

# 1 Vektorji in matrike

**1.1** Vektor je *urejena n-terica števil*, ki jo običajno zapišemo kot stolpec

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

**1.2** Produkt *vektorja*  $\vec{x}$  s skalarjem  $\alpha$  je vektor

$$\alpha \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

**1.3** Vsota *vektorjev*  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  je vektor

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

**1.4** Nicelni vektor  $\vec{0}$  je tisti vektor, za katerega je  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  za vsak vektor  $\vec{a}$ . Vse komponente nicelnega vektorja so enake 0. Vsakemu vektorju  $\vec{a}$  priprada nasprotni vektor  $-\vec{a}$ , tako da je  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ . Razlika vektorjev  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  je vsota  $\vec{a} + (-\vec{b})$  in jo navadno zapišemo kot  $\vec{a} - \vec{b}$ .

**Lastnosti vektorske vsote**

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (komutativnost)
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  (asociativnost)
- $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$  (distributivnost)

**1.5** Linearna kombinacija vektorjev  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  je vsota

$$a\vec{x} + b\vec{y}$$

**1.6** Skalarni produkt vektorjev

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ je stevilo}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

*alternativno:*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = ||\vec{x}|| ||\vec{y}|| \cos \phi$$

**Lastnosti skalarnega produkta**

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$  (komutativnost)
- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$  (aditivnost)
- $\vec{x} \cdot (a\vec{y}) = a(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (a\vec{x}) \cdot \vec{y}$  (homogenost)
- $\forall \vec{x} \text{ velja } \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$

**1.7** Dolžina vektorja  $\vec{x}$  je

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

**1.8** Enotski vektor je vektor z dolžino 1.

**1.9** Za poljubna vektorja  $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$  velja:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| ||\vec{v}||,$$

enakost velja, v primeru, da sta vektorja vzporedna.

**1.10** Za poljubna vektorja  $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$  velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||.$$

**1.11** Vektorja  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  sta ortogonalna (pravokotna) natakno takrat, kadar je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

**1.12** Če je  $\phi$  kot med vektorjema  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$ , potem je

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}|| ||\vec{y}||} = \cos \phi$$

**1.13** Vektorski produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

**Lastnosti vektorskega produkta**

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$  (aditivnost)
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$  (!komutativnost)
- $(a\vec{a}) \times \vec{b} = a(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (a\vec{b})$  (homogenost)
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \times \vec{b}$  je  $\perp$  na vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$
- $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \sin \phi$
- Dolžina vektorskega produkta je ploscina paralelograma, katerega vektorja oklepata

**1.14** Mesani produkt  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  vektorjev  $\vec{a}, \vec{b}$  in  $\vec{c}$  v  $R^3$  je skalarni produkt vektorjev  $\vec{a} \times \vec{b}$  in  $\vec{c}$ :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

**Lastnosti mesanega produkta**

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
- $(x\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = x(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  (homogenost)
- $(\vec{a}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{v}, \vec{c})$
- Absolutna vrednost mesanega produkta  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  je enaka prostornini paralepipeda

**Premice v  $R^3$**

Premico določata smerni vektor  $\vec{p} = [a, b, c]^T$  in točka  $A(x_0, y_0, z_0)$ .

- Parametrična oblika:  $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}, t \in R$
- Kanonična oblika:  $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$

**Ravnine v  $R^3$**

Ravnina z normalo  $\vec{n} = [a, b, c]^T$  skozi točko  $A(x_0, y_0, z_0)$  ima enačbo

$$(\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n} = 0$$

oziroma

$$ax + by + cz = d$$

**Razdalje**

Razdalja od točke  $P$  do ravnine, v kateri leži točka  $A$ :

$$\cos \phi = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_A)}{||\vec{n}|| ||\vec{r}_P - \vec{r}_A||} \text{ oz. } d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_A)|}{||\vec{n}||}$$

Razdalja od točke  $P$  do premice, katere gre skozi točko  $A$ :

$$d = \frac{||\vec{c} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_A)||}{||\vec{c}||}$$

## Projekcije vektorjev

Naj bo  $proj_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{x}$  projekcija vektorja  $\vec{b}$  na vektor  $\vec{a}$ . Izračunamo jo po sledeci formuli:

$$proj_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$$

**1.15** Matrika dimenzije  $m \times n$  je tabela  $m \times n$  števil, urejenih v  $m$  vrstic in  $n$  stolpcev:

$$A^{m \times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

**1.16** Matrika, katere elementi so enaki nič povsod zunaj glavne diagonale, se imenuje diagonalna matrika. Za diagonalno matriko je  $a_{ij} = 0$ , kadarkoli velja  $i \neq j$

**1.17** Matrika  $A^{n \times n}$  je spodnjetrokotna, kadar so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i < j$$

**1.18** Matrika  $A^{n \times n}$  je zgornjetrokotna, kadar so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i > j$$

**1.19** Matrika je trikotna, če je zgornjetrokotna ali spodnjetrokotna.

**1.20** Dve matriki  $A$  in  $B$  sta enaki natanko takrat, kadar imata enaki dimenziji in kadar so na istih mestih v obeh matrikah enaki elementi:

$$A^{m \times n} = B^{p \times q} \implies m = p \text{ in } n = q, \\ a_{ij} = b_{ij} \text{ za vsak } i = 1, \dots, m \text{ in } j = 1, \dots, n$$

**1.21** Produkt matrike s skalarjem dobimo tako, da vsak element matrike pomnožimo s *skalarjem*

$$aA^{m \times n} = \begin{bmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} & \dots & ax_{1n} \\ ax_{21} & ax_{22} & ax_{23} & \dots & ax_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax_{m1} & ax_{m2} & ax_{m3} & \dots & ax_{mn} \end{bmatrix}$$

**1.22** Vsoto dveh matrik enake dimenzije dobimo tako, da seštejemo istolezne elemente obeh matrik:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & ax_{12} + b_{12} & \dots & ax_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & ax_{22} + b_{22} & \dots & ax_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & ax_{m2} + b_{m3} & \dots & ax_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

## Osnovne matricne operacije

- $A + B = B + A$  (komutativnost)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$  (asociativnost)
- $a(A + B) = aA + aB$  (množenje s skalarjem)
- $A + (-A) = 0$
- $x(yA) = (xy)A$  in  $1 \cdot A = A$

**1.23** Transponirana matrika k matriki  $A$  reda  $m \times n$  je matrika reda  $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \\ A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

## Lastnosti transponiranja matrik

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $(xA)^T = xA^T$
- $(A^T)^T = A$

**1.24** Produkt matrike  $A$  in vektorja  $\vec{x}$  je linearna kombinacija stolpcev matrike  $A$ , utezi linearne kombinacije so komponente vektorja  $\vec{x}$ :

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

**1.25** Produkt vrstice  $\vec{x}$  z matriko  $A$  je linearna kombinacija vrstic matrike  $A$ , koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice  $\vec{y}$ :

$$\vec{y} \cdot A = [y_1, y_2, y_3] \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\vec{u} \\ y_2\vec{v} \\ y_3\vec{w} \end{bmatrix}$$

**1.26** Produkt matrik  $A$  in  $B$  je matrika, katere stolpci so zaporedoma produkti matrike  $A$  s stolpci matrike  $B$ :

$$AB = A [b_1, b_2, \dots, b_n] = [Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n]$$

**1.27** Element  $c_{ij}$  v  $i$ -ti vrstici in  $j$ -tem stolpcu produkta  $C = AB$  je skalarni produkt  $i$ -te vrstice  $A$  in  $j$ -tega stolpca matrike  $B$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

**1.28** Produkt matrik  $A$  in  $B$  je matrika, katere vrstice so zaporedoma produkti vrstic matrike  $A$  z matriko  $B$ :

$$[i\text{-ta vrstica } A] B = [i\text{-ta vrstica } AB]$$

## Lastnosti matricnega produkta

- $AB \neq BA$  (!komutativnost)
- $(xA)B = x(AB) = A(xB)$  (homogenost)
- $C(A + B) = CA + CB$  (distributivnost)
- $A(BC) = (AB)C$  (asociativnost)
- $(AB)^T = B^T A^T$

V splošnem; komutativnost matricnega množenja velja samo, ko sta matriki diagonalizabilni.

**1.29** Vrstice matrike  $A$  z  $n$  stolpci naj bodo  $a^1, \dots, a^n$ , stolpci matrike  $B$  z  $n$  vrsticami pa  $b_1, \dots, b_n$ . Potem je

$$AB = a^1b_1 + \dots + a^nb_n$$

**1.30** Če delitev na bloke v matriki  $A$  ustreza delitvi v matriki  $B$ , potem lahko matriki pomnožimo blocno:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

**1.31** Kvadratna matrika  $I_k$  reda  $k \times k$ , ki ima vse diagonalne elemente enake 1, vse ostale elemente pa 0 ima lastnost, da za vsako matriko  $A$  reda  $m \times n$  velja  $AI_n = A$  in  $I_m A = A$ . Matrika  $I_k$  se imenuje enotska ali identična matrika.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

## 2 Sistemi linearnih enačb

**2.1** Kvadratna matrika  $A$  je obrnljiva, če obstaja taka matrika  $A^{-1}$ , da je

$$AA^{-1} = I \text{ in } A^{-1}A = I$$

Matrika  $A^{-1}$  (če obstaja) se imenuje matriki  $A$  inverzna matrika. Matrika, ki ni obrnljiva, je singularna. Matrika  $\mathbf{N}I$  obrnljiva, kadar je  $\text{rang}(A) < n$  !

**2.2** Kvadratna matirka reda  $n$  je obrnljiva natanko tedaj, ko pri gaussovi eliminaciji dobimo  $n$  pivotov.

**2.3** Vsaka obrnljiva matrika ima eno samo inverzno matriko.

**2.4** Inverzna matrika inverzne matrike  $A^{-1}$  je matrika  $A$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

**2.5** Če je matrika  $A$  obrnljiva, potem ima sistem enačb  $A\vec{x} = \vec{b}$  edino resitev  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

**2.6** Če obstaja nenicelna resitev  $\vec{x}$  enačbe  $A\vec{x} = \vec{0}$ , matrika  $A$  ni obrnljiva (je singularna).

**2.7** Če sta matirki  $A$  in  $B$  istega reda obrnljivi, je obrnljiv tudi produkt  $A \cdot B$  in

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

**Pozor!** Pravilo

$$(AB)^p = A^p B^p$$

velja le v primeru, ko matriki  $A$  in  $B$  komutirata, torej  $AB = BA$ .

**2.8** Inverz transponirane matrike je transponirana matrika inverza

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

**2.9** Inverz diagonalne matrike z diagonalnimi elementi  $a_{ii}$  je diagonalna matrika, ki ima na diagonalni elemente  $a_{ii}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

**2.10** Za izračun inverza matrike  $A$ , uporabimo gausovo eliminacijo nad matriko  $[A|I]$

$$[A|I] = [I|A^{-1}]$$

**2.11** Matrika  $A$  je simetrična  $\Leftrightarrow A^T = A$ . Za elemente  $a_{ij}$  simetrične matirke velja  $a_{ij} = a_{ji}$ . Za simetrično matriko vedno velja, da je kvadratna  $A \in R^{n \times n}$ .

**2.12** Če je matrika  $A$  simetrična in obrnljiva, je tudi  $A^{-1}$  simetrična.

**2.13** Če je  $R$  poljubna (lahko tudi pravokotna) matrika, sta  $R^T R$  in  $RR^T$  simetrični matriki.

## 3 Vektorski prostori

**3.1** Realni vektorski prostor  $V$  je množica "vektorjev" skupaj z pravili za

- seštevanje vektorjev,
- množenje vektorja z realnim številom (skalarjem)

Ce sta  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  poljubna vektorja v  $V$ , morajo biti v  $V$  tudi

- vsota  $\vec{x} + \vec{y}$  in
- produkti  $\alpha\vec{x}$  za vse  $\alpha \in R$

V vektorskem prostoru  $V$  morajo biti tudi VSE linearne kombinacije  $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$

### Pravila za operacije v vektorskih prostorih

Operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorja s skalarjem v vektorskem prostoru morajo zadoscati naslednjim pravilom:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$  (komutativnost)
- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$  (asociativnost)
- obstaja en sam nenicelni vektor  $\vec{0}$ , da velja  $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- za vsak  $\vec{x}$  obstaja natanko en  $-\vec{x}$ , da je  $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
- $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$  (distributivnost)
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

**3.2** Podmnožica  $U$  vektorskega prostora  $V$  je *vektorski podprostor*, če je za vsak par vektorjev  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  iz  $U$  in vsako realno število  $\alpha$  tudi

- $\vec{x} + \vec{y} \in U$  in
- $\alpha\vec{x} \in U$ .

**3.3** Množica vektorjev  $U$  je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je vsaka linearna kombinacija vektorjev iz  $U$  tudi v  $U$ .

### Lastnosti vektorskih podprostorov

- Vsak vektorski podprostor nujno vsebuje nicelni vektor  $\vec{0}$
- Presek dveh podprostorov vektorskega podprostora je tudi podprostor

**3.4** Stolpicni prostor  $C(A)$  matrike  $A \in R^{m \times n}$  je tisti podprostor vektorskega prostora  $R^m$ , ki vsebuje natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike  $A$ .

Izračunamo ga tako, da matriko  $A$  transponiramo in izvedemo operacijo gaussove eliminacije nad  $A^T$ . Vrstice katere ostanejo po gaussovi eliminaciji so linearno neodvisni vektorji, kateri tvorijo stolpicni prostor matrike  $A$ ,  $C(A)$ . *neformalno: linearna ogrinjaca stolpcev matrike (npr. če imas 5 stolpcev pa lahko 2 zapises kot linearno kombinacijo ostalih 3 bo imel column space 3 elemente)*

**3.5** Sistem linearnih enačb  $A\vec{x} = \vec{b}$  je resljiv natanko tedaj, ko je vektor  $\vec{b} \in C(A)$

**3.6** Naj bo matrika  $A \in R^{m \times n}$ . Množica resitev homogenega sistema linearnih enačb je podprostor v vektorskem prostoru  $R^n$ .

**3.7** Množica vseh resitev sistema linearnih enačb  $A\vec{x} = \vec{0}$  se imenuje nicelni prostor matirke  $A$ . Oznacujemo ga z  $N(A)$ . *neformalno: množica vektorjev, ki se z neko matriko zmnožijo v nicelni vektor. Matriko  $A$  samo eliminiras po gausu in nato dobljene resitve enacis z 0.*

**3.8** Če je matrika  $A$  kvadratna in obrnljiva, potem  $N(A)$  vsebuje samo vektor  $\vec{0}$

**3.9** Matrika ima *stopnicasto* obliko, kadar se vsaka od njenih vrstic začne z vsaj eno ničlo več kot prejšnja vrstica.

**3.10** Prvi element, različen od nič v vsaki vrstici, je *pivot*. Število pivotov v matriki se imenuje rang matrike. Rang matrike  $A$  zapisemo kot  $\text{rang}(A)$ .

**3.11** Rang matrike ni večji od števila vrstic in ni večji od števila stolpcev matrike.

### 3.12

*Število prostih neznanek matrike = št. stolpcev - rang matrike*

### 3.13

1. Visoka in ozka matrika ( $m > n$ ) ima poln stolpicni rang, kadar je  $\text{rang}(A) = n$

2. Nizka in široka matrika ( $m < n$ ) ima poln vrsticni rang, kadar je  $\text{rang}(A) = m$

3. Kvadratna matrika ( $n = m$ ) ima poln rang, kadar je  $\text{rang}(A) = m = n$

**3.14** Za vsako matriko A s polnim stolpicnim rangom  $r = n \leq m$ , velja:

1. Vsi stolpci A so pivotni stolpci
2. Sistem enacb  $A\vec{x} = \vec{0}$  nima prostih neznank, zato tudi nima posebnih rešitev
3. Nicelni prostor  $N(A)$  vsebuje le nicelni vektor  $N(A) = \{\vec{0}\}$
4. Kadar ima sistem enacb  $A\vec{x} = \vec{b}$  rešitev (kar ni vedno res!), je rešitev ena sama
5. Reducirana vrsticna oblika matrike (A) se da zapisati kot

$$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \times n \text{ enotska matrika} \\ m - n \text{ vrstic samih nicel} \end{bmatrix}$$

**3.15** Za vsako matriko A s polnim vrsticnim rangom  $r = m \leq n$  velja:

1. Vse vrstice so pivotne, ni prostih vrstic in U (stopnicasta oblika) in R (reducirana stopnicasta oblika) nimata nicelnih vrstic
2. Sistem enacb  $A\vec{x} = \vec{b}$  je resljiv za vsak vektor  $\vec{b}$
3. Sistem  $A\vec{x} = \vec{b}$  ima  $n - r = n - m$  prostih neznank, zato tudi prav toliko posebnih rešitev
4. Stolpicni prostor  $C(A)$  je ves prostor  $R^m$

**3.16** Za vsako kvadratno matriko A polnega ranga ( $\text{rang}(A) = m = n$ ) velja:

1. Reducirana vrsticna oblika matrike A je enotska matrika
2. Sistem enacb  $A\vec{x} = \vec{b}$  ima natancno eno rešitev za vsak vektor desnih strani  $\vec{b}$
3. Matrika A je obrnljiva
4. Nicelni prostor matrike A je samo nicelni vektor  $N(A) = \{\vec{0}\}$
5. Stolpicni prostor matrike A je cel prostor  $C(A) = R^m$

**3.17** Vektorji  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  so linearno neodvisni, ce je

$$0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_n$$

edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka vektorju  $\vec{0}$ . Vektorji  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  so linearno odvisni, ce niso linearno neodvisni.

**3.18** Ce so vektorji *odvisni*, lahko vsaj enega izrazimo z ostalimi.

**3.19** Ce je med vektorji  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  tudi nicelni vektor, so vektorji *linearno odvisni*.

**3.20** Vsaka množica n vektorjev iz  $R^n$  je odvisna, kadar je  $n > m$ .

**3.21** Stolpci matrike A so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima homogena enacba  $A\vec{x} = \vec{0}$  edino rešitev  $\vec{x} = \vec{0}$ .

**3.22** Kadar je  $\text{rang}(A) = n$ , so stolpci matrike  $A \in R^{m \times n}$  linearno neodvisni. Kadar je pa  $\text{rang}(A) < n$ , so stolpci matrike  $A \in R^{m \times n}$  linearno odvisni.

**3.23** Kadar je  $\text{rang}(A) = m$ , so vrstice matrike  $A \in R^{m \times n}$  linearno neodvisne. Kadar je pa  $\text{rang}(A) < m$ , so vrstice matrike  $A \in R^{m \times n}$  linearno odvisne.

**3.24** Vrsticni prostor matrike A je podprostor v  $R^n$ , ki ga razpenjajo vrstice matrike A.

**3.25** Vrsticni prostor matrike A je  $C(A^T)$ , stolpicni prostor matrike  $A^T$ .

**3.26** Baza vektorskega prostora je množica vektorjev, ki

1. je linearno neodvisna in

2. napolni cel prostor.

**3.27** Vsak vektor iz vektorskega prostora lahko na en sam način izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

**3.28** Vektorji  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  so baza prostora  $R^n$  natanko tedaj, kadar je matrika, sestavljena iz stolpcev  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ , obrnljiva.

**3.29** Prostor  $R^n$  ima za  $n > 0$  neskončno mnogo različnih baz.

**3.30** Ce sta množici vektorjev  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$  in  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  obe bazi istega vektorskega prostora, potem je  $m = n \implies$  vse baze istega vektorskega prostora imajo isto število vektorjev.

**3.31** Dimenzija vektorskega prostora je število baznih vektorjev.

**3.32** Dimenziji stolpicnega prostora  $C(A)$  in vrsticnega prostora  $C(A^T)$  sta enaki rang matrike A

$$\dim(C(A)) = \dim(C(A^T)) = \text{rang}(A).$$

**3.33** Dimenzija nicelnega prostora  $N(A)$  matrike A z n stolpci in ranga r je enaka  $\dim(N(A)) = n - r$ .

**3.34** Stolpicni prostor  $C(A)$  in vrsticni prostor  $C(A^T)$  imata oba dimenzijo r. Dimenzija nicelnega prostora  $N(A)$  je  $n - r$ , Dimenzija levega nicelnega prostora  $N(A^T)$  pa je  $m - r$ .

**3.35** Vsako matriko ranga 1 lahko zapisemo kot produkt (stolpcnega) vektorja z vrsticnim vektorjem  $A = \vec{u}\vec{v}^T$ .

## 4 Linearne preslikave

**4.1** Preslikava  $A : U \rightarrow V$  je linearna, ce velja

1. aditivnost:  $A(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = A\vec{u}_1 + A\vec{u}_2$  za vse  $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ ,
2. homogenost:  $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$  za vse  $\alpha \in R$  in  $\vec{u} \in U$ .

Oziroma v enem koraku:

$$A(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) = \alpha A(\vec{u}_1) + \beta A(\vec{u}_2).$$

**Pozor!** Preslikava ni linearna, ce  $A(\vec{0}) \neq \vec{0}$ .

**4.2** Preslikava  $A : U \rightarrow V$  je linearna natanko tedaj, ko velja

$$A(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = \alpha_1 A\vec{u}_1 + \alpha_2 A\vec{u}_2$$

za vse  $\alpha_1, \alpha_2 \in R$  in vse  $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ .

**4.3** Ce je A *linearna preslikava*, je  $A\vec{0} = \vec{0}$ .

**4.4** Naj bo  $A : U \rightarrow V$  linearna preslikava in  $\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{u}_i$  linearna kombinacija vektorjev. Potem je  $A(\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{u}_i$ .

**4.5** Naj bo  $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  baza za vektorski prostor U. Potem je linearna preslikava  $A : U \rightarrow V$  natanko določena, ce poznamo slike baznih vektorjev.

**4.6** Naj bo  $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  baza za U in  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ . Potem obstaja natanko ena linearna preslikava  $A : U \rightarrow V$ , za katero je  $A\vec{u}_i = \vec{v}_i$  za  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**4.7** Naj bo  $A : U \rightarrow V$  linearna preslikava. Potem množico

$$\ker A = \{\vec{u} \in U; A\vec{u} = \vec{0}\}$$

imenujemo *jedro* linearne preslikave. Ker je  $A\vec{0} = \vec{0}$ , je  $\vec{0} \in \ker A$  za vse A. Zato je jedro vedno neprazna množica. *Ce je matrika A  $\phi$  enotska preslikava za  $\phi$ , potem velja*

$$\ker \phi = N(A).$$

**4.8** Jedro linearne preslikave  $A : U \rightarrow V$  je vektorski podprostor v U.

**4.9** Množico

$$\text{im } A = \{\vec{v} \in V; \text{ obstaja tak } \vec{u} \in U, \text{ da je } \vec{v} = A\vec{u}\}$$

imenujemo *slika* linearne preslikave  $A : U \rightarrow V$ . *Ce je matrika A  $\phi$  enotska preslikava za  $\phi$ , potem velja*

$$\text{im}\phi = C(A).$$

**4.10** Če je  $A : U \rightarrow V$  linearna preslikava, potem je njena slika  $\text{im } A$  vektorski podprostor v  $V$ .

**4.11** Če je  $A : U \rightarrow V$  linearna preslikava, in je rang matrike te preslikave v standardni bazi poln, potem lahko sklepamo, da ima ta preslikava **trivialno jedro**.

## 5 Ortogonalnost

**5.1** Podprostora  $U$  in  $V$  vektorskega prostora sta med seboj ortogonalna, če je vsak vektor  $\vec{u} \in U$  ortogonalen na vsak vektor  $\vec{v} \in V$ .

**5.2** Za vsako matriko  $A \in R^{m \times n}$  velja:

1. Nicelni prostor  $N(A)$  in vrsticni prostor  $C(A^T)$  sta ortogonalna podprostora  $R^n$
2. Levi nicelni prostor  $N(A^T)$  in stolpčni prostor  $C(A)$  sta ortogonalna podprostora prostora  $R^m$ .

**5.3** Ortogonalni komplement  $V^\perp$  podprostora  $V$  vsebuje VSE vektorje, ki so ortogonalni na  $V$ .

**5.4** Naj bo  $A$  matrika dimenzije  $m \times n$ .

- Nicelni prostor  $N(A)$  je ortogonalni komplement vrsticnega prostora  $C(A^T)$  v prostoru  $R^n$
- Levi nicelni prostor  $N(A^T)$  je ortogonalni komplement stolpčnega prostora  $C(A)$  v prostoru  $R^m$ .

**krajse:**

$$N(A) = C(A^T)^\perp \\ N(A^T) = C(A)^\perp$$

tukaj lahko vedno pomnožimo s komplementom, da dobimo npr.

$$N(A)^\perp = C(A^T)$$

**dodatek:**

$$\dim N(A) = \text{st.stolpcev} - \text{rang}(A) \\ \dim N(A^T) = \text{st.vrstic} - \text{rang}(A) \\ \dim C(A) = \dim C(A^T) = \text{rang}(A)$$

**5.5** Za vsak vektor  $\vec{y}$  v stolpčnem prostoru  $C(A)$  obstaja v vrsticnem prostoru  $C(A^T)$  en sam vektor  $\vec{x}$ , da je  $A\vec{x} = \vec{y}$ .

**5.6** Če so stolpci matrike  $A$  linearno neodvisni, je matrika  $A^T A$  obrnljiva.

**5.7** Matrika  $P$  je projekcijska, kadar

- je simetrična:  $P^T = P$  in
- velja  $P^2 = P$ .

**5.8** Če je  $P$  projekcijska matrika, ki projecira na podprostor  $U$ , potem je  $I - P$  projekcijska matrika, ki projecira na  $U^\perp$ , ortogonalni komplement podprostora  $U$ .

**5.9** Vektorji  $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n$  so ortonormirani kadar so ortogonalni in imajo vsi dolžino 1, torej

$$\vec{q}_i^T \vec{q}_i = \begin{cases} 0 & \text{ko je } i \neq j \text{ pravokotni vektorji} \\ 1 & \text{ko je } i = j \text{ enotski vektorji} \end{cases}$$

za matriko  $Q = [\vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots \vec{q}_n]$  velja  $Q^T Q = I$ .

**5.10** Vektorji  $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$  naj bodo ortonormirani v prostoru  $R^m$ . Potem za matriko

$$Q = [\vec{q}_1 \vec{q}_2 \dots \vec{q}_n]$$

velja, da je  $Q^T Q = I_n$  enotska matrika reda  $n$ .

**5.11** Matrika  $Q$  je ortogonalna, kadar je

1. kvadratna in

2. ima ortonormirane stolpce.

**5.12** Če je  $Q$  ortogonalna matirka, potem je obrnljiva in

$$Q^{-1} = Q^T \\ \dim U^\perp = n - \dim U \\ (U^\perp)^\perp = U$$

**5.13** Množenje z ortogonalno matriko ohranja dolžino vektorjev in kote med njimi. Če je  $Q$  ortogonalna matrika, potem je

$$\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in} \\ (Q\vec{x})^T Q\vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in } \vec{y}$$

**5.14** Če sta  $Q_1$  in  $Q_2$  ortogonalni matriki, je tudi produkt  $Q = Q_1 Q_2$  ortogonalna matrika.

**5.15 Gram-Schmidtova** ortogonalizacija. Za vhod uporabimo Linearno ogrinjaco linearno neodvisnih vektorjev. Po gram-schmidtovi ortogonalizaciji pa dobimo paroma ortogonalne vektorje. Postopek:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 \\ \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \text{proj}_{\vec{u}_1} \vec{v}_2 \\ \vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \text{proj}_{\vec{u}_1} \vec{v}_3 - \text{proj}_{\vec{u}_2} \vec{v}_3 \\ \vdots$$

Po tem postopku dobimo paroma ortogonalne vektorje po Gram-Schmidtovi ortogonalizaciji.

**5.16 QR Razcep:** Iz linearno neodvisnih vektorjev  $a_1, \dots, a_n$  z *Gram-Schmidtovo* ortogonalizacijo dobimo ortonormirane vektorje  $q_1, \dots, q_n$ . Matriki  $A$  in  $Q$  s temi stolpci zadoscajo enacbi  $A = QR$ , kjer je  $R$  zgornjetrikotna matrika.

- Najprej z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo poiscemo linearno neodvisne vektorje matrike  $A$
- Vektorje normiramo in jih zapisemo v matriko  $Q$ .
- Matriko  $R$  dobimo tako, da matriko  $Q^T$  pomnožimo z matriko  $A$

$$R = Q^T A$$

Tako smo prisli do vseh elementov v QR razcepu matrike  $A$ .

Sedaj ko imamo izracunane vse elemente lahko zapisemo se projekcijsko matriko. To je matrika pravokotne projekcije na  $C(Q) = C(A)$ . Njen izracun je preprost:

$$QQ^T = \text{pravokotna projekcija na } C(Q) = C(A)$$

Sedaj lahko to projekcijsko matriko pomnožimo z desne s poljubnim vektorjem in ugotovimo kam se preslika v prostoru  $C(A)$ . V nasprotnem primeru, ce bi pa zeleli imeti projekcijsko matriko, s katero bi radi videli kam se vektor preslika v prostoru  $N(A^T)$ , bi pa od identicne matrike odsteli projekcijsko matriko za  $C(Q)$ .

$$I - QQ^T = \text{pravokotna projekcija na } C(A)^\perp = N(A^T)$$

**5.17** Vektorski prostor  $\iota$  je množica vseh neskončnih zaporedij  $\vec{u}$  s končno dolžino

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}_1^2 + \vec{u}_2^2 + \dots < \infty$$

**5.18 Predoloceni sistemi**

$$A^T A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^T \vec{f}$$

Kjer je  $A$  matrika sistemov linearnih enacb in  $\vec{f}$  vektor pricakovanih resitev po gaussovi eliminaciji zgornje enacbe, dobimo spremenljivke, ki predstavljajo najboljso aproksimacijo vseh kombinaicij rezultatov in vhodnih spremenljivk.

## 6 Determinante

**6.1** Determinanta enotske matirke je  $\det(I) = 1$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ in } \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

**6.2** Determinanta spremeni predznak, ce med seboj zamenjamo dve vrstici.

Dodatna lastnost:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A) \det(B)$$

**6.3** Determinanta je linearna funkcija vsake vrstice posebej. To pomeni, da se

1. determinanta pomnoži s faktorjem  $t$ , ce eno vrstico determinante (vsak element v tej vrstici) pomnožimo s faktorjem  $t$ .

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

2. determinanta je vsota dveh determinant, ki se razlikujeta le v eni vrstici, ce je v provitni determinanti ta vrstica vsota obeh vrstic, ostale vrstice pa so enake v vseh treh determinantah.

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

**Pozor!** Kadar množimo matriko  $A$  s skalarjem  $t$ , se vsak element matrike pomnoži s skalarjem. Ko racunamo determinanto produkta matirke s skalarjem  $tA$ , skalar  $t$  izpostavimo iz vsake vrstice posebej, zato je  $\det(tA) = t^n \det(A)$ , kjer je  $n$  stevilo vrstic (ali stolpcev) determinante.

**6.4** Matrika, ki ima dve enaki vrstici, ima determinanto enako 0.

**6.5** Ce v matriki od poljubne vrstice odstejemo mnogokratnik neke druge vrstice, se njena determinanta ne spremeni.

**6.6** Naj bo  $A$  poljubna kvadratna matirka  $n \times n$  in  $U$  njena vrsticno-stopnicasta oblika, ki jo dobimo z *Gaussovo eliminacijo*. Potem je

$$\det(A) = \pm \det(U).$$

**6.7** Determinanta, ki ima vrstico samih nicel, je enaka 0.

**6.8** Determinanta trikotne matrike  $A$  je produkt diagonalnih elementov:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

**6.9** Determinanta singularne matrike je enaka 0, determinanta obrnljive matrike je razlicna od 0.

**6.10** Determinanta produkta dveh matrik je enaka produktu determinant obeh matrik:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

**6.11** Determinanta inverzne matrike je enaka

$$\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$$

in determinanta potence  $A^n$  matrike  $A$  je

$$\det(A^n) = (\det(A))^n$$

ter determinanta transponirane matrike je enaka determinanti originalne matrike, saj ko naredimo razvoj po vrsticah, pridemo do enakih elementov po diagonalni.

$$\det(A) = \det(A^T).$$

**6.12** Transponirana matrika  $A^T$  ima isto determinanto kot  $A$ .

**6.13 Recap dovoljenih operacij nad determinanto**

1. Ce zamenjamo dve vrstici, se **spremeni** predznak determinante
2. Vrednost determinante se ne spremeni, ce neki vrstici pristevamo poljuben veckratnik katerekoli druge vrstice.
3. Ce vse elemente neke vrstice pomnožimo z istim stevilom  $\alpha$ , se vrednost determinante pomnoži z  $\alpha$ .

**6.14** Vsaka lastnost, ki velja za vrstice determinante, velja tudi za njene **stolpce**. Med drugim:

- Determinanta spremeni predznak, ce med seboj zamenjamo dva stolpca
- Determinanta je enaka 0, ce sta dva stolpca enaka
- Determinanta je enaka 0, ce so v vsaj enem stolpcu same nicle.

**6.15 (kofaktorska formula)** Ce je  $A$  kvadratna matrika reda  $n$ , njeno determinanto lahko izracunamo z razvojem po  $i - ti$  vrstici

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}.$$

Kofaktorje  $C_{ij}$  izracunamo kot  $C_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$ , kjer je  $D_{ij}$  determinanta, ki jo dobimo, ce v  $A$  izbrisemo  $i$ -to vrstico in  $j$ -ti stolpec.

**6.16** Inverzna matrika  $A^{-1}$  matrike  $A$  je transponirana matrika kofaktorjev, deljena z determinanto  $|A|$ :

$$A^{-1} = \frac{C^T}{\det(A)},$$

kjer je  $C$  matrika kofaktorjev matrike  $A$ .

**6.17** Ploscina paralelograma, dolocenega z vektorjema  $\vec{a}$  in  $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$  je enaka  $\det([\vec{a}\vec{b}])$ , to je absolutni vrednosti determinante s stolpcema  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ .

**6.18** Mesani produkt vektorjev  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  in  $\vec{c}$  je enak determinanti matrike, ki ima te tri vektorje kot stolpce.

**6.19** Naj bo  $A$  matrika  $\mathbb{R}^{n \times n}$

$$A \text{ je obrnljiva} \iff \det A \neq 0$$

$$A^{-1} \text{ ne obstaja} \iff \det A = 0$$

## 7 L. vrednosti in vektorji

**7.1** Vektor  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , za katerega je  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$  lastni vektor. Stevilo  $\lambda$  je lastna vrednost. **Pozor!** Nicelni vektor  $\vec{0}$  ne more biti lastni vektor. Lahko pa je lastna vrednost enaka 0.

**7.2** Ce ima matrika  $A$  lastno vrednost  $\lambda$  in lastni vektor  $\vec{x}$ , potem ima matrika  $A^2$  lastno vrednost  $\lambda^2$  in isti lastni vektor  $\vec{x}$ .

**7.3** Ce ima matrika  $A$  lastno vrednost  $\lambda$  in lastni vektor  $\vec{x}$ , potem ima matrika  $A^k$  lastno vrednost  $\lambda^k$  in isti lastni vektor  $\vec{x}$ .

**7.4** Ce ima matrika  $A$  lastno vrednost  $\lambda$  in lastni vektor  $\vec{x}$ , potem ima inverzna matrika lastno vrednost  $1/\lambda$  in isti lastni vektor  $\vec{x}$ .

**7.5** Sled kvadratne matrike  $A$  reda  $n$  je vsota njenih diagonalnih elementov.

$$\text{sled}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + \dots + a_{nn}.$$

**7.6** Sled matrike je enaka vsoti vseh lastnih vrednosti, stetih z njihovo veckratnostjo. Ce so  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  lastne vrednosti matrike reda  $n$ , potem je sled enaka *vsoti*

$$\text{sled}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 + \dots + \lambda_n,$$

determinanta matrike pa *produktu* lastnih vrednosti

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

**Lastnosti sledi** Za matrike  $A, B, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  velja

1.  $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$ ,
2.  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ ,
3.  $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$ ,
4.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ ,
5.  $\text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(A)$  za vsako obrnljivo matriko  $P$ .
6.  $\text{tr}(ABP) = \text{tr}(APB)$ , ce so A,B,P simetricne matirke.
7.  $\text{tr}(ABP) = \text{tr}(A^T B^T P^T)$ .

Za poljubna vektorja  $x, y \in \mathbb{R}^n$  velja:

$$\text{tr}(xy^T) = \text{tr}(x^T y)$$

**7.7** Ce ima matrika  $A$  lastno vrednost  $\lambda$ , ki ji pripada lastni vektor  $\vec{x}$ , potem ima matrika  $A + cI$  lastno vrednost  $\lambda + c$  z istim lastnim vektorjem  $\vec{x}$  (velja samo z enotskimi matrikami  $I$ ).

**7.8** Lastne vrednosti trikotne matrike so enake diagonalnim elementom.

**7.9** Denimo, da ima matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$   $n$  linearno neodvisnih lastnih vektorjev  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ . Ce jih zložimo kot stolpce v matriko  $S$

$$S = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n],$$

potem je  $T = S^{-1}AS$  diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  na diagonalni

$$S^{-1}AS = T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

**Pozor!** Lastni vektorji v matriki  $S$  morajo biti v istem vrstnem redu kot lastne vrednosti v matriki  $T$ .

**7.10** Ce je  $A = STS^{-1}$ , potem je  $A^k = ST^k S^{-1}$  za vsak  $k \in \mathbb{N}$ .

**7.12** Vse lastne vrednosti realne simetricne matrike so realne.

**7.13** Lastni vektorji realne simetricne matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.

**7.14 Schurov izrek** Za vsako kvadratno matriko reda  $n$ , ki ima le realne lastne vrednosti, obstaja taka ortogonalna matrika  $Q$ , da je

$$Q^T A Q = T$$

zgornjetrikotna matrika, ki ima lastne vrednosti (lahko so kompleksne) matrike  $A$  na diagonalni.

**7.15 Spektralni izrek** Vsako simetricno matriko  $A$  lahko razcepimo v produkt  $A = QTQ^T$ , kjer je  $Q$  ortogonalna matrika lastnih vektorjev,  $T$  pa diagonalna z lastnimi vrednostmi matrike  $A$  na diagonalni.

**7.16** Vsako realno simetricno matriko lahko zapisemo kot linearno kombinacijo matrik ranga 1

$$A = \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^T + \lambda_2 \vec{q}_2 \vec{q}_2^T + \dots + \lambda_n \vec{q}_n \vec{q}_n^T,$$

kjer so  $\vec{q}_i$  stolpci matrike  $Q$  (torej lastni vektorji matrike  $A$ ).

**7.17** Za simetricno nesingularno matriko  $A$  je stevilo pozitivnih pivotov enako številu pozitivnih lastnih vrednosti.

**7.18** Kvadratna matrika je pozitivno definirana, kadar so vse njene lastne vrednosti pozitivne.

**7.19** Kvadratna matrika reda 2 je pozitivno definirana natanko tedaj, kadar sta pozitivni sled in determinanta matrike.

**7.20** Simetricna matrika  $A$  reda  $n$  je pozitivno definirana natanko tedaj, ko je za vsak vektor  $\vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0$$

**7.21** Če sta matriki  $A$  in  $B$  pozitivno definitni, je pozitivno definitna tudi njuna vsota  $A + B$ .

**7.22** Matrika  $A$  je pozitivno definitna, kadar so vse njene vodilne glavne poddeterminante pozitivne.

**7.23** Če so stolpci matrike  $R$  linearno neodvisni, je matrika  $A = R^T R$  pozitivno definitna.

**7.24** Za vsako simetricno pozitivno definitno matriko  $A$  obstaja zgornjetrikotna matrika  $R$ , da je  $A = R^T R$ .

**7.25** Simetricna matrika reda  $n$ , ki ima eno od spodnjih lastnosti, ima tudi ostale stiri:

1. Vseh  $n$  pivotov je pozitivnih;
2. Vseh  $n$  vodilnih glavnih determinant je pozitivnih;
3. Vseh  $n$  lastnih vrednosti je pozitivnih;
4. Za vsak  $\vec{x} \neq \vec{0}$  je  $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$ ;
5.  $A = R^T R$  za neko matriko  $R$  z linearno neodvisnimi stolpci.

**7.26** Vsako realno  $m \times n$  matriko  $A$  lahko zapisemo kot produkt  $A = UEV^T$ , kjer je matrika  $U$  ortogonalna  $m \times m$ ,  $E$  diagonalna  $m \times n$  in  $V$  ortogonalna  $n \times n$ .

**7.27** Če je matrika  $A$  simetricna in so vsej njeni elementi realni, potem je njen rang enak številu nenicelnih lastnih vrednosti matrike  $A$ .

$$\text{rang}(A) = \text{stevilo } \lambda A$$

**7.28 Diagonalizacija oz podobnost** matrik. Matriki  $A$  in  $B$  sta podobni, ce imata obe iste lastne vrednosti. Diagonalno matriko sestavimo tako, da v njeno diagonalo vpisemo lastne vrednosti. Matriko  $P$  pa sestavimo iz njenih lastnih vektorjev; po stolpcih.

$$A = PDP^{-1} \text{ oz. } D = P^{-1}AP$$

**7.29 Spektralni razcep** Naj bodo vektorji  $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$  ONB iz 1. vektorjev matrike  $A$  za l. vrednost  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , potem lahko matriko  $A$  zapisemo kot:

$$A = \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^T + \dots + \lambda_n \vec{q}_n \vec{q}_n^T$$

### 7.30 Nekaj lastnosti simetricnih matrik

- Vse lastne vrednosti simetricne matrike so realne. Lastni vektorji realne simetricne matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.
- Vsako realno simetricno matriko  $A$  lahko zapisemo kot  $A = QDQ^T$ , kjer je  $Q$  ortogonalna matrika lastnih vektorjev,  $D$  pa diagonalna matrika, ki ima na diagonalni pripadajoče lastne vrednosti matrike  $A$ .

## 8 Napredna linearna algebra

### 8.1 Schurov izrek

(Schur): Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrika z lastnimi vrednostmi  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Potem obstaja ortogonalna matrika  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  in zgornje trikotna matrika  $Z$ , ki ima na diagonalni  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , da velja

$$A = QZQ^{-1} = QZQ^T.$$

#### Postopek za izračun Schurovega razcepa:

Firstly, pick an eigenvalue and corresponding eigenvector:

$$Aq_1 = \lambda_1 q_1 \quad \text{with} \quad q_1^T q_1 = 1$$

Then, find all orthogonal vectors such that you compose a matrix  $Q = [q_1 \dots q_n]$ .

Then:

$$T = Q^T A Q$$

Compute:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

(not upper triangular)

Continue with  $A_2$ . Final schur:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_{n-1} \end{bmatrix}$$

We get:

$$A = QZQ^T$$

Where  $Z$  is the upper triangular matrix.

- **Posledica:** Vsaka matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je podobna zgornje trikotni matriki.
- **Posledica:** Vsaka simetrična matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je ortogonalno podobna diagonalni matriki.
- **Posledica:** Če ima matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  lastne vrednosti enake  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , potem je

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

in

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

- **Posledica (Cayley-Hamilton):** Če je  $\Delta_A(x) = \det(A - xI_n)$  karakteristični polinom matrike  $A$ , potem velja  $\Delta_A(A) = 0$ .

## 8.2 Frobeinusova norma

Za matriki  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  in  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  definiramo

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B).$$

Za produkt  $\langle A, B \rangle : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  velja za vse matrike  $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  in za vse  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

1.  $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$ ,
2.  $\langle \alpha A + \beta B, C \rangle = \alpha \langle A, C \rangle + \beta \langle B, C \rangle$ ,
3.  $\langle A, A \rangle \geq 0$ ,
4.  $\langle A, A \rangle = 0$  natanko tedaj, ko je  $A = 0$ .

Zato  $\langle A, B \rangle$  imenujemo skalarni produkt matrik  $A$  in  $B$ .

Za matrike  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$  in  $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$  velja

$$\langle A, BC \rangle = \langle B^T A, C \rangle = \langle AC^T, B \rangle.$$

**Frobeniusova norma matrike**  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  je definirana kot

$$\|A\|_F = \|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}.$$

Velja:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2.$$

Posledica:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}$$

**(Eckart, Young).** Naj bo  $A = U\Sigma V^T$  razcep singularnih vrednosti matrike  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$ , kjer  $U = [u^{(1)} \dots u^{(m)}]$  in  $\mathbb{R}^{m \times m}$  in  $V = [v^{(1)} \dots v^{(n)}]$  in  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Potem je matrika  $A_k$  iz  $\mathbb{R}^{m \times n}$  ranga  $k$ ,  $k \leq n$ , ki je med vsemi matrikami ranga  $k$  v Frobeniusovi normi najbližje matriki  $A$ , enaka

$$A_k = \sigma_1 u^{(1)} (v^{(1)})^T + \sigma_2 u^{(2)} (v^{(2)})^T + \dots + \sigma_k u^{(k)} (v^{(k)})^T$$

in velja

$$\|A - A_k\|_F = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_n^2}.$$

(Velja torej  $\|A - A_k\|_F \leq \|A - X\|_F$  za  $\|A - X\|_F$  za vse matrike  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , za katere velja  $\text{rank}(X) = k$ .)

## 8.3 Kroneckerjev produkt

Kroneckerjev produkt (tudi tenzorski produkt) matrik  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  in  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$  je  $mp \times nq$  matrika

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}.$$

Če so matrike  $A, B, C$  in  $D$  primerne velikosti, potem veljajo naslednje enakosti:

1.  $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2.  $\alpha \otimes A = A \otimes \alpha = \alpha A$  za vsak  $\alpha \in \mathbb{R}$
3.  $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$
4.  $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$  in  $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$
5.  $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$
6.  $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ .
7.  $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ .
8.  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$  če  $A$  in  $B$  obrnljivi.
9.  $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$
10.  $\text{rang}(A \otimes B) = \text{rang}(A)\text{rang}(B)$
11. Če ima matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  lastne vrednosti  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  in ima matrika  $B$  lastne vrednosti  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , potem je množica lastnih vrednosti matrike  $A \otimes B$  enaka:

$$S_\lambda = \{\lambda_i \mu_j; \lambda_i \text{ lastna vrednost } A, \mu_j \text{ lastna vrednost } B\}$$

$$\text{in } |S_\lambda| \leq mn$$

Ravno tako velja potem za lastne vektorje  $v_i \otimes w_j$ , da dobimo lastne vektorje matrike  $A \otimes B$ .

12. Če  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  in  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , potem je  $\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n$ .

Posledica:

$$\|A \otimes B\|_F = \|A\|_F \cdot \|B\|_F$$



### 8.4 Kroneckerjeva vsota

Kroneckerjeva vsota je definirana za kvadratni matriki  $A$  in  $B$ :

$$A \oplus B = A \otimes I_m + I_n \otimes B$$

kjer  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

Če so  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  lastne vrednosti  $A$  za lastne vektorje  $u_1, \dots, u_n$  in  $\mu_1, \dots, \mu_m$  lastne vrednosti  $B$  za lastne vektorje  $v_1, \dots, v_m$ , potem so

$$\lambda_i \cdot \mu_j, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$$

lastne vrednosti za  $A \oplus B$ , lastni vektorji pa so

$$u_i \otimes v_j$$

za  $i$  in  $j$ . Lastni vektorji  $A \oplus B$  so enaki  $u_i \otimes v_j$ .

### 8.5 Vektorizacija

Za matriko  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  označimo vektorizacijo matrike  $A$  kot

$$\text{vec}(A) = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}.$$

$\text{vec}$  je preslikava iz  $\mathbb{R}^{m \times n}$  v  $\mathbb{R}^{mn}$ .

Za matrike  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  in  $C \in \mathbb{R}^{p \times r}$  velja:

$$\text{vec}(ABC) = (C^T \otimes A) \text{vec}(B).$$

### 8.6 Definitnost matrik

Spomnimo se, da ima simetrična matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vse lastne vrednosti realne.

Simetrični matriki  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pravimo

- **pozitivno semidefinitna**, če je  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$  za vse  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- **pozitivno definitna**, če je  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$  za vse neničelne  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- **negativno semidefinitna**, če je  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0$  za vse  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- **negativno definitna**, če je  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0$  za vse neničelne  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- **nedefinitna**, če je  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$  za nekatere  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  in  $\mathbf{y}^T A \mathbf{y} < 0$  za nekatere  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

Posledica: Naj  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simetrična z lastnimi vrednostmi  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

- $A$  je **PSD** (pozitivno semidefinitna)  $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0$  za  $i = 1, \dots, n$ .
- $A$  je **PD** (pozitivno definitna)  $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$  za  $i = 1, \dots, n$ .
- $A$  je **NSD** (negativno semidefinitna)  $\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0$  za  $i = 1, \dots, n$ .
- $A$  je **ND** (negativno definitna)  $\Leftrightarrow \lambda_i < 0$  za  $i = 1, \dots, n$ .
- $A$  je **nedefinirana**  $\Leftrightarrow$  ima tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti.

$A$  je **PD**  $\Leftrightarrow A$  je **PSD** in  $A$  obrnljiva.

**(Sylvester)**. Simetrična matrika  $A$  je pozitivno definitna natanko tedaj, ko so determinante vseh vodilnih glavnih podmatrik matrike  $A$  pozitivne.

$$\det \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{bmatrix} > 0 \quad \sim \text{PD}$$

Simetrična matrika  $A$  je negativno definitna natanko tedaj, ko je determinanta vsake  $k \times k$  vodilne glavne podmatrike  $A$  pozitivna, če je  $k$  sodo število, ter negativna, če je  $k$  liho število.

$$\det \begin{bmatrix} - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \end{bmatrix} \sim \text{ND}$$

Izrek: Naj  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simetrična ranga  $r$ . Velja

- $A$  je **PSD**  $\Leftrightarrow$  obstaja  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ , da je  $A = BB^T$ .
- $A$  je **PD**  $\Leftrightarrow$  obstaja  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , da je  $A = BB^T$ .
- $A$  je **NSD**  $\Leftrightarrow$  obstaja  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ , da je  $A = -BB^T$ .
- $A$  je **ND**  $\Leftrightarrow$  obstaja  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , da je  $A = -BB^T$ .
- $A$  je nedefinirana  $\Leftrightarrow$  obstaja tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti.

$A$  je **PD**  $\Leftrightarrow A$  je **PSD** in  $A$  obrnljiva.

**(Razcep Choleskega)**. Obrnljiva matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ima razcep Choleskega

$$A = LL^T,$$

kjer je  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  spodnje trikotna matrika, natanko tedaj, ko je  $A$  simetrična in pozitivno definitna.

Z uporabo spodnjega (rekurzivnega) algoritma: Simetrično matriko  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zapišemo v bločni obliki

$$A_1 := A = \begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{bmatrix}$$

in definiramo

$$L_1 := \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0^T \\ \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}b & I_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Tedaj je

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{bmatrix} = L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & B - \frac{1}{a_{11}}bb^T \end{bmatrix} L_1^T.$$

Ponovimo na simetrični matriki  $A_2 := B - \frac{1}{a_{11}}bb^T \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ . Naj bodo  $L_2, L_3, \dots, L_n$  matrike, ki jih dobimo v ponovljenih korakih. Matrika  $L$  je potem

$$L = L_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & L_3 \end{bmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & L_n \end{bmatrix}$$

### 8.7 Vektorski prostori

**Realni vektorski prostor**  $V$  je množica **vektorjev**  $v$ , za katere imamo definirani dve notranji operaciji

- seštevanje vektorjev ( $u, v \in V \Rightarrow u + v \in V$ ),
- množenje vektorjev z realnimi števili ( $v \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v = \alpha \cdot v \in V$ ),

z lastnostmi

1.  $u + v = v + u$  in  $(u + v) + w = u + (v + w)$ ,
2. obstaja ničelni vektor  $0$  in velja  $v + 0 = 0 + v = v$ ,
3. za vsak  $v \in V$  obstaja nasprotni vektor  $-v$ , za katerega velja  $v + (-v) = (-v) + v = 0$ ,
4.  $1 \cdot v = v$  za vsak  $v \in V$ ,
5.  $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$ ,
6.  $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ ,

$$7. \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v,$$

za poljubne  $u, v, w \in V$  in  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Izrek:** Naj bo  $V$  vektorski prostor. Potem velja

1.  $V$  vsebuje ničelni vektor  $0$ ,
2. v vsakem vektorskem prostoru  $V$  je ničelni vektor  $0$  en sam,
3.  $\alpha \cdot 0 = 0$  za vsak  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,
4.  $0 \cdot v = 0$  za vsak  $v \in V$ .

Za vektorje  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  in skalare  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  imenujemo vektor

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

**linearna kombinacija vektorjev**  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Denimo, ničelni vektor  $0$  je

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

je linearna kombinacija poljubnih vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ . Linearno kombinacijo z izključno ničelnimi koeficienti imenujemo **trivialna linearna kombinacija**.

Če je podmnožica  $U$  vektorskega prostora  $V$

- (1) zaprta za seštevanje ( $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$ ) in
- (2) zaprta za množenje vektorjev z realnimi števili ( $v \in U, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v \in U$ ),

potem jo imenujemo **vektorski podprostor** prostora  $V$ .

**Izrek:** Podmnožica  $U$  vektorskega prostora  $V$  je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je poljubna linearna kombinacija  $\alpha u + \beta v$  vektorjev  $u, v \in U$  tudi vsebovana v  $U$ .

Vsak vektorski podprostor po (2) vsebuje tudi vektor  $0 \cdot v = 0$ . Zatorej podmnožica vektorskega prostora, ki ne vsebuje ničelnega vektorja, ne more biti vektorski podprostor.

Ker lastnosti (1)-(7) veljajo za poljubne elemente vektorskega prostora  $V$ , veljajo tudi za vse elemente vektorskega podprostora  $U$  v  $V$ . Poleg tega je vektorski podprostor po definiciji zaprt za seštevanje in množenje s števili. Zatorej je vsak vektorski podprostor hkrati tudi vektorski prostor.

### 8.7.1 Linearna ogrinjača

$\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n$  je množica vseh linearnih kombinacij vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

Ker je linearna kombinacija linearnih kombinacij vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  zopet linearna kombinacija vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , je po Izreku 2 linearna ogrinjača  $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  linearni podprostor v  $V$ . Pravimo, da vektorji  $v_1, v_2, \dots, v_n$  **napenjajo prostor**  $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .

Ne le, da je linearna ogrinjača vektorski prostor. Velja celo več.

Linearna ogrinjača vektorjev  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vektorskega prostora  $V$  je najmanjši vektorski podprostor v  $V$ , ki vsebuje vektorje  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

### 8.7.2 Baza vektorskega prostora

Vektorji  $v_1, v_2, \dots, v_n$  v  $V$  so **linearno odvisni**, če obstaja vektor  $v_k$ , ki je linearna kombinacija ostalih  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n$ :

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n,$$

kjer  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ .

Vektorji  $v_1, v_2, \dots, v_n$  v  $V$  so **linearno neodvisni**, če niso linearno odvisni. Ekvivalentno,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  v  $V$  so linearno neodvisni, če je njihova trivialna linearna kombinacija edina njihova linearna

kombinacija, ki je enaka ničelnemu vektorju  $0$ . Z drugimi besedami,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  v  $V$  so linearno neodvisni, če iz

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

sledi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Množica vektorjev  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  je **baza** vektorskega prostora  $V$ , če

(B1) so  $v_1, v_2, \dots, v_n$  linearno neodvisni in

(B2)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  napenjajo prostor  $V$ .

**Izrek:** Vsak vektorski prostor ima nešttevno baz. Vse baze vektorskega prostora imajo enako število vektorjev.

*Dimenzija prostora*  $V$  je enaka moči (poljubne) baze prostora  $V$ . Označimo jo z  $\dim V$ .

**Izrek:** Za vsako bazo vektorskega prostora  $V$  je zapis poljubnega vektorja  $v \in V$  kot linearna kombinacija baznih vektorjev vedno enoličen.

### 8.7.3 Linearne preslikave

Naj bosta  $V$  in  $U$  vektorska prostora. Preslikava  $\tau : V \rightarrow U$  je **linearna preslikava**, če velja

- (1)  $\tau(v + u) = \tau(v) + \tau(u)$  za vsaka  $v, u \in V$  in
- (2)  $\tau(\alpha v) = \alpha \tau(v)$  za vsak  $v \in V$  in vsak  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Preslikava  $\tau : V \rightarrow U$  je linearna natanko tedaj, ko velja

$$\tau(\alpha v + \beta u) = \alpha \tau(v) + \beta \tau(u)$$

za vse  $v, u \in V$  ter vse  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Za poljubno linearno preslikavo  $\tau : V \rightarrow U$  velja  $\tau(0_V) = 0_U$ .

Naj bodo  $\tau, \psi : V \rightarrow U$  ter  $\theta : U \rightarrow W$  linearne preslikave in naj bo  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

- (1) **Vsota**  $\tau + \psi : V \rightarrow U$  je preslikava, definirana s predpisom

$$(\tau + \psi)(v) = \tau(v) + \psi(v).$$

- (2) **Produkt s skalarjem**  $\gamma \tau : V \rightarrow U$  je preslikava, definirana s predpisom

$$(\gamma \tau)(v) = \gamma \tau(v).$$

- (3) **Kompozitum**  $\theta \circ \tau : V \rightarrow W$  je preslikava, definirana s predpisom

$$(\theta \circ \tau)(v) = \theta(\tau(v)).$$

**Izrek:** Vsota, produkt s skalarjem in kompozitum linearnih preslikav so linearne preslikave.

**Posledica:** Množica vseh linearnih preslikav iz vektorskega prostora  $V$  v vektorski prostor  $U$  je vektorski prostor

**Izrek:** Naj bodo  $\tau, \psi : V \rightarrow U$  ter  $\theta : U \rightarrow W$  linearne preslikave in naj bo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Matrika, ki ustreza vsoti preslikav  $\tau + \psi$ , je enaka vsoti matrik posameznih preslikav.

$$A_{\tau+\psi, B}^C = A_{\tau, B}^C + A_{\psi, B}^C$$

2. Matrika, ki ustreza produktu s skalarjem  $\alpha \tau$ , je enaka večkratniku matrike preslikave.

$$A_{\alpha \tau, B}^C = \alpha A_{\tau, B}^C$$

3. Matrika, ki ustreza kompozitumu preslikav, je enaka produktu matrik posameznih preslikav.

$$A_{\theta \circ \tau, B}^D = A_{\theta, C}^D \cdot A_{\tau, B}^C$$

4. Matrika, ki ustreza inverzu obrnljive preslikave, je enaka inverzu matrike te preslikave. Torej, če je  $\tau$  obrnljiva preslikava, je obrnljiva tudi matrika  $A_{\tau,B}^C$ . Velja

$$A_{\tau^{-1},C}^B = (A_{\tau,B}^C)^{-1}$$

Neničelnemu vektorju  $v$  v  $V$  pravimo *lastni vektor* linearne preslikave  $\tau : V \rightarrow V$ , če velja

$$\tau(v) = \lambda v.$$

Številu  $\lambda$  pravimo *lastna vrednost* linearne preslikave  $\tau$ .

**Izrek:** Vsaka lastna vrednost linearne preslikave  $\tau$  je tudi lastna vrednost poljubne matrike  $A_\tau$ , ki pripada preslikavi  $\tau$ . Vse matrike, ki pripadajo dani linearni preslikavi  $\tau$  imajo enake lastne vrednosti.

Pravimo, da je linearno preslikavo  $\tau : V \rightarrow V$  mogoče *diagonalizirati*, če obstaja baza, v kateri pripada preslikavi diagonalna matrika.

**Izrek:** Linearno preslikavo  $\tau : V \rightarrow V$  je mogoče diagonalizirati natanko tedaj, ko obstaja baza prostora  $V$  sestavljena iz lastnih vektorjev preslikave  $\tau$ .

Naj bo  $\tau : V \rightarrow U$  linearna preslikava vektorskega prostora  $V$  v vektorski prostor  $U$ .

**Def:** Jedro linearne preslikave  $\tau$  je množica  $\ker(\tau)$  vseh vektorjev  $v \in V$ , za katere velja

$$\tau(v) = 0.$$

**Def:** Slika linearne preslikave je množica  $\text{im}(\tau) = \{\tau(v) : v \in V\} \subseteq U$ .

**Izrek:** Jedro  $\ker \tau$  linearne preslikave  $\tau : V \rightarrow U$  je vektorski podprostor v  $V$ , slika  $\text{im} \tau$  pa vektorski podprostor v  $U$ .

**Izrek:** Naj bo  $\tau : V \rightarrow U$  linearna preslikava iz vektorskega prostora  $V$  v vektorski prostor  $U$ .

1.  $\tau$  je injektivna natanko tedaj, ko je  $\ker \tau = \{0\}$ .
2.  $\tau$  je surjektivna natanko tedaj, ko je  $\text{im} \tau = U$ .

**Izrek:** Naj bo  $\tau : V \rightarrow U$  linearna preslikava in naj bo  $A = A_{\tau,B,C}$  matrika, ki pripada preslikavi  $\tau$ . Potem je

1.  $\dim(\text{im}(\tau)) = \text{rank}(A)$ ,
2.  $\dim(\ker(\tau)) + \dim(\text{im}(\tau)) = \dim(V)$ .

**Posledica:** Naj bo  $\tau : V \rightarrow U$  linearna preslikava,  $\dim V = \dim U = n$  in naj bo  $A$  neka matrika, ki pripada  $\tau$ . Naslednje trditve so ekvivalentne:

1.  $\tau$  je bijektivna.
2.  $\tau$  je injektivna.
3.  $\tau$  je surjektivna.
4.  $A$  je obrnljiva.
5.  $\ker \tau = \{0\}$ .
6.  $N(A) = \{0\}$ .
7.  $\text{im} \tau = U$ .

$$8. C(A) = \mathbb{R}^n.$$

9. Rang matrike  $A$  je  $n$ .

10. Vrstice matrike  $A$  so linearno neodvisne.

11. Vrstice matrike  $A$  razpenjajo  $\mathbb{R}^n$ .

12. Vrstice matrike  $A$  tvorijo bazo  $\mathbb{R}^n$ .

13. Stolpci matrike  $A$  so linearno neodvisni.

14. Stolpci matrike  $A$  razpenjajo  $\mathbb{R}^n$ .

15. Stolpci matrike  $A$  tvorijo bazo  $\mathbb{R}^n$ .

16.  $\det A \neq 0$ .

17. Homogeni sistem enačb  $Ax = 0$  ima le trivialno rešitev.

18. Sistem enačb  $Ax = b$  ima rešitev za vsak  $b \in \mathbb{R}^n$ .

## 9 Dodatek 1: Vrste

### Geometrijska vrsta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

### Pravila za računanje z vrstami

$\sum a_n, \sum b_n$  konvergentni, potem velja:

$$\sum (a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, \sum (\alpha a_n) = \alpha \sum a_n$$

### Dominirana konvergenca / divergenca

$\sum a_n, \sum b_n$  vrsti z nenegativnimi členi

$$a_n \geq 0, b_n \geq 0, a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

če velja  $\sum b_n$  konvergira, potem tudi  $\sum a_n$

če je  $\sum b_n$  divergentna, je divergentna tudi  $\sum a_n$

### Kvocientni kriterij

$$\sum a_n, a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$D \leq 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ konvergira}$$

$$D > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ divergira}$$

$$D = 0 \Rightarrow \text{ne moremo sklepati}$$

### Korenski kriterij

$$\sum a_n, a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, C_n = \sqrt[n]{a_n}$$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

$$C < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ konvergira}$$

$$C > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ divergira}$$

$$C = 1 \Rightarrow \text{ne moremo sklepati}$$

### Absolutna konvergenca

$$\sum |a_n| \text{ konvergira} \Rightarrow \sum a_n \text{ konvergira}$$

$$\sum a_n \text{ konvergira absolutno, če } \sum |a_n| \text{ konvergira}$$

### Hipergeometrična vrsta

$$\sum \frac{1}{n^p} \text{ konvergira, } \Leftrightarrow p > 1 \quad (p \in \mathbb{R})$$

## Primerjalni kriterij 2

$$\sum b_n \text{ abs. konvergentna in } |a_n| \leq |b_n|$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ abs. konvergentna}$$

## Raabejev kriterij

$$\sum a_n, a_n > 0, R_n = n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$$

$$R < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ divergira}$$

$$R > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ konvergira}$$

$$R = 1 \Rightarrow \text{ne moremo sklepati}$$

## Leibnizov kriterij

$$\sum (-1)^n a_n, a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}, \text{ alternirajoča vrsta}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ in } a_{n+1} \leq a_n \forall n \Rightarrow \sum (-1)^n a_n \text{ konvergira}$$

## Primerjalni kriterij

$$\sum b_n \text{ absolutno konvergentna in } |a_n| \leq |b_n| \text{ za vse } n \geq n_0.$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ je absolutno konvergentna}$$

# 10 Dodatki 2: Ponovitev analize

## Odводи

$$1. \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$2. x^n = nx^{n-1}$$

$$3. \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4. \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$5. \sin(ax) = a \cos ax$$

$$6. \cos(ax) = -a \sin(ax)$$

$$7. \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$8. e^a x = ae^{ax}$$

$$9. a^x = a^x \ln a$$

$$10. x^x = x^x (1 + \ln x)$$

$$11. \ln x = \frac{1}{x}$$

$$12. \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

$$13. \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14. \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15. \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$16. \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

## Integrali

$$1. \int x^a dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & a \neq -1 \\ \ln|x| + C & a = -1 \end{cases}$$

$$2. \int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$3. \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$6. \int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C$$

$$7. \int \sin(ax) dx = \frac{-\cos(ax)}{a} + C$$

$$8. \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$11. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$12. \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

$$13. \int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$15. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

**Integriranje absolutnih vrednosti** (primer): Imamo funkcijo  $f(x) = |x|$ , ki je zvezna na intervalu  $[-1, 1]$  Če hocemo to funkcijo integrirati in zelimo izračunati njeno *porazdelitveno* funkcijo integrirati locimo 2 primera:

$$1. -1 \leq x < 0$$

$$F(x) = \int_{-1}^x |t| dt = \int_{-1}^x -t dt = -\frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^x = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)$$

$$2. 0 \leq x < 1$$

$$F(x) = \int_{-1}^x |t| dt = \int_{-1}^0 -t dt + \int_0^x t dt = -\frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{1}{2}(1 + x^2)$$

$$\sqrt[n]{x^m} = (x)^{\frac{m}{n}}, x^2 + y^2 \leq 1 \sim \text{krog s ploscino } \pi$$