx$ , potem velja:  $\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(u) \, du$
17. **Metoda per partes:** Če  $u = u(x)$  in  $v' = v'(x)$ , potem velja:  $\int u v' \, dx = uv - \int u' v \, dx$