# 1 Vektorji in matrike

**1.1** Vektor je *urejena n-terica stevil*, ki jo obicajno zapisemo kot stolpec

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

**1.2** Produkt *vektorja* $\vec{x}$ s skalarjem $\alpha$ je vektor

$$\alpha\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

**1.3** Vsota *vektorjev* $\vec{x}$ in $\vec{y}$ je vektor

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

**1.4** Nicelni vektor $\vec{0}$ je tisti vektor, za katerega je $\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$ za vsak vektor $\vec{a}$. Vse komponente nicelnega vektorja so enake 0. Vsakemu vektorju $\vec{a}$ pripada nasprotni vektor -$\vec{a}$, tako da je $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ Razlika vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vsota $\vec{a} + (-\vec{b})$ in jo navadno zapisemo kot $\vec{a} - \vec{b}$.

**Lastnosti vektorske vsote**

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutativnost)
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (asociativnost)
- $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$ (distributivnost)

**1.5** Linearna kombinacija vektorjev $\vec{x}$ in $\vec{y}$ je vsota

$$a\vec{x} + b\vec{y}$$

**1.6** Skalarni produkt vektorjev

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ je stevilo}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

*alternativno:*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = ||\vec{x}||||\vec{y}|| \cos\phi$$

**Lastnosti skalarnega produkta**

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (komutativnost)
- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$ (aditivnost)
- $\vec{x} \cdot (a\vec{y}) = a(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (a\vec{x}) \cdot \vec{y}$ (homogenost)
- $\forall\vec{x}$ *velja* $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$

**1.7** Dolzina vektorja $\vec{x}$ je

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

**1.8** Enotski vektor je vektor z dolzino 1.
**1.9** Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}||||\vec{v}||,$$

enakost velja, v primeru, da sta vektorja vzporedna.
**1.10** Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||.$$

**1.11** Vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ sta ortogonalna (pravokotna) natakno takrat, kadar je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

**1.12** Ce je $\phi$ kot med vektorjema $\vec{x}$ in $\vec{y}$, potem je

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}||||\vec{y}||} = \cos\phi$$

**1.13** Vektorski produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

**Lastnosti vektorskega produkta**

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (aditivnost)
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ (!komutativnost)
- $(a\vec{a}) \times \vec{b} = a(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (a\vec{b})$ (homogenost)
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ *je* $\perp$ *na vektorja* $\vec{a}$ *in* $\vec{b}$
- $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}||||\vec{b}|| \sin\phi$
- Dolzina vektorskega produkta je ploscina paralelograma, katerega vektorja oklepata

**1.14** Mesani produkt$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ vektorjev $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ v $R^3$ je skalarni produkt vektorjev $\vec{a} \times \vec{b}$ in $\vec{c}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

**Lastnosti mesanega produkta**

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
- $(x\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = x(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (homogenost)
- $(\vec{a}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{v}, \vec{c})$
- Absolutna vrednost mesanega produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je enaka prostornini paralepipeda

**Premice v $R^3$**

Premico določata smerni vektor $\vec{p} = [a, b, c]^T$ in točka $A(x_0, y_0, z_0)$.

- Parametrična oblika: $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}$, $t \in R$
- Kanonična oblika: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

**Ravnine v $R^3$**

Ravnina z normalo $\vec{n} = [a, b, c]^T$ skozi točko $A(x_0, y_0, z_0)$ ima enačbo

$$(\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n} = 0$$

oziroma

$$ax + by + cz = d$$

**Razdalje**

Razdalja od tocke $P$ do ravnine, v kateri lezi tocka $A$ :

$$\cos\phi = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r_P} - \vec{r_A})}{||\vec{n}||||\vec{r_P} - \vec{r_A}||} \text{ oz. } d = |\frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}(\vec{r_P} - \vec{r_A})|$$

Razdalja od tocke $P$ do premice, katera gre skozi tocko $A$:

$$d = \frac{||\vec{e} \times (\vec{r_P} - \vec{r_A})||}{||\vec{e}||}$$

**Projekcije vektorjev**

Naj bo $proj_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{x}$ projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$. Izracunamo jo po sledeci formuli:

$$proj_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$$

**1.15** Matrika dimenzije $m \times n$ je tabela $m \times n$ stevil, urejenih v $m$ vrstic in $n$ stolpcev:

$$A^{m\times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

**1.16** Matrika, katere elementi so enaki nic povsod zunaj glavne diagonale, se imenuje diagonalna matrika. Za diagonalno matriko je $a_{ij} = 0$, kadarkoli velja $i \neq j$

**1.17** Matrika $A^{n\times n}$ je spodnjetrikotna, kadar so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \ kadar\ je\ i < j$$

**1.18** Matrika $A^{n\times n}$ je zgornjetrikotna, kadar so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \ kadar\ je\ i > j$$

**1.19** Matrika je trikotna, ce je zgornjetrikotna ali spodnjetrikotna.

**1.20** Dve matriki $A$ in $B$ sta enaki natanko takrat, kadar imata enaki dimenziji in kadar so na istih mestih v obeh matrikah enaki elementi:

$$A^{m\times n} = B^{p\times q} \implies m = p \text{ in } n = q,$$
$$a_{ij} = b_{ij} \ za\ vsak\ i = 1, ..., m \text{ in } j = 1, ..., n$$

**1.21** Produkt matrike s skalarjem dobimo tako, da vsak element matrike pomnozimo s *skalarjem*

$$aA^{m\times n} = \begin{bmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} & \dots & ax_{1n} \\ ax_{21} & ax_{22} & ax_{23} & \dots & ax_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax_{m1} & ax_{m2} & ax_{m3} & \dots & ax_{mn} \end{bmatrix}$$

**1.22** Vsoto dveh matrik enake dimenzije dobimo tako, da sestejemo istolezne elemente obeh matrik:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & ax_{12} + b_{12} & \dots & ax_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & ax_{22} + b_{22} & \dots & ax_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & ax_{m2} + b_{m3} & \dots & ax_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

**Osnovne matricne operacije**

- $A + B = B + A$ (komutativnost)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativnost)
- $a(A + B) = aA + aB$ (mnozenje s skalarjem)
- $A + (-A) = 0$
- $x(yA) = (xy)A \ in\ 1 \cdot A = A$

**1.23** Transponirana matrika k matriki A reda $m \times n$ je matrika reda $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

**Lastnosti transponiranja matrik**

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $(xA)^T = xA^T$
- $(A^T)^T = A$

**1.24** Produkt matrike A in vektorja $\vec{x}$ je linearna kombinacija stolpcev matrike A, utezi linearne kombinacije so komponente vektorja $\vec{x}$:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

**1.25** Produkt vrstice $\vec{x}$ z matriko A je linearna kombinacija vrstic matrike A, koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice $\vec{y}$:

$$\vec{y} \cdot A = \begin{bmatrix} y_1, y_2, y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\vec{u} \\ y_2\vec{v} \\ y_3\vec{w} \end{bmatrix}$$

**1.26** Produkt matrik A in B je matrika, katere stolpci so zaporedoma produkti matrike A s stolpci matrike B:

$$AB = A\begin{bmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \end{bmatrix}$$

**1.27** Element $c_{ij}$ v $i - ti$ vrstici in $j - tem$ stolpcu produkta C = AB je skalarni produkt $i - te$ vrstice A in $j - tega$ stolpca matrike B

$$c_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

**1.28** Produkt matrik A in B je matrika, katere vrstice so zaporedoma produkti vrstic matrike A z matriko B:

$$\begin{bmatrix} i - ta\ vrstica\ A \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} i - ta\ vrstica\ AB \end{bmatrix}$$

**Lastnosti matricnega produkta**

- $AB \neq BA$ (!komutativnost)
- $(xA)B = x(AB) = A(xB)$ (homogenost)
- $C(A + B) = CA + CB$ (distributivnost)
- $A(BC) = (AB)C$ (asociativnost)
- $(AB)^T = B^T A^T$

V splosnem; komutativnost matricnega mnozenja velja samo, ko sta matriki diagonalizabilni.

**1.29** Vrstice matrike A z $n$ stolpci naj bodo $a^1, \dots, a^n$, stolpci matrike B z $n$ vrsticami pa $b_1, \dots, b_n$. Potem je

$$AB = a^1 b_1 + \dots + a^n b_n$$

**1.30** Ce delitev na bloke v matriki A ustreza delitvi v matirki B, potem lahko matriki pomnozimo blocno:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

**1.31** Kvadratna matrika $I_k$ reda $k \times k$, ki ima vse diagonalne elemente enake 1, vse ostale elemente pa 0 ima lastnost, da za vsako matriko A reda $m \times n$ velja $AI_n = A$ in $I_m A = A$. Matrika $I_k$ se imenuje enotska ali identicna matirka.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

# 2 Sistemi linearnih enacb

**2.1** Kvadratna matrika A je obrnljiva, ce obstaja taka matrika $A^{-1}$, da je

$$AA^{-1} = I \; in \; A^{-1}A = I$$

Matrika $A^{-1}$ (ce obstaja) se imenuje matriki A inverzna matrika. Matrika, ki ni obrnljiva, je singularna. Matrika **NI** obrnljiva, kadar je $rang(A) < n$ !

**2.2** Kvadratna matirka reda $n$ je obrnljiva natanko tedaj, ko pri gaussovi eliminaciji dobimo $n$ pivotov.

**2.3** Vsaka obrnljiva matrika ima eno samo inverzno matriko.

**2.4** Inverzna matrika inverzne matrike $A^{-1}$ je matrika A

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

**2.5** Ce je matrika A obrnljiva, potem ima sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ edino resitev $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

**2.6** Ce obstaja nenicelna resitev $\vec{x}$ enacbe $A\vec{x} = \vec{0}$, matrika A ni obrnljiva(je singularna).

**2.7** Ce sta matirki A in B istega reda obrnljivi, je obrnljiv tudi produkt $A \cdot B$ in

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

**Pozor!** Pravilo

$$(AB)^p = A^p B^p$$

velja le v primeru, ko matriki A in B komutirata, torej $AB = BA$.

**2.8** Inverz transponirane matrike je transponirana matrika inverza

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

**2.9** Inverz diagonalne matrike z diagonalnimi elementi $a_{ii}$ je diagonalna matrika, ki ima na diagonali elemente $a_{ii}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

**2.10** Za izracun inverza matrike A, uporabimo gausovo eliminacijo nad matriko $\begin{bmatrix} A|I \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A|I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I|A^{-1} \end{bmatrix}$$

**2.11** Matrika A je simetricna $\Leftrightarrow A^T = A$. Za elemente $a_{ij}$ simetricne matirke velja $a_{ij} = a_{ji}$. Za simetricno matriko vedno velja, da je kvadratna $A \in R^{n \times n}$.

**2.12** Ce je matrika A simetricna in obrnljiva, je tudi $A^{-1}$ simetricna.

**2.13** Ce je R poljubna (lahko tudi pravokotna) matrika, sta $R^T R$ in $RR^T$ simetricni matriki.

# 3 Vektorski prostori

**3.1** Realni vektorski prostor V je mnozica "vektorjev" skupaj z pravili za

- sestevanje vektorjev,
- mnozenje vektorja z realnim stevilom (skalarjem)

Ce sta $\vec{x}$ in $\vec{y}$ poljubna vektorja v V, morajo biti v V tudi

- vsota $\vec{x} + \vec{y}$ in
- produkti $\alpha\vec{x}$ za vse $\alpha \in R$

V vektorskem prostoru V morajo biti tudi VSE linearne kombinacije $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$

**Pravila za operacije v vektorskih prostorih**

Operaciji sestevanja vektorjev in mnozenja vektorja s skalarjem v vektorskem prostoru morajo zadoscati naslednjim pravilom:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativnost)
- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (asociativnost)
- obstaja en sam nenicelni vektor $\vec{0}$, da velja $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- za vsak $\vec{x}$ obstaja natanko en $-\vec{x}$, da je $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
- $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ (distributivnost)
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

**3.2** Podmnozica U vektorskega prostora V je *vektorski podprostor*, ce je za vsak par vektorjev $\vec{x}$ in $\vec{y}$ iz U in vsako realno stevilo $\alpha$ tudi

- $\vec{x} + \vec{y} \in U$ in
- $\alpha\vec{x} \in U$.

**3.3** Mnozica vektorjev U je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je vsaka linearna kombinacija vektorjev iz U tudi v U.

**Lastnosti vektorskih podprostorov**

- Vsak vektorski podprostor nujno vsebuje nicelni vektor $\vec{0}$
- Presek dveh podprostorov vektorskega podprostora je tudi podprostor

**3.4** Stolpicni prostor C(A) matrike $A \in R^{m \times n}$ je tisti podprostor vektorskega prostora $R^m$, ki vsebuje natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike A.

Izracunamo ga tako, da matriko A transponiramo in izvedemo operacijo gaussove eliminacije nad $A^T$. Vrstice katere ostanejo po gaussivi eliminaciji so linearno neodvisni vektorji, kateri tvorijo stoplicni prostor matrike A, $C(A)$. *neformalno: linearna ogrinjaca stolpcev matrike (npr. ce imas 5 stolpcev pa lahko 2 zapises kot linearno kombinacijo ostalih 3 bo imel column space 3 elemente)*

**3.5** Sistem linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je reslijv natanko tedaj, ko je vektor $\vec{b} \in C(A)$

**3.6** Naj bo matrika $A \in R^{m \times n}$. Mnozica resitev homogenega sistema linearnih enacb je podprostor v vektorskem prostoru $R^n$.

**3.7** Mnozica vseh resitev sistema linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ se imenuje nicelni prostor matirke A. Oznacujemo ga z N(A).
*neformalno: mnozica vektorjev, ki se z neko matriko zmnozijo v nicelni vektor. Matriko A samo eliminiras po gaussu in nato dobljene resitve enacis z 0.*

**3.8** Ce je matrika A kvadratna in obrnljiva, potem N(A) vsebuje samo vektor $\vec{0}$

**3.9** Matrika ima *stopnicasto* obliko, kadar se vsaka od njenih vrstic zacne z vsaj eno niclo vec kot prejsnja vrstica.

**3.10** Prvi element, razlicen od nic v vsaki vrstici, je *pivot.* Stevilo pivotov v matriki se imenuje rang matrike. Rang matrike A zapisemo kot $rang(A)$.

**3.11** Rang matrike ni vecji od stevila vrstic in ni vecji od stevila stolpcev matrike.

**3.12**

*Stevilo prostih neznank matrike = st. stolpcev - rang matrike*

**3.13**

1. Visoka in ozka matrika ($m > n$) ima poln stolpicni rang, kadar je $rang(A) = n$

2. Nizka in siroka matrika ($m < n$) ima poln vrsticni rang, kadar je $rang(A) = m$

3. Kvadratna matrika ($n = m$) ima poln rang, kadar je $rang(A) = m = n$

**3.14** Za vsako matriko A s polnim stolpicnim rangom $r = n \leq m$, velja:

1. Vsi stolpci A so pivotni stolpci

2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ nima prostih neznank, zato tudi nima posebnih resitev

3. Nicelni prostor $N(A)$ vsebuje le nicelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$

4. Kadar ima sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ resitev(kar ni vedno res!), je resitev ena sama

5. Reducirana vrsticna oblika matrike (A) se da zapisati kot

$$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \times n \; enotska \; matrika \\ m - n \; vrstic \; samih \; nicel \end{bmatrix}$$

**3.15** Za vsako matriko A s polnim vrsticnim rangom $r = m \leq n$ velja:

1. Vse vrstice so pivotne, ni prostih vrstic in U (stopnicasta oblika) in R(reducirana stopnicasta oblika) nimata nicelnih vrstic

2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je resljiv za vsak vektor $\vec{b}$

3. Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ ima $n - r = n - m$ prostih neznank, zato tudi prav toliko posebnih resitev

4. Stolpicni prostor $C(A)$ je ves prostor $R^m$

**3.16** Za vsako kvadratno matriko A polnega ranga (rang(A) = m = n) velja:

1. Reducirana vrsticna oblika matrike A je enotska matrika

2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ ima natancno eno resitev za vsak vektor desnih strani $\vec{b}$

3. Matrika A je obrnljiva

4. Nicelni prostor matrike A je samo nicelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$

5. Stolpicni prostor matrike A je cel prostor $C(A) = R^m$

**3.17** Vektorji $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$ so linearno neodvisni, ce je

$$0\vec{x_1} + 0\vec{x_2} + \cdots + 0\vec{x_n}$$

edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka vektorju $\vec{0}$. Vektorji $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$ so linearno odvisni, *ce niso linearno neodvisni.*

**3.18** Ce so vektorji *odvisni*, lahko vsaj enega izrazimo z ostalimi.

**3.19** Ce je med vektorji $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ tudi nicelni vektor, so vektorji *linearno odvisni.*

**3.20** Vsaka mnozica n vektorjev iz $R^n$ je odvisna, kadar je $n > m$.

**3.21** Stolpci matrike A so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima homogena enacba $A\vec{x} = \vec{0}$ edino resitev $\vec{x} = \vec{0}$.

**3.22** Kadar je $rang(A) = n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisni. Kadar je pa $rang(A) < n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisni.

**3.23** Kadar je $rang(A) = m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisne. Kadar je pa $rang(A) < m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisne.

**3.24** Vrsticni prostor matrike A je podprostor v $R^n$, ki ga razpenjajo vrstice matrike A.

**3.25** Vrsticni prostor matrike A je $C(A^T)$, stolpicni prostor matrike $A^T$.

**3.26** *Baza vektorskega prostora* je mnozica vektorjev, ki

1. je linearno neodvisna in

2. napenja cel prostor.

**3.27** Vsak vektor iz vektorskega prostora lahko na en sam nacin izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

**3.28** Vektorji $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$ so baza prostora $R^n$ natanko tedaj, kadar je matrika, sestavljena iz stolpcev $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$, obrnljiva.

**3.29** Prostor $R^n$ ima za $n > 0$ neskoncno mnogo razlicnih baz.

**3.30** Ce sta mnozici vekotrjev $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_m}$ in $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ obe bazi istega vektorskega prostora, potem je $m = n \implies$ vse baze istega vektorskega prostora imajo isto stevilo vektorjev.

**3.31** *Dimenzija* vektroskega prostora je stevilo baznih vektorjev.

**3.32** Dimenziji stolpicnega prostora $C(A)$ in vrsticnega prostora $C(A^T)$ sta enaki rangu matrike $A$

$$dim(C(A)) = dim(C(A^T)) = rang(A).$$

**3.33** Dimenzija nicelnega prostora $N(A)$ matrike A z $n$ stolpci in ranga $r$ je enaka $dim(N(A)) = n - r$.

**3.34** Stolpicni prostor $C(A)$ in vrsticni prostor $C(A^T)$ imata oba dimenzijo r. Dimenzija nicelnega prostora $N(A)$ je $n - r$, Dimenzija levega nicelnega prostora $N(A^T)$ pa je $m - r$.

**3.35** Vsako matriko ranga 1 lahko zapisemo kot produkt(stolpcnega) vektorja z vrsticnim vektorjem $A = \vec{u}\vec{v}^T$.

# 4 Linearne preslikave

**4.1** Preslikava $A : U \to V$ je linearna, ce velja

1. aditivnost: $A(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = A\vec{u}_1 + A\vec{u}_2$ za vse $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$,

2. homogenost: $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$ za vse $\alpha \in R$ in $\vec{u} \in U$.

Oziroma v enem koraku:

$$A(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) = \alpha A(\vec{u}_1) + \beta A(\vec{u}_2).$$

**Pozor!** Preslikava ni linearna, ce $A(\vec{0}) \neq \vec{0}$.

**4.2** Preslikava $A : U \to V$ je linearna natanko tedaj, ko velja

$$A(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = \alpha_1 A\vec{u}_1 + \alpha_2 A\vec{u}_2$$

za vse $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ in vse $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$.

**4.3** Ce je A *linearna preslikava*, je $A\vec{0} = \vec{0}$.

**4.4** Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava in $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\vec{u}_i$ linearna kombinacija vektorjev. Potem je $A(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A\vec{u}_i$.

**4.5** Naj bo $\beta = \{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}\}$ baza za vektorski prostor U. Potem je linearna preslikava $A : U \to V$ natanko dolocena, ce poznamo slike baznih vektorjev.

**4.6** Naj bo $\beta = \{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}\}$ baza za U in $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$. Potem obstaja natanko ena linearna preslikava $A : U \to V$, za katero je $A\vec{u_i} = \vec{v}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$.

**4.7** Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava. Potem mnozico

$$ker A = \{\vec{u} \in U; A\vec{u} = \vec{0}\}$$

imenujemo *jedro* linearne preslikave. Ker je $A\vec{0} = \vec{0}$, je $\vec{0} \in$ ker A za vse A. Zato je jedro vedno neprazna mnozica. *Ce je matrika* $A\phi$ ***enotska*** *preslikava za* $\phi$, *potem velja*

$$ker\phi = N(A).$$

**4.8** Jedro linearne preslikave $A : U \to V$ je vektorski podprostor v U.

**4.9** Mnozico

$$im\ A = \{\vec{v} \in V; obstaja\ tak\ \vec{u} \in U,\ da\ je\ \vec{v} = A\vec{u}\}$$

imenujemo *slika* linearne preslikave $A : U \to V$. *Ce je matrika* $A\phi$ ***enotska*** *preslikava za* $\phi$, *potem velja*

$$im\phi = C(A).$$

**4.10** Ce je $A : U \to V$ linearna preslikava, potem je njena slika *im A* vektorski podprostor v V.

**4.11** Ce je $A : U \to V$ linearna preslikava, in je rang matrike te preslikave v standardni bazi poln, potem lahko sklepamo, da ima ta preslikava **trivialno jedro**.

# 5 Ortogonalnost

**5.1** Podprostora $U$ in $V$ vektorskega prostora sta med seboj ortogonalna, ce je vsak vektor $\vec{u} \in U$ ortogonalen na vsak vektor $\vec{v} \in V$.

**5.2** Za vsako matriko $A \in R^{m\times n}$ velja:

1. Nicelni prostor $N(A)$ in vrsticni prostor $C(A^T)$ sta ortogonalna podprostora $R^n$
2. Levi nicelni prostor $N(A^T)$ in stolpicni prostor $C(A)$ sta ortogonalna podprostora prostora $R^m$.

**5.3** Ortogonalni komplement $V^{\perp}$ podprostora V vsebuje VSE vektorje, ki so ortogonalni na V.

**5.4** Naj bo A matrika dimenzije $m \times n$.

- Nicelni prostor $N(A)$ je ortogonalni komplement vrsticnega prostora $C(A^T)$ v prostoru $R^n$
- Levi nicelni prostor $N(A^T)$ je ortogonalni komplement stolpicnega prostora $C(A)$ v prostoru $R^m$.

**krajse:**

$$N(A) = C(A^T)^{\perp}$$
$$N(A^T) = C(A)^{\perp}$$

tukaj lahko vedno pomnozimo s komplementom, da dobimo npr.

$$N(A)^{\perp} = C(A^T)$$

*dodatek:*

$$dimN(A) = st.stolpcev - rang(A)$$
$$dimN(A^T) = st.vrstic - rang(A)$$
$$dimC(A) = dimC(A^T) = rang(A)$$

**5.5** Za vsak vektor $\vec{y}$ v stolpicnem prostoru $C(A)$ obstaja v vrsticnem prostoru $C(A^T)$ en sam vektor $\vec{x}$, da je $A\vec{x} = \vec{y}$.

**5.6** Ce so stolpci matrike A linearno neodvisni, je matrika $A^TA$ obrnljiva.

**5.7** Matrika P je projekcijska, kadar

- je simetricna: $P^T = P$ in
- velja $P^2 = P$.

**5.8** Ce je P projekcijska matrika, ki projecira na podprostor U, potem je $I - P$ projekcijska matrika, ki projecira na $U^{\perp}$, ortogonalni komplement podprostora U.

**5.9** Vektorji $\vec{q_1}, \vec{q_2}, \ldots, \vec{q_n}$ so ortonormiranim kadar so ortogonalni in imanjo vsi dolzino 1, torej

$$\vec{q_i}^T\vec{q_i} = \begin{cases} 0\ ko\ je\ i \neq j\ pravokotni\ vektorji \\ 1\ ko\ je\ i = j\ enotski\ vektorji \end{cases}$$

za matriko $Q = [\vec{q_1}, \vec{q_2} \ldots \vec{q_n}]$ velja $Q^TQ = I$.

**5.10** Vektorji $\vec{q_1}, \ldots, \vec{q_n}$ naj bodo ortonormirani v prostoru $R^m$. Potem za matriko

$$Q = [\vec{q_1}\vec{q_2} \ldots \vec{q_n}]$$

velja, da je $Q^TQ = I_n$ enotska matrika reda n.

**5.11** Matrika Q je ortogonalna, kadar je

1. kvadratna in
2. ima ortonormirane stolpce.

**5.12** Ce je Q ortogonalna matirka, potem je obrnljiva in

$$Q^{-1} = Q^T$$
$$dimU^{\perp} = n - dimU$$
$$(U^{\perp})^{\perp} = U$$

**5.13** Mnozenje z ortogonalno matriko ohranja dolzino vektorjev in kote med njimi. Ce je Q ortogonalna matrika, potem je

$$||Q\vec{x}|| = ||\vec{x}|| \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in}$$
$$(Q\vec{x})^TQ\vec{y} = x^{\vec{T}}\vec{y} \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in } \vec{y}$$

**5.14** Ce sta $Q_1$ in $Q_2$ ortogonalni matriki, je tudi produkt $Q = Q_1Q_2$ ortogonalna matrika.

**5.15** **Gram-Schmidtova** ortogonalizacija. Za vhod uporabimo Linearno ogrinjaco linearno neodvisnih vekotrjev. Po gramschmidtovi ortogonalizaciji pa dobimo paroma ortogonalne vektorje. Postopek:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1$$
$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - proj_{\vec{u}_1}\vec{v}_2$$
$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - proj_{\vec{u}_1}\vec{v}_3 - proj_{\vec{u}_2}\vec{v}_3$$
$$\vdots$$

Po tem postopku dobimo paroma ortogonalne vektorje po Gram-Schmidtovi ortogonalizaciji.

**5.16** **QR Razcep:** Iz linearno neodvisnih vektorjev $a_1, \ldots, a_n$ z *Gram-Schmidtovo* ortogonalizacijo dobimo ortonormirane vektorje $q_1, \ldots, q_n$. Matriki A in Q s temi stolpci zadoscajo enacbi $A = QR$, kjer je R zgornjetrikotna matrika.

- Najprej z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo poiscemo linearno neodvisne vektorje matrike A
- Vektorje normiramo in jih zapisemo v matriko Q.
- Matriko R dobimo tako, da matriko $Q^T$ pomnozimo z matriko $A$

$$R = Q^TA$$

Tako smo prisli do vseh elementov v QR razcepu matrike A.

Sedaj ko imamo izracunane vse elemente lahko zapisemo se projekcijsko matriko. To je matrika pravokotne projekcije na $C(Q) = C(A)$. Njen izracun je preprost:

$$QQ^T = pravokotna\ projekcija\ na\ C(Q)\ = C(A)$$

Sedaj lahko to projekcijsko matriko pomnozimo z desne s poljubnim vektorjem in ugotovimo kam se preslika v prostoru $C(A)$. V nasprotnem primeru, ce bi pa zeleli imeti projekcijsko matriko, s katero bi radi videli kam se vektor preslika v prostoru $N(A^T)$, bi pa od identicne matrike odsteli projekcijsko matriko za $C(Q)$.

$$I - QQ^T = pravokotna\ projekcija\ na\ C(A)^{\perp}\ = N(A^T)$$

**5.17** Vektorski prostor $\iota$ je mnozica vseh neskoncnih zaporedij $\vec{u}$ s koncno dolzino

$$||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u_1}^2 + \vec{u_2}^2 + \cdots < \infty$$

**5.18 Predoloceni sistemi**

$$A^TA\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^T\vec{f}$$

Kjer je A matrika sistemov linearnih enacb in $\vec{f}$ vektor pricakovanih resitev po gaussovi eliminaciji zgornje enacbe, dobimo spremenljivke, ki predstavljao najboljso aproksimacijo vseh kombinaicij rezultatov in vhodnih spremenljivk.

# 6 Determinante

**6.1** Determinanta enotske matirke je $det(I) = 1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \; in \; \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

**6.2** Determinanta spremeni predznak, ce med seboj zamenjamo dve vrstici.

**6.3** Determinanta je linearna funkcija vsake vrstice posebej. To pomeni, da se

1. determinanta pomnozi s faktorjem t, ce eno vrstico determinante(vsak element v tej vrstici) pomnozimo s faktorjem t.

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

2. determinanta je vsota dveh determinant, ki se razlikujeta le v eni vrstici, ce je v provitni determinanti ta vrstica vsota obeh vrstic, ostale vrstice pa so enake v vseh treh determinantah.

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

**Pozor!** Kadar mnozimo matriko A s skalarjem t, se vsak element matrike pomnozi s skalarjem. Ko racunamo determinanto produkta matirke s skalarjem $tA$, skalar $t$ izpostavimo iz vsake vrstice posebej, zato je $det(tA) = t^n det(A)$, kjer je $n$ stevilo vrstic (ali stolpcev) determinante.

**6.4** Matrika, ki ima dve enaki vrstici, ima determinanto enako 0.

**6.5** Ce v matriki od poljubne vrstice odstejemo mnogokratnik neke druge vrstice, se njena determinanta ne spremeni.

**6.6** Naj bo $A$ poljubna kvadratna matirka $n \times n$ in $U$ njena vrsticno-stopnicasta oblika, ki jo dobimo z *Gaussovo eliminacijo*. Potem je

$$det(A) = \pm det(U).$$

**6.7** Determinanta, ki ima vrstico samih nicel, je enaka 0.

**6.8** Determinanta trikotne matrike $A$ je produkt diagonalnih elementov:

$$det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

**6.9** Determinanta singularne matrike je enaka 0, determinanta obrnljive matrike je razlicna od 0.

**6.10** Determinanta produkta dveh matrik je enaka produktu determinant obeh matrik:

$$det(AB) = det(A) det(B).$$

**6.11** Determinanta inverzne matrike je enaka

$$det(A^{-1}) = 1/det(A)$$

in determinanta potence $A^n$ matrike A je

$$det(A^n) = (det(A))^n$$

ter determinanta transponirane matrike je enaka determinanti originalne matrike, saj ko naredimo razvoj po vrsticah, pridemo do enakih elementov po diagonali.

$$det(A) = det(A^T).$$

**6.12** Transponirana matrika $A^T$ ima isto determinanto kot A.

**6.13 Recap dovoljenih operacij nad determinanto**

1. Ce zamenjamo dve vrstici, se **spremeni** predznak determinante
2. Vrednost determinante se ne spremeni, ce neki vrstici pristejemo poljuben veckratnik katerekoli druge vrstice.
3. Ce vse elemente neke vrstice pomnozimo z istim stevilom $\alpha$, se vrednost determinante pomnozi z $\alpha$.

**6.14** Vsaka lastnost, ki velja za vrstice determinante, velja tudi za njene **stolpce**. Med drugim:

- Determinanta spremeni predznak, ce med seboj zamenjamo dva stolpca
- Determinanta je enaka 0, ce sta dva stolpca enaka
- Determinanta je enaka 0, ce so v vsaj enem stolpcu same nicle.

**6.15 (kofaktorska formula)** Ce je A kvadratna matrika reda n, njeno determinanto lahko izracunamo z razvojem po $i - ti$ vrstici

$$det(A) = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots + a_{in} C_{in}.$$

Kofaktorje $C_{ij}$ izracunamo kot $C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, kjer je $D_{ij}$ determinanta, ki jo dobimo, ce v A izbrisemo i-to vrstico in j-ti stolpec.

**6.16** Inverzna matrika $A^{-1}$ matrike A je transponirana matrika kofaktorjev, deljena z determinanto $|A|$:

$$A^{-1} = \frac{C^T}{det(A)},$$

kjer je C matrika kofaktorjev matrike A.

**6.17** Ploscina paralelograma, dolocenega z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b} \in R^2$ je enaka det($[\vec{a}\vec{b}]$), to je absolutni vrednosti determinante s stolpcema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

**6.18** Mesani produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je enak determinanti matrike, ki ima te tri vektorje kot stolpce.

**6.19** Naj bo A matrika $R^{n \times n}$

$$A \; je \; obrnljiva \iff detA \neq 0$$

$$A^{-1} \; ne \; obstaja \iff detA = 0$$

# 7 L. vrednosti in vektorji

**7.1** Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$, za katerega je $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ lastni vektor. Stevilo $\lambda$ je lastna vrednost. **Pozor!** Nicelni vektor $\vec{0}$ ne more biti lastni vektor. Lahko pa je lastna vrednost enaka 0.

**7.2** Ce ima matrika A lastno vrednost $\lambda$ in lastni vektor $\vec{x}$, potem ima matrika $A^2$ lastno vrednost $\lambda^2$ in isti lastni vektor $\vec{x}$.

**7.3** Ce ima matrika A lastno vrednost $\lambda$ in lastni vektor $\vec{x}$, potem ima matrika $A^k$ lastno vrednost $\lambda^k$ in isti lastni vektor $\vec{x}$.

**7.4** Ce ima matrika A lastno vrednost $\lambda$ in lastni vektor $\vec{x}$, potem ima inverzna matrika lastno vrednost $1/\lambda$ in isti lastni vektor $\vec{x}$.

**7.5** Sled kvadratne matrike A reda $n$ je vsota njenih diagonalnih elementov.

$$sled(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

**7.6** Sled matrike je enaka vsoti vseh lastnih vrednosti, stetih z njihovo veckratnostjo. Ce so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike reda n, potem je sled enaka *vsoti*

$$sled(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n,$$

determinanta matrike pa *produktu* lastnih vrednosti

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \ldots \lambda_n.$$

**Lastnosti sledi** Za matrike $A, B, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ velja

1. $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$,
2. $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$,
3. $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$,

4. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$,
5. $\mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$ za vsako obrnljivo matriko $P$.
6. $\mathrm{tr}(ABP) = \mathrm{tr}(APB$, ce so A,B,P simetricne matirke.
7. $\mathrm{tr}(ABP) = \mathrm{tr}(A^T B^T P^T)$.

Za poljubna vektorja $x, y \in \mathbb{R}^n$ velja:

$$\mathrm{tr}(xy^T) = \mathrm{tr}(x^T y)$$

**7.7** Ce ima matrika A lastno vrednost $\lambda$, ki ji pripada lastni vektor $\vec{x}$, potem ima matrika $A+cI$ lastno vrednost $\lambda+c$ z istim lastnim vektorjem $\vec{x}$ (velja samo z enotskimi matrikami I).

**7.8** Lastne vrednosti trikotne matrike so enake diagonalnim elementom.

**7.9** Denimo, da ima matrika $A \in R^{n\times n}$ $n$ linearno neodvisnih lastnih vektorjev $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$. Ce jih zlozimo kot stolpce v matriko S

$$S = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n],$$

potem je T =: $S^{-1}AS$ diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ na diagonali

$$S^{-1}AS = T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

**Pozor!** Lastni vektorji v matriki S morajo biti v istem vrstnem redu kot lastne vrednosti v matriki $T$.

**7.10** Ce je $A = STS^{-1}$, potem je $A^k = ST^kS^{-1}$ za vsak $k \in N$.

**7.12** Vse lastne vrednosti realne simetricne matrike so realne.

**7.13** Lastni vektorji realne simetricne matrike, ki pripadajo razlicnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.

**7.14 Schurov izrek** Za vsako kvadratno matriko reda n, ki ima le realne lastne vrednosti, obstaja taka ortogonalna matrika $Q$, da je

$$Q^T AQ = T$$

zgornjetrikotna matrika, ki ima lastne vrednosti(lahko so kompleksne) matrike A na diagonali.

**7.15 Spektralni izrek** Vsako simetricno matriko A lahko razcepimo v produkt $A = QTQ^T$, kjer je Q ortogonalna matrika lastnih vektorjev, T pa diagonalna z lastnimi vrednostmi matrike A na diagonali.

**7.16** Vsako realno simetricno matriko lahko zapisemo kot linearno kombinacijo matrik ranga 1

$$A = \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^T + \lambda_2 \vec{q}_2 \vec{q}_2^T + \cdots + \lambda_n \vec{q}_n \vec{q}_n^T,$$

kjer so $\vec{q}_i$ stolpci matrike Q (torej lastni vektorji matrike A).

**7.17** Za simetricno nesingularno matriko A je stevilo pozitivnih pivotov enako stevilu pozitivnih lastnih vrednosti.

**7.18** Kvadratna matrika je pozitivno definirana, kadar so vse njene lastne vrednosti pozitivne.

**7.19** Kvadratna matrika reda 2 je pozitivno definirana natanko tedaj, kadar sta pozitivni sled in determinanta matrike.

**7.20** Simetricna matrika A reda $n$ je pozitivno definirana natanko tedaj, ko je za vsak vektor $\vec{x} \neq \vec{0} \in R^n$

$$\vec{x}^T A\vec{x} > 0$$

**7.21** Ce sta matriki A in B pozitivno definitni, je pozitivno definitna tudi njuna vsota $A + B$.

**7.22** Matrika A je pozitivno definitna, kadar so vse njene vodilne glavne poddeterminante pozitivne.

**7.23** Ce so stolpci matrike R linearno neodvisni, je matrika $A = R^T R$ pozitivno definitna.

**7.24** Za vsako simetricno pozitivno definitno matriko A obstaja zgornjetrikotna matrika R, da je $A = R^T R$.

**7.25** Simetricna matrka reda $n$, ki ima eno od spodnjih lastnosti, ima tudi ostale stiri:

1. Vseh $n$ pivotov je pozitivnih;
2. Vseh $n$ vodilnih glavnih determinant je pozitivnih;
3. Vseh $n$ lastnih vrednosti je pozitivnih;
4. Za vsak $\vec{x} \neq \vec{0}$ je $\vec{x}^T A\vec{x} > 0$;
5. $A = R^T R$ za neko matriko R z linearno neodvisnimi stolpci.

**7.26** Vsako realno $m \times n$ matriko A lahko zapisemo kot produkt $A = UEV^T$, kjer je matrika U ortogonalna $m \times m$, E diagonalna $m \times n$ in V ortogonalna $n \times n$.

**7.27** Ce je matrika A simetricna in so vsej njeni elementi realni, potem je njen rang enak stevilu nenicelnih lastnih vrednosti matrike A.

$$rang(A) = \text{stevilo } \lambda A$$

**7.28 Diagonalizacija** oz *podobnost* matrik. Matriki A in B sta *podobni*, ce imata obe iste lastne vrednosi. Diagonalno matriko sestavimo tako, da v njeno diagonalo vpisemo lastne vrednosti. Matriko P pa sestavimo iz njenih lastnih vektorjev; po stolpcih.

$$A = PDP^{-1} \text{ oz.}$$
$$D = P^{-1}AP$$

**7.29 Spektralni razcep** Naj bodo vekotrji $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_n$ ONB iz l. vektorjev marike A za l. vrednost $\lambda_1, \ldots, \lambda n$, potem lahko matriko A zapisemo kot:

$$A = \lambda_1 \vec{q_1} \vec{q_1}^T + \cdots + \lambda_n \vec{q_n} \vec{q_n}^T$$

**7.30 Nekaj lastnosti simetricnih matrik**

- Vse lastne vrednosti simetricne matrike so realne. Lastni vektorji realne simetricne matrike, ki pripadajo razlicnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.
- Vsako realno simetricno matriko A lahko zapisemo kot $A = QDQ^T$, kjer je Q ortogonalna matrika lastnih vektorjev, D pa diagonalna matrika, ki ima na diagonali pripadajoce lastne vrednosti matrike A.

# 8 Napredna linearna algebra

## 8.1 Schurov izrek

**(Schur)**: Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Potem obstaja ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in zgornje trikotna matrika $Z$, ki ima na diagonali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, da velja

$$A = QZQ^{-1} = QZQ^T.$$

- **Posledica:** Vsaka matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je podobna zgornje trikotni matriki.
- **Posledica:** Vsaka simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonalno podobna diagonalni matriki.
- **Posledica:** Če ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lastne vrednosti enake $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, potem je

  $$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

  in

  $$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n.$$

- **Posledica (Cayley-Hamilton):** Če je $\Delta_A(x) = \det(A - xI_n)$ karakteristični polinom matrike $A$, potem velja $\Delta_A(A) = 0$.

## 8.2 Frobeinusova norma

Za matriki $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiramo

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B).$$

Za produkt $\langle A, B\rangle : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ velja za vse matrike $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

1. $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$,
2. $\langle \alpha A + \beta B, C\rangle = \alpha\langle A, C\rangle + \beta\langle B, C\rangle$,
3. $\langle A, A\rangle \geq 0$,
4. $\langle A, A\rangle = 0$ natanko tedaj, ko je $A = 0$.

Zato $\langle A, B\rangle$ imenujemo skalarni produkt matrik $A$ in $B$.

Za matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ in $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$ velja

$$\langle A, BC\rangle = \langle B^T A, C\rangle = \langle AC^T, B\rangle.$$

**Frobeniusova norma matrike** $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je definirana kot

$$\|A\|_F = \|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)}.$$

Velja:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2.$$

Posledica:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$$

**(Eckart, Young).** Naj bo $A = U\Sigma V^T$ razcep singularnih vrednosti matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \geq n$, kjer $U = [u^{(1)} \dots u^{(m)}]$ in $\mathbb{R}^{m\times m}$ in $V = [v^{(1)} \dots v^{(n)}]$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Potem je matrika $A_k$ iz $\mathbb{R}^{m\times n}$ ranga $k$, $k \leq n$, ki je med vsemi matrikami ranga $k$ v Frobeniusovi normi najbližje matriki $A$, enaka

$$A_k = \sigma_1 u^{(1)}(v^{(1)})^T + \sigma_2 u^{(2)}(v^{(2)})^T + \dots + \sigma_k u^{(k)}(v^{(k)})^T$$

in velja

$$\|A - A_k\|_F = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_n^2}.$$

(Velja torej $\|A - A_k\|_F \leq \|A - X\|_F$ za $\|A - X\|_F$ za vse matrike $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$, za katere velja $\mathrm{rank}(X) = k$.)

## 8.3 Kroneckerjev produkt

Kroneckerjev produkt (tudi tenzorski produkt) matrik $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ je $mp \times nq$ matrika

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp\times nq}.$$

Če so matrike $A, B, C$ in $D$ primerne velikosti, potem veljajo naslednje enakosti:

1. $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2. $\alpha \otimes A = A \otimes \alpha = \alpha A$ za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$
4. $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$ in $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$
5. $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$
6. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.
7. $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.
8. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ če $A$ in $B$ obrnljivi.
9. $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$
10. $\mathrm{rang}(A \otimes B) = \mathrm{rang}(A)\mathrm{rang}(B)$
11. Če ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lastne vrednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ in ima matrika $B$ lastne vrednosti $\mu_1, \dots, \mu_n$, potem je množica lastnih vrednosti matrike $A \otimes B$ enaka:

$$S_\lambda = \{\lambda_i \mu_j; \lambda_i \text{ lastna vrednost } A, \mu_j \text{ lastna vrednost } B\}$$

$$\text{in } |S_\lambda| \leq mn$$

12. Če $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, potem je $\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n$.

Posledica:

$$||A \otimes B||_F = ||A||_F \cdot ||B||_F$$

## 8.4 Vektorizacija

Za matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ označimo vektorizacijo matrike $A$ kot

$$\mathrm{vec}(A) = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}.$$

vec je preslikava iz $\mathbb{R}^{m\times n}$ v $\mathbb{R}^{mn}$.

Za matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ in $C \in \mathbb{R}^{p\times r}$ velja:

$$\mathrm{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\mathrm{vec}(B).$$

## 8.5 Definitnost matrik

Spomnimo se, da ima simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vse lastne vrednosti realne.

Simetrični matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pravimo

- **pozitivno semidefinitna**, če je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$ za vse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **pozitivno definitna**, če je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ za vse neničelne $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **negativno semidefinitna**, če je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0$ za vse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **negativno definitna**, če je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$ za vse neničelne $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **nedefinitna**, če je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ za nekatere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in $\mathbf{y}^T A\mathbf{y} < 0$ za nekatere $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Posledica: Naj $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična z lastnimi vrednostmi $\lambda_i, \dots, \lambda_n$.

- $A$ je **PSD** (pozitivno semidefinitna) $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0$ za $i = 1, \dots, n$.
- $A$ je **PD** (pozitivno definitna) $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$ za $i = 1, \dots, n$.
- $A$ je **NSD** (negativno semidefinitna) $\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0$ za $i = 1, \dots, n$.
- $A$ je **ND** (negativno definitna) $\Leftrightarrow \lambda_i < 0$ za $i = 1, \dots, n$.
- $A$ je **nedefinirana** $\Leftrightarrow$ ima tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti.

$A$ je **PD** $\Leftrightarrow$ $A$ je **PSD** in $A$ obrnljiva.

**(Sylvester)**. Simetrična matrika $A$ je pozitivno definitna natanko tedaj, ko so determinante vseh vodilnih glavnih podmatrik matrike $A$ pozitivne.

$$\det \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{bmatrix} > 0 \quad \sim \text{PD}$$

Simetrična matrika $A$ je negativno definitna natanko tedaj, ko je determinanta vsake $k \times k$ vodilne glavne podmatrike $A$ pozitivna, če je $k$ sodo število, ter negativna, če je $k$ liho število.

$$\det \begin{bmatrix} - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \end{bmatrix} \quad \sim \text{ND}$$

Izrek: Naj $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična ranga $r$. Velja

- $A$ je PSD $\Leftrightarrow$ obstaja $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, da je $A = BB^T$.
- $A$ je PD $\Leftrightarrow$ obstaja $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je $A = BB^T$.
- $A$ je NSD $\Leftrightarrow$ obstaja $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, da je $A = -BB^T$.
- $A$ je ND $\Leftrightarrow$ obstaja $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je $A = -BB^T$.
- $A$ je nedefinirana $\Leftrightarrow$ obstaja tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti.

$A$ je PD $\Leftrightarrow$ $A$ je PSD in $A$ obrnljiva.

**(Razcep Choleskega)**. Obrnljiva matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima razcep Choleskega

$$A = LL^T,$$

kjer je $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spodnje trikotna matrika, natanko tedaj, ko je $A$ simetrična in pozitivno definitna.

## 8.6 Vektorski prostori

**Realni vektorski prostor** $V$ je množica **vektorjev** $v$, za katere imamo definirani dve notranji operaciji

- seštevanje vektorjev ($u, v \in V \Rightarrow u + v \in V$),
- množenje vektorjev z realnimi števili ($v \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v = \alpha \cdot v \in V$),

z lastnostmi

1. $u + v = v + u$ in $(u + v) + w = u + (v + w)$,
2. obstaja ničelni vektor $0$ in velja $v + 0 = 0 + v = v$,
3. za vsak $v \in V$ obstaja nasprotni vektor $-v$, za katerega velja $v + (-v) = (-v) + v = 0$,
4. $1 \cdot v = v$ za vsak $v \in V$,
5. $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$,
6. $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$,
7. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,

za poljubne $u, v, w \in V$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

**Izrek:** Naj bo $V$ vektorski prostor. Potem velja

1. $V$ vsebuje ničelni vektor $0$,
2. v vsakem vektorskem prostoru $V$ je ničelni vektor $0$ en sam,
3. $\alpha \cdot 0 = 0$ za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$,
4. $0 \cdot v = 0$ za vsak $v \in V$.

Za vektorje $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ in skalare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ imenujemo vektor

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

**linearna kombinacija vektorjev** $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Denimo, ničelni vektor $0$ je

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_n$$

je linearna kombinacija poljubnih vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Linearno kombinacijo z izključno ničelnimi koeficienti imenujemo **trivialna linearna kombinacija**.

Če je podmnožica $U$ vektorskega prostora $V$

(1) zaprta za seštevanje ($u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$) in

(2) zaprta za množenje vektorjev z realnimi števili ($v \in U, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v \in U$),

potem jo imenujemo **vektorski podprostor** prostora $V$.

**Izrek:** Podmnožica $U$ vektorskega prostora $V$ je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je poljubna linearna kombinacija $\alpha u + \beta v$ vektorjev $u, v \in U$ tudi vsebovana v $U$.

Vsak vektorski podprostor po (2) vsebuje tudi vektor $0 \cdot v = 0$. Zatorej podmnožica vektorskega prostora, ki ne vsebuje ničelnega vektorja, ne more biti vektorski podprostor.

Ker lastnosti (1)-(7) veljajo za poljubne elemente vektorskega prostora $V$, veljajo tudi za vse elemente vektorskega podprostora $U$ v $V$. Poleg tega je vektorski podprostor po definiciji zaprt za seštevanje in množenje s števili. Zatorej je vsak vektorski podprostor hkrati tudi vektorski prostor.

### 8.6.1 Linearna ogrinjača

$\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je množica vseh linearnih kombinacij vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Ker je linearna kombinacija linearnih kombinacij vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ zopet linearna kombinacija vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$, je po Izreku 2 linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linearni podprostor v $V$. Pravimo, da vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **napenjajo prostor** $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Ne le, da je linearna ogrinjača vektorski prostor. Velja celo več.

Linearna ogrinjača vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$, vektorskega prostora $V$ je najmanjši vektorski podprostor v $V$, ki vsebuje vektorje $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

### 8.6.2 Baza vektorskega prostora

Vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n$ v $V$ so **linearno odvisni**, če obstaja vektor $v_k$, ki je linearna kombinacija ostalih $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n$:

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n,$$

kjer $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n$ v $V$ so **linearno neodvisni**, če niso linearno odvisni. Ekvivalentno, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ v $V$ so linearno neodvisni, če je njihova trivialna linearna kombinacija edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka ničelnemu vektorju $0$. Z drugimi besedami, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ v $V$ so linearno neodvisni, če iz

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

sledi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Množica vektorjev $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je **baza** vektorskega prostora $V$, če

(B1) so $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linearno neodvisni in

(B2) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ napenjajo prostor $V$.

**Izrek:** Vsak vektorski prostor ima neštevno baz. Vse baze vektorskega prostora imajo enako število vektorjev.

*Dimenzija prostora* $V$ je enaka moči (poljubne) baze prostora $V$. Označimo jo z $\dim V$.

**Izrek:** Za vsako bazo vektorskega prostora $V$ je zapis poljubnega vektorja $v \in V$ kot linearna kombinacija baznih vektorjev vedno enoličen.