1 Vektorji in matrike

1.0.1 Vektor

Vektor je *urejena n-terica stevil*, ki jo obicajno zapisemo kot stolpec

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1.0.2 Produkt vektorja s skalarjem

Produkt *vektorja* $\vec{x}$ s skalarjem α je vektor

$$\alpha\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

1.0.3 Vsota vektorjev

Vsota *vektorjev* $\vec{x}$ in $\vec{y}$ je vektor

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

1.0.4 Nicelni vektor

Nicelni vektor $\vec{0}$ je tisti vektor, za katerega je $\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$ za vsak vektor $\vec{a}$. Vse komponente nicelnega vektorja so enake 0. Vsakemu vektorju $\vec{a}$ priprada nasprotni vektor -$\vec{a}$, tako da je $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ Razlika vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vsota $\vec{a} + (-\vec{b})$ in jo navadno zapisemo kot $\vec{a} - \vec{b}$.

1.0.5 Lastnosti vektorske vsote

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutativnost)
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (asociativnost)
- $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$ (distributivnost)

1.0.6 Linearna kombinacija

Linearna kombinacija vektorjev $\vec{x}$ in $\vec{y}$ je vsota

$$a\vec{x} + b\vec{y}$$

1.0.7 Skalarni produkt vektorjev

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ je stevilo}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

alternativno:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = ||\vec{x}||||\vec{y}|| \cos\phi$$

1.0.8 Lastnosti skalarnega produkta

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (komutativnost)
- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$ (aditivnost)
- $\vec{x} \cdot (\alpha\vec{y}) = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\alpha\vec{x}) \cdot \vec{y}$ (homogenost)
- $\forall \vec{x}$ *velja* $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$

1.0.9 Dolzina vektorja

Dolzina vektorja $\vec{x}$ je

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

1.0.10 Enotski vektor

Enotski vektor je vektor z dolzino 1.

1.0.11 Cauchy-Schwarzova neenakost (osnovna oblika)

Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}||||\vec{v}||,$$

enakost velja, v primeru, da sta vektorja vzporedna.

1.0.12 Trikotniška neenakost (osnovna oblika)

Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||.$$

1.0.13 Ortogonalna vektorja

Vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ sta ortogonalna (pravokotna) natakno takrat, kadar je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

1.0.14 Kot med vektorjema

Ce je ϕ kot med vektorjema $\vec{x}$ in $\vec{y}$, potem je

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}||||\vec{y}||} = \cos\phi$$

1.0.15 Vektorski produkt

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

1.0.16 Lastnosti vektorskega produkta

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (aditivnost)
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ (!komutativnost)
- $(a\vec{a}) \times \vec{b} = a(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (a\vec{b})$ (homogenost)
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ *je* $\perp$ *na vektorja* $\vec{a}$ *in* $\vec{b}$
- $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}||||\vec{b}|| \sin\phi$
- Dolzina vektorskega produkta je ploscina paralelograma, katerega vektorja oklepata

1.0.17 Mesani produkt

Mesani produkt$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ vektorjev $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ v R^3 je skalarni produkt vektorjev $\vec{a} \times \vec{b}$ in $\vec{c}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

1.0.18 Lastnosti mesanega produkta

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
- $(x\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = x(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (homogenost)
- $(\vec{a}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{v}, \vec{c})$
- Absolutna vrednost mesanega produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je enaka prostornini paralepipeda

1.0.19 Premice v R^3

Premico določata smerni vektor $\vec{p} = [a, b, c]^T$ in točka $A(x_0, y_0, z_0)$.

- Parametrična oblika: $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}$, $t \in R$
- Kanonična oblika: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

1.0.20 Ravnine v R^3

Ravnina z normalo $\vec{n} = [a, b, c]^T$ skozi točko $A(x_0, y_0, z_0)$ ima enačbo

$$(\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n} = 0$$

oziroma

$$ax + by + cz = d$$

1.0.21 Razdalje

Razdalja od tocke P do ravnine, v kateri lezi tocka A :

$$\cos\phi = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r_P} - \vec{r_A})}{||\vec{n}|| ||\vec{r_P} - \vec{r_A}||} \text{ oz. } d = |\frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}(\vec{r_P} - \vec{r_A})|$$

Razdalja od tocke P do premice, katera gre skozi tocko A:

$$d = \frac{||\vec{e} \times (\vec{r_P} - \vec{r_A})||}{||\vec{e}||}$$

1.0.22 Projekcije vektorjev

Naj bo $proj_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{x}$ projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$. Izracunamo jo po sledeci formuli:

$$proj_{\vec{a}}\vec{b} = \tfrac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$$

1.0.23 Matrika

Matrika dimenzije $m \times n$ je tabela $m \times n$ stevil, urejenih v m vrstic in n stolpcev:

$$A^{m\times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

1.0.24 Diagonalna matrika

Matrika, katere elementi so enaki nic povsod zunaj glavne diagonale, se imenuje diagonalna matrika. Za diagonalno matriko je $a_{ij} = 0$, kadarkoli velja $i \neq j$

1.0.25 Spodnjetrikotna matrika

Matrika $A^{n\times n}$ je spodnjetrikotna, kadar so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \ kadar\ je\ i < j$$

1.0.26 Zgornjetrikotna matrika

Matrika $A^{n\times n}$ je zgornjetrikotna, kadar so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \ kadar\ je\ i > j$$

1.0.27 Trikotna matrika

Matrika je trikotna, ce je zgornjetrikotna ali spodnjetrikotna.

1.0.28 Enakost matrik

Dve matriki A in B sta enaki natanko takrat, kadar imata enaki dimenziji in kadar so na istih mestih v obeh matrikah enaki elementi:

$$A^{m\times n} = B^{p\times q} \implies m = p \text{ in } n = q,$$
$$a_{ij} = b_{ij} \ za\ vsak\ i = 1, ..., m \text{ in } j = 1, ..., n$$

1.0.29 Produkt matrike s skalarjem

Produkt matrike s skalarjem dobimo tako, da vsak element matrike pomnozimo s *skalarjem*

$$aA^{m\times n} = \begin{bmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} & \dots & ax_{1n} \\ ax_{21} & ax_{22} & ax_{23} & \dots & ax_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax_{m1} & ax_{m2} & ax_{m3} & \dots & ax_{mn} \end{bmatrix}$$

1.0.30 Vsota matrik

Vsoto dveh matrik enake dimenzije dobimo tako, da sestejemo istolezne elemente obeh matrik:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & ax_{12} + b_{12} & \dots & ax_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & ax_{22} + b_{22} & \dots & ax_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & ax_{m2} + b_{m3} & \dots & ax_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

1.0.31 Osnovne matricne operacije

- $A + B = B + A$ (komutativnost)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativnost)
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (mnozenje s skalarjem)
- $A + (-A) = 0$
- $x(yA) = (xy)A \ in\ 1 \cdot A = A$

1.0.32 Transponirana matrika

Transponirana matrika k matriki A reda $m \times n$ je matrika reda $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

1.0.33 Lastnosti transponiranja matrik

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $(A^T)^T = A$

1.0.34 Produkt matrike in vektorja

Produkt matrike A in vektorja $\vec{x}$ je linearna kombinacija stolpcev matrike A, utezi linearne kombinacije so komponente vektorja $\vec{x}$:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

1.0.35 Produkt vrstice z matriko

Produkt vrstice $\vec{x}$ z matriko A je linearna kombinacija vrstic matrike A, koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice $\vec{y}$:

$$\vec{y} \cdot A = \begin{bmatrix} y_1, y_2, y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\vec{u} \\ y_2\vec{v} \\ y_3\vec{w} \end{bmatrix}$$

1.0.36 Produkt matrik (stolpčni pogled)

Produkt matrik A in B je matrika, katere stolpci so zaporedoma produkti matrike A s stolpci matrike B:

$$AB = A\begin{bmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \end{bmatrix}$$

1.0.37 Produkt matrik (elementni pogled)

Element c_{ij} v $i-ti$ vrstici in $j-tem$ stolpcu produkta C = AB je skalarni produkt $i-te$ vrstice A in $j-tega$ stolpca matrike B

$$c_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

1.0.38 Produkt matrik (vrstični pogled)

Produkt matrik A in B je matrika, katere vrstice so zaporedoma produkti vrstic matrike A z matriko B:

$$\begin{bmatrix} i - ta\ vrstica\ A \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} i - ta\ vrstica\ AB \end{bmatrix}$$

1.0.39 Lastnosti matricnega produkta

- $AB \neq BA$ (!komutativnost)
- $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$ (homogenost)
- $C(A + B) = CA + CB$ (distributivnost)
- $A(BC) = (AB)C$ (asociativnost)
- $(AB)^T = B^T A^T$

V splosnem; komutativnost matricnega mnozenja velja samo, ko sta matriki diagonalizabilni.

1.0.40 Produkt matrik (vsota zunanjih produktov)

Vrstice matrike A z n stolpci naj bodo $a^1, \dots, a^n$, stolpci matrike B z n vrsticami pa $b_1, \dots, b_n$. Potem je

$$AB = a^1 b_1 + \dots + a^n b_n$$

1.0.41 Bločno množenje matrik

Ce delitev na bloke v matriki A ustreza delitvi v matirki B, potem lahko matriki pomnozimo blocno:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

1.0.42 Enotska matrika

Kvadratna matrika I_k reda $k \times k$, ki ima vse diagonalne elemente enake 1, vse ostale elemente pa 0 ima lastnost, da za vsako matriko A reda $m \times n$ velja $AI_n = A$ in $I_m A = A$. Matrika I_k se imenuje enotska ali identicna matirka.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

1.0.43 Cauchy-Schwarzova neenakost

Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| ||\vec{v}||$$

Enakost velja, v primeru, da vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ kažeta v isto ali nasprotno smer.

1.0.44 Trikotniška neenakost

Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$$

2 Sistemi linearnih enacb

2.0.1 Obrnljiva matrika

Kvadratna matrika A je obrnljiva, ce obstaja taka matrika A^{-1}, da je

$$AA^{-1} = I\ in\ A^{-1}A = I$$

Matrika A^{-1} (ce obstaja) se imenuje matriki A inverzna matrika. Matrika, ki ni obrnljiva, je singularna. Matrika **NI** obrnljiva, kadar je $rang(A) < n$!

2.0.2 Pogoj obrnljivosti (pivoti)

Kvadratna matirka reda n je obrnljiva natanko tedaj, ko pri gaussovi eliminaciji dobimo n pivotov.

2.0.3 Enoličnost inverzne matrike

Vsaka obrnljiva matrika ima eno samo inverzno matriko.

2.0.4 Inverz inverza

Inverzna matrika inverzne matrike A^{-1} je matrika A

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2.0.5 Rešitev sistema z obrnljivo matriko

Ce je matrika A obrnljiva, potem ima sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ edino resitev $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

2.0.6 Nenicelna rešitev homogenega sistema

Ce obstaja nenicelna resitev $\vec{x}$ enacbe $A\vec{x} = \vec{0}$, matrika A ni obrnljiva(je singularna).

2.0.7 Inverz produkta

Ce sta matirki A in B istega reda obrnljivi, je obrnljiv tudi produkt $A \cdot B$ in

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

2.0.8 Potenciranje produkta

Pozor! Pravilo

$$(AB)^p = A^p B^p$$

velja le v primeru, ko matriki A in B komutirata, torej $AB = BA$.

2.0.9 Inverz transponirane matrike

Inverz transponirane matrike je transponirana matrika inverza

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2.0.10 Inverz diagonalne matrike

Inverz diagonalne matrike z diagonalnimi elementi a_{ii} je diagonalna matrika, ki ima na diagonali elemente a_{ii}^{-1}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

2.0.11 Izračun inverzne matrike

Za izracun inverza matrike A, uporabimo gausovo eliminacijo nad matriko $\big[A|I\big]$

$$\big[A|I\big] = \big[I|A^{-1}\big]$$

2.0.12 Simetrična matrika

Matrika A je simetricna $\Leftrightarrow A^T = A$. Za elemente a_{ij} simetricne matirke velja $a_{ij} = a_{ji}$. Za simetricno matriko vedno velja, da je kvadratna $A \in R^{n\times n}$.

2.0.13 Inverz simetrične matrike

Ce je matrika A simetricna in obrnljiva, je tudi A^{-1} simetricna.

2.0.14 Produkti $R^T R$ in RR^T

Ce je R poljubna (lahko tudi pravokotna) matrika, sta $R^T R$ in RR^T simetricni matriki.

3 Vektorski prostori

3.0.1 Realni vektorski prostor

Realni vektorski prostor V je mnozica "vektorjev" skupaj z pravili za

- sestevanje vektorjev,
- mnozenje vektorja z realnim stevilom (skalarjem)

Ce sta $\vec{x}$ in $\vec{y}$ poljubna vektorja v V, morajo biti v V tudi

- vsota $\vec{x} + \vec{y}$ in
- produkti $\alpha\vec{x}$ za vse $\alpha \in R$

V vektorskem prostoru V morajo biti tudi VSE linearne kombinacije $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$

3.0.2 Pravila za operacije v vektorskih prostorih

Operaciji sestevanja vektorjev in mnozenja vektorja s skalarjem v vektorskem prostoru morajo zadoscati naslednjim pravilom:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativnost)
- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (asociativnost)
- obstaja en sam nenicelni vektor $\vec{0}$, da velja $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- za vsak $\vec{x}$ obstaja natanko en $-\vec{x}$, da je $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
- $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ (distributivnost)
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

3.0.3 Vektorski podprostor

Podmnozica U vektorskega prostora V je *vektorski podprostor*, ce je za vsak par vektorjev $\vec{x}$ in $\vec{y}$ iz U in vsako realno stevilo α tudi

- $\vec{x} + \vec{y} \in U$ in
- $\alpha\vec{x} \in U$.

3.0.4 Pogoj za podprostor

Mnozica vektorjev U je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je vsaka linearna kombinacija vektorjev iz U tudi v U.

3.0.5 Lastnosti vektorskih podprostorov

- Vsak vektorski podprostor nujno vsebuje nicelni vektor $\vec{0}$
- Presek dveh podprostorov vektorskega podprostora je tudi podprostor

3.0.6 Stolpicni prostor C(A)

Stolpicni prostor C(A) matrike $A \in R^{m\times n}$ je tisti podprostor vektorskega prostora R^m, ki vsebuje natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike A.
Izracunamo ga tako, da matriko A transponiramo in izvedemo operacijo gaussove eliminacije nad A^T. Vrstice katere ostanejo po gaussivi eliminaciji so linearno neodvisni vektorji, kateri tvorijo stoplicni prostor matrike A, $C(A)$. *neformalno: linearna ogrinjaca stolpcev matrike (npr. ce imas 5 stolpcev pa lahko 2 zapises kot linearno kombinacijo ostalih 3 bo imel column space 3 elemente)*

3.0.7 Pogoj rešljivosti

Sistem linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je reslijv natanko tedaj, ko je vektor $\vec{b} \in C(A)$

3.0.8 Rešitve homogenega sistema

Naj bo matrika $A \in R^{m\times n}$. Mnozica resitev homogenega sistema linearnih enacb je podprostor v vektorskem prostoru R^n.

3.0.9 Nicelni prostor N(A)

Mnozica vseh resitev sistema linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ se imenuje nicelni prostor matirke A. Oznacujemo ga z N(A).
neformalno: mnozica vektorjev, ki se z neko matriko zmnozijo v nicelni vektor. Matriko A samo eliminiras po gaussu in nato dobljene resitve enacis z 0.

3.0.10 Nicelni prostor obrnljive matrike

Ce je matrika A kvadratna in obrnljiva, potem N(A) vsebuje samo vektor $\vec{0}$

3.0.11 Stopnicasta oblika

Matrika ima *stopnicasto* obliko, kadar se vsaka od njenih vrstic zacne z vsaj eno niclo vec kot prejsnja vrstica.

3.0.12 Pivot in rang matrike

Prvi element, razlicen od nic v vsaki vrstici, je *pivot.* Stevilo pivotov v matriki se imenuje rang matrike. Rang matrike A zapisemo kot $rang(A)$.

3.0.13 Omejitev ranga

Rang matrike ni vecji od stevila vrstic in ni vecji od stevila stolpcev matrike.

3.0.14 Proste neznanke

Stevilo prostih neznank matrike = st. stolpcev - rang matrike

3.0.15 Polni rang

1. Visoka in ozka matrika ($m > n$) ima poln stolpicni rang, kadar je $rang(A) = n$
2. Nizka in siroka matrika ($m < n$) ima poln vrsticni rang, kadar je $rang(A) = m$
3. Kvadratna matrika ($n = m$) ima poln rang, kadar je $rang(A) = m = n$

3.0.16 Lastnosti matrike s polnim stolpicnim rangom

Za vsako matriko A s polnim stolpicnim rangom $r = n \leq m$, velja:

1. Vsi stolpci A so pivotni stolpci
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ nima prostih neznank, zato tudi nima posebnih resitev
3. Nicelni prostor $N(A)$ vsebuje le nicelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$
4. Kadar ima sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ resitev(kar ni vedno res!), je resitev ena sama
5. Reducirana vrsticna oblika matrike (A) se da zapisati kot

$$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \times n \textit{ enotska matrika} \\ m - n \textit{ vrstic samih nicel} \end{bmatrix}$$

3.0.17 Lastnosti matrike s polnim vrsticnim rangom

Za vsako matriko A s polnim vrsticnim rangom $r = m \leq n$ velja:

1. Vse vrstice so pivotne, ni prostih vrstic in U (stopnicasta oblika) in R(reducirana stopnicasta oblika) nimata nicelnih vrstic
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je resljiv za vsak vektor $\vec{b}$
3. Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ ima $n - r = n - m$ prostih neznank, zato tudi prav toliko posebnih resitev
4. Stolpicni prostor $C(A)$ je ves prostor R^m

3.0.18 Lastnosti kvadratne matrike polnega ranga

Za vsako kvadratno matriko A polnega ranga (rang(A) = m = n) velja:

1. Reducirana vrsticna oblika matrike A je enotska matrika
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ ima natancno eno resitev za vsak vektor desnih strani $\vec{b}$
3. Matrika A je obrnljiva
4. Nicelni prostor matrike A je samo nicelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$
5. Stolpicni prostor matrike A je cel prostor $C(A) = R^m$

3.0.19 Linearna neodvisnost

Vektorji $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$ so linearno neodvisni, ce je

$$0\vec{x_1} + 0\vec{x_2} + \cdots + 0\vec{x_n}$$

edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka vektorju $\vec{0}$. Vektorji $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$ so linearno odvisni, *ce niso linearno neodvisni.*

3.0.20 Posledica odvisnosti

Ce so vektorji *odvisni*, lahko vsaj enega izrazimo z ostalimi.

3.0.21 Nicelni vektor in odvisnost

Ce je med vektorji $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}$ tudi nicelni vektor, so vektorji *linearno odvisni.*

3.0.22 Odvisnost pri presežnem številu vektorjev

Vsaka mnozica n vektorjev iz R^n je odvisna, kadar je $n > m$.

3.0.23 Neodvisnost stolpcev

Stolpci matrike A so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima homogena enacba $A\vec{x} = \vec{0}$ edino resitev $\vec{x} = \vec{0}$.

3.0.24 Rang in neodvisnost stolpcev

Kadar je $rang(A) = n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisni. Kadar je pa $rang(A) < n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisni.

3.0.25 Rang in neodvisnost vrstic

Kadar je $rang(A) = m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisne. Kadar je pa $rang(A) < m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisne.

3.0.26 Vrsticni prostor

Vrsticni prostor matrike A je podprostor v R^n, ki ga razpenjajo vrstice matrike A.

3.0.27 Vrsticni prostor kot $C(A^T)$

Vrsticni prostor matrike A je $C(A^T)$, stolpicni prostor matrike A^T.

3.0.28 Baza vektorskega prostora

Baza vektorskega prostora je mnozica vektorjev, ki

1. je linearno neodvisna in
2. napenja cel prostor.

3.0.29 Enoličnost bazne kombinacije

Vsak vektor iz vektorskega prostora lahko na en sam nacin izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

3.0.30 Pogoj za bazo v R^n

Vektorji $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$ so baza prostora R^n natanko tedaj, kadar je matrika, sestavljena iz stolpcev $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$, obrnljiva.

3.0.31 Večbaznost R^n

Prostor R^n ima za $n > 0$ neskoncno mnogo razlicnih baz.

3.0.32 Enakost števila baznih vektorjev

Ce sta mnozici vekotrjev $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_m}$ in $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ obe bazi istega vektorskega prostora, potem je $m = n \implies$ vse baze istega vektorskega prostora imajo isto stevilo vektorjev.

3.0.33 Dimenzija vektorskega prostora

Dimenzija vektroskega prostora je stevilo baznih vektorjev.

3.0.34 Dimenzija stolpicnega in vrsticnega prostora

Dimenziji stolpicnega prostora $C(A)$ in vrsticnega prostora $C(A^T)$ sta enaki rangu matrike A

$$dim(C(A)) = dim(C(A^T)) = rang(A).$$

3.0.35 Dimenzija nicelnega prostora

Dimenzija nicelnega prostora $N(A)$ matrike A z n stolpci in ranga r je enaka $dim(N(A)) = n - r$.

3.0.36 Dimenzije vseh štirih podprostorov

Stolpicni prostor $C(A)$ in vrsticni prostor $C(A^T)$ imata oba dimenzijo r. Dimenzija nicelnega prostora $N(A)$ je $n - r$, Dimenzija levega nicelnega prostora $N(A^T)$ pa je $m - r$.

3.0.37 Matrika ranga 1

Vsako matriko ranga 1 lahko zapisemo kot produkt(stolpcnega) vektorja z vrsticnim vektorjem $A = \vec{u}\vec{v}^T$.

4 Linearne preslikave

4.0.1 Linearna preslikava

Preslikava $A : U \to V$ je linearna, ce velja

1. aditivnost: $A(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = A\vec{u}_1 + A\vec{u}_2$ za vse $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$,
2. homogenost: $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$ za vse $\alpha \in R$ in $\vec{u} \in U$.

Oziroma v enem koraku:

$$A(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) = \alpha A(\vec{u}_1) + \beta A(\vec{u}_2).$$

Pozor! Preslikava ni linearna, ce $A(\vec{0}) \neq \vec{0}$.

4.0.2 Ekvivalenten pogoj za linearnost

Preslikava $A : U \to V$ je linearna natanko tedaj, ko velja

$$A(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = \alpha_1 A\vec{u}_1 + \alpha_2 A\vec{u}_2$$

za vse $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ in vse $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$.

4.0.3 Preslikava nicelnega vektorja

Ce je A *linearna preslikava*, je $A\vec{0} = \vec{0}$.

4.0.4 Linearna preslikava in linearne kombinacije

Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava in $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{u}_i$ linearna kombinacija vektorjev. Potem je A$(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A\vec{u}_i$.

4.0.5 Določenost preslikave z bazo

Naj bo $\beta = \{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}\}$ baza za vektorski prostor U. Potem je linearna preslikava $A : U \to V$ natanko dolocena, ce poznamo slike baznih vektorjev.

4.0.6 Obstoj linearne preslikave

Naj bo $\beta = \{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}\}$ baza za U in $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$. Potem obstaja natanko ena linearna preslikava $A : U \to V$, za katero je $A\vec{u}_i = \vec{v}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$.

4.0.7 Jedro linearne preslikave

Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava. Potem mnozico

$$kerA = \{\vec{u} \in U; A\vec{u} = \vec{0}\}$$

imenujemo *jedro* linearne preslikave. Ker je $A\vec{0} = \vec{0}$, je $\vec{0} \in$ ker A za vse A. Zato je jedro vedno neprazna mnozica. *Ce je matrika $A\phi$* ***enotska*** *preslikava za ϕ, potem velja*

$$ker\phi = N(A).$$

4.0.8 Jedro kot podprostor

Jedro linearne preslikave $A : U \to V$ je vektorski podprostor v U.

4.0.9 Slika linearne preslikave

Mnozico

$$im\ A = \{\vec{v} \in V; obstaja\ tak\ \vec{u} \in U,\ da\ je\ \vec{v} = A\vec{u}\}$$

imenujemo *slika* linearne preslikave $A : U \to V$. *Ce je matrika $A\phi$* ***enotska*** *preslikava za ϕ, potem velja*

$$im\phi = C(A).$$

4.0.10 Slika kot podprostor

Ce je $A : U \to V$ linearna preslikava, potem je njena slika $im\ A$ vektorski podprostor v V.

4.0.11 Poln rang in trivialno jedro

Ce je $A : U \to V$ linearna preslikava, in je rang matrike te preslikave v standardni bazi poln, potem lahko sklepamo, da ima ta preslikava **trivialno jedro**.

5 Ortogonalnost

5.0.1 Ortogonalna podprostora

Podprostora U in V vektorskega prostora sta med seboj ortogonalna, ce je vsak vektor $\vec{u} \in U$ ortogonalen na vsak vektor $\vec{v} \in V$.

5.0.2 Ortogonalnost prostora in nicelnega prostora

Za vsako matriko $A \in R^{m \times n}$ velja:

1. Nicelni prostor $N(A)$ in vrsticni prostor $C(A^T)$ sta ortogonalna podprostora R^n
2. Levi nicelni prostor $N(A^T)$ in stolpicni prostor $C(A)$ sta ortogonalna podprostora prostora R^m.

5.0.3 Ortogonalni komplement

Ortogonalni komplement $V^\perp$ podprostora V vsebuje VSE vektorje, ki so ortogonalni na V.

5.0.4 Ortogonalni komplementi prostorov matrike

Naj bo A matrika dimenzije $m \times n$.

- Nicelni prostor $N(A)$ je ortogonalni komplement vrsticnega prostora $C(A^T)$ v prostoru R^n
- Levi nicelni prostor $N(A^T)$ je ortogonalni komplement stolpicnega prostora $C(A)$ v prostoru R^m.

krajse:

$$N(A) = C(A^T)^\perp$$
$$N(A^T) = C(A)^\perp$$

tukaj lahko vedno pomnozimo s komplementom, da dobimo npr.

$$N(A)^\perp = C(A^T)$$

dodatek:

$$dimN(A) = st.stolpcev - rang(A)$$
$$dimN(A^T) = st.vrstic - rang(A)$$
$$dimC(A) = dimC(A^T) = rang(A)$$

5.0.5 Enoličnost rešitve v vrsticnem prostoru

Za vsak vektor $\vec{y}$ v stolpicnem prostoru $C(A)$ obstaja v vrsticnem prostoru $C(A^T)$ en sam vektor $\vec{x}$, da je $A\vec{x} = \vec{y}$.

5.0.6 Obrnljivost $A^T A$

Ce so stolpci matrike A linearno neodvisni, je matrika $A^T A$ obrnljiva.

5.0.7 Projekcijska matrika

Matrika P je projekcijska, kadar

- je simetricna: $P^T = P$ in
- velja $P^2 = P$.

5.0.8 Projekcija na ortogonalni komplement

Ce je P projekcijska matrika, ki projecira na podprostor U, potem je $I - P$ projekcijska matrika, ki projecira na $U^\perp$, ortogonalni komplement podprostora U.

5.0.9 Ortonormirani vektorji

Vektorji $\vec{q_1}, \vec{q_2}, \ldots, \vec{q_n}$ so ortonormiranim kadar so ortogonalni in imanjo vsi dolzino 1, torej

$$\vec{q_i}^T \vec{q_i} = \begin{cases} 0 \; ko \; je \; i \neq j \; pravokotni \; vektorji \\ 1 \; ko \; je \; i = j \; enotski \; vektorji \end{cases}$$

za matriko $Q = [\vec{q_1}, \vec{q_2} \ldots \vec{q_n}]$ velja $Q^T Q = I$.

5.0.10 Matrika ortonormiranih vektorjev

Vektorji $\vec{q_1}, \ldots, \vec{q_n}$ naj bodo ortonormirani v prostoru R^m. Potem za matriko

$$Q = [\vec{q_1} \vec{q_2} \ldots \vec{q_n}]$$

velja, da je $Q^T Q = I_n$ enotska matrika reda n.

5.0.11 Ortogonalna matrika

Matrika Q je ortogonalna, kadar je

1. kvadratna in
2. ima ortonormirane stolpce.

5.0.12 Lastnosti ortogonalne matrike

Ce je Q ortogonalna matirka, potem je obrnljiva in

$$Q^{-1} = Q^T$$
$$dimU^\perp = n - dimU$$
$$(U^\perp)^\perp = U$$

5.0.13 Ohranjanje dolžin in kotov

Mnozenje z ortogonalno matriko ohranja dolzino vektorjev in kote med njimi. Ce je Q ortogonalna matrika, potem je

$$||Q\vec{x}|| = ||\vec{x}|| \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in}$$
$$(Q\vec{x})^T Q\vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in } \vec{y}$$

5.0.14 Produkt ortogonalnih matrik

Ce sta Q_1 in Q_2 ortogonalni matriki, je tudi produkt $Q = Q_1 Q_2$ ortogonalna matrika.

5.0.15 Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Za vhod uporabimo Linearno ogrinjaco linearno neodvisnih vekotrjev. Po gram-schmidtovi ortogonalizaciji pa dobimo paroma ortogonalne vektorje. Postopek:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1$$
$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - proj_{\vec{u}_1} \vec{v}_2$$
$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - proj_{\vec{u}_1} \vec{v}_3 - proj_{\vec{u}_2} \vec{v}_3$$
$$\vdots$$

Po tem postopku dobimo paroma ortogonalne vektorje po Gram-Schmidtovi ortogonalizaciji.

5.0.16 QR razcep

Iz linearno neodvisnih vektorjev $a_1, \ldots, a_n$ z *Gram-Schmidtovo* ortogonalizacijo dobimo ortonormirane vektorje $q_1, \ldots, q_n$. Matriki A in Q s temi stolpci zadoscajo enacbi $A = QR$, kjer je R zgornjetrikotna matrika.

- Najprej z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo poiscemo linearno neodvisne vektorje matrike A
- Vektorje normiramo in jih zapisemo v matriko Q.
- Matriko R dobimo tako, da matriko Q^T pomnozimo z matriko A

$$R = Q^T A$$

Tako smo prisli do vseh elementov v QR razcepu matrike A.

Sedaj ko imamo izracunane vse elemente lahko zapisemo se projekcijsko matriko. To je matrika pravokotne projekcije na $C(Q) = C(A)$. Njen izracun je preprost:

$$QQ^T = pravokotna\ projekcija\ na\ C(Q)\ = C(A)$$

Sedaj lahko to projekcijsko matriko pomnozimo z desne s poljubnim vektorjem in ugotovimo kam se preslika v prostoru $C(A)$. V nasprotnem primeru, ce bi pa zeleli imeti projekcijsko matriko, s katero bi radi videli kam se vektor preslika v prostoru $N(A^T)$, bi pa od identicne matrike odsteli projekcijsko matriko za $C(Q)$.

$$I - QQ^T = pravokotna\ projekcija\ na\ C(A)^{\perp}\ = N(A^T)$$

5.0.17 Vektorski prostor neskončnih zaporedij

Vektorski prostor ι je mnozica vseh neskoncnih zaporedij $\vec{u}$ s koncno dolzino

$$||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u_1}^2 + \vec{u_2}^2 + \cdots < \infty$$

5.0.18 Predoločeni sistemi

$$A^T A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^T \vec{f}$$

Kjer je A matrika sistemov linearnih enacb in $\vec{f}$ vektor pricakovanih resitev po gaussovi eliminaciji zgornje enacbe, dobimo spremenljivke, ki predstavljao najboljso aproksimacijo vseh kombinaicij rezultatov in vhodnih spremenljivk.

6 Determinante

6.0.1 Determinanta enotske matrike

Determinanta enotske matirke je
$det(I) = 1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\ in \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

6.0.2 Zamenjava vrstic

Determinanta spremeni predznak, ce med seboj zamenjamo dve vrstici.

Dodatna lastnost:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$$

6.0.3 Linearnost po vrsticah

Determinanta je linearna funkcija vsake vrstice posebej. To pomeni, da se

1. determinanta pomnozi s faktorjem t, ce eno vrstico determinante(vsak element v tej vrstici) pomnozimo s faktorjem t.

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

2. determinanta je vsota dveh determinant, ki se razlikujeta le v eni vrstici, ce je v provitni determinanti ta vrstica vsota obeh vrstic, ostale vrstice pa so enake v vseh treh determinantah.

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

Pozor! Kadar mnozimo matriko A s skalarjem t, se vsak element matrike pomnozi s skalarjem. Ko racunamo determinanto produkta matirke s skalarjem tA, skalar t izpostavimo iz vsake vrstice posebej, zato je $det(tA) = t^n det(A)$, kjer je n stevilo vrstic (ali stolpcev) determinante.

6.0.4 Razvoj po vrstici/stolpcu, predznaki kofaktorjev

Pri Laplaceovem razvoju velja

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \quad \text{(razvoj po } i\text{-ti vrstici)}$$

oziroma

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \quad \text{(razvoj po } j\text{-tem stolpcu)},$$

kjer A_{ij} dobimo tako, da izbrišemo i-to vrstico in j-ti stolpec. Predznaki se izmenjujejo kot šahovnica:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

6.0.5 Enaki vrstici

Matrika, ki ima dve enaki vrstici, ima determinanto enako 0.

6.0.6 Odštevanje vrstic

Ce v matriki od poljubne vrstice odstejemo mnogokratnik neke druge vrstice, se njena determinanta ne spremeni.

6.0.7 Determinanta in Gaussova eliminacija

Naj bo A poljubna kvadratna matirka $n \times n$ in U njena vrsticnostopnicasta oblika, ki jo dobimo z *Gaussovo eliminacijo.* Potem je

$$det(A) = \pm det(U).$$

6.0.8 Nicelna vrstica

Determinanta, ki ima vrstico samih nicel, je enaka 0.

6.0.9 Determinanta trikotne matrike

Determinanta trikotne matrike A je produkt diagonalnih elementov:

$$det(A) = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}.$$

6.0.10 Singularna in obrnljiva matrika

Determinanta singularne matrike je enaka 0, determinanta obrnljive matrike je razlicna od 0.

6.0.11 Determinanta produkta

Determinanta produkta dveh matrik je enaka produktu determinant obeh matrik:

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

6.0.12 Determinante inverzne, potencirane in transponirane matrike

Determinanta inverzne matrike je enaka

$$det(A^{-1}) = 1/det(A)$$

in determinanta potence A^n matrike A je

$$det(A^n) = (det(A))^n$$

ter determinanta transponirane matrike je enaka determinanti originalne matrike, saj ko naredimo razvoj po vrsticah, pridemo do enakih elementov po diagonali.

$$det(A) = det(A^T).$$

6.0.13 Determinanta transponirane matrike

Transponirana matrika A^T ima isto determinanto kot A.

6.0.14 Recap dovoljenih operacij nad determinanto

1. Ce zamenjamo dve vrstici, se **spremeni** predznak determinante
2. Vrednost determinante se ne spremeni, ce neki vrstici pristejemo poljuben veckratnik katerekoli druge vrstice.
3. Ce vse elemente neke vrstice pomnozimo z istim stevilom α, se vrednost determinante pomnozi z α.

6.0.15 Lastnosti za stolpce

Vsaka lastnost, ki velja za vrstice determinante, velja tudi za njene **stolpce**. Med drugim:

- Determinanta spremeni predznak, ce med seboj zamenjamo dva stolpca
- Determinanta je enaka 0, ce sta dva stolpca enaka
- Determinanta je enaka 0, ce so v vsaj enem stolpcu same nicle.

6.0.16 Kofaktorska formula

Ce je A kvadratna matrika reda n, njeno determinanto lahko izracunamo z razvojem po $i - ti$ vrstici

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}.$$

Kofaktorje C_{ij} izracunamo kot $C_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$, kjer je D_{ij} determinanta, ki jo dobimo, ce v A izbrisemo i-to vrstico in j-ti stolpec.

6.0.17 Inverzna matrika s kofaktorji

Inverzna matrika A^{-1} matrike A je transponirana matrika kofaktorjev, deljena z determinanto $|A|$:

$$A^{-1} = \frac{C^T}{det(A)},$$

kjer je C matrika kofaktorjev matrike A.

6.0.18 Ploščina paralelograma

Ploscina paralelograma, dolocenega z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b} \in R^2$ je enaka $\det([\vec{a}\vec{b}])$, to je absolutni vrednosti determinante s stolpcema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

6.0.19 Mešani produkt

Mesani produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je enak determinanti matrike, ki ima te tri vektorje kot stolpce.

6.0.20 Obrnljivost in determinanta

Naj bo A matrika $R^{n\times n}$

$$A\ je\ obrnljiva \iff detA \neq 0$$

$$A^{-1}\ ne\ obstaja \iff detA = 0$$

7 L. vrednosti in vektorji

7.0.1 Lastni vektor in lastna vrednost

Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$, za katerega je $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ lastni vektor. Stevilo λ je lastna vrednost. **Pozor!** Nicelni vektor $\vec{0}$ ne more biti lastni vektor. Lahko pa je lastna vrednost enaka 0.

7.0.2 Lastne vrednosti A^2

Ce ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor $\vec{x}$, potem ima matrika A^2 lastno vrednost λ^2 in isti lastni vektor $\vec{x}$.

7.0.3 Lastne vrednosti A^k

Ce ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor $\vec{x}$, potem ima matrika A^k lastno vrednost λ^k in isti lastni vektor $\vec{x}$.

7.0.4 Lastne vrednosti inverzne matrike

Ce ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor $\vec{x}$, potem ima inverzna matrika lastno vrednost $1/\lambda$ in isti lastni vektor $\vec{x}$.

7.0.5 Sled matrike

Sled kvadratne matrike A reda n je vsota njenih diagonalnih elementov.

$$sled(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

7.0.6 Sled in determinanta preko lastnih vrednosti

Sled matrike je enaka vsoti vseh lastnih vrednosti, stetih z njihovo veckratnostjo. Ce so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike reda n, potem je sled enaka *vsoti*

$$sled(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n,$$

determinanta matrike pa *produktu* lastnih vrednosti

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \ldots \lambda_n.$$

7.0.7 Lastnosti sledi

Za matrike $A, B, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja

1. $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$,
2. $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$,
3. $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$,
4. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$,
5. $\mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$ za vsako obrnljivo matriko P.
6. $\mathrm{tr}(ABP) = \mathrm{tr}(APB)$, ce so A,B,P simetricne matirke.
7. $\mathrm{tr}(ABP) = \mathrm{tr}(A^T B^T P^T)$.

Za poljubna vektorja $x, y \in \mathbb{R}^n$ velja:

$$\mathrm{tr}(xy^T) = \mathrm{tr}(x^T y)$$

7.0.8 Lastne vrednosti A + cI

Ce ima matrika A lastno vrednost λ, ki ji pripada lastni vektor $\vec{x}$, potem ima matrika $A + cI$ lastno vrednost $\lambda + c$ z istim lastnim vektorjem $\vec{x}$ (velja samo z enotskimi matrikami I).

7.0.9 Lastne vrednosti trikotne matrike

Lastne vrednosti trikotne matrike so enake diagonalnim elementom.

7.0.10 Diagonalizacija matrike

Denimo, da ima matrika $A \in R^{n \times n}$ n linearno neodvisnih lastnih vektorjev $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$. Ce jih zlozimo kot stolpce v matriko S

$$S = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n],$$

potem je T =: $S^{-1}AS$ diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ na diagonali

$$S^{-1}AS = T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Pozor! Lastni vektorji v matriki S morajo biti v istem vrstnem redu kot lastne vrednosti v matriki T.

7.0.11 Potenca diagonalizirane matrike

Ce je $A = STS^{-1}$, potem je $A^k = ST^kS^{-1}$ za vsak $k \in N$.

7.0.12 Lastne vrednosti simetrične matrike

Vse lastne vrednosti realne simetricne matrike so realne.

7.0.13 Pravokotnost lastnih vektorjev

Lastni vektorji realne simetricne matrike, ki pripadajo razlicnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.

7.0.14 Schurov izrek

Za vsako kvadratno matriko reda n, ki ima le realne lastne vrednosti, obstaja taka ortogonalna matrika Q, da je

$$Q^T AQ = T$$

zgornjetrikotna matrika, ki ima lastne vrednosti(lahko so kompleksne) matrike A na diagonali.

7.0.15 Spektralni izrek

Vsako simetricno matriko A lahko razcepimo v produkt $A = QTQ^T$, kjer je Q ortogonalna matrika lastnih vektorjev, T pa diagonalna z lastnimi vrednostmi matrike A na diagonali.

7.0.16 Linearna kombinacija matrik ranga 1

Vsako realno simetricno matriko lahko zapisemo kot linearno kombinacijo matrik ranga 1

$$A = \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^T + \lambda_2 \vec{q}_2 \vec{q}_2^T + \cdots + \lambda_n \vec{q}_n \vec{q}_n^T,$$

kjer so $\vec{q}_i$ stolpci matrike Q (torej lastni vektorji matrike A).

7.0.17 Pivoti in lastne vrednosti

Za simetricno nesingularno matriko A je stevilo pozitivnih pivotov enako stevilu pozitivnih lastnih vrednosti.

7.0.18 Pozitivno definirana matrika

Kvadratna matrika je pozitivno definirana, kadar so vse njene lastne vrednosti pozitivne.

7.0.19 Pozitivno definirana matrika reda 2

Kvadratna matrika reda 2 je pozitivno definirana natanko tedaj, kadar sta pozitivni sled in determinanta matrike.

7.0.20 Pogoj za pozitivno definitnost

Simetricna matrika A reda n je pozitivno definirana natanko tedaj, ko je za vsak vektor $\vec{x} \neq \vec{0} \in R^n$

$$\vec{x}^T A\vec{x} > 0$$

7.0.21 Vsota pozitivno definitnih matrik

Ce sta matriki A in B pozitivno definitni, je pozitivno definitna tudi njuna vsota $A + B$.

7.0.22 Vodilne glavne poddeterminante

Matrika A je pozitivno definitna, kadar so vse njene vodilne glavne poddeterminante pozitivne.

7.0.23 R^T R je pozitivno definitna

Ce so stolpci matrike R linearno neodvisni, je matrika $A = R^T R$ pozitivno definitna.

7.0.24 Cholesky razcep

Za vsako simetricno pozitivno definitno matriko A obstaja zgornjetrikotna matrika R, da je $A = R^T R$.

7.0.25 Ekvivalentni pogoji za pozitivno definitnost

Simetricna matrka reda n, ki ima eno od spodnjih lastnosti, ima tudi ostale stiri:

1. Vseh n pivotov je pozitivnih;
2. Vseh n vodilnih glavnih determinant je pozitivnih;
3. Vseh n lastnih vrednosti je pozitivnih;
4. Za vsak $\vec{x} \neq \vec{0}$ je $\vec{x}^T A\vec{x} > 0$;
5. $A = R^T R$ za neko matriko R z linearno neodvisnimi stolpci.

7.0.26 Singularni razcep (SVD)

Vsako realno $m \times n$ matriko A lahko zapisemo kot produkt $A = UEV^T$, kjer je matrika U ortogonalna $m \times m$, E diagonalna $m \times n$ in V ortogonalna $n \times n$.

7.0.27 Rang in nenicelne lastne vrednosti

Ce je matrika A simetricna in so vsej njeni elementi realni, potem je njen rang enak stevilu nenicelnih lastnih vrednosti matrike A.

$$rang(A) = \text{stevilo } \lambda A$$

7.0.28 Diagonalizacija in podobnost matrik

Matriki A in B sta *podobni*, ce imata obe iste lastne vrednosi. Diagonalno matriko sestavimo tako, da v njeno diagonalo vpisemo lastne vrednosti. Matriko P pa sestavimo iz njenih lastnih vektorjev; po stolpcih.

$$A = PDP^{-1} \text{ oz.}$$
$$D = P^{-1}AP$$

7.0.29 Spektralni razcep

Naj bodo vekotrji $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_n$ ONB iz l. vektorjev marike A za l. vrednost $\lambda_1, \ldots, \lambda n$, potem lahko matriko A zapisemo kot:

$$A = \lambda_1 \vec{q_1} \vec{q_1}^T + \cdots + \lambda_n \vec{q_n} \vec{q_n}^T$$

7.0.30 Nekaj lastnosti simetričnih matrik

- Vse lastne vrednosti simetricne matrike so realne. Lastni vektorji realne simetricne matrike, ki pripadajo razlicnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.
- Vsako realno simetricno matriko A lahko zapisemo kot $A = QDQ^T$, kjer je Q ortogonalna matrika lastnih vektorjev, D pa diagonalna matrika, ki ima na diagonali pripadajoce lastne vrednosti matrike A.
- Za vsako matriko $A \in R^{n \times m}$ velja, da je $A^T A$ simetricna matrika:

  $$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

  Za to matriko velja tudi da je **PSD**.

8 Napredna linearna algebra

8.1 Schurov izrek

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Potem obstaja ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in zgornje trikotna matrika Z, ki ima na diagonali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, da velja

$$A = QZQ^{-1} = QZQ^T.$$

Postopek za izračun Schurovega razcepa: Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Potem obstajata ortogonalna matrika Q in zgornje trikotna matrika Z z diagonalnimi elementi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, da velja

$$A = QZQ^T.$$

Ponavljaj:

1. Najdemo normirani lastni vektor q_1: $Aq_1 = \lambda_1 q_1$, $q_1^T q_1 = 1$, ter ortonormirano bazo $\{q_2, \ldots, q_n\}$ pravokotnega komplementa. Sestavimo $Q_1 = [q_1 \ q_2 \ \ldots \ q_n]$.
2. Izračunamo
   $$T_1 = Q_1^T A Q_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$
3. Postopek ponavljamo na bloku A_2 (in naslednjih blokih), dokler ne dobimo zgornje trikotne matrike Z in ortogonalne matrike Q, za kateri velja $A = QZQ^T$.

- **Posledica:** Vsaka matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je podobna zgornje trikotni matriki.
- **Posledica:** Vsaka simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ortogonalno podobna diagonalni matriki.
- **Posledica:** Če ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lastne vrednosti enake $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, potem je

  $$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

  in

  $$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n.$$

- **Posledica (Cayley-Hamilton):** Če je $\Delta_A(x) = \det(A - xI_n)$ karakteristični polinom matrike A, potem velja $\Delta_A(A) = 0$.

8.2 Vektorski produkt

Za matriki $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definiramo

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B).$$

Za produkt $\langle A, B \rangle : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$ velja za vse matrike $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

1. $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$,
2. $\langle \alpha A + \beta B, C \rangle = \alpha \langle A, C \rangle + \beta \langle B, C \rangle$,
3. $\langle A, A \rangle \geq 0$,
4. $\langle A, A \rangle = 0$ natanko tedaj, ko je $A = 0$.

Zato $\langle A, B \rangle$ imenujemo skalarni produkt matrik A in B.
Za matrike $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ in $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ velja

$$\langle A, BC \rangle = \langle B^T A, C \rangle = \langle AC^T, B \rangle.$$

8.2.1 Frobeniusova norma matrike

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je definirana kot

$$\|A\|_F = \|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}.$$

Velja:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2.$$

Eckart, Young: Naj bo $A = U \Sigma V^T$ razcep singularnih vrednosti matrike $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n$, kjer $U = [u^{(1)} \ldots u^{(m)}]$ in $\mathbb{R}^{m \times m}$ in $V = [v^{(1)} \ldots v^{(n)}]$ in $\mathbb{R}^{n \times n}$. Potem je matrika A_k iz $\mathbb{R}^{m \times n}$ ranga k, $k \leq n$, ki je med vsemi matrikami ranga k v Frobeniusovi normi najbližje matriki A, enaka

$$A_k = \sigma_1 u^{(1)} (v^{(1)})^T + \sigma_2 u^{(2)} (v^{(2)})^T + \ldots + \sigma_k u^{(k)} (v^{(k)})^T$$

in velja

$$\|A - A_k\|_F = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_n^2}.$$

(Velja torej $\|A - A_k\|_F \leq \|A - X\|_F$ za $\|A - X\|_F$ za vse matrike $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$, za katere velja $\text{rank}(X) = k$.)

Poseben primer; simetrične matrike: Če je matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična ($A = A^T$), jo lahko zapišemo s pomočjo *spekralnega razcepa*

$$A = V \Lambda V^T,$$

kjer je V ortogonalna matrika lastnih vektorjev in $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonalna matrika lastnih vrednosti.

- Pri simetrični matriki se SVD poenostavi, saj so singularne vrednosti natanko

  $$\sigma_i = |\lambda_i|,$$

  in levi ter desni singularni vektorji sovpadajo z lastnimi vektorji matrike. Posledica:

  $$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$$

- Zato lahko A zapišemo kot

  $$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v^{(i)} (v^{(i)})^T,$$

  kjer so $v^{(i)}$ ortonormirani lastni vektorji.

- Najboljša aproksimacija ranga k v Frobeniusovi normi je dobljena tako, da ohranimo tiste lastne vrednosti z največjo absolutno vrednostjo in njihove lastne vektorje:

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{(i)} v^{(i)} (v^{(i)})^T,$$

Tako velja:

$$\|A - A_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_{(i)}^2}.$$

8.3 Kroneckerjev produkt

Kroneckerjev produkt (tudi tenzorski produkt) matrik $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ je $mp \times nq$ matrika

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp\times nq}.$$

Če so matrike A, B, C in D primerne velikosti, potem veljajo naslednje enakosti:

1. $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2. $\alpha \otimes A = A \otimes \alpha = \alpha A$ za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha (A \otimes B)$
4. $(A+B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$ in $A \otimes (B+C) = A \otimes B + A \otimes C$
5. $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$
6. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.
7. $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.
8. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ če A in B obrnljivi.
9. $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$
10. $\mathrm{rang}(A \otimes B) = \mathrm{rang}(A)\mathrm{rang}(B)$
11. Če ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lastne vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ in ima matrika B lastne vrednosti $\mu_1, \ldots, \mu_n$, potem je množica lastnih vrednosti matrike $A \otimes B$ enaka:
$$S_\lambda = \{\lambda_i \mu_j; \lambda_i \text{ lastna vrednost } A, \mu_j \text{ lastna vrednost } B\}$$
$$\text{in } |S_\lambda| \leq mn$$
Ravno tako velja potem za lastne vektorje $v_i \otimes w_j$, da dobimo lastne vektorje matrike $A \otimes B$.
12. Če $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, potem je $\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n$.

Posledica:

$$||A \otimes B||_F = ||A||_F \cdot ||B||_F$$

8.3.1 Kroneckerjeva vsota

Kroneckerjeva vsota je definirana za kvadratni matriki A in B:

$$A \oplus B = A \otimes I_m + I_n \otimes B$$

kjer $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

Če so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti A za lastne vektorje $u_1, \ldots, u_n$ in $\mu_1, \ldots, \mu_m$ lastne vrednosti B za lastne vektorje $v_1, \ldots, v_n$, potem so

$$\lambda_i + \mu_j, \quad i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m$$

lastne vrednosti za $A \oplus B$, lastni vektorji pa so

$$u_i \otimes v_j$$

za i in j. Lastni vektorji $A \oplus B$ so enaki $u_i \otimes v_j$.

8.4 Vektorizacija

Za matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ označimo vektorizacijo matrike A kot

$$\mathrm{vec}(A) = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}.$$

vec je preslikava iz $\mathbb{R}^{m\times n}$ v $\mathbb{R}^{mn}$.

Za vektorja $\vec{a} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ velja:

$$\mathrm{vec}(\vec{a}\vec{b}^T) = \vec{b} \otimes \vec{a}$$

Za matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ in $C \in \mathbb{R}^{p\times r}$ velja:

$$\mathrm{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\mathrm{vec}(B).$$

8.5 Definitnost matrik

Spomnimo se, da ima simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vse lastne vrednosti realne. Simetrični matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pravimo

- **pozitivno semidefinitna**, če je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$ za vse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **pozitivno definitna**, če je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ za vse neničelne $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **negativno semidefinitna**, če je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0$ za vse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **negativno definitna**, če je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$ za vse neničelne $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **nedefinitna**, če je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ za nekatere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in $\mathbf{y}^T A\mathbf{y} < 0$ za nekatere $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Posledica: Naj $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična z lastnimi vrednostmi $\lambda_i, \ldots, \lambda_n$.

- A je **PSD** (pozitivno semidefinitna) $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0$ za $i = 1, \ldots, n$.
- A je **PD** (pozitivno definitna) $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$ za $i = 1, \ldots, n$.
- A je **NSD** (negativno semidefinitna) $\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0$ za $i = 1, \ldots, n$.
- A je **ND** (negativno definitna) $\Leftrightarrow \lambda_i < 0$ za $i = 1, \ldots, n$.
- A je **nedefinirana** $\Leftrightarrow$ ima tako poz. kot neg lastne vrednosti.
- A je **PD** $\Leftrightarrow$ A je **PSD** in A obrnljiva.

Izrek: Naj $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična ranga r. Velja

- A je **PSD** $\Leftrightarrow$ obstaja $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, da je $A = BB^T$.
- A je **PD** $\Leftrightarrow$ obstaja $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je $A = BB^T$.
- A je **NSD** $\Leftrightarrow$ obstaja $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, da je $A = -BB^T$.
- A je **ND** $\Leftrightarrow$ obstaja $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je $A = -BB^T$.
- A je **nedefinirana** $\Leftrightarrow$ obstaja tako poz. kot neg. lastne vrednosti.

8.5.1 Sylvestrov kriterij

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična. Za $k = 1, \ldots, n$ naj bo

$$A_k := A_{1:k,\,1:k} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \qquad \Delta_k := \det(A_k).$$

$$A \text{ je pozitivno definitna (PD)} \iff \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0,$$

tj.

$$\det\big(a_{11}\big) > 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} > 0, \ \ldots$$

$$A \text{ je negativno definitna (ND)} \iff (-1)^k \Delta_k > 0 \text{ za vsak } k \iff \Delta_1$$

tj.

$$\det\big(a_{11}\big) < 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} < 0, \ \ldots$$

8.5.2 Razcep Choleskega

Obrnljiva matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ima razcep Choleskega

$$A = LL^T,$$

kjer je $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spodnje trikotna matrika, natanko tedaj, ko je A simetrična in pozitivno definitna.

Z uporabo spodnjega (rekurzivnega) algoritma: Simetrično matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zapišemo v bločni obliki

$$A_1 := A = \begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{bmatrix}$$

in definiramo

$$L_1 := \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0^T \\ \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} b & I_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Tedaj je

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{bmatrix} = L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & B - \frac{1}{a_{11}} bb^T \end{bmatrix} L_1^T.$$

Ponovimo na simetrični matriki $A_2 := B - \frac{1}{a_{11}} bb^T \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.

Naj bodo $L_2, L_3, \ldots, L_n$ matrike, ki jih dobimo v ponovljenih korakih. Matrika L je potem

$$L = L_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & L_3 \end{bmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & L_n \end{bmatrix}$$

8.6 Vektorski prostori

Glej section 3.

8.6.1 Linearna ogrinjača

$\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je množica vseh linearnih kombinacij vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Ker je linearna kombinacija linearnih kombinacij vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ zopet linearna kombinacija vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$, je po Izreku 2 linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linearni podprostor v V. Pravimo, da vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **napenjajo prostor** $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Ne le, da je linearna ogrinjača vektorski prostor. Velja celo več.

Linearna ogrinjača vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$, vektorskega prostora V je najmanjši vektorski podprostor v V, ki vsebuje vektorje $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

8.6.2 Baza vektorskega prostora

Vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n$ v V so **linearno odvisni**, če obstaja vektor v_k, ki je linearna kombinacija ostalih $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n$:

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n,$$

kjer $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n$ v V so **linearno neodvisni**, če niso linearno odvisni. Ekvivalentno, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ v V so linearno neodvisni, če je njihova trivialna linearna kombinacija edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka ničelnemu vektorju 0. Z drugimi besedami, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ v V so linearno neodvisni, če iz

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

sledi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Množica vektorjev $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je **baza** vektorskega prostora V, če

(B1) so $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linearno neodvisni in

(B2) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ napenjajo prostor V.

Izrek: Vsak vektorski prostor ima neštevno baz. Vse baze vektorskega prostora imajo enako število vektorjev.

Dimenzija prostora V je enaka moči (poljubne) baze prostora V. Označimo jo z $\dim V$.

Izrek: Za vsako bazo vektorskega prostora V je zapis poljubnega vektorja $v \in V$ kot linearna kombinacija baznih vektorjev vedno enoličen.

8.7 Linearne preslikave

Naj bosta V in U vektorska prostora. Preslikava $\tau : V \to U$ je **linearna preslikava**, če velja

(1) $\tau(v + u) = \tau(v) + \tau(u)$ za vsaka $v, u \in V$ in

(2) $\tau(\alpha v) = \alpha\tau(v)$ za vsak $v \in V$ in vsak $\alpha \in \mathbb{R}$.

Preslikava $\tau : V \to U$ je linearna natanko tedaj, ko velja

$$\tau(\alpha v + \beta u) = \alpha\tau(v) + \beta\tau(u)$$

za vse $v, u \in V$ ter vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Za poljubno linearno preslikavo $\tau : V \to U$ velja $\tau(0_V) = 0_U$.

Naj bodo $\tau, \psi : V \to U$ ter $\theta : U \to W$ linearne preslikave in naj bo $\gamma \in \mathbb{R}$.

(1) **Vsota** $\tau + \psi : V \to U$ je preslikava, definirana s predpisom

$$(\tau + \psi)(v) = \tau(v) + \psi(v).$$

(2) **Produkt s skalarjem** $\gamma\tau : V \to U$ je preslikava, definirana s predpisom

$$(\gamma\tau)(v) = \gamma\tau(v).$$

(3) **Kompozitum** $\theta \circ \tau : V \to W$ je preslikava, definirana s predpisom

$$(\theta \circ \tau)(v) = \theta(\tau(v)).$$

Izrek: Vsota, produkt s skalarjem in kompozitum linearnih preslikav so linearne preslikave.

Posledica: Množica vseh linearnih preslikav iz vektorskega prostora V v vektorski prostor U je vektorski prostor

Izrek: Naj bodo $\tau, \psi : V \to U$ ter $\theta : U \to W$ linearne preslikave in naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Matrika, ki ustreza vsoti preslikav $\tau + \psi$, je enaka vsoti matrik posameznih preslikav.

$$A^C_{\tau+\psi,B} = A^C_{\tau,B} + A^C_{\psi,B}$$

2. Matrika, ki ustreza produktu s skalarjem $\alpha\tau$, je enaka večkratniku matrike preslikave.

$$A^C_{\alpha\tau,B} = \alpha A^C_{\tau,B}$$

3. Matrika, ki ustreza kompozitumu preslikav, je enaka produktu matrik posameznih preslikav.

$$A^D_{\theta\circ\tau,B} = A^D_{\theta,C} \cdot A^C_{\tau,B}$$

4. Matrika, ki ustreza inverzu obrnljive preslikave, je enaka inverzu matrike te preslikave. Torej, če je τ obrnljiva preslikava, je obrnljiva tudi matrika $A^C_{\tau,B}$. Velja

$$A^B_{\tau^{-1},C} = (A^C_{\tau,B})^{-1}$$

8.7.1 Lastni vektorji in lastne vrednosti linearne preslikave

Naj bo $\tau : V \to V$ linearna preslikava. Neničelnemu vektorju $v \in V$ pravimo *lastni vektor* preslikave τ, če obstaja skalar $\lambda \in \mathbb{K}$, da velja

$$\tau(v) = \lambda v, \qquad v \neq 0.$$

Številu λ pravimo *lastna vrednost* preslikave τ.

Ker morata biti leva in desna stran enačbe $\tau(v) = \lambda v$ v istem prostoru, so lastni vektorji in lastne vrednosti definirani za *endomorfizme*, tj. za preslikave $\tau : V \to V$ (domena in kodomena sta isti prostor). Če τ zapišemo v izbrani bazi z matriko A, potem je $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ kvadratna matrika in pogoj postane

$$Av = \lambda v, \qquad v \neq 0.$$

Za nekvadratne matrike ($m \times n$ z $m \neq n$) lastne vrednosti praviloma niso definirane; v takih primerih namesto tega obravnavamo singularne vrednosti (SVD).

8.7.2 Prehod na novi bazi

Matrika linearne preslikave je odvisna od izbire baz. Naj bo $\tau : U \to V$ linearna preslikava. Naj bosta B_1, B_2 bazi prostora U ter C_1, C_2 bazi prostora V. Označimo

$$A_1 := A^{C_1}_{\tau,B_1}, \qquad A_2 := A^{C_2}_{\tau,B_2}.$$

Prehodni matriki med bazami zapišemo v notaciji identitete:

$P := I_{B_1B_2}$ prehod iz koordinat v bazi B_1 v koordinate v bazi B_2,

$Q := I_{C_1C_2}$ prehod iz koordinat v bazi C_1 v koordinate v bazi C_2

Prehod na novi bazi ponazorimo z diagramom:

$$\begin{tikzcd}
(U,B_1) \arrow[r, "A^{C_1}_{\tau,B_1}=A_1"] \arrow[d, "P=I_{B_1B_2}"'] & (V,C_1) \arrow[d, "Q=I_{C_1C_2}"] \\
(U,B_2) \arrow[r, "A^{C_2}_{\tau,B_2}=A_2"'] & (V,C_2)
\end{tikzcd}$$

Izrek: Za matriki A_1, A_2 ter prehodni matriki P, Q velja

$$A_2 \;=\; Q\,A_1\,P^{-1}.$$

8.7.3 Lastnosti linearnih preslikav

Izrek: Vsaka lastna vrednost linearne preslikave τ je tudi lastna vrednost poljubne matrike A_τ, ki pripada preslikavi τ. Vse matrike, ki pripadajo dani linearni preslikavi τ imajo enake lastne vrednosti.

Pravimo, da je linearno preslikavo $\tau : V \to V$ mogoče *diagonalizirati*, če obstaja baza, v kateri pripada preslikavi diagonalna matrika.

Izrek: Matrika A_τ je diagonalizabilna natanko tedaj, ko obstaja baza prostora $\mathbb{K}^n$, sestavljena iz lastnih vektorjev matrike A_τ. Ekvivalentno: obstajata obrnljiva matrika P in diagonalna matrika D tako, da velja

$$P^{-1}A_\tau P = D,$$

kjer stolpci matrike P tvorijo bazo iz lastnih vektorjev matrike A_τ, diagonalni elementi matrike D pa so pripadajoče lastne vrednosti.

Naj bo $\tau : V \to U$ linearna preslikava vektorskega prostora V v vektorski prostor U.

Def: Jedro linearne preslikave τ je množica $\ker(\tau)$ vseh vektorjev $v \in V$, za katere velja

$$\tau(v) = 0.$$

Def: Slika linearne preslikave je množica $\mathrm{im}(\tau) = \{\tau(v) : v \in V\} \subseteq U$.

Izrek: Jedro $\ker\tau$ linearne preslikave $\tau : V \to U$ je vektorski podprostor v V, slika $\mathrm{im}\tau$ pa vektorski podprostor v U.

Izrek: Naj bo $\tau : V \to U$ linearna preslikava iz vektorskega prostora V v vektorski prostor U.

1. τ je **injektivna** natanko tedaj, ko je $\ker\tau = \{0\}$. Predpostavimo $\tau(x_1) = \tau(x_2)$ in pokažemo $x_1 = x_2$ (ekvivalentno: iz $\tau(x) = 0$ sledi $x = 0$, tj. $\ker\tau = \{0\}$).

2. τ je **surjektivna** natanko tedaj, ko je $\mathrm{im}\tau = U$. Vzamemo poljuben $y \in U$ in najdemo $x \in V$, da velja $\tau(x) = y$ (tj. $U = \mathrm{im}\,\tau$).

3. Če je τ injektivna in surjektivna, potem je **bijektivna**.

Izrek: Naj bo $\tau : V \to U$ linearna preslikava in naj bo $A = A_{\tau,B,C}$ matrika, ki pripada preslikavi τ. Potem je

1. $\dim(\mathrm{im}(\tau)) = \mathrm{rank}(A)$,

2. $\dim(\ker(\tau)) + \dim(\mathrm{im}(\tau)) = \dim(V)$.

Posledica. Naj bo $\tau : V \to U$ linearna preslikava, $\dim V = \dim U = n$, in naj bo A matrika preslikave τ. Naslednje trditve so ekvivalentne:

(1) τ je bijektivna.
(2) τ je injektivna.
(3) τ je surjektivna.
(4) A je obrnljiva.
(5) $\ker\tau = \{0\}$.
(6) $N(A) = \{0\}$.
(7) $\mathrm{im}\,\tau = U$.
(8) $C(A) = \mathbb{R}^n$.
(9) $\mathrm{rang}(A) = n$.
(10) Vrstice matrike A so linearno neodvisne.
(11) Vrstice matrike A razpenjajo $\mathbb{R}^n$.
(12) Vrstice matrike A tvorijo bazo $\mathbb{R}^n$.
(13) Stolpci matrike A so linearno neodvisni.
(14) Stolpci matrike A razpenjajo $\mathbb{R}^n$.
(15) Stolpci matrike A tvorijo bazo $\mathbb{R}^n$.
(16) $\det A \neq 0$.
(17) Homogeni sistem $Ax = 0$ ima le trivialno rešitev.
(18) Sistem $Ax = b$ ima rešitev za vsak $b \in \mathbb{R}^n$.

9 Realna Analiza

9.1 Funkcije več spremenljivk

Funkcija več spremenljivk

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

kjer

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

je funkcija, ki predpiše realno vrednost $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ vsaki točki $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Množici D_f pravimo **definicijsko območje** funkcije f.

V primeru, ko je $n = 2$, je graf funkcije $f = f(x, y) : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ploskev v $\mathbb{R}^3$.

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D_f\}$$

Nivojska krivulja (ali nivojnica) funkcije $f = f(x, y)$ je množica vseh točk $(x, y) \in D_f$, za katere velja $f(x, y) = c$ za dano realno število $c \in \mathbb{R}$. Tako vsaka točka $(x, y) \in D_f$ leži na natanko eni nivojski krivulji in zato se definicijsko območje D_f razsloji na nivojske krivulje.

9.1.1 Tangenta premice in tangentna ravnina

Iz definicije odvoda:

$$f'(x_k) = \lim_{x \to x_k} \frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} \;\Rightarrow\; f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k),$$

zato je **enačba tangente** na graf $y = f(x)$ v $\big(x_k, f(x_k)\big)$

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

Iz definicije parcialnih odvodov:

$$f_{x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{e}_i) - f(a)}{t}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow\; f(x) \approx f(a) + \nabla f(a)^T (x - a),$$

zato je **enačba tangentne hiper-ravnine** na graf $z = f(x)$ v $\big(a, f(a)\big)$

$$z = f(a) + \nabla f(a)^T (x - a) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a)\,(x_i - a_i).$$

9.1.2 Parcialni odvod

Parcialni odvod funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v točki a $= (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ po spremenljivki x_i definiramo kot

$$f_{x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a)}{h}.$$

Tako nam torej parcialni odvod funkcije f po x_i, v točki a $= (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pove relativno spremembo funkcisjke vrednosti pri zelo majhni spremembi spremenljivke x_i, kjer so ostale spremenljivke fiksne.

9.1.3 Gradient funkcije

Vektor

$$(\nabla f)(a) = (f_{x_1}(a), f_{x_2}(a), \ldots, f_{x_n}(a))$$

imenjujemo **gradient** funkcije f v točki a.

Smerni odvod funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v točki $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ **v smeri vektorja** $\vec{e}$ je enak

$$f_{\vec{e}}(a) = (\nabla f)(a) \cdot \frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{x_i}(a) e_i}{\|\vec{e}\|}$$

Glavna razlika je v tem, da je gradient $\nabla f(a)$ *vektor*, ki v točki a opiše lokalno naraščanje funkcije v vseh smereh, medtem ko je smerni odvod $f'_{\vec{e}}(a)$ *skalar*, ki pove spremembo funkcije samo v izbrani smeri $\vec{e}$.

Za funkcijo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ velja:

1. Gradient funkcije f v točki a kaže v smeri najhitrejšega naraščanja funkcije f v točki a.
2. V primeru $n = 2$ je gradient funkcije $f = f(x, y)$ v točki a pravokoten na nivojsko krivuljo v tej točki.
3. Smerni odvod $f_{\vec{e}}(a)$ je relativna sprememba funkcisjke vrednosti $f(a)$ ob majhnem premiku iz točke a v smeri vektorja $\vec{e}$. Zato velja:
    - Če je $f_{\vec{e}}(a) > 0$, potem f ob majhnem pomiku iz točke a v smeri vektorja $\vec{e}$ narašča.
    - Če je $f_{\vec{e}}(a) < 0$, potem f ob majhnem pomiku iz točke a v smeri vektorja $\vec{e}$ pada.

9.1.4 Linearna aproksimacija

Za dano funkcijo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lahko v točki a + h blizu a njeno funkcijso vrednost ocenimo s formulo

$$f(a + h) \approx f(a) + (\nabla f(a)) \cdot h.$$

9.1.5 Visji odvodi

Parcialne odvode drugega reda izračunamo s parcialnim odvajanjem parcialnih odvodov prvega reda. Definiramo jih kot

$$f_{x_i x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right).$$

$n \times n$ matriko

$$H_f(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]_{i,j=1,\ldots,n}$$

imenujemo *Hessejeva matrika* funkcije f v točki x. Če sta pri tem $f_{x_i x_j}, f_{x_j x_i}$ zvezni funkciji, potem sta omenjena druga parcialna odvoda enaka. Zato je v primeru, ko so vsi parcialni odvodi $f_{x_i x_j}$ zvezni, Hessejeva matrika $H_f(x, y)$ simetrična matrika.

9.1.6 Vektorska funkcija

Za vektorsko funkcijo

$$F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

kjer je

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})]^T$$

je m-terica funkcij več spremenljivk.

9.1.7 Jacobijeva matrika

Jacobijeva matrika vektorske funkcije

$$F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

je $m \times n$ matrika prvih odvodov funkcij $f_1, \ldots, f_m$:

$$J_F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Absolutna vrednost determinante Jacobijeve matrike vektorske funkcije

$$F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

pove, za kakšen faktor funkcija lokalno raztegne prostor.

9.1.8 Pravila za odvajanje vektorskih funkcij

1. $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{x}} = I_n$
2. Če je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, potem $\frac{\partial A\tilde{x}}{\partial \tilde{x}} = A$.
3. Če je $\tilde{a} \in \mathbb{R}^n$, potem $\frac{\partial \tilde{a}^T \tilde{x}}{\partial \tilde{x}} = \tilde{a}^T$.
4. Če je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, potem $\frac{\partial (\tilde{x}^T A \tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = \tilde{x}^T (A + A^T)$.
5. Če je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična matrika, potem velja $\frac{\partial (\tilde{x}^T A \tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = 2\tilde{x}^T A$.
6. $\frac{\partial \|\tilde{x}\|^2}{\partial \tilde{x}} = 2\tilde{x}^T$.
7. Če $\tilde{z} = \tilde{z}(\tilde{x})$ in $\tilde{y} = \tilde{y}(\tilde{x})$, potem $\frac{\partial (\tilde{y}^T \tilde{z})}{\partial \tilde{x}} = \tilde{y}^T \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{z}^T \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}}$.
8. Če $G : D_G \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ in $F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ in $H = F \circ G$, potem $\frac{\partial H}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial F}{\partial G}(\tilde{G}(\tilde{x})) \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}}$.

9.1.9 Izrek

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *konveksna* množica in naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva. Potem velja:

- f je **konveksna** ($\cup$) natanko tedaj, ko $\nabla^2 f(x)$ je **pozitivno semidefinitna** na D, tj. $\nabla^2 f(x) \succeq 0$ za vsak $x \in D$, ter je **strogo konveksna** natanko tedaj, ko $\nabla^2 f(x)$ je **pozitivno definitna** na D, tj. $\nabla^2 f(x) \succ 0$ za vsak $x \in D$;

- f je **konkavna** ($\cap$) natanko tedaj, ko $\nabla^2 f(x)$ je **negativno semidefinitna** na D, tj. $\nabla^2 f(x) \preceq 0$ za vsak $x \in D$, ter je **strogo konkavna** natanko tedaj, ko $\nabla^2 f(x)$ je **negativno definitna** na D, tj. $\nabla^2 f(x) \prec 0$ za vsak $x \in D$.

Alternavitvno: funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konveksna na D, če velja

$$f(t\tilde{x} + (1-t)\tilde{y}) \leq tf(\tilde{x}) + (1-t)f(\tilde{y})$$

za vse $\tilde{x}, \tilde{y} \in D$ in za vse $t \in [0, 1]$. Funkcija f je konkavna na D, če je funkcija $-f$ konveksna na D.

9.2 Večkratni integrali

9.2.1 Izrek (Fubini, 1)

Če je $f : R \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na pravokotniku $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$, potem

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

9.2.2 Dvojni integrali

Če je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ neko omejeno območje in če $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, izberimo tak pravokotnik R, da velja $D \subseteq R$. Sedaj definiramo dvojni integral funkcije f na območju D kot

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R F(x,y)\,dx\,dy,$$

kjer

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

9.2.3 Izrek (Fubini, 2)

1. Če je $D = \{(x,y); a \leq x \leq b \text{ in } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ in $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, potem je

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

2. Če je $D = \{(x,y); \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y) \text{ in } c \leq y \leq d\} \subseteq \mathbb{R}^2$ in $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, potem je

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

9.2.4 Izrek o menjavi spremenljivk

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Če je $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, takašna menjava spremenljivk, da je $\det J_{\varphi,\psi} \neq 0$, potem

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v), \psi(u,v))\,|\det J_{\varphi,\psi}|\;du\,dv.$$

Podobno, če je $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ter $x = \varphi(u,v,w)$, $y = \psi(u,v,w)$, $z = \chi(u,v,w)$, takašna menjava spremenljivk, da je $\det J_{\varphi,\psi,\chi} \neq 0$, potem velja

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{D'} f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w))\,|\det J_{\varphi,\psi,\chi}|\;du\,dv\,dw.$$

9.2.5 Primeri menjave spremenljivk

1. **Polarne koordinate** v $\mathbb{R}^2$ so podane z

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

$$r \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \text{in velja} \quad |\det J_{\text{polar}}| = r.$$

2. **Cilindrične koordinate** v $\mathbb{R}^3$ so podane z

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

$$r > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}, \quad \text{in velja} \quad |\det J_{\text{cylindrical}}| = r.$$

3. **Sferične koordinate** v $\mathbb{R}^3$ so podane z

$$x = r\cos\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\cos\theta, \quad z = r\sin\theta,$$

$$r > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\text{in velja} \quad |\det J_{\text{spherical}}| = r^2\cos\theta.$$

9.3 Klasifikacija Lokalnih ekstremov

Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ter a v definicijskem območju funkcije f. Če za vse točke $x \neq a$, ki so "dovolj blizu" točke a (tj. $\|x - a\| < \varepsilon$ za nek dovolj majhen ε) velja $f(x) < f(a)$, potem pravimo, da ima funkcija f v točki a **lokalni maksimum**.

Če za vse točke $x \neq a$, ki so "dovolj blizu" točke a (tj. $\|x-a\| < \varepsilon$ za nek dovolj majhen ε) velja $f(x) > f(a)$, potem pravimo, da ima funkcija f v točki a **lokalni minimum**.

Če je funkcija f zvezno parcialno odvedljiva, potem je jasno, da ima lahko lokalne ekstreme le v stacionarnih točkah. Torej je potreben pogoj za lokalni ekstrem funkcije f v točki a:

$$(\nabla f)(a) = 0,$$

kar pomeni, da moramo lokalne ekstreme iskati zgolj med stacionarnimi točkami.

9.3.1 Izrek

Naj bo a stacionarna točka dvakrat parcialno zvezno odvedljive funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1. Če so vse lastne vrednosti matrike $H_f(a)$ pozitivne, ima f v a lokalni minimum.

2. Če so vse lastne vrednosti matrike $H_f(a)$ negativne, ima f v a lokalni maksimum.

3. Če so vse lastne vrednosti matrike $H_f(a)$ neničelne, vendar različno predznačene, lokalnega ekstrema v a ni.

4. Če je kakšna od lastnih vrednosti matrike $H_f(a)$ enaka 0, o lokalnih ekstremih funkcije f v točki a iz matrike $H_f(a)$ ne moremo sklepati.

9.3.2 Lokalni ekstremi z omejitvami

Pogosto naletimo na problem iskanja ekstremalnih vrednosti funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pri pogojih

$$g_1(x) = g_2(x) = \ldots = g_m(x) = 0.$$

Izkaže se, da lahko lokalni ekstremi funkcije f pri pogoju $g_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m$, nastopijo le v stacionarnih točkah funkcije

$$L = f - \lambda_1 g_1 - \ldots - \lambda_m g_m,$$

ki je funkcija $n + m$ spremenljivk $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Funkciji L pravimo **Lagrangeova funkcija**, novim spremenljivkam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ pa **Lagrangevi multiplikatorji**.
Omenjeni pogoj ni zadosten. Nekatere kritične točke funkcije L so ekstremalne točke funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pod pogoji $g_1(x) = g_2(x) = \ldots = g_m(x) = 0$, ostale pa ne.

9.4 Prirejene funkcije

Naj bodo $f, g_i, h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dane funkcije več spremenljivk. Radi bi našli rešitev problema

$$\text{(P)} \quad \min_{\vec{x}} f(\vec{x})$$

pri pogojih

$$g_i(\vec{x}) = 0 \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, m, \qquad h_j(\vec{x}) \le 0 \quad \text{za } j = 1, 2, \ldots, r.$$

Naj bo $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ domena funkcije f. Definirajmo množico dopustnih točk

$$D = \{\vec{x} \in D_f \ : \ g_i(\vec{x}) = 0 \ (i = 1, \ldots, m), \quad h_j(\vec{x}) \le 0 \ (j = 1, \ldots, r)\}.$$

Potem lahko problem (P) zapišemo ekvivalentno kot

$$\text{(P)} \quad \min_{\vec{x} \in D} f(\vec{x}).$$

Lagrangeva funkcija. Definirajmo Lagrangevo funkcijo (pri nas z *minus* predznakom pri multiplikatorjih)

$$\begin{aligned} L(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{\mu}) &= f(\vec{x}) - \vec{\lambda}^T \mathbf{G}(\vec{x}) - \vec{\mu}^T \mathbf{H}(\vec{x}) \\ &= f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\vec{x}) - \sum_{j=1}^{r} \mu_j h_j(\vec{x}), \end{aligned}$$

kjer je

$$\mathbf{G}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{H}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} h_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ h_r(\vec{x}) \end{pmatrix},$$

$$\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_r \end{pmatrix}.$$

Prirejena (dualna) funkcija. Prirejeno funkcijo definiramo kot

$$K(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) = \inf_{\vec{x} \in D_f} L(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{\mu}) = \inf_{\vec{x} \in D_f} \left\{ f(\vec{x}) - \vec{\lambda}^T \mathbf{G}(\vec{x}) - \vec{\mu}^T \mathbf{H}(\vec{x}) \right\}.$$

Opazimo:

1. $K(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$ je konkavna funkcija v spremenljivkah $(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$.
2. Če je $\vec{x} \in D$ primalno dopustna in $\vec{\mu} \le \vec{0}$, potem velja
$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{\mu}) \le f(\vec{x}),$$
zato
$$K(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) \le f(\vec{x}) \quad \text{za vse } \vec{x} \in D.$$
Posledično velja *šibka dualnost*
$$K(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) \le p^\star$$
za vse $\vec{\lambda}$ in vse $\vec{\mu} \le \vec{0}$, kjer je $p^\star = \min_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$.

Prirejeni problem. Prirejeni problem definiramo kot

$$\text{(D)} \quad \max_{\vec{\lambda}, \vec{\mu}} K(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$$

pri pogoju

$$\vec{\mu} \le \vec{0}.$$

Naj bo $d^\star = \max_{\vec{\lambda},\ \vec{\mu} \le 0} K(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$ (natančneje: sup, če maksimum ne obstaja). Tedaj po šibki dualnosti velja

$$d^\star \le p^\star.$$

KKT pogoji. Predpostavimo, da velja močna dualnost $d^\star = p^\star$ in da obstaja optimalen par multiplikatorjev $(\vec{\lambda}^\star, \vec{\mu}^\star)$. Potem morajo $\vec{x}^\star$, $\vec{\lambda}^\star$ in $\vec{\mu}^\star$ zadoščati Karush–Kuhn–Tuckerjevim pogojem:

$$\begin{aligned} \text{(stacionarnost)} \quad & \nabla_{\vec{x}} L(\vec{x}^\star, \vec{\lambda}^\star, \vec{\mu}^\star) = 0, \\ \text{(primalna dopustnost)} \quad & g_i(\vec{x}^\star) = 0 \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, m, \\ & h_j(\vec{x}^\star) \le 0 \quad \text{za } j = 1, 2, \ldots, r, \\ \text{(dualna dopustnost)} \quad & \mu_j^\star \le 0 \quad \text{za } j = 1, 2, \ldots, r, \\ \text{(komplementarna ohlapnost)} \quad & \mu_j^\star h_j(\vec{x}^\star) = 0 \quad \text{za } j = 1, 2, \ldots, r. \end{aligned}$$

Trditev. Naj bodo f in h_j konveksne in dvakrat zvezno odvedljive funkcije, g_i pa afine (npr. $\mathbf{G}(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b}$). Če $(\vec{x}', \vec{\lambda}', \vec{\mu}')$ zadošča sistemu (KKT), potem je $\vec{x}'$ rešitev problema (P), $(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')$ rešitev problema (D) in velja $p^\star = d^\star$.

Slaterjev pogoj (pogoj regularnosti). Naj bo problem (P) konveksen (tj. f in h_j so konveksne, g_i so afine). Pravimo, da velja **Slaterjev pogoj**, če obstaja $\tilde{\vec{x}} \in D_f$ tako, da

$$g_i(\tilde{\vec{x}}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \qquad h_j(\tilde{\vec{x}}) < 0 \quad (j = 1, \ldots, r).$$

Izrek (Slater $\Rightarrow$ močna dualnost in KKT). Če je problem (P) konveksen in velja Slaterjev pogoj, potem velja močna dualnost $p^\star = d^\star$ in obstajajo optimalni multiplikatorji $(\vec{\lambda}^\star, \vec{\mu}^\star)$. V tem primeru so KKT pogoji *nujni in zadostni* za optimalnost: $\vec{x}^\star$ je optimalna natanko tedaj, ko obstajata $\vec{\lambda}^\star$ in $\vec{\mu}^\star \le \vec{0}$, da zadoščajo (KKT).

9.5 Dodatek 2: Ponovitev analize

Odvodi

1. $\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$
2. $x^n = nx^{n-1}$
3. $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
5. $\sin(ax) = a\cos ax$
6. $\cos(ax) = -a\sin(ax)$
7. $\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $e^a x = ae^{ax}$
9. $a^x = a^x \ln a$
10. $x^x = x^x(1 + \ln x)$
11. $lnx = \frac{1}{x}$
12. $log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
13. $\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
16. $\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$

Integrali

1. $\int x^a \, dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & a \neq -1 \\ \ln|x| + C & a = -1 \end{cases}$
2. $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x} + C$
4. $\int e^x \, dx = e^x + C$
5. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \cos(ax) \, dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C$
7. $\int \sin(ax) \, dx = \frac{-\cos(ax)}{a} + C$
8. $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$
12. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$
13. $\int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \arctan x + C$
14. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
15. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$
16. **Zamenjava spremenljivke:** Če $u = g(x)$ in $du = g'(x)dx$, potem velja: $\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(u) \, du$
17. **Metoda per partes:** Če $u = u(x)$ in $v' = v'(x)$, potem velja: $\int u \, v' \, dx = uv - \int u' \, v \, dx$

Logaritmi

1. **Definicija:** $\log_a x = y \iff a^y = x \quad (a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0)$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a a = 1$
4. $\log_a(a^x) = x \quad \text{in} \quad a^{\log_a x} = x$
5. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
6. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
7. $\log_a(x^r) = r \log_a x \quad (x > 0)$
8. $\log_a(\sqrt[n]{x}) = \log_a\left(x^{1/n}\right) = \frac{1}{n} \log_a x$
9. **Menjava osnove:** $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$
10. $\ln x = \log_e x$
11. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
12. **Monotonost:** če $a > 1$, je $\log_a x$ naraščajoča; če $0 < a < 1$, je padajoča.

Eksponentna funkcija

1. **Definicija:** $e^x = \exp(x) \quad (e \approx 2.71828)$
2. $e^0 = 1, \quad e^x > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$
3. **Pravila potenc:**

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \quad e^{kx} = (e^x)^k$$

4. **Inverz:** $\ln(e^x) = x$ in $e^{\ln x} = x \quad (x > 0)$
5. **Monotonost:** e^x je strogo naraščajoča na $\mathbb{R}$

Trigonometrija

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
3. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

Razlika: linearno vs. afino

- **Linearno:** $g(x) = a^T x$ (gre skozi izhodišče, $g(0) = 0$).
- **Afino:** $g(x) = a^T x + b$ (lahko je zamaknjeno, $g(0) = b \neq 0$).