数字信号处理

周治国

2022.8

第二章

离散时间信号与系统分析基础

§2-4 离散时间线性非时变系统

一、时域描述

$$y(n)\sim x(n):\quad \sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

无限长单位脉冲响应数字滤波器

$$h(n)\ :\ y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

有限长单位脉冲响应数字滤波器

离散时间系统运算关系 $T[\bullet]\qquad y(n)=T\left[x(n)\right]$

线性系统

$$y_1(n)=T\left[x_1(n)\right]\quad y_2(n)=T\left[x_2(n)\right]$$

$$T\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=ay_1(n)+by_2(n)$$

非时变系统

$$y(n)=T\left[x(n)\right]$$

$$y(n-k)=T\left[x(n-k)\right]$$

§2-4 离散时间线性非时变系统

二、频域描述

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\omega n} \longrightarrow \text{频率响应}$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2\pi)})$$

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega})$$

§2-4 离散时间线性非时变系统

三、变换域描述

$$H(z)=Z[h(n)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)z^{-n}\longrightarrow\text{系统函数}$$

$$\text{如}H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}$$

§2-4 离散时间线性非时变系统

四、单位取样响应与卷积

$$\begin{cases} h(n) = T\left[\delta(n)\right] \\ x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \end{cases}$$

加权延时线性组合

$$y(n) = T\left[x(n)\right] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)T\left[\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

$$= x(n) * h(n)$$

P21 任何离散时间线性非时变系统，可以通过其单位取样响应h(n)来表征。

§2-4 离散时间线性非时变系统

五、卷积运算的基本规律

- 交换律 $y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$

- 结合律

$$
\begin{aligned}
y(n)&=\left[x(n)*h_1(n)\right]*h_2(n)\\
&=\left[x(n)*h_2(n)\right]*h_1(n)\\
&=x(n)*\left[h_1(n)*h_2(n)\right]
\end{aligned}
$$

- 分配率

$$
\begin{aligned}
y(n)&=x(n)*\left[h_1(n)+h_2(n)\right]\\
&=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)
\end{aligned}
$$

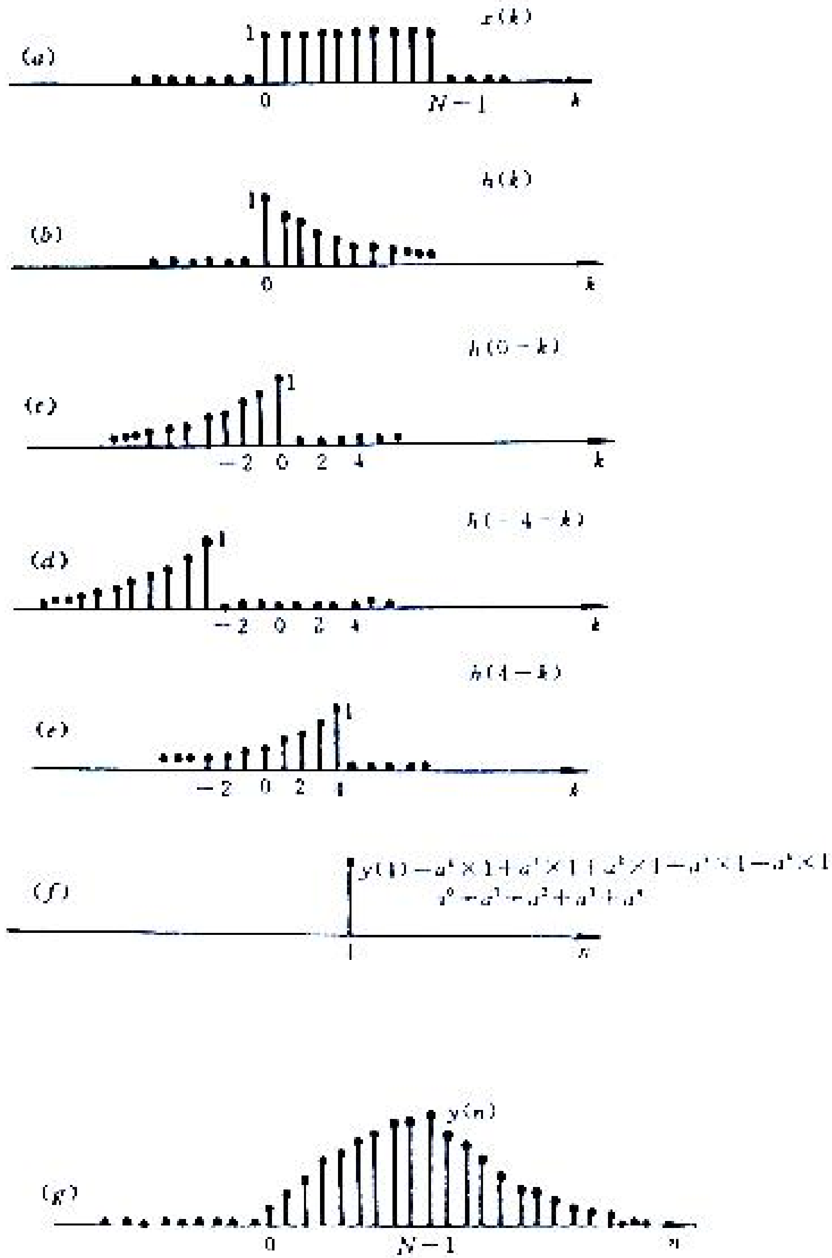

图 2-21 离散卷积计算过程

§2-4 离散时间线性非时变系统

六、系统的稳定性和因果性

- 稳定系统 $s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

P24

- 因果系统 $h(n) = 0 \quad n < 0$

- 稳定因果系统 $s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad h(n) = 0 \quad n < 0$

§2-4 离散时间线性非时变系统

七、常系数线性差分方程

- 连续时间系统时域分析

  数学模型：微分方程

- 离散时间系统

  数学模型：差分方程

$$y(n) \sim x(n): \quad \sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

无限长单位脉冲响应数字滤波器

$$h(n) \; : \; y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

有限长单位脉冲响应数字滤波器

§2-5 离散时间信号和系统的频域分析

一、系统的频率响应

输入频率为ω的复指数序列

$$x(n)=Ae^{j(\omega n+\phi_x)}=Ae^{j\omega n}e^{j\phi_x}$$

对于线性非时变系统：

$$x(n-r)=Ae^{j\omega(n-r)}e^{j\phi_x}=e^{-j\omega r}x(n)$$

输出频率也为ω的复指数序列

$$y(n)=Be^{j(\omega n+\phi_y)}=Be^{j\omega n}e^{j\phi_y}$$

$$y(n-k)=Be^{j\omega(n-k)}e^{j\phi_y}=e^{-j\omega k}y(n)$$

$A(\omega),B(\omega)$隐含ω

§2-5 离散时间信号和系统的频域分析

一、系统的频率响应

$$x(n)=Ae^{j\omega n}e^{j\phi_x}$$

$$x(n-r)=e^{-j\omega r}x(n)$$

$$y(n)=Be^{j\omega n}e^{j\phi_y}$$

$$y(n-k)=e^{-j\omega k}y(n)$$

输入输出方程：

$$\sum_{k=0}^{N}a_k e^{-j\omega k}y(n)=\sum_{r=0}^{M}b_r e^{-j\omega r}x(n)$$

$$y(n)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{N}b_r e^{-j\omega r}}{\sum\limits_{r=0}^{M}a_k e^{-j\omega k}}x(n)=H\left(e^{j\omega}\right)x(n)$$

$$\Rightarrow Be^{j\omega n}e^{j\phi_y}=H\left(e^{j\omega}\right)Ae^{j\omega n}e^{j\phi_x}$$

$$\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{y(n)}{x(n)}=\frac{Be^{j\omega n}e^{j\phi_y}}{Ae^{j\omega n}e^{j\phi_x}}=\frac{Be^{j\phi_y}}{Ae^{j\phi_x}}=\frac{B(\omega)e^{j\phi_y}}{A(\omega)e^{j\phi_x}}$$

系统频率响应，
由结构参数决定

§2-5 离散时间信号和系统的频域分析

二、系统频率响应的两个性质

1.$H\left(e^{j\omega}\right)$是$\omega$的连续函数

2.$H\left(e^{j\omega}\right)$是$\omega$的周期函数，且周期为$2\pi$

§ 2-5 离散时间信号和系统的频域分析

三、系统频率响应和单位取样响应的关系

$$
\begin{cases}
y(n) = x(n) * h(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \\
\qquad = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega k} A e^{j\omega n} e^{j\phi_x} = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega k} x(n) \\
y(n) = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} b_r e^{-j\omega r}}{\displaystyle\sum_{r=0}^{M} a_k e^{-j\omega k}} x(n) = H\left(e^{j\omega}\right) x(n)
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\omega n}
$$

§2-5 离散时间信号和系统的频域分析

四、序列的频域表示法

1. $H\left(e^{j\omega}\right)$是$\omega$的连续函数

2. $H\left(e^{j\omega}\right)$是$\omega$的周期函数，且周期为$2\pi$

可以作傅氏级数展开

比较

$$\begin{cases} H\left(e^{j\omega}\right)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\boxed{C_n}e^{-j\omega n} \\ C_n=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} H\left(e^{j\omega}\right)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\boxed{h(n)}e^{-j\omega n} \\ h(n)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \end{cases}$$

$DTFT$离散时间傅里叶变换

$$\begin{cases} X\left(e^{j\omega}\right)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n} \\ x(n)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \end{cases}$$

五、输出序列与输入序列的傅氏变化间的关系

离散时间线性非时变系统输入序列x(n)，输出序列y(n)

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)h(n-k)$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)h(n-k)\right]e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n-k)e^{-j\omega n}$$

$$=\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)e^{-j\omega k}}\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n-k)e^{-j\omega(n-k)}}$$

凑公式表达形式

$$\Rightarrow\boxed{Y\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)}$$

$$\Rightarrow y(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

问题：

$$\begin{cases} Y\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=\boxed{\dfrac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}} \\ H\left(e^{j\omega}\right)=\boxed{\dfrac{y\left(n\right)}{x\left(n\right)}}=\dfrac{Be^{j\omega n}e^{j\phi_y}}{Ae^{j\omega n}e^{j\phi_x}}=\dfrac{Be^{j\phi_y}}{Ae^{j\phi_x}} \end{cases}$$

$$\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}?=\frac{y\left(n\right)}{x\left(n\right)}$$

问题：

$$\begin{cases} Y\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=\boxed{\dfrac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}} \\ H\left(e^{j\omega}\right)=\boxed{\dfrac{y\left(n\right)}{x\left(n\right)}}=\dfrac{Be^{j\omega n}e^{j\phi_y}}{Ae^{j\omega n}e^{j\phi_x}}=\dfrac{Be^{j\phi_y}}{Ae^{j\phi_x}} \end{cases}$$

$$\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}?=\frac{y\left(n\right)}{x\left(n\right)}$$

注意前提条件：

输入频率为ω的复指数序列

$$x\left(n\right)=Ae^{j\left(\omega n+\phi_x\right)}$$

输出频率也为ω的复指数序列

$$y\left(n\right)=Be^{j\left(\omega n+\phi_y\right)}$$

§2-5 离散时间信号和系统的频域分析

六、理想低通滤波器频率响应

一定要理解

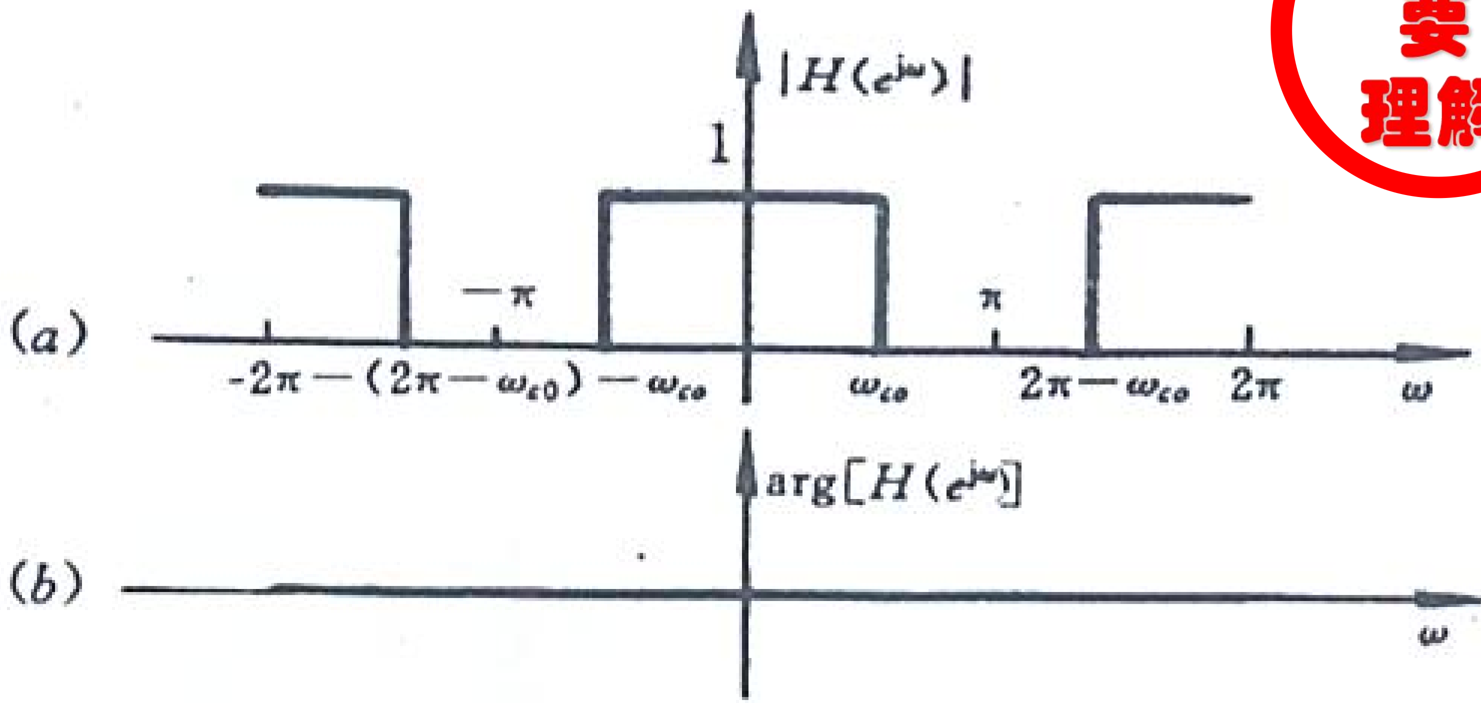

图 2—26　理想时域离散低通滤波器的频率响应

(a) 幅度响应　　(b) 相位响应

§2-5 离散时间信号和系统的频域分析

理想低通滤波器单位取样响应

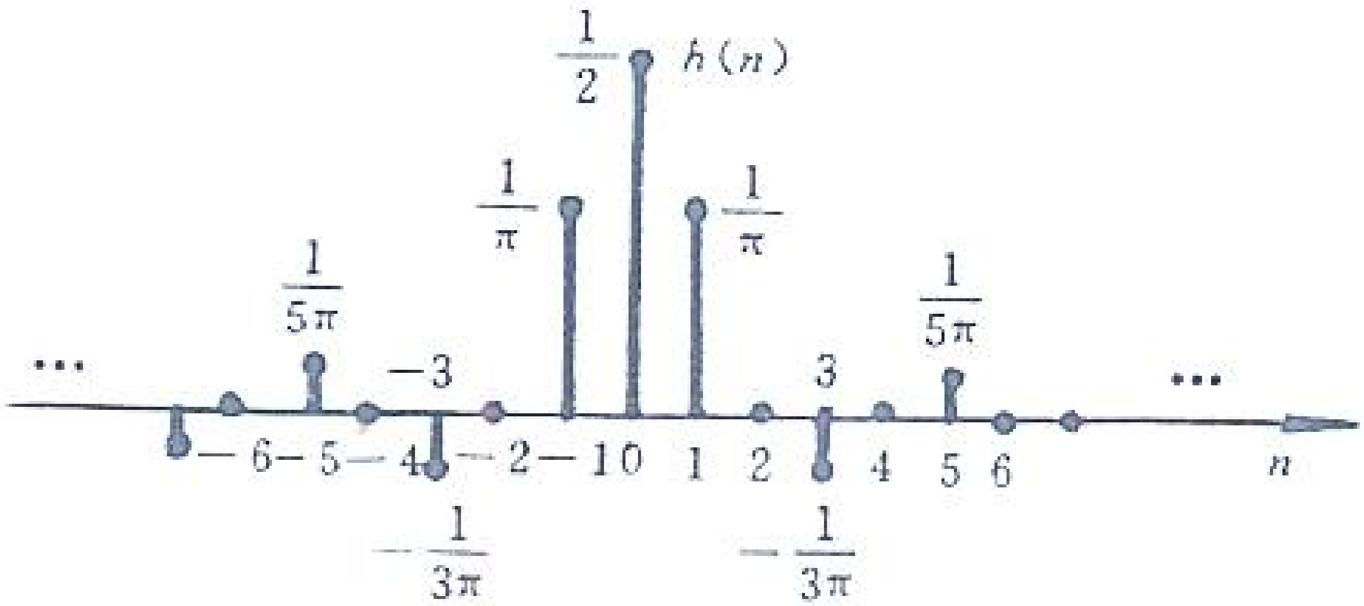

图 2−27　截止频率 $\omega_{c0}=\pi/2$ 之理想低通滤波器单位取样响应

§2-5 离散时间信号和系统的频域分析

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1 & \boxed{|\omega|\le\omega_{c0}} \\ 0 & \boxed{\omega_{c0}<|\omega|\le\pi}\end{cases}$$

注意：这是一个周期

$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{c0}}^{\omega_{c0}}e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin\omega_{c0}n}{\pi n}$$

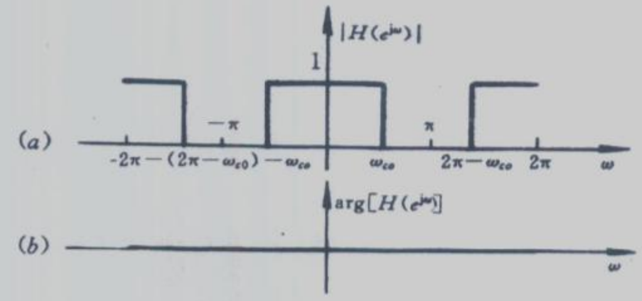

图 2—26 理想时域离散低通滤波器的频率响应
(a) 幅度响应 (b) 相位响应

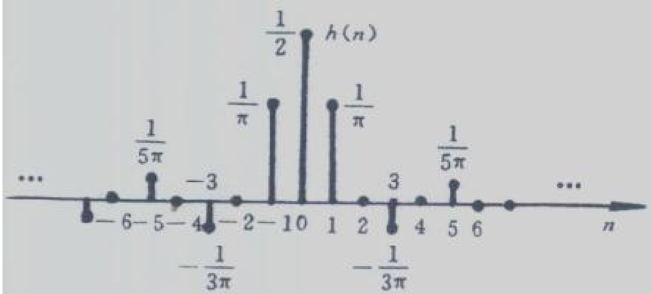

图 2—27 截止频率 $\omega_{c0}=\pi/2$ 之理想低通滤波器单位取样响应

§2-5 离散时间信号和系统的频域分析

有关数字滤波器的一些概念：
1.低频在0处，高频在π处；
2.频谱是连续周期的。

理想低通滤波器：
1.非因果；
2.不稳定。

伏笔：P32 指出理想低通滤波器h(n)不绝对可和，也即不绝对收敛，因此不稳定，但其$H(e^{jw})$存在？