1 Vektorji in matrike

1.1 Vektor je *urejena n-terica stevil*, ki jo obicajno zapisemo kot stolpec

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1.2 Produkt *vektorja* $\vec{x}$ s skalarjem α je vektor

$$\alpha\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

1.3 Vsota *vektorjev* $\vec{x}$ in $\vec{y}$ je vektor

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

1.4 Nicelni vektor $\vec{0}$ je tisti vektor, za katerega je $\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$ za vsak vektor $\vec{a}$. Vse komponente nicelnega vektorja so enake 0. Vsakemu vektorju $\vec{a}$ pripada nasprotni vektor -$\vec{a}$, tako da je $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ Razlika vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vsota $\vec{a} + (-\vec{b})$ in jo navadno zapisemo kot $\vec{a} - \vec{b}$.

Lastnosti vektorske vsote

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutativnost)
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (asociativnost)
- $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$ (distributivnost)

1.5 Linearna kombinacija vektorjev $\vec{x}$ in $\vec{y}$ je vsota

$$a\vec{x} + b\vec{y}$$

1.6 Skalarni produkt vektorjev

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ je stevilo}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

alternativno:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = ||\vec{x}|| ||\vec{y}|| \cos\phi$$

Lastnosti skalarnega produkta

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (komutativnost)
- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$ (aditivnost)
- $\vec{x} \cdot (a\vec{y}) = a(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (a\vec{x}) \cdot \vec{y}$ (homogenost)
- $\forall \vec{x}$ *velja* $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$

1.7 Dolzina vektorja $\vec{x}$ je

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

1.8 Enotski vektor je vektor z dolzino 1.
1.9 Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| ||\vec{v}||,$$

enakost velja, v primeru, da sta vektorja vzporedna.
1.10 Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||.$$

1.11 Vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ sta ortogonalna (pravokotna) natakno takrat, kadar je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

1.12 Ce je ϕ kot med vektorjema $\vec{x}$ in $\vec{y}$, potem je

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}|| ||\vec{y}||} = \cos\phi$$

1.13 Vektorski produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

Lastnosti vektorskega produkta

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (aditivnost)
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ (!komutativnost)
- $(a\vec{a}) \times \vec{b} = a(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (a\vec{b})$ (homogenost)
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ *je* $\perp$ *na vektorja* $\vec{a}$ *in* $\vec{b}$
- $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \sin\phi$
- Dolzina vektorskega produkta je ploscina paralelograma, katerega vektorja oklepata

1.14 Mesani produkt$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ vektorjev $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ v R^3 je skalarni produkt vektorjev $\vec{a} \times \vec{b}$ in $\vec{c}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Lastnosti mesanega produkta

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
- $(x\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = x(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (homogenost)
- $(\vec{a}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{v}, \vec{c})$
- Absolutna vrednost mesanega produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je enaka prostornini paralepipeda

Premice v R^3

Premico določata smerni vektor $\vec{p} = [a, b, c]^T$ in točka $A(x_0, y_0, z_0)$.

- Parametrična oblika: $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}$, $t \in R$
- Kanonična oblika: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

Ravnine v R^3

Ravnina z normalo $\vec{n} = [a, b, c]^T$ skozi točko $A(x_0, y_0, z_0)$ ima enačbo

$$(\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n} = 0$$

oziroma

$$ax + by + cz = d$$

Razdalje

Razdalja od tocke P do ravnine, v kateri lezi tocka A :

$$\cos\phi = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r_P} - \vec{r_A})}{||\vec{n}|| ||\vec{r_P} - \vec{r_A}||} \text{ oz. } d = |\frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}(\vec{r_P} - \vec{r_A})|$$

Razdalja od tocke P do premice, katera gre skozi tocko A:

$$d = \frac{||\vec{e} \times (\vec{r_P} - \vec{r_A})||}{||\vec{e}||}$$

Projekcije vektorjev

Naj bo $proj_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{x}$ projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$. Izracunamo jo po sledeci formuli:

$$proj_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$$

1.15 Matrika dimenzije $m \times n$ je tabela $m \times n$ stevil, urejenih v m vrstic in n stolpcev:

$$A^{m\times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

1.16 Matrika, katere elementi so enaki nic povsod zunaj glavne diagonale, se imenuje diagonalna matrika. Za diagonalno matriko je $a_{ij} = 0$, kadarkoli velja $i \neq j$

1.17 Matrika $A^{n\times n}$ je spodnjetrikotna, kadar so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \ kadar\ je\ i < j$$

1.18 Matrika $A^{n\times n}$ je zgornjetrikotna, kadar so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \ kadar\ je\ i > j$$

1.19 Matrika je trikotna, ce je zgornjetrikotna ali spodnjetrikotna.

1.20 Dve matriki A in B sta enaki natanko takrat, kadar imata enaki dimenziji in kadar so na istih mestih v obeh matrikah enaki elementi:

$$A^{m\times n} = B^{p\times q} \implies m = p \text{ in } n = q,$$
$$a_{ij} = b_{ij} \ za\ vsak\ i = 1, ..., m \text{ in } j = 1, ..., n$$

1.21 Produkt matrike s skalarjem dobimo tako, da vsak element matrike pomnozimo s *skalarjem*

$$aA^{m\times n} = \begin{bmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} & \dots & ax_{1n} \\ ax_{21} & ax_{22} & ax_{23} & \dots & ax_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax_{m1} & ax_{m2} & ax_{m3} & \dots & ax_{mn} \end{bmatrix}$$

1.22 Vsoto dveh matrik enake dimenzije dobimo tako, da sestejemo istolezne elemente obeh matrik:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & ax_{12} + b_{12} & \dots & ax_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & ax_{22} + b_{22} & \dots & ax_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & ax_{m2} + b_{m3} & \dots & ax_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Osnovne matricne operacije

- $A + B = B + A$ (komutativnost)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativnost)
- $a(A + B) = aA + aB$ (mnozenje s skalarjem)
- $A + (-A) = 0$
- $x(yA) = (xy)A \ in\ 1 \cdot A = A$

1.23 Transponirana matrika k matriki A reda $m \times n$ je matrika reda $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$
$$A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Lastnosti transponiranja matrik

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $(xA)^T = xA^T$
- $(A^T)^T = A$

1.24 Produkt matrike A in vektorja $\vec{x}$ je linearna kombinacija stolpcev matrike A, utezi linearne kombinacije so komponente vektorja $\vec{x}$:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

1.25 Produkt vrstice $\vec{x}$ z matriko A je linearna kombinacija vrstic matrike A, koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice $\vec{y}$:

$$\vec{y} \cdot A = \begin{bmatrix} y_1, y_2, y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\vec{u} \\ y_2\vec{v} \\ y_3\vec{w} \end{bmatrix}$$

1.26 Produkt matrik A in B je matrika, katere stolpci so zaporedoma produkti matrike A s stolpci matrike B:

$$AB = A\begin{bmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \end{bmatrix}$$

1.27 Element c_{ij} v $i - ti$ vrstici in $j - tem$ stolpcu produkta C = AB je skalarni produkt $i - te$ vrstice A in $j - tega$ stolpca matrike B

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

1.28 Produkt matrik A in B je matrika, katere vrstice so zaporedoma produkti vrstic matrike A z matriko B:

$$\begin{bmatrix} i - ta\ vrstica\ A \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} i - ta\ vrstica\ AB \end{bmatrix}$$

Lastnosti matricnega produkta

- $AB \neq BA$ (!komutativnost)
- $(xA)B = x(AB) = A(xB)$ (homogenost)
- $C(A + B) = CA + CB$ (distributivnost)
- $A(BC) = (AB)C$ (asociativnost)
- $(AB)^T = B^T A^T$

V splosnem; komutativnost matricnega mnozenja velja samo, ko sta matriki diagonalizabilni.

1.29 Vrstice matrike A z n stolpci naj bodo $a^1, \dots, a^n$, stolpci matrike B z n vrsticami pa $b_1, \dots, b_n$. Potem je

$$AB = a^1 b_1 + \dots + a^n b_n$$

1.30 Ce delitev na bloke v matriki A ustreza delitvi v matirki B, potem lahko matriki pomnozimo blocno:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

1.31 Kvadratna matrika I_k reda $k \times k$, ki ima vse diagonalne elemente enake 1, vse ostale elemente pa 0 ima lastnost, da za vsako matriko A reda $m \times n$ velja $AI_n = A$ in $I_m A = A$. Matrika I_k se imenuje enotska ali identicna matirka.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

2 Sistemi linearnih enacb

2.1 Kvadratna matrika A je obrnljiva, ce obstaja taka matrika A^{-1}, da je

$$AA^{-1} = I \text{ in } A^{-1}A = I$$

Matrika A^{-1} (ce obstaja) se imenuje matriki A inverzna matrika. Matrika, ki ni obrnljiva, je singularna. Matrika **NI** obrnljiva, kadar je $rang(A) < n$!

2.2 Kvadratna matirka reda n je obrnljiva natanko tedaj, ko pri gaussovi eliminaciji dobimo n pivotov.

2.3 Vsaka obrnljiva matrika ima eno samo inverzno matriko.

2.4 Inverzna matrika inverzne matrike A^{-1} je matrika A

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2.5 Ce je matrika A obrnljiva, potem ima sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ edino resitev $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

2.6 Ce obstaja nenicelna resitev $\vec{x}$ enacbe $A\vec{x} = \vec{0}$, matrika A ni obrnljiva(je singularna).

2.7 Ce sta matirki A in B istega reda obrnljivi, je obrnljiv tudi produkt $A \cdot B$ in

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Pozor! Pravilo

$$(AB)^p = A^p B^p$$

velja le v primeru, ko matriki A in B komutirata, torej $AB = BA$.

2.8 Inverz transponirane matrike je transponirana matrika inverza

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2.9 Inverz diagonalne matrike z diagonalnimi elementi a_{ii} je diagonalna matrika, ki ima na diagonali elemente a_{ii}^{-1}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

2.10 Za izracun inverza matrike A, uporabimo gausovo eliminacijo nad matriko $[A|I]$

$$[A|I] = [I|A^{-1}]$$

2.11 Matrika A je simetricna $\Leftrightarrow A^T = A$. Za elemente a_{ij} simetricne matirke velja $a_{ij} = a_{ji}$. Za simetricno matriko vedno velja, da je kvadratna $A \in R^{n\times n}$.

2.12 Ce je matrika A simetricna in obrnljiva, je tudi A^{-1} simetricna.

2.13 Ce je R poljubna (lahko tudi pravokotna) matrika, sta $R^T R$ in RR^T simetricni matriki.

3 Vektorski prostori

3.1 Realni vektorski prostor V je mnozica "vektorjev" skupaj z pravili za

- sestevanje vektorjev,
- mnozenje vektorja z realnim stevilom (skalarjem)

Ce sta $\vec{x}$ in $\vec{y}$ poljubna vektorja v V, morajo biti v V tudi

- vsota $\vec{x} + \vec{y}$ in
- produkti $\alpha\vec{x}$ za vse $\alpha \in R$

V vektorskem prostoru V morajo biti tudi VSE linearne kombinacije $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$

Pravila za operacije v vektorskih prostorih

Operaciji sestevanja vektorjev in mnozenja vektorja s skalarjem v vektorskem prostoru morajo zadoscati naslednjim pravilom:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativnost)
- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (asociativnost)
- obstaja en sam nenicelni vektor $\vec{0}$, da velja $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- za vsak $\vec{x}$ obstaja natanko en $-\vec{x}$, da je $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
- $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ (distributivnost)
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

3.2 Podmnozica U vektorskega prostora V je *vektorski podprostor*, ce je za vsak par vektorjev $\vec{x}$ in $\vec{y}$ iz U in vsako realno stevilo α tudi

- $\vec{x} + \vec{y} \in U$ in
- $\alpha\vec{x} \in U$.

3.3 Mnozica vektorjev U je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je vsaka linearna kombinacija vektorjev iz U tudi v U.

Lastnosti vektorskih podprostorov

- Vsak vektorski podprostor nujno vsebuje nicelni vektor $\vec{0}$
- Presek dveh podprostorov vektorskega podprostora je tudi podprostor

3.4 Stolpicni prostor C(A) matrike $A \in R^{m\times n}$ je tisti podprostor vektorskega prostora R^m, ki vsebuje natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike A.
Izracunamo ga tako, da matriko A transponiramo in izvedemo operacijo gaussove eliminacije nad A^T. Vrstice katere ostanejo po gaussivi eliminaciji so linearno neodvisni vektorji, kateri tvorijo stoplicni prostor matrike A, $C(A)$. *neformalno: linearna ogrinjaca stolpcev matrike (npr. ce imas 5 stolpcev pa lahko 2 zapises kot linearno kombinacijo ostalih 3 bo imel column space 3 elemente)*

3.5 Sistem linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je reslijv natanko tedaj, ko je vektor $\vec{b} \in C(A)$

3.6 Naj bo matrika $A \in R^{m\times n}$. Mnozica resitev homogenega sistema linearnih enacb je podprostor v vektorskem prostoru R^n.

3.7 Mnozica vseh resitev sistema linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ se imenuje nicelni prostor matirke A. Oznacujemo ga z N(A).
neformalno: mnozica vektorjev, ki se z neko matriko zmnozijo v nicelni vektor. Matriko A samo eliminiras po gaussu in nato dobljene resitve enacis z 0.

3.8 Ce je matrika A kvadratna in obrnljiva, potem N(A) vsebuje samo vektor $\vec{0}$

3.9 Matrika ima *stopnicasto* obliko, kadar se vsaka od njenih vrstic zacne z vsaj eno niclo vec kot prejsnja vrstica.

3.10 Prvi element, razlicen od nic v vsaki vrstici, je *pivot.* Stevilo pivotov v matriki se imenuje rang matrike. Rang matrike A zapisemo kot $rang(A)$.

3.11 Rang matrike ni vecji od stevila vrstic in ni vecji od stevila stolpcev matrike.

3.12

Stevilo prostih neznank matrike = st. stolpcev - rang matrike

3.13

1. Visoka in ozka matrika $(m > n)$ ima poln stolpicni rang, kadar je $rang(A) = n$

2. Nizka in siroka matrika ($m < n$) ima poln vrsticni rang, kadar je $rang(A) = m$
3. Kvadratna matrika ($n = m$) ima poln rang, kadar je $rang(A) = m = n$

3.14 Za vsako matriko A s polnim stolpicnim rangom $r = n \leq m$, velja:

1. Vsi stolpci A so pivotni stolpci
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ nima prostih neznank, zato tudi nima posebnih resitev
3. Nicelni prostor $N(A)$ vsebuje le nicelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$
4. Kadar ima sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ resitev(kar ni vedno res!), je resitev ena sama
5. Reducirana vrsticna oblika matrike (A) se da zapisati kot

$$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \times n \; enotska \; matrika \\ m - n \; vrstic \; samih \; nicel \end{bmatrix}$$

3.15 Za vsako matriko A s polnim vrsticnim rangom $r = m \leq n$ velja:

1. Vse vrstice so pivotne, ni prostih vrstic in U (stopnicasta oblika) in R(reducirana stopnicasta oblika) nimata nicelnih vrstic
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je resljiv za vsak vektor $\vec{b}$
3. Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ ima $n - r = n - m$ prostih neznank, zato tudi prav toliko posebnih resitev
4. Stolpicni prostor $C(A)$ je ves prostor R^m

3.16 Za vsako kvadratno matriko A polnega ranga (rang(A) = m = n) velja:

1. Reducirana vrsticna oblika matrike A je enotska matrika
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ ima natancno eno resitev za vsak vektor desnih strani $\vec{b}$
3. Matrika A je obrnljiva
4. Nicelni prostor matrike A je samo nicelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$
5. Stolpicni prostor matrike A je cel prostor $C(A) = R^m$

3.17 Vektorji $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$ so linearno neodvisni, ce je

$$0\vec{x_1} + 0\vec{x_2} + \cdots + 0\vec{x_n}$$

edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka vektorju $\vec{0}$. Vektorji $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$ so linearno odvisni, *ce niso linearno neodvisni.*

3.18 Ce so vektorji *odvisni*, lahko vsaj enega izrazimo z ostalimi.

3.19 Ce je med vektorji $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ tudi nicelni vektor, so vektorji *linearno odvisni.*

3.20 Vsaka mnozica n vektorjev iz R^n je odvisna, kadar je $n > m$.

3.21 Stolpci matrike A so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima homogena enacba $A\vec{x} = \vec{0}$ edino resitev $\vec{x} = \vec{0}$.

3.22 Kadar je $rang(A) = n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisni. Kadar je pa $rang(A) < n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisni.

3.23 Kadar je $rang(A) = m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisne. Kadar je pa $rang(A) < m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisne.

3.24 Vrsticni prostor matrike A je podprostor v R^n, ki ga razpenjajo vrstice matrike A.

3.25 Vrsticni prostor matrike A je $C(A^T)$, stolpicni prostor matrike A^T.

3.26 *Baza vektorskega prostora* je mnozica vektorjev, ki

1. je linearno neodvisna in
2. napenja cel prostor.

3.27 Vsak vektor iz vektorskega prostora lahko na en sam nacin izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

3.28 Vektorji $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$ so baza prostora R^n natanko tedaj, kadar je matrika, sestavljena iz stolpcev $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$, obrnljiva.

3.29 Prostor R^n ima za $n > 0$ neskoncno mnogo razlicnih baz.

3.30 Ce sta mnozici vekotrjev $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_m}$ in $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ obe bazi istega vektorskega prostora, potem je $m = n \implies$ vse baze istega vektorskega prostora imajo isto stevilo vektorjev.

3.31 *Dimenzija* vektroskega prostora je stevilo baznih vektorjev.

3.32 Dimenziji stolpicnega prostora $C(A)$ in vrsticnega prostora $C(A^T)$ sta enaki rangu matrike A

$$dim(C(A)) = dim(C(A^T)) = rang(A).$$

3.33 Dimenzija nicelnega prostora $N(A)$ matrike A z n stolpci in ranga r je enaka $dim(N(A)) = n - r$.

3.34 Stolpicni prostor $C(A)$ in vrsticni prostor $C(A^T)$ imata oba dimenzijo r. Dimenzija nicelnega prostora $N(A)$ je $n - r$, Dimenzija levega nicelnega prostora $N(A^T)$ pa je $m - r$.

3.35 Vsako matriko ranga 1 lahko zapisemo kot produkt(stolpcnega) vektorja z vrsticnim vektorjem $A = \vec{u}\vec{v}^T$.

4 Linearne preslikave

4.1 Preslikava $A : U \to V$ je linearna, ce velja

1. aditivnost: $A(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = A\vec{u}_1 + A\vec{u}_2$ za vse $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$,
2. homogenost: $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$ za vse $\alpha \in R$ in $\vec{u} \in U$.

Oziroma v enem koraku:

$$A(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) = \alpha A(\vec{u}_1) + \beta A(\vec{u}_2).$$

Pozor! Preslikava ni linearna, ce $A(\vec{0}) \neq \vec{0}$.

4.2 Preslikava $A : U \to V$ je linearna natanko tedaj, ko velja

$$A(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = \alpha_1 A\vec{u}_1 + \alpha_2 A\vec{u}_2$$

za vse $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ in vse $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$.

4.3 Ce je A *linearna preslikava*, je $A\vec{0} = \vec{0}$.

4.4 Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava in $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\vec{u}_i$ linearna kombinacija vektorjev. Potem je A$(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A\vec{u}_i$.

4.5 Naj bo $\beta = \{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}\}$ baza za vektorski prostor U. Potem je linearna preslikava $A : U \to V$ natanko dolocena, ce poznamo slike baznih vektorjev.

4.6 Naj bo $\beta = \{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}\}$ baza za U in $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$. Potem obstaja natanko ena linearna preslikava $A : U \to V$, za katero je $A\vec{u_i} = \vec{v}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$.

4.7 Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava. Potem mnozico

$$ker A = \{\vec{u} \in U; A\vec{u} = \vec{0}\}$$

imenujemo *jedro* linearne preslikave. Ker je $A\vec{0} = \vec{0}$, je $\vec{0} \in$ ker A za vse A. Zato je jedro vedno neprazna mnozica. *Ce je matrika $A\phi$* ***enotska*** *preslikava za* ϕ, *potem velja*

$$ker\phi = N(A).$$

4.8 Jedro linearne preslikave $A : U \to V$ je vektorski podprostor v U.

4.9 Mnozico

$$im\ A = \{\vec{v} \in V; obstaja\ tak\ \vec{u} \in U,\ da\ je\ \vec{v} = A\vec{u}\}$$

imenujemo *slika* linearne preslikave $A : U \to V$. *Ce je matrika $A\phi$* ***enotska*** *preslikava za* ϕ, *potem velja*

$$im\phi = C(A).$$

4.10 Ce je $A : U \to V$ linearna preslikava, potem je njena slika *im A* vektorski podprostor v V.

4.11 Ce je $A : U \to V$ linearna preslikava, in je rang matrike te preslikave v standardni bazi poln, potem lahko sklepamo, da ima ta preslikava **trivialno jedro**.

5 Ortogonalnost

5.1 Podprostora U in V vektorskega prostora sta med seboj ortogonalna, ce je vsak vektor $\vec{u} \in U$ ortogonalen na vsak vektor $\vec{v} \in V$.

5.2 Za vsako matriko $A \in R^{m \times n}$ velja:

1. Nicelni prostor $N(A)$ in vrsticni prostor $C(A^T)$ sta ortogonalna podprostora R^n
2. Levi nicelni prostor $N(A^T)$ in stolpicni prostor $C(A)$ sta ortogonalna podprostora prostora R^m.

5.3 Ortogonalni komplement $V^\perp$ podprostora V vsebuje VSE vektorje, ki so ortogonalni na V.

5.4 Naj bo A matrika dimenzije $m \times n$.

- Nicelni prostor $N(A)$ je ortogonalni komplement vrsticnega prostora $C(A^T)$ v prostoru R^n
- Levi nicelni prostor $N(A^T)$ je ortogonalni komplement stolpicnega prostora $C(A)$ v prostoru R^m.

krajse:

$$N(A) = C(A^T)^\perp$$
$$N(A^T) = C(A)^\perp$$

tukaj lahko vedno pomnozimo s komplementom, da dobimo npr.

$$N(A)^\perp = C(A^T)$$

dodatek:

$$dimN(A) = st.stolpcev - rang(A)$$
$$dimN(A^T) = st.vrstic - rang(A)$$
$$dimC(A) = dimC(A^T) = rang(A)$$

5.5 Za vsak vektor $\vec{y}$ v stolpicnem prostoru $C(A)$ obstaja v vrsticnem prostoru $C(A^T)$ en sam vektor $\vec{x}$, da je $A\vec{x} = \vec{y}$.

5.6 Ce so stolpci matrike A linearno neodvisni, je matrika $A^T A$ obrnljiva.

5.7 Matrika P je projekcijska, kadar

- je simetricna: $P^T = P$ in
- velja $P^2 = P$.

5.8 Ce je P projekcijska matrika, ki projecira na podprostor U, potem je $I - P$ projekcijska matrika, ki projecira na $U^\perp$, ortogonalni komplement podprostora U.

5.9 Vektorji $\vec{q_1}, \vec{q_2}, \ldots, \vec{q_n}$ so ortonormiranim kadar so ortogonalni in imanjo vsi dolzino 1, torej

$$\vec{q_i}^T \vec{q_i} = \begin{cases} 0 \; ko \; je \; i \neq j \; pravokotni \; vektorji \\ 1 \; ko \; je \; i = j \; enotski \; vektorji \end{cases}$$

za matriko $Q = [\vec{q_1}, \vec{q_2} \ldots \vec{q_n}]$ velja $Q^T Q = I$.

5.10 Vektorji $\vec{q_1}, \ldots, \vec{q_n}$ naj bodo ortonormirani v prostoru R^m. Potem za matriko

$$Q = [\vec{q_1}\vec{q_2} \ldots \vec{q_n}]$$

velja, da je $Q^T Q = I_n$ enotska matrika reda n.

5.11 Matrika Q je ortogonalna, kadar je

1. kvadratna in
2. ima ortonormirane stolpce.

5.12 Ce je Q ortogonalna matirka, potem je obrnljiva in

$$Q^{-1} = Q^T$$
$$dimU^\perp = n - dimU$$
$$(U^\perp)^\perp = U$$

5.13 Mnozenje z ortogonalno matriko ohranja dolzino vektorjev in kote med njimi. Ce je Q ortogonalna matrika, potem je

$$||Q\vec{x}|| = ||\vec{x}|| \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in}$$
$$(Q\vec{x})^T Q\vec{y} = \vec{x^T}\vec{y} \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in } \vec{y}$$

5.14 Ce sta Q_1 in Q_2 ortogonalni matriki, je tudi produkt $Q = Q_1 Q_2$ ortogonalna matrika.

5.15 Gram-Schmidtova ortogonalizacija. Za vhod uporabimo Linearno ogrinjaco linearno neodvisnih vekotrjev. Po gramschmidtovi ortogonalizaciji pa dobimo paroma ortogonalne vektorje. Postopek:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1$$
$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - proj_{\vec{u}_1}\vec{v}_2$$
$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - proj_{\vec{u}_1}\vec{v}_3 - proj_{\vec{u}_2}\vec{v}_3$$
$$\vdots$$

Po tem postopku dobimo paroma ortogonalne vektorje po Gram-Schmidtovi ortogonalizaciji.

5.16 QR Razcep: Iz linearno neodvisnih vektorjev $a_1, \ldots, a_n$ z *Gram-Schmidtovo* ortogonalizacijo dobimo ortonormirane vektorje $q_1, \ldots, q_n$. Matriki A in Q s temi stolpci zadoscajo enacbi $A = QR$, kjer je R zgornjetrikotna matrika.

- Najprej z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo poiscemo linearno neodvisne vektorje matrike A
- Vektorje normiramo in jih zapisemo v matriko Q.
- Matriko R dobimo tako, da matriko Q^T pomnozimo z matriko A

$$R = Q^T A$$

Tako smo prisli do vseh elementov v QR razcepu matrike A.

Sedaj ko imamo izracunane vse elemente lahko zapisemo se projekcijsko matriko. To je matrika pravokotne projekcije na $C(Q) = C(A)$. Njen izracun je preprost:

$$QQ^T = pravokotna \; projekcija \; na \; C(Q) \; = C(A)$$

Sedaj lahko to projekcijsko matriko pomnozimo z desne s poljubnim vektorjem in ugotovimo kam se preslika v prostoru $C(A)$. V nasprotnem primeru, ce bi pa zeleli imeti projekcijsko matriko, s katero bi radi videli kam se vektor preslika v prostoru $N(A^T)$, bi pa od identicne matrike odsteli projekcijsko matriko za $C(Q)$.

$$I - QQ^T = pravokotna \; projekcija \; na \; C(A)^\perp \; = N(A^T)$$

5.17 Vektorski prostor ι je mnozica vseh neskoncnih zaporedij $\vec{u}$ s koncno dolzino

$$||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u_1}^2 + \vec{u_2}^2 + \cdots < \infty$$

5.18 Predoloceni sistemi

$$A^T A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^T \vec{f}$$

Kjer je A matrika sistemov linearnih enacb in $\vec{f}$ vektor pricakovanih resitev po gaussovi eliminaciji zgornje enacbe, dobimo spremenljivke, ki predstavljao najboljso aproksimacijo vseh kombinaicij rezultatov in vhodnih spremenljivk.

6 Determinante

6.1 Determinanta enotske matirke je $det(I) = 1$.

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix} = 1 \; in \begin{vmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\0 & & 1\end{vmatrix} = 1.$$

6.2 Determinanta spremeni predznak, ce med seboj zamenjamo dve vrstici.

6.3 Determinanta je linearna funkcija vsake vrstice posebej. To pomeni, da se

1. determinanta pomnozi s faktorjem t, ce eno vrstico determinante(vsak element v tej vrstici) pomnozimo s faktorjem t.

$$\begin{vmatrix}ta & tb\\c & d\end{vmatrix} = t\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}$$

2. determinanta je vsota dveh determinant, ki se razlikujeta le v eni vrstici, ce je v provitni determinanti ta vrstica vsota obeh vrstic, ostale vrstice pa so enake v vseh treh determinantah.

$$\begin{vmatrix}a+a' & b+b'\\c & d\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a' & b'\\c & d\end{vmatrix}$$

Pozor! Kadar mnozimo matriko A s skalarjem t, se vsak element matrike pomnozi s skalarjem. Ko racunamo determinanto produkta matirke s skalarjem tA, skalar t izpostavimo iz vsake vrstice posebej, zato je $det(tA) = t^n det(A)$, kjer je n stevilo vrstic (ali stolpcev) determinante.

6.4 Matrika, ki ima dve enaki vrstici, ima determinanto enako 0.

6.5 Ce v matriki od poljubne vrstice odstejemo mnogokratnik neke druge vrstice, se njena determinanta ne spremeni.

6.6 Naj bo A poljubna kvadratna matirka $n \times n$ in U njena vrsticno-stopnicasta oblika, ki jo dobimo z *Gaussovo eliminacijo*. Potem je

$$det(A) = \pm det(U).$$

6.7 Determinanta, ki ima vrstico samih nicel, je enaka 0.

6.8 Determinanta trikotne matrike A je produkt diagonalnih elementov:

$$det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

6.9 Determinanta singularne matrike je enaka 0, determinanta obrnljive matrike je razlicna od 0.

6.10 Determinanta produkta dveh matrik je enaka produktu determinant obeh matrik:

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

6.11 Determinanta inverzne matrike je enaka

$$det(A^{-1}) = 1/det(A)$$

in determinanta potence A^n matrike A je

$$det(A^n) = (det(A))^n$$

ter determinanta transponirane matrike je enaka determinanti originalne matrike, saj ko naredimo razvoj po vrsticah, pridemo do enakih elementov po diagonali.

$$det(A) = det(A^T).$$

6.12 Transponirana matrika A^T ima isto determinanto kot A.

6.13 Recap dovoljenih operacij nad determinanto

1. Ce zamenjamo dve vrstici, se **spremeni** predznak determinante
2. Vrednost determinante se ne spremeni, ce neki vrstici pristejemo poljuben veckratnik katerekoli druge vrstice.
3. Ce vse elemente neke vrstice pomnozimo z istim stevilom α, se vrednost determinante pomnozi z α.

6.14 Vsaka lastnost, ki velja za vrstice determinante, velja tudi za njene **stolpce**. Med drugim:

- Determinanta spremeni predznak, ce med seboj zamenjamo dva stolpca
- Determinanta je enaka 0, ce sta dva stolpca enaka
- Determinanta je enaka 0, ce so v vsaj enem stolpcu same nicle.

6.15 (kofaktorska formula) Ce je A kvadratna matrika reda n, njeno determinanto lahko izracunamo z razvojem po $i - ti$ vrstici

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}.$$

Kofaktorje C_{ij} izracunamo kot $C_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$, kjer je D_{ij} determinanta, ki jo dobimo, ce v A izbrisemo i-to vrstico in j-ti stolpec.

6.16 Inverzna matrika A^{-1} matrike A je transponirana matrika kofaktorjev, deljena z determinanto $|A|$:

$$A^{-1} = \tfrac{C^T}{det(A)},$$

kjer je C matrika kofaktorjev matrike A.

6.17 Ploscina paralelograma, dolocenega z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b} \in R^2$ je enaka det($[\vec{a}\vec{b}]$), to je absolutni vrednosti determinante s stolpcema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

6.18 Mesani produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je enak determinanti matrike, ki ima te tri vektorje kot stolpce.

6.19 Naj bo A matrika $R^{n\times n}$

$$A \; je \; obrnljiva \iff detA \neq 0$$

$$A^{-1} \; ne \; obstaja \iff detA = 0$$

7 L. vrednosti in vektorji

7.1 Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$, za katerega je $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ lastni vektor. Stevilo λ je lastna vrednost. **Pozor!** Nicelni vektor $\vec{0}$ ne more biti lastni vektor. Lahko pa je lastna vrednost enaka 0.

7.2 Ce ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor $\vec{x}$, potem ima matrika A^2 lastno vrednost λ^2 in isti lastni vektor $\vec{x}$.

7.3 Ce ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor $\vec{x}$, potem ima matrika A^k lastno vrednost λ^k in isti lastni vektor $\vec{x}$.

7.4 Ce ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor $\vec{x}$, potem ima inverzna matrika lastno vrednost $1/\lambda$ in isti lastni vektor $\vec{x}$.

7.5 Sled kvadratne matrike A reda n je vsota njenih diagonalnih elementov.

$$sled(A) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

7.6 Sled matrike je enaka vsoti vseh lastnih vrednosti, stetih z njihovo veckratnostjo. Ce so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike reda n, potem je sled enaka *vsoti*

$$sled(A) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n,$$

determinanta matrike pa *produktu* lastnih vrednosti

$$det(A) = \textstyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \ldots \lambda_n.$$

Lastnosti sledi Za matrike $A, B, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja

1. $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$,
2. $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$,
3. $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$,

4. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$,
5. $\mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$ za vsako obrnljivo matriko P.
6. $\mathrm{tr}(ABP) = \mathrm{tr}(APB$, ce so A,B,P simetricne matirke.
7. $\mathrm{tr}(ABP) = \mathrm{tr}(A^T B^T P^T)$.

Za poljubna vektorja $x, y \in \mathbb{R}^n$ velja:

$$\mathrm{tr}(xy^T) = \mathrm{tr}(x^T y)$$

7.7 Ce ima matrika A lastno vrednost λ, ki ji pripada lastni vektor $\vec{x}$, potem ima matrika $A+cI$ lastno vrednost $\lambda+c$ z istim lastnim vektorjem $\vec{x}$ (velja samo z enotskimi matrikami I).

7.8 Lastne vrednosti trikotne matrike so enake diagonalnim elementom.

7.9 Denimo, da ima matrika $A \in R^{n\times n}$ n linearno neodvisnih lastnih vektorjev $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$. Ce jih zlozimo kot stolpce v matriko S

$$S = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n],$$

potem je T =: $S^{-1}AS$ diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ na diagonali

$$S^{-1}AS = T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Pozor! Lastni vektorji v matriki S morajo biti v istem vrstnem redu kot lastne vrednosti v matriki T.

7.10 Ce je $A = STS^{-1}$, potem je $A^k = ST^kS^{-1}$ za vsak $k \in N$.

7.12 Vse lastne vrednosti realne simetricne matrike so realne.

7.13 Lastni vektorji realne simetricne matrike, ki pripadajo razlicnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.

7.14 Schurov izrek Za vsako kvadratno matriko reda n, ki ima le realne lastne vrednosti, obstaja taka ortogonalna matrika Q, da je

$$Q^T AQ = T$$

zgornjetrikotna matrika, ki ima lastne vrednosti(lahko so kompleksne) matrike A na diagonali.

7.15 Spektralni izrek Vsako simetricno matriko A lahko razcepimo v produkt $A = QTQ^T$, kjer je Q ortogonalna matrika lastnih vektorjev, T pa diagonalna z lastnimi vrednostmi matrike A na diagonali.

7.16 Vsako realno simetricno matriko lahko zapisemo kot linearno kombinacijo matrik ranga 1

$$A = \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^T + \lambda_2 \vec{q}_2 \vec{q}_2^T + \cdots + \lambda_n \vec{q}_n \vec{q}_n^T,$$

kjer so $\vec{q}_i$ stolpci matrike Q (torej lastni vektorji matrike A).

7.17 Za simetricno nesingularno matriko A je stevilo pozitivnih pivotov enako stevilu pozitivnih lastnih vrednosti.

7.18 Kvadratna matrika je pozitivno definirana, kadar so vse njene lastne vrednosti pozitivne.

7.19 Kvadratna matrika reda 2 je pozitivno definirana natanko tedaj, kadar sta pozitivni sled in determinanta matrike.

7.20 Simetricna matrika A reda n je pozitivno definirana natanko tedaj, ko je za vsak vektor $\vec{x} \neq \vec{0} \in R^n$

$$\vec{x}^T A\vec{x} > 0$$

7.21 Ce sta matriki A in B pozitivno definitni, je pozitivno definitna tudi njuna vsota $A + B$.

7.22 Matrika A je pozitivno definitna, kadar so vse njene vodilne glavne poddeterminante pozitivne.

7.23 Ce so stolpci matrike R linearno neodvisni, je matrika $A = R^T R$ pozitivno definitna.

7.24 Za vsako simetricno pozitivno definitno matriko A obstaja zgornjetrikotna matrika R, da je $A = R^T R$.

7.25 Simetricna matrka reda n, ki ima eno od spodnjih lastnosti, ima tudi ostale stiri:

1. Vseh n pivotov je pozitivnih;
2. Vseh n vodilnih glavnih determinant je pozitivnih;
3. Vseh n lastnih vrednosti je pozitivnih;
4. Za vsak $\vec{x} \neq \vec{0}$ je $\vec{x}^T A\vec{x} > 0$;
5. $A = R^T R$ za neko matriko R z linearno neodvisnimi stolpci.

7.26 Vsako realno $m \times n$ matriko A lahko zapisemo kot produkt $A = UEV^T$, kjer je matrika U ortogonalna $m \times m$, E diagonalna $m \times n$ in V ortogonalna $n \times n$.

7.27 Ce je matrika A simetricna in so vsej njeni elementi realni, potem je njen rang enak stevilu nenicelnih lastnih vrednosti matrike A.

$$rang(A) = \text{stevilo } \lambda A$$

7.28 Diagonalizacija oz *podobnost* matrik. Matriki A in B sta *podobni*, ce imata obe iste lastne vrednosi. Diagonalno matriko sestavimo tako, da v njeno diagonalo vpisemo lastne vrednosti. Matriko P pa sestavimo iz njenih lastnih vektorjev; po stolpcih.

$$A = PDP^{-1} \text{ oz.}$$
$$D = P^{-1}AP$$

7.29 Spektralni razcep Naj bodo vekotrji $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_n$ ONB iz l. vektorjev marike A za l. vrednost $\lambda_1, \ldots, \lambda n$, potem lahko matriko A zapisemo kot:

$$A = \lambda_1 \vec{q_1} \vec{q_1}^T + \cdots + \lambda_n \vec{q_n} \vec{q_n}^T$$

7.30 Nekaj lastnosti simetricnih matrik

- Vse lastne vrednosti simetricne matrike so realne. Lastni vektorji realne simetricne matrike, ki pripadajo razlicnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.
- Vsako realno simetricno matriko A lahko zapisemo kot $A = QDQ^T$, kjer je Q ortogonalna matrika lastnih vektorjev, D pa diagonalna matrika, ki ima na diagonali pripadajoce lastne vrednosti matrike A.

8 Napredna linearna algebra

8.1 Schurov izrek

(Schur): Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Potem obstaja ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in zgornje trikotna matrika Z, ki ima na diagonali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, da velja

$$A = QZQ^{-1} = QZQ^T.$$

- **Posledica:** Vsaka matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je podobna zgornje trikotni matriki.
- **Posledica:** Vsaka simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonalno podobna diagonalni matriki.
- **Posledica:** Če ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lastne vrednosti enake $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, potem je

  $$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

  in

  $$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n.$$

- **Posledica (Cayley-Hamilton):** Če je $\Delta_A(x) = \det(A - xI_n)$ karakteristični polinom matrike A, potem velja $\Delta_A(A) = 0$.

8.2 Frobeinusova norma

Za matriki $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiramo

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B).$$

Za produkt $\langle A, B\rangle : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ velja za vse matrike $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

1. $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$,
2. $\langle \alpha A + \beta B, C\rangle = \alpha\langle A, C\rangle + \beta\langle B, C\rangle$,
3. $\langle A, A\rangle \geq 0$,
4. $\langle A, A\rangle = 0$ natanko tedaj, ko je $A = 0$.

Zato $\langle A, B\rangle$ imenujemo skalarni produkt matrik A in B.

Za matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ in $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$ velja

$$\langle A, BC\rangle = \langle B^T A, C\rangle = \langle AC^T, B\rangle.$$

Frobeniusova norma matrike $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je definirana kot

$$\|A\|_F = \|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}.$$

Velja:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2.$$

Posledica:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$$

(Eckart, Young). Naj bo $A = U\Sigma V^T$ razcep singularnih vrednosti matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \geq n$, kjer $U = [u^{(1)} \dots u^{(m)}]$ in $\mathbb{R}^{m\times m}$ in $V = [v^{(1)} \dots v^{(n)}]$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Potem je matrika A_k iz $\mathbb{R}^{m\times n}$ ranga k, $k \leq n$, ki je med vsemi matrikami ranga k v Frobeniusovi normi najbližje matriki A, enaka

$$A_k = \sigma_1 u^{(1)}(v^{(1)})^T + \sigma_2 u^{(2)}(v^{(2)})^T + \ldots + \sigma_k u^{(k)}(v^{(k)})^T$$

in velja

$$\|A - A_k\|_F = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_n^2}.$$

(Velja torej $\|A - A_k\|_F \leq \|A - X\|_F$ za $\|A - X\|_F$ za vse matrike $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$, za katere velja $\operatorname{rank}(X) = k$.)

8.3 Kroneckerjev produkt

Kroneckerjev produkt (tudi tenzorski produkt) matrik $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ je $mp \times nq$ matrika

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp\times nq}.$$

Če so matrike A, B, C in D primerne velikosti, potem veljajo naslednje enakosti:

1. $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2. $\alpha \otimes A = A \otimes \alpha = \alpha A$ za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$
4. $(A+B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$ in $A \otimes (B+C) = A \otimes B + A \otimes C$
5. $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$
6. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.
7. $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.
8. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ če A in B obrnljivi.
9. $\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$
10. $\operatorname{rang}(A \otimes B) = \operatorname{rang}(A)\operatorname{rang}(B)$
11. Če ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lastne vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ in ima matrika B lastne vrednosti $\mu_1, \ldots, \mu_n$, potem je množica lastnih vrednosti matrike $A \otimes B$ enaka $\{\lambda_i\mu_j; \lambda_i$ lastna vrednost A, μ_j lastna vrednost $B\}$.
12. Če $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, potem je $\det(A \otimes B) = (\det A)^m(\det B)^n$.

8.4 Vektorizacija

Za matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ označimo vektorizacijo matrike A kot

$$\operatorname{vec}(A) = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}.$$

vec je preslikava iz $\mathbb{R}^{m\times n}$ v $\mathbb{R}^{mn}$.

Za matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ in $C \in \mathbb{R}^{p\times r}$ velja:

$$\operatorname{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\operatorname{vec}(B).$$