

# 1 Vektorji in matrike

## 1.0.1 Vektor

Vektor je *urejena n-terica števil*, ki jo običajno zapišemo kot stolpec

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

## 1.0.2 Produkt vektorja s skalarjem

Produkt *vektorja*  $\vec{x}$  s skalarjem  $\alpha$  je vektor

$$\alpha \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

## 1.0.3 Vsota vektorjev

Vsota *vektorjev*  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  je vektor

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

## 1.0.4 Nicelni vektor

Nicelni vektor  $\vec{0}$  je tisti vektor, za katerega je  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  za vsak vektor  $\vec{a}$ . Vse komponente nicelnega vektorja so enake 0. Vsakemu vektorju  $\vec{a}$  priprada nasprotni vektor  $-\vec{a}$ , tako da je  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ . Razlika vektorjev  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  je vsota  $\vec{a} + (-\vec{b})$  in jo navadno zapišemo kot  $\vec{a} - \vec{b}$ .

## 1.0.5 Lastnosti vektorske vsote

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (komutativnost)
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  (asociativnost)
- $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$  (distributivnost)

## 1.0.6 Linearna kombinacija

Linearna kombinacija vektorjev  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  je vsota

$$a\vec{x} + b\vec{y}$$

## 1.0.7 Skalarni produkt vektorjev

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ je stevilo}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

*alternativno:*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = ||\vec{x}|| ||\vec{y}|| \cos \phi$$

## 1.0.8 Lastnosti skalarnega produkta

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$  (komutativnost)
- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$  (aditivnost)
- $\vec{x} \cdot (\alpha \vec{y}) = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y}$  (homogenost)
- $\forall \vec{x} \text{ velja } \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$

## 1.0.9 Dolžina vektorja

Dolžina vektorja  $\vec{x}$  je

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

## 1.0.10 Enotski vektor

Enotski vektor je vektor z dolžino 1.

## 1.0.11 Cauchy-Schwarzova neenakost (osnovna oblika)

Za poljubna vektorja  $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$  velja:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| ||\vec{v}||,$$

enakost velja, v primeru, da sta vektorja vzporedna.

## 1.0.12 Trikotniška neenakost (osnovna oblika)

Za poljubna vektorja  $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$  velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||.$$

## 1.0.13 Ortogonalna vektorja

Vektorja  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  sta ortogonalna (pravokotna) natakno takrat, kadar je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

## 1.0.14 Kot med vektorjema

Ce je  $\phi$  kot med vektorjema  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$ , potem je

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}|| ||\vec{y}||} = \cos \phi$$

## 1.0.15 Vektorski produkt

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

## 1.0.16 Lastnosti vektorskega produkta

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$  (aditivnost)
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$  (!komutativnost)
- $(a\vec{a}) \times \vec{b} = a(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (a\vec{b})$  (homogenost)
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \times \vec{b}$  je  $\perp$  na vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$
- $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \sin \phi$
- Dolžina vektorskega produkta je ploscina paralelograma, katerega vektorja oklepata

## 1.0.17 Mesani produkt

Mesani produkt  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  vektorjev  $\vec{a}, \vec{b}$  in  $\vec{c}$  v  $R^3$  je skalarni produkt vektorjev  $\vec{a} \times \vec{b}$  in  $\vec{c}$ :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

1.0.18 Lastnosti mesanega produkta

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
- $(x\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = x(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  (homogenost)
- $(\vec{a}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{v}, \vec{c})$
- Absolutna vrednost mesanega produkta  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  je enaka prostornini paralepipeda

1.0.19 Premice v  $R^3$

Premico določata smerni vektor  $\vec{p} = [a, b, c]^T$  in točka  $A(x_0, y_0, z_0)$ .

- Parametrična oblika:  $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}, t \in R$
- Kanonična oblika:  $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$

1.0.20 Ravnine v  $R^3$

Ravnina z normalo  $\vec{n} = [a, b, c]^T$  skozi točko  $A(x_0, y_0, z_0)$  ima enačbo

$$(\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n} = 0$$

oziroma

$$ax + by + cz = d$$

1.0.21 Razdalje

Razdalja od točke  $P$  do ravnine, v kateri leži točka  $A$  :

$$\cos \phi = \frac{\vec{n} \cdot (r\vec{P} - r\vec{A})}{||\vec{n}|| ||r\vec{P} - r\vec{A}||} \text{ oz. } d = \left| \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||} \cdot (r\vec{P} - r\vec{A}) \right|$$

Razdalja od točke  $P$  do premice, katera gre skozi točko  $A$ :

$$d = \frac{||\vec{c} \times (r\vec{P} - r\vec{A})||}{||\vec{c}||}$$

1.0.22 Projekcije vektorjev

Naj bo  $proj_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{x}$  projekcija vektorja  $\vec{b}$  na vektor  $\vec{a}$ . Izracunamo jo po sledeci formuli:

$$proj_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$$

1.0.23 Matrika

Matrika dimenzije  $m \times n$  je tabela  $m \times n$  števil, urejenih v  $m$  vrstic in  $n$  stolpcev:

$$A^{m \times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

1.0.24 Diagonalna matrika

Matrika, katere elementi so enaki nič povsod zunaj glavne diagonale, se imenuje diagonalna matrika. Za diagonalno matriko je  $a_{ij} = 0$ , kadarkoli velja  $i \neq j$

1.0.25 Spodnjetrokotna matrika

Matrika  $A^{n \times n}$  je spodnjetrokotna, kadar so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i < j$$

1.0.26 Zgornjetrikotna matrika

Matrika  $A^{n \times n}$  je zgornjetrikotna, kadar so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i > j$$

1.0.27 Trikotna matrika

Matrika je trikotna, ce je zgornjetrikotna ali spodnjetrokotna.

1.0.28 Enakost matrik

Dve matriki  $A$  in  $B$  sta enaki natanko takrat, kadar imata enaki dimenziji in kadar so na istih mestih v obeh matrikah enaki elementi:

$$A^{m \times n} = B^{p \times q} \implies m = p \text{ in } n = q, \\ a_{ij} = b_{ij} \text{ za vsak } i = 1, \dots, m \text{ in } j = 1, \dots, n$$

1.0.29 Produkt matrike s skalarjem

Produkt matrike s skalarjem dobimo tako, da vsak element matrike pomnožimo s *skalarjem*

$$aA^{m \times n} = \begin{bmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} & \dots & ax_{1n} \\ ax_{21} & ax_{22} & ax_{23} & \dots & ax_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax_{m1} & ax_{m2} & ax_{m3} & \dots & ax_{mn} \end{bmatrix}$$

1.0.30 Vsota matrik

Vsoto dveh matrik enake dimenzije dobimo tako, da seštejemo istolezne elemente obeh matrik:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m3} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

1.0.31 Osnovne matricne operacije

- $A + B = B + A$  (komutativnost)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$  (asociativnost)
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$  (množenje s skalarjem)
- $A + (-A) = 0$
- $x(yA) = (xy)A$  in  $1 \cdot A = A$

1.0.32 Transponirana matrika

Transponirana matrika k matriki A reda  $m \times n$  je matrika reda  $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \\ A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

1.0.33 Lastnosti transponiranja matrik

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $(A^T)^T = A$

1.0.34     Produkt matrike in vektorja

Produkt matrike A in vektorja  $\vec{x}$  je linearna kombinacija stolpcev matrike A, utezi linearne kombinacije so komponente vektorja  $\vec{x}$ :

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

1.0.35     Produkt vrstice z matriko

Produkt vrstice  $\vec{x}$  z matriko A je linearna kombinacija vrstic matrike A, koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice  $\vec{y}$ :

$$\vec{y} \cdot A = \begin{bmatrix} y_1, y_2, y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\vec{u} \\ y_2\vec{v} \\ y_3\vec{w} \end{bmatrix}$$

1.0.36     Produkt matrik (stolpčni pogled)

Produkt matrik A in B je matrika, katere stolpci so zaporedoma produkti matrike A s stolpci matrike B:

$$AB = A \begin{bmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \end{bmatrix}$$

1.0.37     Produkt matrik (elementni pogled)

Element  $c_{ij}$  v  $i - ti$  vrstici in  $j - tem$  stolpcu produkta  $C = AB$  je skalarni produkt  $i - te$  vrstice A in  $j - tega$  stolpca matrike B

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

1.0.38     Produkt matrik (vrstični pogled)

Produkt matrik A in B je matrika, katere vrstice so zaporedoma produkti vrstic matrike A z matriko B:

$$\begin{bmatrix} i - ta \text{ vrstica } A \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} i - ta \text{ vrstica } AB \end{bmatrix}$$

1.0.39     Lastnosti matricnega produkta

- $AB \neq BA$  (!komutativnost)
- $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$  (homogenost)
- $C(A + B) = CA + CB$  (distributivnost)
- $A(BC) = (AB)C$  (asociativnost)
- $(AB)^T = B^T A^T$

V splošnem; komutativnost matricnega mnozenja velja samo, ko sta matriki diagonalizabilni.

1.0.40     Produkt matrik (vsota zunanjih produktov)

Vrstice matrike A z  $n$  stolpci naj bodo  $a^1, \dots, a^n$ , stolpci matrike B z  $n$  vrsticami pa  $b_1, \dots, b_n$ . Potem je

$$AB = a^1b_1 + \dots + a^nb_n$$

1.0.41     Bločno množenje matrik

Ce delitev na bloke v matriki A ustreza delitvi v matirki B, potem lahko matriki pomnozimo blocno:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

1.0.42     Enotska matrika

Kvadratna matrika  $I_k$  reda  $k \times k$ , ki ima vse diagonalne elemente enake 1, vse ostale elemente pa 0 ima lastnost, da za vsako matriko A reda  $m \times n$  velja  $AI_n = A$  in  $I_m A = A$ . Matrika  $I_k$  se imenuje enotska ali identicna matirka.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

1.0.43     Cauchy-Schwarzova neenakost

Za poljubna vektorja  $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$  velja:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| ||\vec{v}||$$

Enakost velja, v primeru, da vektorja  $\vec{u}$  in  $\vec{v}$  kažeta v isto ali nasprotno smer.

1.0.44     Trikotniška neenakost

Za poljubna vektorja  $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$  velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$$

## 2     Sistemi linearnih enacb

2.0.1     Obrnljiva matrika

Kvadratna matrika A je obrnljiva, ce obstaja taka matrika  $A^{-1}$ , da je

$$AA^{-1} = I \text{ in } A^{-1}A = I$$

Matrika  $A^{-1}$  (ce obstaja) se imenuje matriki A inverzna matrika. Matrika, ki ni obrnljiva, je singularna. Matrika **NI** obrnljiva, kadar je  $rang(A) < n$  !

2.0.2     Pogoj obrnljivosti (pivoti)

Kvadratna matirka reda  $n$  je obrnljiva natanko tedaj, ko pri gaussovi eliminaciji dobimo  $n$  pivotov.

2.0.3     Enoličnost inverzne matrike

Vsaka obrnljiva matrika ima eno samo inverzno matriko.

2.0.4     Inverz inverza

Inverzna matrika inverzne matrike  $A^{-1}$  je matrika A

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2.0.5     Rešitev sistema z obrnljivo matriko

Ce je matrika A obrnljiva, potem ima sistem enacb  $A\vec{x} = \vec{b}$  edino resitev  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

2.0.6     Nenicelna rešitev homogenega sistema

Ce obstaja nenicelna resitev  $\vec{x}$  enacbe  $A\vec{x} = \vec{0}$ , matrika A ni obrnljiva(je singularna).

2.0.7     Inverz produkta

Ce sta matirki A in B istega reda obrnljivi, je obrnljiv tudi produkt  $A \cdot B$  in

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

2.0.8 Potenciranje produkta

Pozor! Pravilo

(AB)^p = A^p B^p

velja le v primeru, ko matriki A in B komutirata, torej AB = BA.

2.0.9 Inverz transponirane matrike

Inverz transponirane matrike je transponirana matrika inverza

(A^T)^-1 = (A^-1)^T

2.0.10 Inverz diagonalne matrike

Inverz diagonalne matrike z diagonalnimi elementi a\_ii je diagonalna matrika, ki ima na diagonalni elemente a\_ii^-1

[a\_11, ..., 0; ..., a\_nn] = [a\_11^-1, ..., 0; ..., a\_nn^-1]

2.0.11 Izračun inverzne matrike

Za izracun inverza matrike A, uporabimo gausovo eliminacijo nad matriko [A|I]

[A|I] = [I|A^-1]

2.0.12 Simetrična matrika

Matrika A je simetricna <=> A^T = A. Za elemente a\_ij simetricne matirke velja a\_ij = a\_ji. Za simetricno matriko vedno velja, da je kvadratna A <= R^{n x n}.

2.0.13 Inverz simetrične matrike

Ce je matrika A simetricna in obrnljiva, je tudi A^-1 simetricna.

2.0.14 Produkti R^T R in R R^T

Ce je R poljubna (lahko tudi pravokotna) matrika, sta R^T R in R R^T simetricni matriki.

3 Vektorski prostori

3.0.1 Realni vektorski prostor

Realni vektorski prostor V je mnozica "vektorjev" skupaj z pravili za

- sestevanje vektorjev,
- mnozenje vektorja z realnim stevilom (skalarjem)

Ce sta x in y poljubna vektorja v V, morajo biti v V tudi

- vsota x + y in
- produkti ax za vse a <= R

V vektorskem prostoru V morajo biti tudi VSE linearne kombinacije ax + by

3.0.2 Pravila za operacije v vektorskih prostorih

Operaciji sestevanja vektorjev in mnozenja vektorja s skalarjem v vektorskem prostoru morajo zadoscati naslednjim pravilom:

- x + y = y + x (komutativnost)
- x + (y + z) = (x + y) + z (asociativnost)
- obstaja en sam nenicelni vektor 0, da velja x + 0 = x
- za vsak x obstaja natanko en -x, da je x + (-x) = 0
- 1 . x = x
- (a b)x = a(b x)
- a(x + y) = ax + ay (distributivnost)
- (a + b)x = ax + bx

3.0.3 Vektorski podprostor

Podmnozica U vektorskega prostora V je vektorski podprostor, ce je za vsak par vektorjev x in y iz U in vsako realno stevilo a tudi

- x + y <= U in
- ax <= U.

3.0.4 Pogoji za podprostor

Mnozica vektorjev U je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je vsaka linearna kombinacija vektorjev iz U tudi v U.

3.0.5 Lastnosti vektorskih podprostorov

- Vsak vektorski podprostor nujno vsebuje nicelni vektor 0
- Presek dveh podprostorov vektorskega podprostora je tudi podprostor

3.0.6 Stolpčni prostor C(A)

Stolpčni prostor C(A) matrike A <= R^{m x n} je tisti podprostor vektorskega prostora R^m, ki vsebuje natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike A. Izracunamo ga tako, da matriko A transponiramo in izvedemo operacijo gaussove eliminacije nad A^T. Vrstice katere ostanejo po gaus-sivi eliminaciji so linearno neodvisni vektorji, kateri tvorijo stoplicni prostor matrike A, C(A). neformalno: linearna ogrinjaca stolpcev matrike (npr. ce imas 5 stolpcev pa lahko 2 zapises kot linearno kombinacijo ostalih 3 bo imel column space 3 elemente)

3.0.7 Pogoji resljivosti

Sistem linearnih enacb Ax = b je resljiv natanko tedaj, ko je vektor b <= C(A)

3.0.8 Rešitve homogenega sistema

Naj bo matrika A <= R^{m x n}. Mnozica resitev homogenega sistema linearnih enacb je podprostor v vektorskem prostoru R^n.

3.0.9 Nicelni prostor N(A)

Mnozica vseh resitev sistema linearnih enacb Ax = 0 se imenuje nicelni prostor matirke A. Oznacujemo ga z N(A). neformalno: mnozica vektorjev, ki se z neko matriko zmnozijo v nicelni vektor. Matriko A samo eliminiras po gaussu in nato dobljene resitve enacis z 0.

3.0.10 Nicelni prostor obrnljive matrike

Ce je matrika A kvadratna in obrnljiva, potem N(A) vsebuje samo vektor  $\vec{0}$

3.0.11 Stopnicasta oblika

Matrika ima *stopnicasto* obliko, kadar se vsaka od njenih vrstic zacne z vsaj eno niclo vec kot prejsnja vrstica.

3.0.12 Pivot in rang matrike

Prvi element, razlicen od nic v vsaki vrstici, je *pivot*. Stevilo pivotov v matriki se imenuje rang matrike. Rang matrike A zapisemo kot *rang(A)*.

3.0.13 Omejitev ranga

Rang matrike ni vecji od stevila vrstic in ni vecji od stevila stolpcev matrike.

3.0.14 Proste neznanke

*Stevilo prostih neznank matrike = st. stolpcev - rang matrike*

3.0.15 Polni rang

- 1. Visoka in ozka matrika ( $m > n$ ) ima poln stolpicni rang, kadar je *rang(A) = n*
- 2. Nizka in siroka matrika ( $m < n$ ) ima poln vrsticni rang, kadar je *rang(A) = m*
- 3. Kvadratna matrika ( $n = m$ ) ima poln rang, kadar je *rang(A) = m = n*

3.0.16 Lastnosti matrike s polnim stolpicnim rangom

Za vsako matriko A s polnim stolpicnim rangom  $r = n \leq m$ , velja:

- 1. Vsi stolpci A so pivotni stolpci
- 2. Sistem enacb  $A\vec{x} = \vec{0}$  nima prostih neznank, zato tudi nima posebnih resitev
- 3. Nicelni prostor  $N(A)$  vsebuje le nicelni vektor  $N(A) = \{\vec{0}\}$
- 4. Kadar ima sistem enacb  $A\vec{x} = \vec{b}$  resitev(kar ni vedno res!), je resitev ena sama
- 5. Reducirana vrsticna oblika matrike (A) se da zapisati kot

$$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \times n \text{ enotska matrika} \\ m - n \text{ vrstic samih nicel} \end{bmatrix}$$

3.0.17 Lastnosti matrike s polnim vrsticnim rangom

Za vsako matriko A s polnim vrsticnim rangom  $r = m \leq n$  velja:

- 1. Vse vrstice so pivotne, ni prostih vrstic in U (stopnicasta oblika) in R(reducirana stopnicasta oblika) nimata nicelnih vrstic
- 2. Sistem enacb  $A\vec{x} = \vec{b}$  je resljiv za vsak vektor  $\vec{b}$
- 3. Sistem  $A\vec{x} = \vec{b}$  ima  $n - r = n - m$  prostih neznank, zato tudi prav toliko posebnih resitev
- 4. Stolpicni prostor  $C(A)$  je ves prostor  $R^m$

3.0.18 Lastnosti kvadratne matrike polnega ranga

Za vsako kvadratno matriko A polnega ranga ( $\text{rang}(A) = m = n$ ) velja:

- 1. Reducirana vrsticna oblika matrike A je enotska matrika
- 2. Sistem enacb  $A\vec{x} = \vec{b}$  ima natancno eno resitev za vsak vektor desnih strani  $\vec{b}$
- 3. Matrika A je obrnljiva
- 4. Nicelni prostor matrike A je samo nicelni vektor  $N(A) = \{\vec{0}\}$
- 5. Stolpicni prostor matrike A je cel prostor  $C(A) = R^m$

3.0.19 Linearna neodvisnost

Vektorji  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  so linearno neodvisni, ce je

$$0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_n$$

edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka vektorju  $\vec{0}$ . Vektorji  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  so linearno odvisni, *ce niso linearno neodvisni*.

3.0.20 Posledica odvisnosti

Ce so vektorji *odvisni*, lahko vsaj enega izrazimo z ostalimi.

3.0.21 Nicelni vektor in odvisnost

Ce je med vektorji  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  tudi nicelni vektor, so vektorji *linearno odvisni*.

3.0.22 Odvisnost pri preseznem številu vektorjev

Vsaka množica n vektorjev iz  $R^n$  je odvisna, kadar je  $n > m$ .

3.0.23 Neodvisnost stolpcev

Stolpci matrike A so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima homogena enacba  $A\vec{x} = \vec{0}$  edino resitev  $\vec{x} = \vec{0}$ .

3.0.24 Rang in neodvisnost stolpcev

Kadar je *rang(A) = n*, so stolpci matrike  $A \in R^{m \times n}$  linearno neodvisni. Kadar je pa *rang(A) < n*, so stolpci matrike  $A \in R^{m \times n}$  linearno odvisni.

3.0.25 Rang in neodvisnost vrstic

Kadar je *rang(A) = m*, so vrstice matrike  $A \in R^{m \times n}$  linearno neodvisne. Kadar je pa *rang(A) < m*, so vrstice matrike  $A \in R^{m \times n}$  linearno odvisne.

3.0.26 Vrsticni prostor

Vrsticni prostor matrike A je podprostor v  $R^n$ , ki ga razpenjajo vrstice matrike A.

3.0.27 Vrsticni prostor kot  $C(A^T)$

Vrsticni prostor matrike A je  $C(A^T)$ , stolpicni prostor matrike  $A^T$ .

3.0.28 Baza vektorskega prostora

*Baza vektorskega prostora* je množica vektorjev, ki

- 1. je linearno neodvisna in
- 2. napenja cel prostor.

3.0.29 Enoličnost bazne kombinacije

Vsak vektor iz vektorskega prostora lahko na en sam nacin izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

3.0.30 Pogoj za bazo v  $R^n$

Vektorji  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  so baza prostora  $R^n$  natanko tedaj, kadar je matrika, sestavljena iz stolpcev  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ , obrnljiva.

3.0.31 Večbaznost  $R^n$

Prostor  $R^n$  ima za  $n > 0$  neskončno mnogo različnih baz.

3.0.32 Enakost števila baznih vektorjev

Ce sta množici vektorjev  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$  in  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  obe bazi istega vektorskega prostora, potem je  $m = n \implies$  vse baze istega vektorskega prostora imajo isto število vektorjev.

3.0.33 Dimenzija vektorskega prostora

Dimenzija vektorskega prostora je število baznih vektorjev.

3.0.34 Dimenzija stolpicnega in vrsticnega prostora

Dimenziji stolpicnega prostora  $C(A)$  in vrsticnega prostora  $C(A^T)$  sta enaki rangi matrike  $A$

$$\dim(C(A)) = \dim(C(A^T)) = \text{rang}(A).$$

3.0.35 Dimenzija nicelnega prostora

Dimenzija nicelnega prostora  $N(A)$  matrike  $A$  z  $n$  stolpci in ranga  $r$  je enaka  $\dim(N(A)) = n - r$ .

3.0.36 Dimenzije vseh štirih podprostorov

Stolpicni prostor  $C(A)$  in vrsticni prostor  $C(A^T)$  imata oba dimenzijo  $r$ . Dimenzija nicelnega prostora  $N(A)$  je  $n - r$ , Dimenzija levega nicelnega prostora  $N(A^T)$  pa je  $m - r$ .

3.0.37 Matrika ranga 1

Vsako matriko ranga 1 lahko zapisemo kot produkt(stolpcnega) vektorja z vrsticnim vektorjem  $A = \vec{u}\vec{v}^T$ .

4 Linearne preslikave

4.0.1 Linearna preslikava

Preslikava  $A : U \rightarrow V$  je linearna, ce velja

- 1. aditivnost:  $A(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = A\vec{u}_1 + A\vec{u}_2$  za vse  $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ ,
- 2. homogenost:  $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$  za vse  $\alpha \in R$  in  $\vec{u} \in U$ .

Oziroma v enem koraku:

$$A(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) = \alpha A(\vec{u}_1) + \beta A(\vec{u}_2).$$

**Pozor!** Preslikava ni linearna, ce  $A(\vec{0}) \neq \vec{0}$ .

4.0.2 Ekvivalenten pogoj za linearnost

Preslikava  $A : U \rightarrow V$  je linearna natanko tedaj, ko velja

$$A(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = \alpha_1 A\vec{u}_1 + \alpha_2 A\vec{u}_2$$

za vse  $\alpha_1, \alpha_2 \in R$  in vse  $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ .

4.0.3 Preslikava nicelnega vektorja

Ce je  $A$  linearna preslikava, je  $A\vec{0} = \vec{0}$ .

4.0.4 Linearna preslikava in linearne kombinacije

Naj bo  $A : U \rightarrow V$  linearna preslikava in  $\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{u}_i$  linearna kombinacija vektorjev. Potem je  $A(\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{u}_i$ .

4.0.5 Določenost preslikave z bazo

Naj bo  $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  baza za vektorski prostor  $U$ . Potem je linearna preslikava  $A : U \rightarrow V$  natanko določena, ce poznamo slike baznih vektorjev.

4.0.6 Obstoje linearne preslikave

Naj bo  $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  baza za  $U$  in  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ . Potem obstaja natanko ena linearna preslikava  $A : U \rightarrow V$ , za katero je  $A\vec{u}_i = \vec{v}_i$  za  $i = 1, 2, \dots, n$ .

4.0.7 Jedro linearne preslikave

Naj bo  $A : U \rightarrow V$  linearna preslikava. Potem množico

$$\ker A = \{\vec{u} \in U; A\vec{u} = \vec{0}\}$$

imenujemo *jedro* linearne preslikave. Ker je  $A\vec{0} = \vec{0}$ , je  $\vec{0} \in \ker A$  za vse  $A$ . Zato je jedro vedno neprazna množica. *Ce je matrika  $A$  enotska preslikava za  $\phi$ , potem velja*

$$\ker \phi = N(A).$$

4.0.8 Jedro kot podprostor

Jedro linearne preslikave  $A : U \rightarrow V$  je vektorski podprostor v  $U$ .

4.0.9 Slika linearne preslikave

Množico

$$\text{im } A = \{\vec{v} \in V; \text{ obstaja tak } \vec{u} \in U, \text{ da je } \vec{v} = A\vec{u}\}$$

imenujemo *slika* linearne preslikave  $A : U \rightarrow V$ . *Ce je matrika  $A$  enotska preslikava za  $\phi$ , potem velja*

$$\text{im } \phi = C(A).$$

4.0.10 Slika kot podprostor

Ce je  $A : U \rightarrow V$  linearna preslikava, potem je njena slika *im*  $A$  vektorski podprostor v  $V$ .

4.0.11 Poln rang in trivialno jedro

Ce je  $A : U \rightarrow V$  linearna preslikava, in je rang matrike te preslikave v standardni bazi poln, potem lahko sklepamo, da ima ta preslikava **trivialno jedro**.

5 Ortogonalnost

5.0.1 Ortogonalna podprostor

Podprostor  $U$  in  $V$  vektorskega prostora sta med seboj ortogonalna, ce je vsak vektor  $\vec{u} \in U$  ortogonalen na vsak vektor  $\vec{v} \in V$ .

5.0.2    Ortogonalnost prostora in nicelnega prostora

Za vsako matriko  $A \in R^{m \times n}$  velja:

- 1. Nicelni prostor  $N(A)$  in vrsticni prostor  $C(A^T)$  sta ortogonalna podprostora  $R^n$
- 2. Levi nicelni prostor  $N(A^T)$  in stolpicni prostor  $C(A)$  sta ortogonalna podprostora prostora  $R^m$ .

5.0.3    Ortogonalni komplement

Ortogonalni komplement  $V^\perp$  podprostora  $V$  vsebuje VSE vektorje, ki so ortogonalni na  $V$ .

5.0.4    Ortogonalni komplementi prostorov matrike

Naj bo  $A$  matrika dimenzije  $m \times n$ .

- Nicelni prostor  $N(A)$  je ortogonalni komplement vrsticnega prostora  $C(A^T)$  v prostoru  $R^n$
- Levi nicelni prostor  $N(A^T)$  je ortogonalni komplement stolpicnega prostora  $C(A)$  v prostoru  $R^m$ .

krajše:

$$\begin{aligned} N(A) &= C(A^T)^\perp \\ N(A^T) &= C(A)^\perp \end{aligned}$$

tukaj lahko vedno pomnožimo s komplementom, da dobimo npr.

$$N(A)^\perp = C(A^T)$$

dodatek:

$$\begin{aligned} \dim N(A) &= st.stolpcev - rang(A) \\ \dim N(A^T) &= st.vrstic - rang(A) \\ \dim C(A) &= \dim C(A^T) = rang(A) \end{aligned}$$

5.0.5    Enoličnost rešitve v vrsticnem prostoru

Za vsak vektor  $\vec{y}$  v stolpicnem prostoru  $C(A)$  obstaja v vrsticnem prostoru  $C(A^T)$  en sam vektor  $\vec{x}$ , da je  $A\vec{x} = \vec{y}$ .

5.0.6    Obrnljivost  $A^T A$

Ce so stolpci matrike  $A$  linearno neodvisni, je matrika  $A^T A$  obrnljiva.

5.0.7    Projekcijska matrika

Matrika  $P$  je projekcijska, kadar

- je simetricna:  $P^T = P$  in
- velja  $P^2 = P$ .

5.0.8    Projekcija na ortogonalni komplement

Ce je  $P$  projekcijska matrika, ki projecira na podprostor  $U$ , potem je  $I - P$  projekcijska matrika, ki projecira na  $U^\perp$ , ortogonalni komplement podprostora  $U$ .

5.0.9    Ortonormirani vektorji

Vektorji  $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n$  so ortonormiranim kadar so ortogonalni in imajo vsi dolzino 1, torej

$$\vec{q}_i^T \vec{q}_i = \begin{cases} 0 & \text{ko je } i \neq j \text{ pravokotni vektorji} \\ 1 & \text{ko je } i = j \text{ enotski vektorji} \end{cases}$$

za matriko  $Q = [\vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots \vec{q}_n]$  velja  $Q^T Q = I$ .

5.0.10    Matrika ortonormiranih vektorjev

Vektorji  $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$  naj bodo ortonormirani v prostoru  $R^m$ . Potem za matriko

$$Q = [\vec{q}_1 \vec{q}_2 \dots \vec{q}_n]$$

velja, da je  $Q^T Q = I_n$  enotska matrika reda  $n$ .

5.0.11    Ortogonalna matrika

Matrika  $Q$  je ortogonalna, kadar je

- 1. kvadratna in
- 2. ima ortonormirane stolpce.

5.0.12    Lastnosti ortogonalne matrike

Ce je  $Q$  ortogonalna matirka, potem je obrnljiva in

$$\begin{aligned} Q^{-1} &= Q^T \\ \dim U^\perp &= n - \dim U \\ (U^\perp)^\perp &= U \end{aligned}$$

5.0.13    Ohranjanje dolžin in kotov

Množenje z ortogonalno matriko ohranja dolzino vektorjev in kote med njimi. Ce je  $Q$  ortogonalna matrika, potem je

$$\begin{aligned} ||Q\vec{x}|| &= ||\vec{x}|| \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in} \\ (Q\vec{x})^T Q\vec{y} &= \vec{x}^T \vec{y} \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in } \vec{y} \end{aligned}$$

5.0.14    Produkt ortogonalnih matrik

Ce sta  $Q_1$  in  $Q_2$  ortogonalni matriki, je tudi produkt  $Q = Q_1 Q_2$  ortogonalna matrika.

5.0.15    Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Za vhod uporabimo Linearno ogrinjaco linearno neodvisnih vekotrjev. Po gram-schmidtovi ortogonalizaciji pa dobimo paroma ortogonalne vektorje. Postopek:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{v}_1 \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - proj_{\vec{u}_1} \vec{v}_2 \\ \vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - proj_{\vec{u}_1} \vec{v}_3 - proj_{\vec{u}_2} \vec{v}_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Po tem postopku dobimo paroma ortogonalne vektorje po Gram-Schmidtovi ortogonalizaciji.

5.0.16    QR razcep

Iz linearno neodvisnih vektorjev  $a_1, \dots, a_n$  z *Gram-Schmidtovo* ortogonalizacijo dobimo ortonormirane vektorje  $q_1, \dots, q_n$ . Matriki  $A$  in  $Q$  s temi stolpci zadoscajo enacbi  $A = QR$ , kjer je  $R$  zgornjetrikotna matrika.

- Najprej z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo poiscemo linearno neodvisne vektorje matrike  $A$
- Vektorje normiramo in jih zapisemo v matriko  $Q$ .
- Matriko  $R$  dobimo tako, da matriko  $Q^T$  pomnožimo z matriko  $A$

$$R = Q^T A$$

Tako smo prisli do vseh elementov v QR razcepu matrike  $A$ .

Sedaj ko imamo izracunane vse elemente lahko zapisemo se projekcijsko matriko. To je matrika pravokotne projekcije na  $C(Q) = C(A)$ . Njen izracun je preprost:

$$QQ^T = \textit{pravokotna projekcija na } C(Q) = C(A)$$

Sedaj lahko to projekcijsko matriko pomnozimo z desne s poljubnim vektorjem in ugotovimo kam se preslika v prostoru  $C(A)$ . V nasprotnem primeru, ce bi pa zeleli imeti projekcijsko matriko, s katero bi radi videli kam se vektor preslika v prostoru  $N(A^T)$ , bi pa od identicne matrike odsteli projekcijsko matriko za  $C(Q)$ .

$$I - QQ^T = \textit{pravokotna projekcija na } C(A)^\perp = N(A^T)$$

#### 5.0.17 Vektorski prostor neskončnih zaporedij

Vektorski prostor  $\iota$  je mnozica vseh neskoncnih zaporedij  $\vec{u}$  s koncno dolzino

$$||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u_1}^2 + \vec{u_2}^2 + \cdots < \infty$$

#### 5.0.18 Predoločeni sistemi

$$A^T A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^T \vec{f}$$

Kjer je A matrika sistemov linearnih enacb in  $\vec{f}$  vektor pricakovanih resitev po gaussovi eliminaciji zgornje enacbe, dobimo spremenljivke, ki predstavljaio najboljšo aproksimacijo vseh kombinaicij rezultatov in vhodnih spremenljivk.

## 6 Determinante

#### 6.0.1 Determinanta enotske matrike

Determinanta enotske matirke je  $det(I) = 1$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \textit{ in } \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

#### 6.0.2 Zamenjava vrstic

Determinanta spremeni predznak, ce med seboj zamenjamo dve vrstici.

Dodatna lastnost:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A) \det(B)$$

#### 6.0.3 Linearnost po vrsticah

Determinanta je linearna funkcija vsake vrstice posebej. To pomeni, da se

- determinanta pomnozi s faktorjem t, ce eno vrstico determinante(vsak element v tej vrstici) pomnozimo s faktorjem t.

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- determinanta je vsota dveh determinant, ki se razlikujeta le v eni vrstici, ce je v provitni determinanti ta vrstica vsota obeh vrstic, ostale vrstice pa so enake v vseh treh determinantah.

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

**Pozor!** Kadar mnozimo matriko A s skalarjem t, se vsak element matrike pomnozi s skalarjem. Ko racunamo determinanto produkta matirke s skalarjem  $tA$ , skalar  $t$  izpostavimo iz vsake vrstice posebej, zato je  $det(tA) = t^n det(A)$ , kjer je  $n$  stevilo vrstic (ali stolpcev) determinante.

#### 6.0.4 Razvoj po vrstici/stolpcu, predznaki kofaktorjev

Pri Laplaceovem razvoju velja

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \quad (\text{razvoj po } i\text{-ti vrstici})$$

oziroma

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \quad (\text{razvoj po } j\text{-tem stolpcu}),$$

kjer  $A_{ij}$  dobimo tako, da izbrišemo  $i$ -to vrstico in  $j$ -ti stolpec. Predznaki se izmenjujejo kot šahovnica:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

#### 6.0.5 Enaki vrstici

Matrika, ki ima dve enaki vrstici, ima determinanto enako 0.

#### 6.0.6 Odštevanje vrstic

Ce v matriki od poljubne vrstice odstejemo mnogokratnik neke druge vrstice, se njena determinanta ne spremeni.

#### 6.0.7 Determinanta in Gaussova eliminacija

Naj bo  $A$  poljubna kvadratna matirka  $n \times n$  in  $U$  njena vrsticno-stopnicasta oblika, ki jo dobimo z *Gaussovo eliminacijo*. Potem je

$$det(A) = \pm det(U).$$

#### 6.0.8 Nicelna vrstica

Determinanta, ki ima vrstico samih nicel, je enaka 0.

#### 6.0.9 Determinanta trikotne matrike

Determinanta trikotne matrike  $A$  je produkt diagonalnih elementov:

$$det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

#### 6.0.10 Singularna in obrnljiva matrika

Determinanta singularne matrike je enaka 0, determinanta obrnljive matrike je razlicna od 0.

#### 6.0.11 Determinanta produkta

Determinanta produkta dveh matrik je enaka produktu determinant obeh matrik:

$$det(AB) = det(A)det(B).$$



**6.0.12 Determinante inverzne, potencirane in transponirane matrike**

Determinanta inverzne matrike je enaka

$$\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$$

in determinanta potence  $A^n$  matrike A je

$$\det(A^n) = (\det(A))^n$$

ter determinanta transponirane matrike je enaka determinanti originalne matrike, saj ko naredimo razvoj po vrsticah, pridemo do enakih elementov po diagonalni.

$$\det(A) = \det(A^T).$$

**6.0.13 Determinanta transponirane matrike**

Transponirana matrika  $A^T$  ima isto determinanto kot A.

**6.0.14 Recap dovoljenih operacij nad determinanto**

- 1. Ce zamenjamo dve vrstici, se **spremeni** predznak determinante
- 2. Vrednost determinante se ne spremeni, ce neki vrstici pristejemo poljuben veckratnik katerekoli druge vrstice.
- 3. Ce vse elemente neke vrstice pomnozimo z istim stevilom  $\alpha$ , se vrednost determinante pomnozi z  $\alpha$ .

**6.0.15 Lastnosti za stolpce**

Vsaka lastnost, ki velja za vrstice determinante, velja tudi za njene stolpce. Med drugim:

- Determinanta spremeni predznak, ce med seboj zamenjamo dva stolpca
- Determinanta je enaka 0, ce sta dva stolpca enaka
- Determinanta je enaka 0, ce so v vsaj enem stolpcu same nicle.

**6.0.16 Kofaktorska formula**

Ce je A kvadratna matrika reda n, njeno determinanto lahko izracunamo z razvojem po  $i - ti$  vrstici

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}.$$

Kofaktorje  $C_{ij}$  izracunamo kot  $C_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$ , kjer je  $D_{ij}$  determinanta, ki jo dobimo, ce v A izbrisemo i-to vrstico in j-ti stolpec.

**6.0.17 Inverzna matrika s kofaktorji**

Inverzna matrika  $A^{-1}$  matrike A je transponirana matrika kofaktorjev, deljena z determinanto  $|A|$ :

$$A^{-1} = \frac{C^T}{\det(A)},$$

kjer je C matrika kofaktorjev matrike A.

**6.0.18 Ploščina paralelograma**

Ploscina paralelograma, dolocenega z vektorjema  $\vec{a}$  in  $\vec{b} \in R^2$  je enaka  $\det([\vec{a}\vec{b}])$ , to je absolutni vrednosti determinante s stolpcema  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ .

**6.0.19 Mešani produkt**

Mesani produkt vektorjev  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  in  $\vec{c}$  je enak determinanti matrike, ki ima te tri vektorje kot stolpce.

**6.0.20 Obrnljivost in determinanta**

Naj bo A matrika  $R^{n \times n}$

$$A \text{ je obrnljiva} \iff \det A \neq 0$$

$$A^{-1} \text{ ne obstaja} \iff \det A = 0$$

**7 L. vrednosti in vektorji**

**7.0.1 Lastni vektor in lastna vrednost**

Vektor  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , za katerega je  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$  lastni vektor. Stevilo  $\lambda$  je lastna vrednost. **Pozor!** Nicelni vektor  $\vec{0}$  ne more biti lastni vektor. Lahko pa je lastna vrednost enaka 0.

**7.0.2 Lastne vrednosti  $A^2$**

Ce ima matrika A lastno vrednost  $\lambda$  in lastni vektor  $\vec{x}$ , potem ima matrika  $A^2$  lastno vrednost  $\lambda^2$  in isti lastni vektor  $\vec{x}$ .

**7.0.3 Lastne vrednosti  $A^k$**

Ce ima matrika A lastno vrednost  $\lambda$  in lastni vektor  $\vec{x}$ , potem ima matrika  $A^k$  lastno vrednost  $\lambda^k$  in isti lastni vektor  $\vec{x}$ .

**7.0.4 Lastne vrednosti inverzne matrike**

Ce ima matrika A lastno vrednost  $\lambda$  in lastni vektor  $\vec{x}$ , potem ima inverzna matrika lastno vrednost  $1/\lambda$  in isti lastni vektor  $\vec{x}$ .

**7.0.5 Sled matrike**

Sled kvadratne matrike A reda n je vsota njenih diagonalnih elementov.

$$sled(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + \dots + a_{nn}.$$

**7.0.6 Sled in determinanta preko lastnih vrednosti**

Sled matrike je enaka vsoti vseh lastnih vrednosti, stetih z njihovo veckratnostjo. Ce so  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  lastne vrednosti matrike reda n, potem je sled enaka *vsoti*

$$sled(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 + \dots + \lambda_n,$$

determinanta matrike pa *produktu* lastnih vrednosti

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

**7.0.7 Lastnosti sledi**

Za matrike  $A, B, P \in R^{n \times n}$  velja

- 1.  $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$ ,
- 2.  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ ,
- 3.  $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$ ,
- 4.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ ,
- 5.  $\text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(A)$  za vsako obrnljivo matriko P.
- 6.  $\text{tr}(ABP) = \text{tr}(APB)$ , ce so A,B,P simetricne matirke.
- 7.  $\text{tr}(ABP) = \text{tr}(A^T B^T P^T)$ .

Za poljubna vektorja  $x, y \in R^n$  velja:

$$\text{tr}(xy^T) = \text{tr}(x^T y)$$

**7.0.8 Lastne vrednosti  $A + cI$**

Ce ima matrika A lastno vrednost  $\lambda$ , ki ji pripada lastni vektor  $\vec{x}$ , potem ima matrika  $A + cI$  lastno vrednost  $\lambda + c$  z istim lastnim vektorjem  $\vec{x}$  (velja samo z enotskimi matrikami I).

**7.0.9 Lastne vrednosti trikotne matrike**

Lastne vrednosti trikotne matrike so enake diagonalnim elementom.

**7.0.10 Diagonalizacija matrike**

Denimo, da ima matrika  $A \in R^{n \times n}$   $n$  linearno neodvisnih lastnih vektorjev  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ . Če jih zložimo kot stolpce v matriko  $S$

$$S = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n],$$

potem je  $T = S^{-1}AS$  diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  na diagonalni

$$S^{-1}AS = T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

**Pozor!** Lastni vektorji v matriki  $S$  morajo biti v istem vrstnem redu kot lastne vrednosti v matriki  $T$ .

**7.0.11 Potenca diagonalizirane matrike**

Če je  $A = STS^{-1}$ , potem je  $A^k = ST^kS^{-1}$  za vsak  $k \in N$ .

**7.0.12 Lastne vrednosti simetrične matrike**

Vse lastne vrednosti realne simetricne matrike so realne.

**7.0.13 Pravokotnost lastnih vektorjev**

Lastni vektorji realne simetricne matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.

**7.0.14 Schurov izrek**

Za vsako kvadratno matriko reda  $n$ , ki ima le realne lastne vrednosti, obstaja taka ortogonalna matrika  $Q$ , da je

$$Q^T A Q = T$$

zgornjetrikotna matrika, ki ima lastne vrednosti (lahko so kompleksne) matrike  $A$  na diagonalni.

**7.0.15 Spektralni izrek**

Vsako simetricno matriko  $A$  lahko razcepimo v produkt  $A = QTQ^T$ , kjer je  $Q$  ortogonalna matrika lastnih vektorjev,  $T$  pa diagonalna z lastnimi vrednostmi matrike  $A$  na diagonalni.

**7.0.16 Linearna kombinacija matrik ranga 1**

Vsako realno simetricno matriko lahko zapisemo kot linearno kombinacijo matrik ranga 1

$$A = \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^T + \lambda_2 \vec{q}_2 \vec{q}_2^T + \dots + \lambda_n \vec{q}_n \vec{q}_n^T,$$

kjer so  $\vec{q}_i$  stolpci matrike  $Q$  (torej lastni vektorji matrike  $A$ ).

**7.0.17 Pivoti in lastne vrednosti**

Za simetricno nesingularno matriko  $A$  je število pozitivnih pivotov enako številu pozitivnih lastnih vrednosti.

**7.0.18 Pozitivno definirana matrika**

Kvadratna matrika je pozitivno definirana, kadar so vse njene lastne vrednosti pozitivne.

**7.0.19 Pozitivno definirana matrika reda 2**

Kvadratna matrika reda 2 je pozitivno definirana natanko tedaj, kadar sta pozitivni sled in determinanta matrike.

**7.0.20 Pogoji za pozitivno definitnost**

Simetricna matrika  $A$  reda  $n$  je pozitivno definirana natanko tedaj, ko je za vsak vektor  $\vec{x} \neq \vec{0} \in R^n$

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0$$

**7.0.21 Vsota pozitivno definitnih matrik**

Če sta matriki  $A$  in  $B$  pozitivno definitni, je pozitivno definitna tudi njuna vsota  $A + B$ .

**7.0.22 Vodilne glavne poddeterminante**

Matrika  $A$  je pozitivno definitna, kadar so vse njene vodilne glavne poddeterminante pozitivne.

**7.0.23  $R^T R$  je pozitivno definitna**

Če so stolpci matrike  $R$  linearno neodvisni, je matrika  $A = R^T R$  pozitivno definitna.

**7.0.24 Cholesky razcep**

Za vsako simetricno pozitivno definitno matriko  $A$  obstaja zgornjetrikotna matrika  $R$ , da je  $A = R^T R$ .

**7.0.25 Ekvivalentni pogoji za pozitivno definitnost**

Simetricna matrika reda  $n$ , ki ima eno od spodnjih lastnosti, ima tudi ostale štiri:

1. Vseh  $n$  pivotov je pozitivnih;
2. Vseh  $n$  vodilnih glavnih determinant je pozitivnih;
3. Vseh  $n$  lastnih vrednosti je pozitivnih;
4. Za vsak  $\vec{x} \neq \vec{0}$  je  $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$ ;
5.  $A = R^T R$  za neko matriko  $R$  z linearno neodvisnimi stolpci.

**7.0.26 Singularni razcep (SVD)**

Vsako realno  $m \times n$  matriko  $A$  lahko zapisemo kot produkt  $A = UEV^T$ , kjer je matrika  $U$  ortogonalna  $m \times m$ ,  $E$  diagonalna  $m \times n$  in  $V$  ortogonalna  $n \times n$ .

**7.0.27 Rang in nenicelne lastne vrednosti**

Če je matrika  $A$  simetricna in so vsej njeni elementi realni, potem je njen rang enak številu nenicelnih lastnih vrednosti matrike  $A$ .

$$rang(A) = \text{število } \lambda A$$

**7.0.28 Diagonalizacija in podobnost matrik**

Matriki  $A$  in  $B$  sta *podobni*, če imata obe iste lastne vrednosti. Diagonalno matriko sestavimo tako, da v njeno diagonalo vpisemo lastne vrednosti. Matriko  $P$  pa sestavimo iz njenih lastnih vektorjev; po stolpcih.

$$A = PDP^{-1} \text{ oz. } D = P^{-1}AP$$

7.0.29    **Spektralni razcep**

Naj bodo vektorji  $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$  ONB iz l. vektorjev matrike  $A$  za l. vrednost  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , potem lahko matriko  $A$  zapišemo kot:

$$A = \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^T + \dots + \lambda_n \vec{q}_n \vec{q}_n^T$$

7.0.30    **Nekaj lastnosti simetričnih matrik**

- Vse lastne vrednosti simetricne matrike so realne. Lastni vektorji realne simetricne matrike, ki pripadajo razlicnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.
- Vsako realno simetricno matriko  $A$  lahko zapišemo kot  $A = QDQ^T$ , kjer je  $Q$  ortogonalna matrika lastnih vektorjev,  $D$  pa diagonalna matrika, ki ima na diagonalni pripadajoce lastne vrednosti matrike  $A$ .
- Za vsako matriko  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  velja, da je  $A^T A$  simetricna matrika:

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

Za to matriko velja tudi da je **PSD**.

8    **Napredna linearna algebra**

8.1    **Schurov izrek**

Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrika z lastnimi vrednostmi  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Potem obstaja ortogonalna matrika  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  in zgornje trikotna matrika  $Z$ , ki ima na diagonalni  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , da velja

$$A = QZQ^{-1} = QZQ^T.$$

**Postopek za izračun Schurovega razcepa:** Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrika z lastnimi vrednostmi  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Potem obstajata ortogonalna matrika  $Q$  in zgornje trikotna matrika  $Z$  z diagonalnimi elementi  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , da velja

$$A = QZQ^T.$$

**Ponavljaj:**

1. Najdemo normirani lastni vektor  $q_1$ :  $Aq_1 = \lambda_1 q_1$ ,  $q_1^T q_1 = 1$ , ter ortonormirano bazo  $\{q_2, \dots, q_n\}$  pravokotnega komplementa. Sestavimo  $Q_1 = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$ .
2. Izračunamo 
$$T_1 = Q_1^T A Q_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$
3. Postopek ponavljamo na bloku  $A_2$  (in naslednjih blokkih), dokler ne dobimo zgornje trikotne matrike  $Z$  in ortogonalne matrike  $Q$ , za kateri velja  $A = QZQ^T$ .

- **Posledica:** Vsaka matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je podobna zgornje trikotni matriki.
- **Posledica:** Vsaka simetrična matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je ortogonalno podobna diagonalni matriki.
- **Posledica:** Če ima matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  lastne vrednosti enake  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , potem je

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

in

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

- **Posledica (Cayley-Hamilton):** Če je  $\Delta_A(x) = \det(A - xI_n)$  karakteristični polinom matrike  $A$ , potem velja  $\Delta_A(A) = 0$ .

8.2    **Vektorski produkt**

Za matriki  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  in  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  definiramo

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B).$$

Za produkt  $\langle A, B \rangle : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  velja za vse matrike  $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  in za vse  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

1.  $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$ ,
2.  $\langle \alpha A + \beta B, C \rangle = \alpha \langle A, C \rangle + \beta \langle B, C \rangle$ ,
3.  $\langle A, A \rangle \geq 0$ ,
4.  $\langle A, A \rangle = 0$  natanko tedaj, ko je  $A = 0$ .

Zato  $\langle A, B \rangle$  imenujemo skalarni produkt matrik  $A$  in  $B$ .  
Za matrike  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$  in  $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$  velja

$$\langle A, BC \rangle = \langle B^T A, C \rangle = \langle AC^T, B \rangle.$$

8.2.1    **Frobeniusova norma matrike**

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  je definirana kot

$$\|A\|_F = \|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}.$$

Velja:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2.$$

**Eckart, Young:** Naj bo  $A = U\Sigma V^T$  razcep singularnih vrednosti matrike  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$ , kjer  $U = [u^{(1)} \dots u^{(m)}]$  in  $\mathbb{R}^{m \times m}$  in  $V = [v^{(1)} \dots v^{(n)}]$  in  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Potem je matrika  $A_k$  iz  $\mathbb{R}^{m \times n}$  ranga  $k$ ,  $k \leq n$ , ki je med vsemi matrikami ranga  $k$  v Frobeniusovi normi najbližje matriki  $A$ , enaka

$$A_k = \sigma_1 u^{(1)} (v^{(1)})^T + \sigma_2 u^{(2)} (v^{(2)})^T + \dots + \sigma_k u^{(k)} (v^{(k)})^T$$

in velja

$$\|A - A_k\|_F = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_n^2}.$$

(Velja torej  $\|A - A_k\|_F \leq \|A - X\|_F$  za  $\|A - X\|_F$  za vse matrike  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , za katere velja  $\text{rank}(X) = k$ .)

**Poseben primer; simetrične matrike:** Če je matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simetrična ( $A = A^T$ ), jo lahko zapišemo s pomočjo *spektralnega razcepa*

$$A = V \Lambda V^T,$$

kjer je  $V$  ortogonalna matrika lastnih vektorjev in  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  diagonalna matrika lastnih vrednosti.

- Pri simetrični matriki se SVD poenostavi, saj so singularne vrednosti natanko

$$\sigma_i = |\lambda_i|,$$

in levi ter desni singularni vektorji sovpadajo z lastnimi vektorji matrike. Posledica:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}$$

- Zato lahko  $A$  zapišemo kot

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i v^{(i)} (v^{(i)})^T,$$

kjer so  $v^{(i)}$  ortonormirani lastni vektorji.

- Najboljša aproksimacija ranga  $k$  v Frobeniusovi normi je dobljena tako, da ohranimo tiste lastne vrednosti z največjo absolutno vrednostjo in njihove lastne vektorje:

$$A_k = \sum_{i=1}^k \lambda_{(i)} v^{(i)} (v^{(i)})^T,$$

Tako velja:

$$\|A - A_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^n \lambda_{(i)}^2}.$$

### 8.3 Kroneckerjev produkt

Kroneckerjev produkt (tudi tenzorski produkt) matrik  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  in  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$  je  $mp \times nq$  matrika

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}.$$

Če so matrike  $A, B, C$  in  $D$  primerne velikosti, potem veljajo naslednje enakosti:

1.  $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2.  $\alpha \otimes A = A \otimes \alpha = \alpha A$  za vsak  $\alpha \in \mathbb{R}$
3.  $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$
4.  $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$  in  $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$
5.  $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$
6.  $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ .
7.  $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ .
8.  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$  če  $A$  in  $B$  obrnljivi.
9.  $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$
10.  $\text{rang}(A \otimes B) = \text{rang}(A)\text{rang}(B)$
11. Če ima matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  lastne vrednosti  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  in ima matrika  $B$  lastne vrednosti  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , potem je množica lastnih vrednosti matrike  $A \otimes B$  enaka:

$$S_\lambda = \{\lambda_i \mu_j; \lambda_i \text{ lastna vrednost } A, \mu_j \text{ lastna vrednost } B\}$$

$$\text{in } |S_\lambda| \leq mn$$

Ravno tako velja potem za lastne vektorje  $v_i \otimes w_j$ , da dobimo lastne vektorje matrike  $A \otimes B$ .

12. Če  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  in  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , potem je  $\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n$ .

Posledica:

$$\|A \otimes B\|_F = \|A\|_F \cdot \|B\|_F$$

#### 8.3.1 Kroneckerjeva vsota

Kroneckerjeva vsota je definirana za kvadratni matriki  $A$  in  $B$ :

$$A \oplus B = A \otimes I_m + I_n \otimes B$$

kjer  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

Če so  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  lastne vrednosti  $A$  za lastne vektorje  $u_1, \dots, u_n$  in  $\mu_1, \dots, \mu_m$  lastne vrednosti  $B$  za lastne vektorje  $v_1, \dots, v_m$ , potem so

$$\lambda_i + \mu_j, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$$

lastne vrednosti za  $A \oplus B$ , lastni vektorji pa so

$$u_i \otimes v_j$$

za  $i$  in  $j$ . Lastni vektorji  $A \oplus B$  so enaki  $u_i \otimes v_j$ .

### 8.4 Vektorizacija

Za matriko  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  označimo vektorizacijo matrike  $A$  kot

$$\text{vec}(A) = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}.$$

$\text{vec}$  je preslikava iz  $\mathbb{R}^{m \times n}$  v  $\mathbb{R}^{mn}$ .

Za vektorja  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$  velja:

$$\text{vec}(\vec{a}\vec{b}^T) = \vec{b} \otimes \vec{a}$$

Za matrike  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  in  $C \in \mathbb{R}^{p \times r}$  velja:

$$\text{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\text{vec}(B).$$

### 8.5 Definitnost matrik

Spomnimo se, da ima simetrična matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vse lastne vrednosti realne.

Simetrični matriki  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pravimo

- **pozitivno semidefinitna**, če je  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$  za vse  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- **pozitivno definitna**, če je  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$  za vse neničelne  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- **negativno semidefinitna**, če je  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0$  za vse  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- **negativno definitna**, če je  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0$  za vse neničelne  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- **ndefinitna**, če je  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$  za nekatere  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  in  $\mathbf{y}^T A \mathbf{y} < 0$  za nekatere  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

Posledica: Naj  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simetrična z lastnimi vrednostmi  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

- $A$  je **PSD** (pozitivno semidefinitna)  $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0$  za  $i = 1, \dots, n$ .
- $A$  je **PD** (pozitivno definitna)  $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$  za  $i = 1, \dots, n$ .
- $A$  je **NSD** (negativno semidefinitna)  $\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0$  za  $i = 1, \dots, n$ .
- $A$  je **ND** (negativno definitna)  $\Leftrightarrow \lambda_i < 0$  za  $i = 1, \dots, n$ .
- $A$  je **ndefinirana**  $\Leftrightarrow$  ima tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti.

- $A$  je **PD**  $\Leftrightarrow A$  je **PSD** in  $A$  obrnljiva.

Izrek: Naj  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simetrična ranga  $r$ . Velja

- $A$  je **PSD**  $\Leftrightarrow$  obstaja  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ , da je  $A = BB^T$ .
- $A$  je **PD**  $\Leftrightarrow$  obstaja  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , da je  $A = BB^T$ .
- $A$  je **NSD**  $\Leftrightarrow$  obstaja  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ , da je  $A = -BB^T$ .
- $A$  je **ND**  $\Leftrightarrow$  obstaja  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , da je  $A = -BB^T$ .
- $A$  je **ndefinirana**  $\Leftrightarrow$  obstaja tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti.

8.5.1 Sylvestrov kriterij

Simetrična matrika  $A$  je pozitivno definitna natanko tedaj, ko so determinante vseh vodilnih glavnih podmatrik matrike  $A$  pozitivne.

$$\det \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{bmatrix} > 0 \quad \sim \text{PD}$$

Simetrična matrika  $A$  je negativno definitna natanko tedaj, ko je determinanta vsake  $k \times k$  vodilne glavne podmatrike  $A$  pozitivna, če je  $k$  sodo število, ter negativna, če je  $k$  liho število.

$$\det \begin{bmatrix} - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \end{bmatrix} \sim \text{ND}$$

8.5.2 Razcep Choleskega

Obrnljiva matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ima razcep Choleskega

$$A = LL^T,$$

kjer je  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  spodnje trikotna matrika, natanko tedaj, ko je  $A$  simetrična in pozitivno definitna.

Z uporabo spodnjega (rekurzivnega) algoritma: Simetrično matriko  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zapišemo v bločni obliki

$$A_1 := A = \begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{bmatrix}$$

in definiramo

$$L_1 := \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0^T \\ \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}b & I_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Tedaj je

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{bmatrix} = L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & B - \frac{1}{a_{11}}bb^T \end{bmatrix} L_1^T.$$

Ponovimo na simetrični matriki  $A_2 := B - \frac{1}{a_{11}}bb^T \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ .

Naj bodo  $L_2, L_3, \dots, L_n$  matrike, ki jih dobimo v ponovljenih korakih. Matrika  $L$  je potem

$$L = L_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & L_3 \end{bmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & L_n \end{bmatrix}$$

8.6 Vektorski prostori

Glej section 3.

8.6.1 Linearna ogrinjača

$\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n$  je množica vseh linearnih kombinacij vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

Ker je linearna kombinacija linearnih kombinacij vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  zopet linearna kombinacija vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , je po Izreku 2 linearna ogrinjača  $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  linearni podprostor v  $V$ . Pravimo, da vektorji  $v_1, v_2, \dots, v_n$  **napenjaajo prostor**  $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .

Ne le, da je linearna ogrinjača vektorski prostor. Velja celo več.

Linearna ogrinjača vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , vektorskega prostora  $V$  je najmanjši vektorski podprostor v  $V$ , ki vsebuje vektorje  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

8.6.2 Baza vektorskega prostora

Vektorji  $v_1, v_2, \dots, v_n$  v  $V$  so **linearno odvisni**, če obstaja vektor  $v_k$ , ki je linearna kombinacija ostalih  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n$ :

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n,$$

kjer  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ .

Vektorji  $v_1, v_2, \dots, v_n$  v  $V$  so **linearno neodvisni**, če niso linearno odvisni. Ekvivalentno,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  v  $V$  so linearno neodvisni, če je njihova trivialna linearna kombinacija edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka ničelnemu vektorju 0. Z drugimi besedami,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  v  $V$  so linearno neodvisni, če iz

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

sledi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Množica vektorjev  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  je **baza** vektorskega prostora  $V$ , če

(B1) so  $v_1, v_2, \dots, v_n$  linearno neodvisni in

(B2)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  napenjaajo prostor  $V$ .

**Izrek:** Vsak vektorski prostor ima neštevno baz. Vse baze vektorskega prostora imajo enako število vektorjev.

*Dimenzija prostora*  $V$  je enaka moči (poljubne) baze prostora  $V$ . Označimo jo z  $\dim V$ .

**Izrek:** Za vsako bazo vektorskega prostora  $V$  je zapis poljubnega vektorja  $v \in V$  kot linearna kombinacija baznih vektorjev vedno enoličen.

8.7 Linearne preslikave

Naj bosta  $V$  in  $U$  vektorska prostora. Preslikava  $\tau : V \rightarrow U$  je **linearna preslikava**, če velja

(1)  $\tau(v + u) = \tau(v) + \tau(u)$  za vsaka  $v, u \in V$  in

(2)  $\tau(\alpha v) = \alpha \tau(v)$  za vsak  $v \in V$  in vsak  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Preslikava  $\tau : V \rightarrow U$  je linearna natanko tedaj, ko velja

$$\tau(\alpha v + \beta u) = \alpha \tau(v) + \beta \tau(u)$$

za vse  $v, u \in V$  ter vse  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Za poljubno linearno preslikavo  $\tau : V \rightarrow U$  velja  $\tau(0_V) = 0_U$ .

Naj bodo  $\tau, \psi : V \rightarrow U$  ter  $\theta : U \rightarrow W$  linearne preslikave in naj bo  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

(1) **Vsota**  $\tau + \psi : V \rightarrow U$  je preslikava, definirana s predpisom

$$(\tau + \psi)(v) = \tau(v) + \psi(v).$$

(2) **Produkt s skalarjem**  $\gamma \tau : V \rightarrow U$  je preslikava, definirana s predpisom

$$(\gamma \tau)(v) = \gamma \tau(v).$$

(3) **Kompozitum**  $\theta \circ \tau : V \rightarrow W$  je preslikava, definirana s predpisom

$$(\theta \circ \tau)(v) = \theta(\tau(v)).$$

**Izrek:** Vsota, produkt s skalarjem in kompozitum linearnih preslikav so linearne preslikave.

**Posledica:** Množica vseh linearnih preslikav iz vektorskega prostora  $V$  v vektorski prostor  $U$  je vektorski prostor

**Izrek:** Naj bodo  $\tau, \psi : V \rightarrow U$  ter  $\theta : U \rightarrow W$  linearne preslikave in naj bo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Matrika, ki ustreza vsoti preslikav  $\tau + \psi$ , je enaka vsoti matrik posameznih preslikav.

$$A_{\tau+\psi, B}^C = A_{\tau, B}^C + A_{\psi, B}^C$$

2. Matrika, ki ustreza produktu s skalarjem  $\alpha\tau$ , je enaka večkratniku matrike preslikave.

$$A_{\alpha\tau,B}^C = \alpha A_{\tau,B}^C$$

3. Matrika, ki ustreza kompozitumu preslikav, je enaka produktu matrik posameznih preslikav.

$$A_{\theta\circ\tau,B}^D = A_{\theta,C}^D \cdot A_{\tau,B}^C$$

4. Matrika, ki ustreza inverzu obrnljive preslikave, je enaka inverzu matrike te preslikave. Torej, če je  $\tau$  obrnljiva preslikava, je obrnljiva tudi matrika  $A_{\tau,B}^C$ . Velja

$$A_{\tau^{-1},C}^B = (A_{\tau,B}^C)^{-1}$$

### 8.7.1 Lastni vektorji in lastne vrednosti linearne preslikave

Naj bo  $\tau : V \rightarrow V$  linearna preslikava. Neničelnemu vektorju  $v \in V$  pravimo *lastni vektor* preslikave  $\tau$ , če obstaja skalar  $\lambda \in \mathbb{K}$ , da velja

$$\tau(v) = \lambda v, \quad v \neq 0.$$

Številu  $\lambda$  pravimo *lastna vrednost* preslikave  $\tau$ .

Ker morata biti leva in desna stran enačbe  $\tau(v) = \lambda v$  v istem prostoru, so lastni vektorji in lastne vrednosti definirani za *endomorfizme*, tj. za preslikave  $\tau : V \rightarrow V$  (domena in kodomena sta isti prostor). Če  $\tau$  zapišemo v izbrani bazi z matriko  $A$ , potem je  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  kvadratna matrika in pogoj postane

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0.$$

Za nekvadratne matrike ( $m \times n$  z  $m \neq n$ ) lastne vrednosti praviloma niso definirane; v takih primerih namesto tega obravnavamo singularne vrednosti (SVD).

### 8.7.2 Prehod na novi bazi

Matrika linearne preslikave je odvisna od izbire baz. Naj bo  $\tau : U \rightarrow V$  linearna preslikava. Naj bosta  $B_1, B_2$  bazi prostora  $U$  ter  $C_1, C_2$  bazi prostora  $V$ . Označimo

$$A_1 := A_{\tau,B_1}^{C_1}, \quad A_2 := A_{\tau,B_2}^{C_2}.$$

Prehodni matriki med bazami zapišemo v notaciji identitete:

$P := I_{B_1 B_2}$  prehod iz koordinat v bazi  $B_1$  v koordinate v bazi  $B_2$ ,

$Q := I_{C_1 C_2}$  prehod iz koordinat v bazi  $C_1$  v koordinate v bazi  $C_2$

Prehod na novi bazi ponazorimo z diagramom:

$$\begin{array}{ccc} (U, B_1) & \xrightarrow{A_{\tau,B_1}^{C_1}=A_1} & (V, C_1) \\ \downarrow P=I_{B_1 B_2} & & \downarrow Q=I_{C_1 C_2} \\ (U, B_2) & \xrightarrow{A_{\tau,B_2}^{C_2}=A_2} & (V, C_2) \end{array}$$

**Izrek:** Za matriki  $A_1, A_2$  ter prehodni matriki  $P, Q$  velja

$$A_2 = Q A_1 P^{-1}.$$

### 8.7.3 Lastnosti linearnih preslikav

**Izrek:** Vsaka lastna vrednost linearne preslikave  $\tau$  je tudi lastna vrednost poljubne matrike  $A_\tau$ , ki pripada preslikavi  $\tau$ . Vse matrike, ki pripadajo dani linearni preslikavi  $\tau$  imajo enake lastne vrednosti.

Pravimo, da je linearno preslikavo  $\tau : V \rightarrow V$  mogoče *diagonalizirati*, če obstaja baza, v kateri pripada preslikavi diagonalna matrika.

**Izrek:** Matrika  $A_\tau$  je diagonalizabilna natanko tedaj, ko obstaja baza prostora  $\mathbb{K}^n$ , sestavljena iz lastnih vektorjev matrike  $A_\tau$ . Ekivalentno: obstajata obrnljiva matrika  $P$  in diagonalna matrika  $D$  tako, da velja

$$P^{-1} A_\tau P = D,$$

kjer stolpci matrike  $P$  tvorijo bazo iz lastnih vektorjev matrike  $A_\tau$ , diagonalni elementi matrike  $D$  pa so pripadajoče lastne vrednosti.

Naj bo  $\tau : V \rightarrow U$  linearna preslikava vektorskega prostora  $V$  v vektorski prostor  $U$ .

**Def:** Jedro linearne preslikave  $\tau$  je množica  $\ker(\tau)$  vseh vektorjev  $v \in V$ , za katere velja

$$\tau(v) = 0.$$

**Def:** Slika linearne preslikave je množica  $\text{im}(\tau) = \{\tau(v) : v \in V\} \subseteq U$ .

**Izrek:** Jedro  $\ker \tau$  linearne preslikave  $\tau : V \rightarrow U$  je vektorski podprostor v  $V$ , slika  $\text{im} \tau$  pa vektorski podprostor v  $U$ .

**Izrek:** Naj bo  $\tau : V \rightarrow U$  linearna preslikava iz vektorskega prostora  $V$  v vektorski prostor  $U$ .

1.  $\tau$  je **injektivna** natanko tedaj, ko je  $\ker \tau = \{0\}$ . Predpostavimo  $\tau(x_1) = \tau(x_2)$  in pokažemo  $x_1 = x_2$  (ekivalentno: iz  $\tau(x) = 0$  sledi  $x = 0$ , tj.  $\ker \tau = \{0\}$ ).
2.  $\tau$  je **surjektivna** natanko tedaj, ko je  $\text{im} \tau = U$ . Vzamemo poljuben  $y \in U$  in najdemo  $x \in V$ , da velja  $\tau(x) = y$  (tj.  $U = \text{im} \tau$ ).

3. Če je  $\tau$  injektivna in surjektivna, potem je **bijektivna**.

**Izrek:** Naj bo  $\tau : V \rightarrow U$  linearna preslikava in naj bo  $A = A_{\tau,B,C}$  matrika, ki pripada preslikavi  $\tau$ . Potem je

1.  $\dim(\text{im}(\tau)) = \text{rank}(A)$ ,
2.  $\dim(\ker(\tau)) + \dim(\text{im}(\tau)) = \dim(V)$ .

**Posledica.** Naj bo  $\tau : V \rightarrow U$  linearna preslikava,  $\dim V = \dim U = n$ , in naj bo  $A$  matrika preslikave  $\tau$ . Naslednje trditve so ekvivalentne:

- |  |   |
|--|---|
| (1) $\tau$ je bijektivna.                            | (12) Vrstice matrike $A$ tvorijo bazo $\mathbb{R}^n$ .          |
| (2) $\tau$ je injektivna.                            | (13) Stolpci matrike $A$ so linearno neodvisni.                 |
| (3) $\tau$ je surjektivna.                           | (14) Stolpci matrike $A$ razpenjajo $\mathbb{R}^n$ .            |
| (4) $A$ je obrnljiva.                                | (15) Stolpci matrike $A$ tvorijo bazo $\mathbb{R}^n$ .          |
| (5) $\ker \tau = \{0\}$ .                            | (16) $\det A \neq 0$ .  |
| (6) $N(A) = \{0\}$ .                                 | (17) Homogeni sistem $Ax = 0$ ima le trivialno rešitev.         |
| (7) $\text{im} \tau = U$ .                           | (18) Sistem $Ax = b$ ima rešitev za vsak $b \in \mathbb{R}^n$ . |
| (8) $C(A) = \mathbb{R}^n$ .                          |   |
| (9) $\text{rang}(A) = n$ .                           |   |
| (10) Vrstice matrike $A$ so linearno neodvisne.      |   |
| (11) Vrstice matrike $A$ razpenjajo $\mathbb{R}^n$ . |   |

## 9 Analiza

### 9.1 Funkcije več spremenljivk

Funkcija več spremenljivk

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

kjer

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

je funkcija, ki predpiše realno vrednost  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$  vsaki točki  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ . Množici  $D_f$  pravimo **definijsko območje** funkcije  $f$ .

V primeru, ko je  $n = 2$ , je graf funkcije  $f = f(x, y) : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ploskev v  $\mathbb{R}^3$ .

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D_f\}$$

**Nivojska krivulja** (ali nivojnica) funkcije  $f = f(x, y)$  je množica vseh točk  $(x, y) \in D_f$ , za katere velja  $f(x, y) = c$  za dano realno število  $c \in \mathbb{R}$ . Tako vsaka točka  $(x, y) \in D_f$  leži na natanko eni nivojski krivulji in zato se definijsko območje  $D_f$  razsloji na nivojske krivulje.

### 9.1.1 Tangenta premice in tangentna ravnina

Iz definicije odvoda:

$$f'(x_k) = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} \Rightarrow f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k),$$

zato je **enačba tangente** na graf  $y = f(x)$  v  $(x_k, f(x_k))$

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

Iz definicije parcialnih odvodov:

$$f_{x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\vec{e}_i) - f(a)}{t}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow f(x) \approx f(a) + \nabla f(a)^T(x - a),$$

zato je **enačba tangentne hiper-ravnine** na graf  $z = f(x)$  v  $(a, f(a))$

$$z = f(a) + \nabla f(a)^T(x - a) = f(a) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(a)(x_i - a_i).$$

### 9.1.2 Parcialni odvod

Parcialni odvod funkcije  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  v točki  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  po spremenljivki  $x_i$  definiramo kot

$$f_{x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a)}{h}.$$

Tako nam torej parcialni odvod funkcije  $f$  po  $x_i$ , v točki  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  pove relativno spremembo funkcisjke vrednosti pri zelo majhni spremembi spremenljivke  $x_i$ , kjer so ostale spremenljivke fiksne.

### 9.1.3 Gradient funkcije

**Vektor**

$$(\nabla f)(a) = (f_{x_1}(a), f_{x_2}(a), \dots, f_{x_n}(a))$$

imenjujemo **gradient** funkcije  $f$  v točki  $\mathbf{a}$ .

**Smerni odvod funkcije**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  v točki  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  v smeri vektorja  $\vec{e}$  je enak

$$f_{\vec{e}}(a) = (\nabla f)(a) \cdot \frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} = \sum_{i=1}^n \frac{f_{x_i}(a)e_i}{\|\vec{e}\|}$$

Za funkcijo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  velja:

1. Gradient funkcije  $f$  v točki  $\mathbf{a}$  kaže v smeri najhitrejšega naraščanja funkcije  $f$  v točki  $\mathbf{a}$ .

2. V primeru  $n = 2$  je gradient funkcije  $f = f(x, y)$  v točki  $\mathbf{a}$  pravokoten na nivojsko krivuljo v tej točki.

3. Smerni odvod  $f_{\vec{e}}(a)$  je relativna sprememba funkcisjke vrednosti  $f(a)$  ob majhnem premiku iz točke  $\mathbf{a}$  v smeri vektorja  $\vec{e}$ . Zato velja:

- Če je  $f_{\vec{e}}(a) > 0$ , potem  $f$  ob majhnem pomiku iz točke  $\mathbf{a}$  v smeri vektorja  $\vec{e}$  narašča.
- Če je  $f_{\vec{e}}(a) < 0$ , potem  $f$  ob majhnem pomiku iz točke  $\mathbf{a}$  v smeri vektorja  $\vec{e}$  pada.

### 9.1.4 Linearna aproksimacija

Za dano funkcijo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lahko v točki  $\mathbf{a} + \mathbf{h}$  blizu  $\mathbf{a}$  njeno funkcijo vrednost ocenimo s formulo

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \approx f(\mathbf{a}) + (\nabla f(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{h}.$$

### 9.1.5 Visji odvodi

Parcialne odvode drugega reda izračunamo s parcialnim odvajanjem parcialnih odvodov prvega reda. Definiramo jih kot

$$f_{x_i x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right).$$

$n \times n$  matriko

$$H_f(x) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]_{i,j=1,\dots,n}$$

imenujemo *Hessejeva matrika* funkcije  $f$  v točki  $x$ . Če sta pri tem  $f_{x_i x_j}, f_{x_j x_i}$  zvezni funkciji, potem sta omenjena druga parcialna odvoda enaka. Zato je v primeru, ko so vsi parcialni odvodi  $f_{x_i x_j}$  zvezni, Hessejeva matrika  $H_f(x, y)$  simetrična matrika.

### 9.1.6 Vektorska funkcija

Za vektorsko funkcijo

$$F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

kjer je

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})]^T$$

je  $m$ -terica funkcij več spremenljivk.

### 9.1.7 Jacobijeva matrika

Jacobijeva matrika vektorske funkcije

$$F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

je  $m \times n$  matrika prvih odvodov funkcij  $f_1, \dots, f_m$ :

$$J_F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Absolutna vrednost determinante Jacobijeve matrike vektorske funkcije

$$F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

pove, za kakšen faktor funkcija lokalno raztegne prostor.

9.1.8 Pravila za odvajanje vektorskih funkcij

- 1.  $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{x}} = I_n$
- 2. Če je  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , potem  $\frac{\partial A\tilde{x}}{\partial \tilde{x}} = A$ .
- 3. Če je  $\tilde{a} \in \mathbb{R}^n$ , potem  $\frac{\partial \tilde{a}^T \tilde{x}}{\partial \tilde{x}} = \tilde{a}^T$ .
- 4. Če je  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , potem  $\frac{\partial (\tilde{x}^T A \tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = \tilde{x}^T (A + A^T)$ .
- 5. Če je  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simetrična matrika, potem velja  $\frac{\partial (\tilde{x}^T A \tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = 2\tilde{x}^T A$ .
- 6.  $\frac{\partial \|\tilde{x}\|^2}{\partial \tilde{x}} = 2\tilde{x}^T$ .
- 7. Če  $\tilde{z} = \tilde{z}(\tilde{x})$  in  $\tilde{y} = \tilde{y}(\tilde{x})$ , potem  $\frac{\partial (\tilde{y}^T \tilde{z})}{\partial \tilde{x}} = \tilde{y}^T \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{z}^T \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}}$ .
- 8. Če  $G : D_G \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  in  $H = F \circ G$ ,  
potem  $\frac{\partial H}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial F}{\partial G}(\tilde{G}(\tilde{x})) \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}}$ .

9.1.9 Izrek

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  konveksna množica in naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  dvakrat zvezno odvedljiva. Potem velja:

- $f$  je **konveksna** ( $\cup$ ) natanko tedaj, ko  $\nabla^2 f(x)$  je **pozitivno semidefinitna** na  $D$ , tj.  $\nabla^2 f(x) \succeq 0$  za vsak  $x \in D$ , ter je **strogo konveksna** natanko tedaj, ko  $\nabla^2 f(x)$  je **pozitivno definitna** na  $D$ , tj.  $\nabla^2 f(x) \succ 0$  za vsak  $x \in D$ ;
- $f$  je **konkavna** ( $\cap$ ) natanko tedaj, ko  $\nabla^2 f(x)$  je **negativno semidefinitna** na  $D$ , tj.  $\nabla^2 f(x) \preceq 0$  za vsak  $x \in D$ , ter je **strogo konkavna** natanko tedaj, ko  $\nabla^2 f(x)$  je **negativno definitna** na  $D$ , tj.  $\nabla^2 f(x) \prec 0$  za vsak  $x \in D$ .

**Alternativno:** funkcija  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je konveksna na  $D$ , če velja

$$f(t\tilde{x} + (1 - t)\tilde{y}) \leq tf(\tilde{x}) + (1 - t)f(\tilde{y})$$

za vse  $\tilde{x}, \tilde{y} \in D$  in za vse  $t \in [0, 1]$ . Funkcija  $f$  je konkavna na  $D$ , če je funkcija  $-f$  konveksna na  $D$ .

9.2 Večkratni integrali

9.2.1 Izrek (Fubini, 1)

Če je  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija na pravokotniku  $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ , potem

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx. \end{aligned}$$

9.2.2 Dvojni integrali

Če je  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  neko omejeno območje in če  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija, izberimo tak pravokotnik  $R$ , da velja  $D \subseteq R$ . Sedaj definiramo dvojni integral funkcije  $f$  na območju  $D$  kot

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_R F(x, y) \, dx \, dy,$$

kjer

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

9.2.3 Izrek (Fubini, 2)

- 1. Če je  $D = \{(x, y); a \leq x \leq b \text{ in } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$  in  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija, potem je

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

- 2. Če je  $D = \{(x, y); \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y) \text{ in } c \leq y \leq d\} \subseteq \mathbb{R}^2$  in  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija, potem je

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left( \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

9.2.4 Izrek o menjavi spremenljivk

Naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija na  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Če je  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$ , takašna menjava spremenljivk, da je  $\det J_{\varphi, \psi} \neq 0$ , potem

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |\det J_{\varphi, \psi}| \, du \, dv.$$

Podobno, če je  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija na  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  ter  $x = \varphi(u, v, w)$ ,  $y = \psi(u, v, w)$ ,  $z = \chi(u, v, w)$ , takašna menjava spremenljivk, da je  $\det J_{\varphi, \psi, \chi} \neq 0$ , potem velja

$$\begin{aligned} &\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iiint_{D'} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) |\det J_{\varphi, \psi, \chi}| \, du \, dv \, dw. \end{aligned}$$

9.2.5 Primeri menjave spremenljivk

- 1. **Polarne koordinate** v  $\mathbb{R}^2$  so podane z

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$r \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \text{in velja} \quad |\det J_{\text{polar}}| = r.$$

- 2. **Cilindrične koordinate** v  $\mathbb{R}^3$  so podane z

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$r > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}, \quad \text{in velja} \quad |\det J_{\text{cylindrical}}| = r.$$

- 3. **Sferične koordinate** v  $\mathbb{R}^3$  so podane z

$$x = r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \cos \theta, \quad z = r \sin \theta,$$

$$r > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\text{in velja} \quad |\det J_{\text{spherical}}| = r^2 \cos \theta.$$

9.3 Klasifikacija Lokalnih ekstremov

Naj bo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ter a v definicijskem območju funkcije  $f$ . Če za vse točke  $x \neq a$ , ki so "dovolj blizu" točke a (tj.  $\|x - a\| < \varepsilon$  za nek dovolj majhen  $\varepsilon$ ) velja  $f(x) < f(a)$ , potem pravimo, da ima funkcija  $f$  v točki a **lokalni maksimum**.

Če za vse točke  $x \neq a$ , ki so "dovolj blizu" točke a (tj.  $\|x - a\| < \varepsilon$  za nek dovolj majhen  $\varepsilon$ ) velja  $f(x) > f(a)$ , potem pravimo, da ima funkcija  $f$  v točki a **lokalni minimum**.

Če je funkcija  $f$  zvezno parcialno odvedljiva, potem je jasno, da ima lahko lokalne ekstreme le v stacionarnih točkah. Torej je potreben pogoj za lokalni ekstrem funkcije  $f$  v točki a:

$$(\nabla f)(a) = 0,$$

kar pomeni, da moramo lokalne ekstreme iskati zgolj med stacionarnimi točkami.



9.3.1 Izrek

Naj bo  $a$  stacionarna točka dvakrat parcialno zvezno odvedljive funkcije  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

- 1. Če so vse lastne vrednosti matrike  $H_f(a)$  pozitivne, ima  $f$  v  $a$  lokalni minimum.
- 2. Če so vse lastne vrednosti matrike  $H_f(a)$  negativne, ima  $f$  v  $a$  lokalni maksimum.
- 3. Če so vse lastne vrednosti matrike  $H_f(a)$  neničelne, vendar različno predznačene, lokalnega ekstrema v  $a$  ni.
- 4. Če je kakšna od lastnih vrednosti matrike  $H_f(a)$  enaka 0, o lokalnih ekstremih funkcije  $f$  v točki  $a$  iz matrike  $H_f(a)$  ne moremo sklepati.

9.3.2 Lokalni ekstremi z omejitvami

Pogosto naletimo na problem iskanja ekstremalnih vrednosti funkcije  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pri pogojih

$$g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_m(x) = 0.$$

Izkaže se, da lahko lokalni ekstremi funkcije  $f$  pri pogoju  $g_i(x) = 0, i = 1, \dots, m$ , nastopijo le v stacionarnih točkah funkcije

$$L = f - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_m g_m,$$

ki je funkcija  $n + m$  spremenljivk  $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ . Funkciji  $L$  pravimo **Lagrangeova funkcija**, novim spremenljivkam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  pa **Lagrangevi multiplikatorji**. Omenjeni pogoj ni zadosten. Nekatere kritične točke funkcije  $L$  so ekstremalne točke funkcije  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pod pogoji  $g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_m(x) = 0$ , ostale pa ne.

9.4 Prirejene funkcije

Naj bodo  $f, g_i, h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dane funkcije več spremenljivk. Radi bi našli rešitev problema

$$(P^*) \quad \min_{\vec{x}} f(\vec{x})$$

pri pogojih

$$g_i(\vec{x}) = 0 \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, m, \quad h_j(\vec{x}) \leq 0 \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, r.$$

Naj bo  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  domena funkcije  $f$ . Definirajmo še množice

$$D_{g_i} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\vec{x}) = 0\} \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$D_{h_j} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : h_j(\vec{x}) \leq 0\} \quad (j = 1, \dots, r),$$

in

$$D = D_f \cap \left( \bigcap_{i=1}^m D_{g_i} \right) \cap \left( \bigcap_{j=1}^r D_{h_j} \right).$$

Sedaj lahko problem  $(P^*)$  zapišemo ekvivalentno kot

$$(P^*) \quad \min_{\vec{x} \in D} f(\vec{x}).$$

Definirajmo Lagrangevo funkcijo

$$\begin{aligned} L(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{\mu}) &= f(\vec{x}) - \vec{\lambda}^T \mathbf{G}(\vec{x}) - \vec{\mu}^T \mathbf{H}(\vec{x}) \\ &= f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\vec{x}) - \sum_{j=1}^r \mu_j h_j(\vec{x}), \end{aligned}$$

kjer je

$$\mathbf{G}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} h_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ h_r(\vec{x}) \end{pmatrix},$$

$$\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}, \quad \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_r \end{pmatrix}.$$

Funkcijo

$$K(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) = \inf_{\vec{x} \in D} L(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{\mu}) = \inf_{\vec{x} \in D} \left\{ f(\vec{x}) - \vec{\lambda}^T \mathbf{G}(\vec{x}) - \vec{\mu}^T \mathbf{H}(\vec{x}) \right\}$$

imenujemo **prirejena funkcija** problema  $(P^*)$ . Pri tem spremenljivke  $\vec{\lambda}$  in  $\vec{\mu}$  imenujemo **prirejene spremenljivke**. Opazimo:

- 1.  $K(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$  je konkavna funkcija.
- 2. Če je  $\mu_j \leq 0$  za  $j = 1, 2, \dots, r$ , potem velja

$$K(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) \leq \min_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$$

za vse  $\vec{\lambda}$  ter vse  $\vec{\mu} \leq \vec{0}$ .

**Problem**

$$(D^*) \quad \max_{\vec{\lambda}, \vec{\mu}} K(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$$

pri pogoju

$$\mu_j \leq 0 \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, r$$

imenujemo **prirejeni problem** problema  $(P^*)$ .

Označimo z  $\vec{x}^* \in D$  rešitev problema  $(P^*)$  ter z  $(\vec{\lambda}^*, \vec{\mu}^*)$  rešitev problema  $(D^*)$ . Naj bo  $p^* = f(\vec{x}^*)$  in  $d^* = K(\vec{\lambda}^*, \vec{\mu}^*)$ . Potem velja

$$d^* \leq p^*.$$

V primeru, ko velja  $d^* = p^*$ , morajo  $\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*$  in  $\vec{\mu}^*$  zadostiti Karush–Kuhn–Tuckerjevim (KKT) pogojem:

$$\begin{aligned} (\text{stacionarnost}) \quad & \nabla_{\vec{x}} L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*, \vec{\mu}^*) = 0, \\ (\text{primalna dopustnost}) \quad & g_i(\vec{x}^*) = 0 \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, m, \\ & h_j(\vec{x}^*) \leq 0 \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, r, \\ (\text{dualna dopustnost}) \quad & \mu_j^* \leq 0 \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, r, \\ (\text{komplementarna ohlapnost}) \quad & \mu_j^* h_j(\vec{x}^*) = 0 \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

**Trditev 2.** Naj bodo  $f, h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  konveksne in dvakrat zvezno odvedljive funkcije ter

$$\mathbf{G}(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b} \quad \text{za neko matriko } A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ in vektor } \vec{b} \in \mathbb{R}^m.$$

Če  $(\vec{x}', \vec{\lambda}', \vec{\mu}')$  zadošča sistemu (KKT), potem je  $\vec{x}'$  rešitev problema  $(P^*)$ ,  $(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')$  rešitev problema  $(D^*)$  in velja  $p^* = d^*$ .

9.5 Dodatek 2: Ponovitev analize

Odvodi

- 1.  $\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$
- 2.  $x^n = nx^{n-1}$
- 3.  $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- 4.  $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- 5.  $\sin(ax) = a \cos ax$
- 6.  $\cos(ax) = -a \sin(ax)$
- 7.  $\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- 8.  $e^ax = ae^{ax}$
- 9.  $a^x = a^x \ln a$
- 10.  $x^x = x^x(1 + \ln x)$
- 11.  $\ln x = \frac{1}{x}$
- 12.  $\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- 13.  $\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 14.  $\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 15.  $\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
- 16.  $\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$

Integrali

- 1.  $\int x^a dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & a \neq -1 \\ \ln|x| + C & a = -1 \end{cases}$
- 2.  $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
- 3.  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
- 4.  $\int e^x dx = e^x + C$
- 5.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- 6.  $\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C$
- 7.  $\int \sin(ax) dx = \frac{-\cos(ax)}{a} + C$
- 8.  $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$
- 9.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$
- 10.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
- 11.  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
- 12.  $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$
- 13.  $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$

- 14.  $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
- 15.  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$
- 16. **Zamenjava spremenljivke:** Če  $u = g(x)$  in  $du = g'(x)dx$ , potem velja:  $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$
- 17. **Metoda per partes:** Če  $u = u(x)$  in  $v' = v'(x)$ , potem velja:  $\int u v' dx = uv - \int u' v dx$

Logaritmi

- 1. **Definicija:**  $\log_a x = y \iff a^y = x \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$
- 2.  $\log_a 1 = 0$
- 3.  $\log_a a = 1$
- 4.  $\log_a(a^x) = x \quad \text{in} \quad a^{\log_a x} = x$
- 5.  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- 6.  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- 7.  $\log_a(x^r) = r \log_a x \quad (x > 0)$
- 8.  $\log_a(\sqrt[n]{x}) = \log_a(x^{1/n}) = \frac{1}{n} \log_a x$
- 9. **Menjava osnove:**  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$
- 10.  $\ln x = \log_e x$
- 11.  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- 12. **Monotonost:** če  $a > 1$ , je  $\log_a x$  naraščajoča; če  $0 < a < 1$ , je padajoča.

EkspONENTNA FUNKCIJA

- 1. **Definicija:**  $e^x = \exp(x) \quad (e \approx 2.71828)$
- 2.  $e^0 = 1, \quad e^x > 0$  za vsak  $x \in \mathbb{R}$
- 3. **Pravila potenc:**

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \quad e^{kx} = (e^x)^k$$

- 4. **Inverz:**  $\ln(e^x) = x$  in  $e^{\ln x} = x \quad (x > 0)$
- 5. **Monotonost:**  $e^x$  je strogo naraščajoča na  $\mathbb{R}$

Trigonometrija

- 1.  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- 2.  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
- 3.  $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$