수학 I

보충 교재

Spanning Tree

목차

서문

이 책은 서울과학고등학교의 수학 I 과정의 보충 교재로 쓰여졌다. 즉, 수학 I 과정을 공부하는 학생이 더 높은 과정에서 같은 내용이 어떤 방식으로 다루어지는지를 체험할 수 있도록 하는 것이 우리의 주 목적이였다. 수학 I 과정에서 들 수 있는 많은 의문들 중 '집합이 무엇인가?', '무한집합의 크기는 정의할 수 있을까?', '실수의 제대로 된 정의는 무엇일까?', '다항식은 함수인 것일까?', 와 같은 질문들은 현재 고등교육과정보다 훨씬 더 많은 이론이 필요하고, 우리는 필연적으로 해당 내용을 포함하였다. 그러나 많은 이론이라는 것은 통상적으로 고등 과정의 "어려움"과는 관련이 적다.

이 이론들의 정리들을 증명하는 과정에서 우리는 각 과목에서 자연스러운 질문이 무엇인지, 그리고 각 수학의 물체들에 대해서 "제대로" 생각하는 방법을 알게 된다. 이 책의 많은, 심지어는 대부분의 정리들은 증명 과정이 복잡하지 않다. 그러나 이런 정리들을 쌓아 나가면서, 우리는 시험시간에 우리가 총동원하는 놀라운 기교들과 도구들이 이룰 수 있는 것 보다, 훨씬 더 강력하고 아름다운 수학의 본모습을 보게 된다. 어떻게 대수적인 성질들과 해석적 성질들이 서로 다르고, 어떻게 서로 혼합하는지 보면서 우리는 "임의의 n차 다항식은 근이 최대 n개 있다"나, "변수 n개 방정식을 풀기 위해서 n개의 식이 필요하다"와 같은 문장들을 한층 깊게 이해하게 된다.

그러나 이 책에는 많은 이론만 쓰여진 것이 아니다. 몇 개의 신박한 아이디어를 쓰면 풀리는 고립된 문제들과, 이론과는 조금 동떨어져 있지만 유명한 정리들 (e.g. 바나흐-타르스키 역설) 또한 있으며, 순수한 수학의 이해를 주 목적으로 삼지 않는 독자의 흥미를 끌기 위하여 (사실 누가 그렇겠는가?) 다양한 이론들의 놀라운 적용들 까지 포함하려고 노력하였다. 수학 I의 내용이 현대수학의 관점으로 보면 매우 넓은 나머지, 이 책의 분량과 범위 또한 매우 넓어졌다. 한 주제를 깔끔하고 투명하게 설명하는 책을 쓰는 것 부터 매우 어려운데, 기초 집합론에서 해석학, 대수학의 제일 기본적인 부분들을 다루는 좋은 책을 쓰는 것은 거의 불가능한 일일 것이다.

(cf. Steenrod, Halmos, Schiffer, Dieudonne, *How to write mathematics*, pp. 21) 우리는 독자가 쉽게 원하는 부분을 읽을 수 있도록 정의들과 정리들을 적절하게 참조하고, 찾아보기를 제공하는 등의 노력을 기울였지만, 분명히 있을 설명상의 부족함과 결함들에 대해, 심심한 사과의 말을 드린다.

동아리 *SpanningTree*에서 진행한 이 프로젝트는, 다인이 참여한 만큼, 각 장의 작가들이 서로 다르다. 이로 인한 표기법이나 용어의 차이를 최소화하려고 노력한 반면, 관점이나 스타일의 차이는 수학을 볼 수 있는 (그리고 설명하는 방법의!) 여러 관점들을 보이기 위하여 보존하였다.

마지막으로, 이 책을 쓰는 데 많은 도움을 준 여러 친구들과 선생님들, 그리고 많은 서적들의 작가들에게 진정한 감사를 표한다.

SpanningTree
August 11, 2023
서울과학고등학교

단원 I

집합과 명제

챕터 1

집합의 크기

1.1 전사와 단사함수

두 수학 물체의 크기를 비교하는 것이 쓸모있는 경우가 많다. 예시로, 실수에서 초월수가 존재한다는 증명 (유리계수 다항식의 근이 아닌 수)이나, 작도 불가능한 수가 존재한다는 증명을 생각해보자. 이러한 수들에 관한 이론은 매우 깊으며 어려우나, 이 증명들은 집합의 크기에 대한 간단한 도구들로 쉽게 얻을 수 있다.

정수의 집합 $\mathbb{Z}$와 짝수들의 집합 $2\mathbb{Z}$의 크기가 같다는 힐베르트의 호텔 역설을 들어 봤을 것이다. 무한히 많은 사람들을 수용할 수 있는 호텔이 있으면, 이 호텔은 꽉 차 있어도, 각 사람을 자신의 방 번호의 두배인 방으로 옮기게 하여 다시 무한히 많은 빈 방을 만들 수 있다는 것이다. 그러나 우리 직관은 $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$이기 때문에, $2\mathbb{Z}$의 크기가 $\mathbb{Z}$보다 더 "작다"라고 한다. 그러면 절충해서, $A \subset B$이면, "집합의 크기"에 대해서, A가 B 이하라고 할 수 있을 것이다.

서로 연관이 없는 집합 A, B에 대해서는 집합의 크기를 어떻게 말할 수 있을까? 이 때 $A \subset B$라는 의미를 조금 더 확장해야 한다. 집합 A의 각 원소를 B의 각 원소로 보내는 함수 $f : A \to B$는 언제나 단사이다. 그러면 반대로, $f : A \to B$라는 단사함수가 존재할 때, 집합 A의 크기가 B보다 작다고 말할 수 있을 것이다.

연습문제 1.1.1. 두 집합 A, B가 유한하고, $f : A \to B$가 단사일 때, A의 원소의 개수가 B의 개수의 이하임을 증명하라.

정의 1.1.1. 집합 A, B에 대해서 $f : A \to B$인 단사함수가 존재할 때, A의 집합의 크기가 B이하라고 하고, $|A| \leq |B|$라고 표기한다.

단사함수의 “반대”인 전사함수는 어떨까? 유한한 집합에서 다시 생각해보면, $f : A \to B$인 전사함수가 존재하면 B가 A이하라고 할 수 있을 것이다.

정리 1.1.1. 두 집합 A, B에 대해서 A가 공집합이 아니면 다음은 동치이다.

(a) 단사함수 $f : A \to B$가 존재한다.

(b) 전사함수 $g : B \to A$가 존재한다.

더 나아가, 전사인 g가 존재하면 단사인 f를 모든 $x \in A$에 대해, $g(f(x)) = x$이도록 고를 수 있고, 단사인 f가 존재하면, 전사인 g를 모든 $x \in A$에 대해서, $g(f(x)) = x$이도록 고를 수 있다.

Proof. 먼저, 단사함수 $f : A \to B$가 존재한다고 가정하자. A의 원소 a'를 하나 선택하고, 함수 $g(x)$를 각 $b \in B$에 대해서, $b \in f(A)$이면, $g(f(a)) = a$로 정의하고, $b \notin f(A)$면, $g(b) = a'$으로 정의하자. 함수 f가 단사이므로 $g(f(a)) = a$로 정의하였을 때, g가 함수가 된다. 이 때 모든 $a \in A$에 대해서 $g(f(a)) = a$이므로, g는 전사이다.

반대로, 전사함수 $g : B \to A$가 존재한다고 가정하자. 위와 비슷한 작업으로, 각 $a \in A$에 대해서 $g(b) = a$를 하나 “골라” $f(a) = b$로 정의를 하고자 할 수 있다. 그러나 여기서 우리는 각 $a \in A$에 대해, $g^{-1}(\{a\})$인 원소를 하나 “선택”했다. 집합 A의 크기가 무지막지하게 클 수 있음에도 불구하고, 우리는 이렇게 하나하나 선택할 수 있을까? 여기서 우리가 생각할 수 있는 것은, 어떠한 집합 Y의 각 부분집합 $A \subset Y$에 대해서, $a \in A$를 선택해주는 함수의 존재성이 확보되면 충분하다. 그렇기 때문에 선택공리라고 불리는 다음 공리가 필요하다.

공리 1.1.2 (선택공리)**.** 모든 집합 Y에 대해서, 공집합이 아닌 $A \subset Y$에 대해 $f(A) \in A$를 만족하는 $f : 2^Y \to Y$가 존재한다.

이 공리는 참고로, 집합론의 다른 공리들만으로 증명을 하는 것이 불가능함이 알려져 있다. 반대로, 이 공리를 선택하였을 때, 다른 공리들의 모순이 없다고 가정시, 따로 생기는 모순 또한 없음이 증명되어 있다.

집합 B에 대해서 선택공리를 적용하자. 얻은 함수를 $\phi(A)$라고 하였을 때, $f(a) = \phi(g^{-1}(\{a\}))$로 정의하면 ($g$가 전사이므로 f는 함수이다), $f(a) = f(b)$일 때, $f(a) \in g^{-1}(\{a\})$이고 $f(b) \in g^{-1}(\{b\})$이다. 이 두 집합 동시에 포함된 원소 x는, $g(x) = a$와 $g(x) = b$를 만족하므로, $a = b$를 만족하며, $f(x) \in g^{-1}(\{x\})$이므로 $g(f(x)) = x$이다. ////

연습문제 1.1.2. 정리 1.1.1에서, 선택공리를 사용하여 전사함수 $f : X \to Y$가 존재하면 모든 $y \in Y$에 대해 $f(g(y)) = y$를 만족하는 함수 $g : Y \to X$가 존재함을 증명하였다. 반대로, 모든 전사함수에 대해 이런 "우역함수"가 존재한다고 가정하고, 선택공리를 증명하라. [*힌트*: 집합 X에 대하여, $2^X \times X \to \{0, 1\} \times X$인 "포함 판별기" 함수를 생각해 보아라.]

우리가 기호 $\leq$를 사용함으로써, 집합의 크기는 순서라면 만족하는 기본적인 성질들이 만족된다는 것을 암묵적으로 말하였다.

정리 1.1.2. (a) 모든 집합 A에 대해 $|A| \leq |A|$이다.

(b) 집합 A, B, C에 대해 $|A| \leq |B|, |B| \leq |C|$이면, $|A| \leq |C|$가 성립한다.

증명은 함수의 합성이 단사와 전사를 보존한다는 것에서 자명하다.

1.2 계산 도구들

다음 정리는 전단사함수가 집합의 크기와 가지는 연관을 보이면서도, 집합의 크기 계산에 큰 도움을 준다.

정리 1.2.1 (Schröder-Bernstein)**.** 두 집합 A, B에 대해 다음은 동치이다.

(a) $|A| \leq |B|$와 $|B| \leq |A|$가 성립한다.

(b) A와 B사이 전단사 함수가 존재한다.

이 때 우리는 $|A| = |B|$로 표기한다.

Proof. 전단사 함수가 존재하면 $|A| \leq |B|$와 $|B| \leq |A|$가 성립함은 자명하다. 즉 단사인 $f : A \to B$와 $g : B \to A$가 존재할 때, A와 B사이 전단사 함수가 존재함을 보이면 충분하다. 증명 아이디어는 다음과 같다. 결국 우리는 f와 g^{-1}를 사용해서 이 전단사 함수를 만들어야 할 것이다. 그런데 A에서 이 두 함수는 겹칠 것이다. g^{-1}를 정의할 수 있는 곳은 바로 $g(B)$이다. 그러면 $A \backslash g(B)$에서 f로, 그리고 $g(B)$에서 g^{-1}로 정의하면 될까? 안타깝게도, 이 경우에서 f와 g^{-1}의 치역이 겹칠 수 있다. 겹치는 경우를 생각해보면, $y \in g(B)$와 $x \in A \backslash g(B)$에서 $f(x) = g^{-1}(y)$, 즉 $g(f(x)) = y$인 경우이다. 이 경우를 없애기 위해서, f를 정의하는 곳을 $C_0 = A \backslash g(B)$라고 하였을 때, $C_0 \cup g(f(C_0))$으로 할 수 있다. 그러나 이 경우에도 문제가 발생한다. $g(f(x)) = y$인 경우가 $x \in g(f(C_0)) \backslash C_0$에 있을 때,

생길 수 있기 때문이다. 이 문제를 해결하기 위해서는, 모든 가능한 $(gf)^n(C_0)$을 제외해야 한다.

집합 $C_0 = A \backslash g(B)$, $C_{k+1} = g(f(C_k))$로 정의하고,

$$C = \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$$

로 정의하자. (여기서 이 합집합의 의미는, 모든 0이상의 자연수 k에 대하여 C_k들의 합집합을 뜻한다.) 함수 $h(x) : A \to B$를 $x \in C$에 대해서 $f(x)$로, $x \notin C$에 대해서 $g^{-1}(x)$로 정의하자. 만약 $x \notin C$이면 $x \notin C_0$이므로 이 함수는 잘 정의되었다. 함수 h가 단사임을 증명하자. $h(x) = h(y)$임이 성립할 때, $x, y \in C$거나 $x, y \in A \backslash C$이면, 이것은 자명이다 (g^{-1}은 $g(B)$에서, f는 A에서 단사이다). 만약 $x \in C, y \in A \backslash C$이면, 아까와 같이 $g(f(x)) = y$가 성립하나, x는 어느 C_k의 원소이고, 이 때 y는 C_{k+1}의 원소이므로, 모순이다. 함수 h가 전사임을 증명하자. 임의의 원소 $b \in B$에 대해서, $b \in f(C)$이면, 자명하고, $b \notin f(C)$이면 $g(b) \notin g(f(C))$이다. 이것은 g가 단사이므로 성립한다. 집합 $g(f(C))$는 1이상인 자연수 k에 대해서 C_k의 합집합이므로, $g(b) \in A \backslash C$이다 (C_0의 정의 확인!). 그러면 $h(g(b)) = g^{-1}(g(b)) = b$이므로 우리가 원했던 목적을 이루었다. ////

이제 가능한 질문 중 하나는, 임의의 두 집합 A, B에 대해서 $|A| \leq |B|$와 $|B| \leq |A|$중 하나가 성립하는지이다. 선택공리를 사용하면, 이것을 보일 수 있으나, 증명은 여기서 다루기에는 너무 길다. (Cf. Hungerford, *Algebra*, pp.18, Theorem 8.7) 우리는 대신 다음 정리를 고려할 것이다.

정리 1.2.2 (Cantor)**.** 임의의 집합 A에 대해서, $|A| < |2^A|$이다. 여기서 $|A| < |B|$란, $f : A \to B$인 단사함수가 존재하나, 전단사함수가 존재하지 않는다는 뜻이다.

Proof. 먼저 $|A| \leq |2^A|$는 $a \mapsto \{a\}$에서 자명하다. 전단사 함수 $f : A \to 2^A$가 존재한다고 가정하고, 모순을 이끌어내자.

이 증명의 아이디어는 대각화 논법이라고 주로 알려져 있다. 아이디어를 얻기 위해서는, 집합 A의 원소들을 세로줄에 쓰고, 가로줄에 각 $a \in A$에 대해서 $f(a)$를 써 보아라. $b, f(a)$에 해당하는 칸에는, $b \in f(a)$이면 1을, 아니면 0을 써넣어라. 예시로, 자료 1.1에 $A = \{1, 2, 3, 4\}$인 경우가 있다. 여기서 보면 당연히 f가 전사가 아닌 것을 볼 수 있으나 (원소의 개수를 사용하여!) 우리는 무한집합에서도 적용되는 방법으로 이것을 증명해야 한다. 먼저 이렇게 보면 A의 각 부분집합은 A에서 $\{0, 1\}$로 가는 함수인 것을 알 수 있다. 그러면, 어느 $f(a) : A \to \{0, 1\}$와도 다른 부분집합을 찾기 위해서는, 각각의 부분집합 $f(a)$와 한 점에서만 다르기만

	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$
1	0	1	0	0
2	1	0	1	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0

자료 1.1: 대각화 논법

한 함수 $g : A \to \{0,1\}$을 찾는 것과 같고, 이것을 찾는 제일 자연스러운 방법은, $g(a) = 1 - (f(a))(a)$로 정의하는 것이다. 다른 말로, 자료 1.1에서, 각 $i \in A$에 대해 $g(i)$를 대각선의 i번째 칸의 반대로 정의하는 것이다. 이것을 집합의 언어로 바꾸기 위해서는, $g(a) = 1$일 동치 조건은 $(f(a))(a) = 0$, 즉, $f(a)$안에 없는 a들의 집합인 것이다.

다음 집합을 정의하자.

$$A = \{a : a \notin f(a)\}$$

함수 $f : A \to 2^A$가 전단사함수이므로, 어느 a에 대해서 $f(a) = A$가 성립한다. 그러나 $a \in f(a)$이면, A의 정의상 $a \notin A = f(a)$이므로 모순, $a \notin f(a)$이면 A의 정의상 $a \in A = f(a)$이므로 모순이다. ////

연습문제 1.2.1. 무한집합 S에 대해서, $|\mathbb{N}| \le |S|$임을 보이시오. (무한집합이란, 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해서, $\{1, 2, \ldots, n\} = I_n$에 대해 $|I_n| < |S|$인 집합을 뜻한다.) [*힌트*:귀납적으로 단사함수를 만들어라]

연습문제 1.2.2. 무한집합 S와 유한집합 T에 대해, $|S \cup T| = |S|$임을 보이시오.

1.3 적용

이제 조금 덜 추상적인 상황으로 내려오자.

정의 1.3.1. 집합 A에 대해서, $|A| \le |\mathbb{N}|$이면, A를 가산이라고 한다. 가산집합이 아닌 집합을 비가산집합이라고 한다.

가산집합들은 많은 연산 아래에 닫혀있다.

정리 1.3.1. 자연수 $1 \le n$에 대해서, S_k $(1 \le k \le n)$이 가산집합이면,

$$\prod_{k=1}^{n} S_k$$

또한 가산집합이다.

Proof. 각 성분에 대해서 자연수로 가는 단사함수를 적용하면, 모든 S_k가 $\mathbb{N}$이라고 가정해도 충분하다. 서로 다른 소수 $p_1, \ldots, p_n$을 선택하고, 함수 $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$을

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{k=1}^{n} (p_k)^{a_k}$$

로 정의하면, 이 함수는 단사함수이다. ////

따름정리 1.3.1.1. 각 자연수 $k \in \mathbb{N}$에 대해서, S_k가 가산집합이면,

$$S = \bigcup_{k=0}^{\infty} S_k$$

또한 가산이다.

Proof. 각 k에 대해서 $f_k : \mathbb{N} \to S_k$인 전사함수를 얻을 수 있다. 이 때, $f : \mathbb{N}^2 \to S$를 $f(x, y) = f_x(y)$로 정의하면, f는 전사이고, 정리 1.3.1를 $n = 2$로 사용하고 정리 1.1.1를 적용하면 된다. ////

정리 1.3.2. 실수 집합은 $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}|$를 만족한다.

Proof. 아직은 실수를 제대로 정의하지 않았기 때문에, 엄밀한 증명은 어렵다. 먼저, 실수의 크기가 $[0, 1]$의 크기와 같음을 보이자. $x > 2$일 때 $1/x$를, $0 < x \leq 2$일 때 $1 - x/4$를 사용하면 $(0, \infty)$의 실수를 $(0, 1)$로 일대일 대응할 수 있다. 비슷한 방법으로 $(-\infty, 0)$을 $(1, 2)$로, 그리고 0을 1로 대응하고 다시 일차함수를 적용하면, $\mathbb{R} \to (0, 1)$인 단사함수가 만들어 졌고, $[0, 1]$의 각 원소를 $\mathbb{R}$에 대응하는 함수 또한 단사이므로, 정리 1.2.1이 적용된다. (이것 말고도 다양한 방법이 있다.)

우리는 다음 사실을 가정할 것이다. 모든 $[0, 1]$의 실수는 2이상의 자연수 p에 대해서 p진법의 소수로 나타낼 수 있고, 이 나타내는 방법이 유일하지 않은 경우는 $p - 1, p - 1, \ldots$로 끝나는 경우와, $0, 0, \ldots$로 끝나는 경우 밖에 없다.

모든 성분이 1 또는 0인 수열의 집합은 $2^{\mathbb{N}}$으로 볼 수 있다. 이러한 각 수열을 3진법의 소수로 나타내면 $2^{\mathbb{N}}$에서 $[0, 1]$로 가는 단사함수가 만들어 졌다. 반대로 $2^{\mathbb{N}}$의 각 수열은 2진법의 소수로 생각하면 $[0, 1]$로 가는 전사함수가 되므로, $2^{\mathbb{N}}$의 크기는 $[0, 1]$과 정리 1.2.1에 의해서 같다. ////

정리 1.3.3. 유리수 집합은 $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$을 만족한다.

Proof. 모든 유리수는 0을 제외하고, 서로소인 자연수 $0 < a, b$와 $c \in \{0, 1\}$에 대해서 $(-1)^c(a/b)$로 유일하게 표현가능하고, $2^c 3^a 5^b$는 $\mathbb{N}^3$으로 가는 단사함수이다. ////

즉 우리는 정리 1.3.2과 정리 1.3.3에서 유리수가 아닌 실수의 존재성을 증명하였다. 그러나 이 테크닉은, 이 절 앞에서 말했던 것과 같은 훨씬 다양한 수들의 존재성을 증명하는데 사용할 수 있다.

연습문제 1.3.1. 평면 $\mathbb{R}^2$에서 점 $(0,0),(1,0)$이 주어졌을 때, 각 단계에서 다음 5가지 작업중 하나를 사용하여 선, 점 또는 원을 그린다. 이때 유한한 단계 후 도달할 수 있는 평면의 점을 작도 가능한 점이라고 한다. 5가지 작업은 다음과 같다.

(i) 주어진 두 점을 지나는 직선을 그린다.

(ii) 주어진 두 점중 하나를 중심으로, 하나를 둘레 위에 가지는 원을 그린다.

(iii) 두 직선의 교점을 찍는다.

(iv) 직선과 원 사이의 교점(들)을 찍는다.

(v) 원과 원 사이의 교점을 찍는다.

(a) 자연수 k에 대해서, k번째 단계내에 작도 가능한 점이 유한함을 보이시오.

(b) 평면에 작도 불가능한 점이 존재함을 보이시오.

(c) 더욱 더 일반적으로, 시작하는 점들이 $(0,0)$와 $(1,0)$이 아닌 어떤 가산집합 S로 주어졌을 때, 작도 불가능한 점이 존재함을 보이시오.

연습문제 1.3.2. 모든 계수가 유리수인 다항식의 근인 수를 대수적인 수라고 한다.

(a) n차 다항식에 근이 최대 n개 까지 있음을 보이시오.

(b) 대수적인 수가 아닌 수 (초월수라고 한다)가 실수에 존재함을 보이시오.

챕터 2

집합의 연산

이 장에서 우리는 함수들의 합성을 합성기호를 생략하고 표기할 것이다. 즉 $g \circ f$를 gf로 표기한다. 또한 집합 A에 대한 항등함수를 우리는 1_A로 표기한다.

2.1 곱집합과 합집합

집합 A와 B가 있으면 우리는 $A \cup B$를 합집합, $A \times B$를 곱집합이라고 한다. 그러나 $A \cap B$가 공집합이 아닌 경우, $A \cup B$는 우리가 자연수 등에서 말하는 합과의 의미가 조금 다르기 때문에, 다음을 정의하자.

정의 2.1.1. 인덱스 I에 대해서 각 $i \in I$에 대해 집합 A_i가 존재할 때, A_i들의 분리합집합(Disjoint union)을 다음과 같이 정의한다.

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \{(a, i) : a \in A_i\}$$

이 때 각 A_i가 다른 A_j와 동떨어져, 분리합집합에 포함되어 있음을 볼 수 있다. 이 포함의 관계는 1장의 첫 문단에서와 같이 단사함수로 나타낼 수 있다. 즉 단사함수 $\iota_i : A_i \to A$가 각 $i \in I$에 대해서 존재한다. 이 함수를 식으로 나타내자면 다음과 같다.

$$\iota_i(a) = (a, i)$$

이 단사함수들은 $\bigsqcup A_i$에 정의된 함수를 각 A_i에 정의된 함수로 나누어서 생각할 수 있게 해준다.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "f_i"'] & \bigsqcup A_i \arrow[dl, "f"] \\ C & \end{tikzcd}$$

자료 2.1: 분리합집합의 표현

정리 2.1.1. (a) 임의의 집합 C와, 함수 $f_i : A_i \to C$에 대하여, 모든 $i \in I$에 대해 $f\iota_i = f_i$가 성립하는 함수 $f : \bigsqcup A_i \to C$가 유일하게 존재한다 (자료 2.1을 참고하라).

(b) 반대로, 위의 성질을 만족하는 임의의 두 집합 A, A'는 서로간에 전단사함수가 존재한다.

Proof. 분리합집합 $\bigsqcup A_i$의 각 원소들은 (a, i)꼴이다. 각 (a, i)에 대해서, $f((a, i)) = f_i(a)$로 정의하면, 바로 이 함수가 원하는 성질을 가짐이 확인된다. 반대로 함수 f가 이 성질을 만족한다면, 각 i에 대해서 a가 A_i의 임의의 원소일 때, $f((a, i)) = f_i(a)$를 만족해야 한다. 모든 $\bigsqcup A_i$의 원소는 어떤 i에 대해서 $\iota_i(A_i)$에 포함되므로, f가 모든 원소에 대해 결정된다.

반대로 이 조건을 만족하는 집합 A, A'와 $\iota_i : A_i \to A, \iota'_i : A_i \to A'$이 존재한다고 가정하자.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "\iota'_i"'] & A \arrow[dl, shift right, "f"'] \\ A' \arrow[ur, shift right, "g"'] & \end{tikzcd}$$

자료 2.2: 정리 2.1.1의 유일성

집합 A, A'에 대한 가정에 의해 자료 2.2가 가환이도록 하는 (즉 모든 경로에 대한 함수의 합성이 같은) 함수 f, g를 얻을 수 있다. 이 때, 함수 $gf : A \to A$를 고려하자. 이 함수는 모든 i에 대해 $gf\iota_i = g\iota'_i = \iota_i$인 성질을 가진다. 그러면 각 집합 A_i에 대해서 $gf\iota_i : A_i \to A$를 가지고 A의 성질을 사용하라. 모든 i에 대해 $gf\iota_i = h\iota_i$인 함수 $h : A \to A$가 유일하게 존재함을 볼 수 있다. 그러나 A에 대한 항등함수 1_A와 gf 모두 h가 될 수 있다. 즉 $gf = 1_A$이다. 반대로 적용하면, $fg = 1'_A$임을 볼 수 있으므로, f, g는 서로의 역함수이고, 각각 전단사함수이다. ////

정리 2.1.1의 조건은 오직 집합과 함수들만을 사용해 이루어졌다. 그러면 모든 화살표들을 뒤집으면 어떻게 될까?

정의 2.1.2. 인덱스 I에 대해서 각 $i \in I$에 대해 집합 A_i가 존재할 때, A_i들의 곱집합(Product set)을 다음과 같이 정의한다.

$$\prod A_i = \{f : f : I \to \cup A_i, f(i) \in A_i\}$$

특수한 경우로, $A \times B$는 $f : \{0, 1\} \to A \cup B$이고 $f(0) \in A, f(1) \in B$인 함수들의 집합이다. 근본적으로 순서쌍과 다름이 없으나, 이렇게 정의하는 것은 I가 무한집합일 때 이 정의가 사용하기 쉽기 때문이다. 곱집합의 원소 x에 대해서 우리는 주로 $x(i)$를 x_i로 표기한다. 또한, 우리는 $\pi_i : \prod A_i \to A_i$를 다음과 같이 정의한다.

$$\pi_i(x) = x_i = x(i)$$

즉 한국어로, π_i는 x의 i번째 성분을 가지고 오는 함수이다.

정리 2.1.2. (a) 임의의 집합 C와 함수 $f_i : C \to A_i$에 대하여, 모든 $i \in I$에 대해 $\pi_i f = f_i$가 성립하는 함수 $f : C \to \prod A_i$가 유일하게 존재한다 (cf. 자료 2.3).

(b) 반대로, 위의 성질을 만족하는 두 집합 A, A'사이에 전단사함수가 존재한다.

$$\begin{tikzcd}
A_i & \prod A_i \arrow[l, "\pi_i"'] \\
C \arrow[u, "f_i"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

자료 2.3: 곱집합의 표현

Proof. 각 $x \in C$에 대하여, $\pi_i(f(x)) = f_i(x)$가 모든 i에 대해 성립해야 하므로, $f(x)$를 i번째 성분이 $f_i(x)$인 함수로 정의하면 된다. 반대로, 모든 $x \in C$에 대해 $\pi_i(f(x)) = f_i(x)$를 만족하면, $f(x)$의 i번째 성분이 $f_i(x)$로 고정되므로, 유일성 또한 확인된다.

연습문제 2.1.1. 정리 2.1.2의 유일성 부분을, 정리 2.1.1와 같은 방법을 통해 증명하여라 (cf. 자료 2.4).

////

$$\begin{tikzcd} A_i & A \arrow[l, "\pi_i"'] \arrow[dl, shift left, "g"] \\ A' \arrow[u, "\pi_i'"] \arrow[ur, shift left, "f"] & \end{tikzcd}$$

자료 2.4: 정리 2.1.2의 유일성

정리 2.1.1와 정의 2.1.2의 유일성 증명은 집합들의 원소과는 관련 없이, 집합들과 사이의 함수들의 성질만을 사용하였다. 이것은 범주론으로 나중에 이어진다.

2.2 몫집합

수학에서는 어떤 집합에서 특정한 원소들을 구분하지 않고 싶을 때가 있다. 예를 들어서, 정수들의 집합 $\mathbb{Z}$에서 우리는 $x \pmod p$를 생각할 때, p의 배수 차이나는 원소들을 우리는 한 원소로 취급한다. 이런 생각을 할 수 있게 해주는 도구가 바로 집합의 몫을 취하는 것이다.

2.3 순서

먼저, $a = b$말고도 두 원소 사이의 다양한 관계 (예시로, $a = b \pmod p$)들을 생각해야 할 때가 있다.

정의 2.3.1. 두 집합 A, B 사이의 관계 $\sim$이란, $S \subset A \times B$를 뜻한다. 이 때 우리는 $a \sim b$와 $(a, b) \in A \times B$를 동치로 표기한다.

정의 2.3.2. 다음 공리들을 만족하는 관계 $\leq$를 부분

2.4 선택 공리

선택 공리의 결과들은 다양한 꼴로 표현할 수 있다.

2.5 Banach-Tarski Paradox

바나흐-타르스키 역설은 선택 공리(공리 1.1.2)를 가정하면 구를 몇 개의 조각으로 쪼갠 후 이 조각들을 재조합해 원래 구와 같은 크기의 구 2개를 만들 수 있다는 정리이다.

정의 2.5.1. $S, T \in \mathbb{R}^n$에 대해 S를 적당히 회전이동과 평행이동하여 T가 되게 할 수 있을 때, $S \sim T$로 표기하자.

연습문제 2.5.1. $\sim$은 동치 관계임을 보여라.

정의 2.5.2. $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset, \bigcup A_i = A$일 때 $\bigsqcup A_i = A$로 표기하고, A_i들을 A의 분할이라고 한다.

참고. $\bigsqcup$ 기호는 일반적으로 정의 2.1.1를 말함에 유의하라. 이 표기법은 집합끼리 서로 겹치지 않을 때 분리합집합에서 인덱스 부분을 사실상 무시해도 된다는 아이디어를 담고 있다. 일반적으로는 표기의 남용(abuse of notation)이지만 본 절에서는 단순성을 위해 사용할 것이다.

정의 2.5.3.

정리 2.5.1.

챕터 3

클래스와 기수

3.1 용어

정의 3.1.1. 다음 기호들을 사용하자.

$$2^A = \{S : S \subset A\} \tag{3.1}$$

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} \tag{3.2}$$

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : f : I \to A_i\} \tag{3.3}$$

$$A^B = \{f : f : B \to A\} \tag{3.4}$$

$$\emptyset = \{\} \tag{3.5}$$

$$B \backslash A = \{b : b \in B, b \notin A\} \tag{3.6}$$

정의 3.1.2. (a) $\in$과 $=$가 정의되는 수학적인 물체들을 클래스라고 한다.

(b) 클래스 A, B에 대해서 $A \subset B$를 $a \in A \implies a \in B$로 정의한다.

(c) 클래스 A, B에 대해서 $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$가 성립한다.

(d) 클래스 A에 대해서 클래스 B가 존재해 $A \in B$이면 A를 집합이라고 한다.

(e) 모든 집합에 대한 명제 $p(x)$에 대해서 $a \in A \iff p(a)$인 클래스가 존재한다.

(f) 클래스 $i \in I$와 집합들 A_i에 대해서 $\cup_{i \in I} A_i$와 $\cap_{i \in I} A_i$도 클래스이다.

(g) A, A_i, I가 집합이면 $\cup_{i \in I} A_i$, $\cap_{i \in I} A_i$와 2^A도 집합이다.

참고. 클래스에 대한 이론은 너무 복잡해서 공리를 통해 증명하는 과정은 거치지 않았으나, 기수를 정의하기 편하게 하기 위해서 도입하였다.

3.2 선택공리

공리 3.2.1 (선택공리)**.** 모든 집합 A에 대해서 $f : 2^A \to A$이고 $S \neq \emptyset$이면 $f(S) \in S$인 f가 존재한다.

정의 3.2.2. 클래스 S의 모든 원소에 대해서 다음을 만족하는 관계 $\leq$를 부분 순서라고 하자.

(a) $s \leq s$

(b) $a \leq b,\ b \leq a \implies a = b$

(c) $a \leq b,\ b \leq c \implies a \leq c$

만약 $a \leq b,\ a \neq b$이면 $a < b$로 표기한다.

정의 3.2.3. (a) 부분 순서가 있는 집합 $(S, \leq)$에 대해서 부분집합 T에 대해 모든 $a, b \in T$에 대해 $a \leq b$ 이거나 $b \leq a$이면 T를 사슬이라고 하자.

(b) 어떤 부분 집합 T에서 모든 $t \in T$에 대해서 $t \leq a$면 a를 T의 상계라고 한다.

(c) $a \leq b \implies b = a$인 원소 a를 극대라고 한다.

예시. (a) 자연수 집합에서 $a \leq b \iff a \mid b$라고 정의하면 $\leq$는 부분 순서이다.

(b) 위의 부분 순서를 $\{2, 3, 5, 7\}$의 집합에 주면, 모든 원소는 극대이다.

(c) $\mathbf{R}^2$에서 $a \leq b \iff a_1 \leq b_1,\ a_2 \leq b_2$로 정의하면, $\leq$는 부분 순서이다.

(d) 위의 경우에서 $S = \{(x, 4) : x \in \mathbf{R}\}$로 정의하면 S는 상계가 없는 사슬이다.

정리 3.2.1 (초른의 보조정리)**.** 공집합이 아닌 부분 순서가 있는 집합 $(S, \leq)$에 대해서, 모든 사슬이 상계를 S에서 가지면 S에 극대원소가 하나 존재한다.

참고. 위의 정리의 증명은 공리 3.2.1에서 증명 가능하나, 길어서 생략한다.

3.3 기수

정의 3.3.1. 어떤 클래스 A에서 다음을 만족하는 관계를 동치관계라고 한다.

(a) $a \sim a$

(b) $a \sim b \iff b \sim a$

(c) $a \sim b,\, b \sim c \implies a \sim c$

예시. (a) 모든 $\mathbf{R}^2$에 있는 삼각형들의 집합에서 닮음은 동치관계이다.

(b) $\mathbf{Z}$에서 $p \mid a - b \iff a \sim b$는 동치관계이다.

정의 3.3.2. 클래스 A의 원소들에 동치관계 $\sim$이 존재할 때, $[a] = \{b : b \sim a, b \in A\}$로 정의하자.

정리 3.3.1. (a) 클래스 A에 대해서 $[a] = [b]$이거나 $[a] \cap [b] = \emptyset$이다.

(b) 집합 A에 대해서 $A = \cup_{a \in A}[a]$이다.

정리 3.3.2. 모든 집합의 클래스 S에 대해서 집합 A와 B에 대해서 $A \sim B$를 A와 B사이의 일대일 대응이 존재하는 것으로 정의하면, $\sim$은 동치관계이다. 이것을 크기가 같다고 정의하자.

정의 3.3.3. 집합 S가 어떤 집합 $S_n = \{1, 2, \ldots, n\} = \{m : m \in \mathbf{N}, 1 \le m \le n\}$와 크기가 같으면, S가 유한하다고 하자. S가 유한하지 않으면 무한하다고 하자.

정의 3.3.4. 집합 T에 대해서 T의 기수를 크기가 같음에 대한 동치관계에서 $[T]$로 정의하자.

(a) 기수 α, β에 대해서 $[A] = \alpha, [B] = \beta$이면 $\{(a, 0) : a \in A\} \cup \{(b, 1) : b \in B\}$의 기수를 $\alpha + \beta$로 정의하자.

(b) 기수 α, β에 대해서 $[A] = \alpha, [B] = \beta$이면 $\{(a, b) : a \in A, b \in B\}$의 기수를 $\alpha\beta$로 정의하자.

(c) 기수 α, β에 대해서 $[A] = \alpha, [B] = \beta$이면 B^A의 기수를 β^α로 정의하자.

정리 3.3.3. 위의 연산들은 A, B의 선택에 관계없이 같은 결과를 가진다.

Proof. 모든 선택 $(A,\ B), (A',\ B')$에 대해서, $f : A \to A',\ g : B \to B'$인 일대일 대응이 존재한다.

(a) 먼저 다음을 잡자.

$$S = \{(a, 0) : a \in A\} \cup \{(b, 1) : b \in B\} \tag{3.7}$$

$$S' = \{(a, 0) : a \in A'\} \cup \{(b, 1) : b \in B'\} \tag{3.8}$$

이 때, $h : S \to S'$를 다음과 같이 정의하자.

$$h((a, n)) = \begin{cases} (f(a), 0) & n = 0 \\ (g(a), 1) & n = 1 \end{cases} \tag{3.9}$$

그러면 h가 일대일 대응임이 쉽게 확인된다.

(b) 다음 함수 $h : A \times B \to A' \times B'$를 잡자.

$$h((a, b)) = (f(a), g(b)) \tag{3.10}$$

일대일 대응임을 역시 쉽게 확인할 수 있다.

(c) 함수 $h : B^A \to B'^{A'}$를 다음과 같게 잡자.

$$h(\tau) = \left(a \mapsto g\left(\tau\left(f^{-1}(a)\right)\right)\right) \tag{3.11}$$

역시 쉽게 확인된다.

////

참고. α, $\beta < \infty$일 경우 위의 연산들은 자연수 (0 포함)에서 우리와 친숙한 연산들과 맞는 것 (0^0 제외)을 확인 할 수 있다. α, β가 무한일 경우 이제 어떤 결과가 나오는지 확인해보는 것이 이 문서의 목적이다.

정의 3.3.5. $[A] \leq [B]$를 $f : A \to B$인 일대일 함수가 존재함과 동치로 정의하자.

보조정리 3.3.4. $A \subset B$이면 $[A] \leq [B]$이다.

Proof. 항등함수를 고려하면 자명. ////

보조정리 3.3.5. $f : A \to B$인 전사함수가 있음과 $[B] \leq [A]$은 동치이다.

Proof. 각 B에 대해서 $\{a : a \in A, f(a) = b\}$는 공집합이 아니다. 공리 3.2.1에 의해서 $h : 2^A \to A$이고 $S \neq \emptyset$이면 $h(S) \in S$인 f가 존재한다. 이때 $g : B \to A$에서 $g(b) = h(\{a : a \in A, f(a) = b\})$로 정의하자. $g(b) = g(a) = x$이면, $f(x) = b, f(x) = a$이므로 $a = b$이다.

반대로, $[B] \leq [A]$이면 $h : B \to A$인 일대일 함수가 존재한다. B가 공집합이면 공허하고, 아니면, $b \in B$를 하나 골라서 $f : A \to B$를

$$f(x) = \begin{cases} h^{-1}(x) & h^{-1}(x) \neq \emptyset \\ b & h^{-1}(x) = \emptyset \end{cases} \tag{3.12}$$

로 정의하면 전사함수이다. ////

정리 3.3.6 (Schröder—Bernstein)**.** $[A] \leq [B]$, $[B] \leq [A] \implies [A] = [B]$

Proof. 일대일 함수 $f : A \to B$, $g : B \to A$가 존재한다. 각 $a \in A$에 대해서 $g^{-1}(a)$는 원소 개수가 1개 이하이다. 만약 원소가 하나 있으면, $f^{-1}(g^{-1}(a))$또한 원소 개수가 1개 이하이다. 이것을 반복하면 언젠가는 공집합에 도달하거나, 이 과정이 끝나지 않을 수 있다. 이 과정이 끝나면, 그 끝난 원소를 원래 원소의 시조라고 하자.

$$A_1 = \{a : a \in A, \text{시조가 } A \text{ 에 존재}\} \tag{3.13}$$
$$A_2 = \{a : a \in A, \text{시조가 } B \text{ 에 존재}\} \tag{3.14}$$
$$A_3 = \{a : a \in A, \text{시조가 없음}\} \tag{3.15}$$
$$B_1 = \{b : b \in B, \text{시조가 } A \text{ 에 존재}\} \tag{3.16}$$
$$B_2 = \{b : b \in B, \text{시조가 } B \text{ 에 존재}\} \tag{3.17}$$
$$B_3 = \{b : b \in B, \text{시조가 없음}\} \tag{3.18}$$

로 정의하면 쉽게 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A, B_1 \cup B_2 \cup B_3 = B$가 확인되고, $h : A \to B$를

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A_1 \cup A_3 \\ g^{-1}(x) & x \in A_2 \end{cases} \tag{3.19}$$

로 정의시 일대일 대응임이 확인된다. ////

정리 3.3.7. $\leq$는 모든 집합의 클래스에서 부분 순서이다.

Proof. (a) $[A] \leq [A]$는 항등함수를 사용하면 확인된다.

(b) $[A] \leq [B]$, $[B] \leq [C] \implies [A] \leq [C]$는 $f : A \to B$, $g : B \to C$인 일대일 함수들이 있으므로 $g \circ f$를 사용하면 일대일 함수임이 확인된다.

(c) 정리 3.3.6.

////

정리 3.3.8. 모든 집합의 클래스에서 다음 중 하나가 성립한다.

$$[A] < [B], \quad [A] = [B], \quad [A] > [B] \tag{3.20}$$

Proof. A나 B가 공집합이면 자명하므로 아니라고 가정하자. 집합 $\mathscr{F} = \{(f, X) : X \subset A,\ f : X \to B$는 일대일 함수$\}$에 다음과 같이 부분 순서를 정의하자.

$$(f, X) \le (g, Y) \iff X \subset Y, \forall x \in X, f(x) = g(x) \tag{3.21}$$

그러면 이 순서는 부분 순서이다. 이 집합의 모든 사슬 $\mathscr{C} = \{(f_i, X_i)\}$에 대해서, $f : \cup X_i \to B$를 각 $x \in X_i$에 대해서 $f(x) = f_i(x)$로 정의하자.

만약 $x \in X_i, x \in X_j$이면 사슬의 성질에서 $(f_i, X_i) \le (f_j, X_j)$이거나 그 반대 순서가 성립하고, 각 경우 $f_i(x) = f_j(x)$이므로 $f(x)$가 잘 정의된다. 일대일 함수임은, $f(x) = f(y)$일 경우, $x \in X_i, y \in X_j$이고, 그러면 사슬의 성질에서 $x, y \in X_i$이거나 $x, y \in X_j$인데, 일반성을 잃지 않고 i라고 하면, $f_i(y) = f(y) = f(x) = f_i(x)$에서 $x = y$이다. 또한 모든 i에 대해서 $(f_i, X_i) \le (f, \cup X_i)$임은 쉽게 확인된다. 즉 모든 사슬이 상계가 있다. $\mathscr{F}$가 공집합이 아님은 X를 원소 한개 집합으로 잡으면 확인된다. 즉 극대원소 (g, X)를 얻을 수 있다.

$X = A$와 $g(X) = B$ 둘중 하나도 성립하지 않으면, $B \backslash g(X)$의 원소 b를 잡고, $A \backslash X$의 원소 a를 잡아서, h를 X에서 는 g로, $h(a) = b$로 하면 일대일 함수임이 확인된다. 즉 극대성에 모순이므로 $X = A$이거나 $g(X) = B$이다. 첫번째 경우 $[A] \le [B]$이고, 두번째 경우 $[B] \le [A]$이다. 정리 3.3.6를 사용하면 증명이 끝났다. ////

정리 3.3.9 (Cantor)**.** $[A] < [2^A]$

Proof. $[A] \le [2^A]$는 $x \mapsto \{x\}$로 쉽게 확인된다. 일대일 대응 f가 존재한다고 가정하자. $S = \{a : a \in A, a \notin f(a)\}$를 생각하면, $f(s) = S$인 s가 존재한다. 이때 $f(s) \in S$이여도 모순이고, $f(s) \notin S$여도 모순이다. ////

3.4 기수 연산

정의 3.4.1. $[\mathbf{N}] = \aleph_0$보다 작거나 같은 크기를 가지는 집합을 가산이라고 하자.

정리 3.4.1. 가산집합의 무한한 부분집합은 $\mathbf{N}$과 크기가 같다.

Proof. $\mathbf{N}$의 모든 부분집합은 최소원소를 가진다. (이 특성은 자연수의 정의에 포함되어 있다.) 일대일 대응을 사용하면 $\mathbf{N}$에서 증명하면 충분하다. 이 무한한 부분집합을 D_1이라고 하자. 이때 귀납적으로, $f(n)$을 D_n으로 정의하고, $D_{n+1} = D_n \backslash \{f(n)\}$으로 정의하자. 이때 f는 바로 일대일 함수임이 확인되고, 모든 $a \in D_1$에 대해서 a보다 작은 원소는 유한하므로, 최대 a번 후에 a가 대응됨을 볼 수 있다. ////

따름정리 3.4.1.1. α가 무한하면, $\alpha \geq \aleph_0$.

Proof. $\alpha \leq \aleph_0$이면 $\alpha = [A]$에서 $f : A \to \mathbf{N}$인 일대일함수가 존재한다. 그런데 $[f(A)] = [A]$이고, $f(A)$는 $\mathbf{N}$의 무한한 부분집합이므로 $\mathbf{N}$과 크기가 같다. ////

정리 3.4.2. (a) $[\mathbf{N}] + [\mathbf{N}] = [\mathbf{N}]$

(b) $[\mathbf{N}] \times [\mathbf{N}] = [\mathbf{N} \times \mathbf{N}] = [\mathbf{N}]$

(c) $[\prod_{i=1}^{n} \mathbf{N}] = [\mathbf{N}]$

(d) $[\mathbf{Q}] = [\mathbf{N}]$

(e) $D_i \in [\mathbf{N}] \implies \cup_{i=1}^{\infty} D_i \in [\mathbf{N}]$

Proof. (a) $\{(n, k) : n \in \mathbf{N}, k \in \{0, 1\}\}$에서 $f((n, k)) = 2n + k$로 정의하자. $(0 \in \mathbf{N})$

(b) $(n, m) \mapsto 2^n 3^m$과 $n \mapsto (n, 0)$을 사용하면, 정리 3.3.6에서 유도된다.

(c) 위 결과에 대해서 귀납법을 적용하면 된다.

(d) $a, b \in \mathbf{N}, b \neq 0, k \in \{0, 1\}$이 유일하게 존재해서 $(-1)^k \frac{a}{b}$이고 $\gcd(a, b) = 1$이다. 이때 $(a, b, k) \mapsto 2^a 3^b 5^k$는 일대일 함수이고, $n \mapsto n$은 반대로 가는 일대일 함수이다. 정리 3.3.6.

(e) 각 i에 대해서 일대일 대응 $f_i : D_i \to \mathbf{N}$을 정의하자. $f : \mathbf{N}_{>0} \times \mathbf{N} \to \cup_{i=1}^{\infty}$를 $f(i, k) = f_i(k)$로 정의하면 전사이다. 보조정리 3.3.5을 사용하고, $[\cup_{i=1}^{\infty}] \geq [\mathbf{N}]$은 자명이다. 정리 3.3.6.

////

정리 3.4.3. (a) $[A \cup B] \leq [A] + [B]$

(b) $[A] + [B] = [B] + [A]$

(c) $[A] + ([B] + [C]) = ([A] + [B]) + [C]$

(d) $[A][B] = [B][A]$

(e) $([A][B])[C] = [A]([B][C])$

(f) $([A] + [B])[C] = [A][C] + [B][C]$

Proof. 모두 다 적절한 일대일 대응을 만들면 해결된다.

(a) $(a, 0) \mapsto a, (b, 0) \mapsto b$를 쓰면 일대일 함수이다.

(b) $(a, 0) \mapsto (b, 0),\ (b, 1) \mapsto (a, 1)$.

(c) $(a, 0) \mapsto ((a, 0), 0),\ ((b, 0), 1) \mapsto ((b, 1), 0),\ ((c, 1), 1) \mapsto (c, 1)$

(d) $(a, b) \mapsto (b, a)$

(e) $((a, b), c) \mapsto (a, (b, c))$

(f) $((a, 0), c) \mapsto ((a, c), 0),\ ((b, 1), c) \mapsto ((b, c), 1)$

////

정리 3.4.4. 기수 $a \le b, c \le d$에 대해서 $a + c \le b + d,\ ac \le bd$이다.

Proof. 집합 A, B, C, D를 대응되게 잡고, 일대일 함수 $f : A \to B, g : C \to D$를 잡자. $(a, 0) \mapsto (f(a), 0),\ (c, 1) \mapsto (g(c), 1)$은 일대일 함수이다. $(a, c) \mapsto (f(a), g(c))$ 또한 일대일 함수이다. ////

정리 3.4.5. (a) $a^{b+c} = a^b a^c$

(b) $(ab)^c = a^c b^c$

(c) $(a^b)^c = a^{bc}$

Proof. (a) $f \mapsto (b \mapsto f((b, 0)), c \mapsto f((c, 1)))$

(b) $f \mapsto (c \mapsto f(c)_0, c \mapsto f(c)_1)$

(c) $f \mapsto ((b, c) \mapsto (f(c))\,(b))$.

////

정리 3.4.6. (a) $a \le b,\ c \le d \implies a^c \le b^d$

(b) $[2^A] = 2^a$

Proof. (a) 일대일 함수 $f : A \to B$, $g : C \to D$를 잡자. $h \mapsto f \circ h \circ g$는 일대일 함수이다.

(b) S를

$$f_S(s) = \begin{cases} 0 & s \notin S \\ 1 & s \in S \end{cases} \tag{3.22}$$

로 대응하면 집합의 정의에서 자명이다.

////

참고. 지금까지 증명했던 많은 정리들은 두 기수사이 연산이 자연수처럼 행동한다는 것을 보여준다. 이제 실제 이 기수들이 나타내는 집합들을 알고 있을때, 기수의 연산을 실제로 할 수 있는 도구들을 증명할 것이다.

보조정리 3.4.7. 무한집합 S에 대해서, $\cup_{D_i \in \Gamma} D_i = S$이고, $i \neq j \implies D_i \cap D_j = \emptyset$이며, $[D_i] = [\mathbf{N}]$인 $\{D_i\}, \Gamma$가 존재한다.

Proof. 위의 성질을 $\cup_{D_i \in \Gamma} D_i = S$ 빼고 만족하는 D_i들을 생각하면, $B = \cup_{D_i \in \Gamma} D_i$라 할 때, $\mathscr{F} = \{(B, \Gamma)\}$를 고려하자. 이 집합에 다음과 같이 부분 순서를 주자.

$$(B, \Gamma) \leq (B', \Gamma') \iff B \subset B', \Gamma \subset \Gamma' \tag{3.23}$$

따름정리 3.4.1.1에 의해서 $[D] = [\mathbf{N}], D \subset S$인 D가 존재한다. 즉 $(D, \{D\}) \in \mathscr{F}$이므로 $\mathscr{F}$는 비어있지 않다. $\mathscr{F}$의 모든 사슬 $\mathscr{C} = \{(B_i, \Gamma_i)\}$에 대해서, $(\cup_i B_i, \cup_i \Gamma_i)$가 상계임을 보일 것이다. 모든 $D_i, D_j \in \cup_i \Gamma_i$는 어떠한 Γ_k에 둘 다 포함되어 있으므로, $D_i \cap D_j = \emptyset$이다. 같은 이유로 $[D_i] = [\mathbf{N}]$이고, $\cup_i \cup_{D \in \Gamma_i} D = \cup_i B_i$는 자명하다. 즉 모든 사슬에 대해서 상계가 존재하므로 극대원소 (B, Γ)가 존재한다.

만약 $S \backslash B$가 무한집합이면, 따름정리 3.4.1.1에 의해서 $S \backslash B$의 가산 무한집합이 존재하고, 이 원소에 가져다 붙이면 극대에 모순이다. 즉 $S \backslash B$는 유한집합이다. 만약 이 집합이 비지 않았으면, $D \in \Gamma$를 하나 선택해서, $D' = D \cup (S \backslash B)$로 정의하자. 그러면

$$[\mathbf{N}] = [\mathbf{N}] + [\mathbf{N}] \geq [D] + [S \backslash B] \geq [D'] = [D \cup (S \backslash B)] \geq [D] = [\mathbf{N}] \tag{3.24}$$

에서 $[D'] = [\mathbf{N}]$이고, D 대신 D'을 넣으면 극대성에 모순이다. 즉 $S = B$이다.

////

정리 3.4.8. $[A]$가 무한하면, $[A][\mathbf{N}]=[A]$.

Proof. 보조정리 3.4.7에 의해서 $A=\cup_{i\in I}D_i$이고 $A\times\mathbf{N}=\cup_{i\in I}D_i\times\mathbf{N}$. 각 $f_i : D_i\times\mathbf{N}\to D_i$인 일대일 대응을 얻으면 $([D_i][\mathbf{N}]=[D_i])$, $A\times\mathbf{N}$의 각 원소에 대해서, 그 원소가 포함된 $D_i\times\mathbf{N}$의 f_i로 보내는 대응을 f라고 하자. D_i는 서로 교집합이 없으므로, $f(x)=f(y)$이면 어떤 i가 존재해 $f_i(x)=f_i(y)$이고, $x=y$이다. 또한 모든 $x\in D_i$에 대해서, ${f_i}^{-1}(x)$에 f를 보내면 f가 전사이다. 즉 $f:A\times\mathbf{N}\to A$는 일대일 대응이다. ////

따름정리 3.4.8.1. S가 무한하며, $[A]$가 유한하고 0이 아니면, $[S][A]=[S]$.

Proof. $[S]\le[S][A]\le[S][\mathbf{N}]=[S]$. ////

따름정리 3.4.8.2. $[A]\le[B]$이고 $[B]$가 무한하면, $[A]+[B]=[B]$.

Proof. $[B]\le[A]+[B]\le[B]+[B]=[B][\{1,2\}]=[B]$. ////

정리 3.4.9. A가 무한하면, $[A][A]=[A]$.

Proof. $\mathscr{F}$를 $B\subset A$이고, $f:B\to B\times B$인 일대일 대응이 있는 모든 (B,f)의 집합으로 정의하자. 부분 순서를 $(B,f)\le(B',f')\iff B\subset B',\forall x\in B,f'(x)=f(x)$로 정의하자.

A가 무한하므로, 따름정리 3.4.1.1에 의해서 가산 부분집합 D가 있고, $[D]=[D][D]$이므로 $\mathscr{F}$는 (D,f)를 가진다. 즉 $\mathscr{F}$는 비지 않았다.

모든 사슬 $\mathscr{C}=\{(B_i,f_i)\}$에 대해서, $B=\cup_iB_i$를 잡자. $f:B\to B\times B$를, 모든 $x\in B$에 대해서 x가 포함된 i에 대해 $f_i(x)$로 정의하자. 그러면 $x\in B_i$, $x\in B_j$이면 $f_i(x)=f_j(x)$이므로 잘 정의된다. 모든 $x\in B\times B$에 대해서 $x=(x_1,x_2)$이고, 둘다 어떤 B_i에 포함되어 있으므로 $x\in B_i\times B_i$이다. 즉 f는 전사이다. $f(x)=f(y)$이면, $f(x)$와 $f(y)$ 또한 어떤 B_i에 포함되어 있으므로, $f_i(x)=f_i(y)$이고 $x=y$이다. 즉 f는 일대일 대응이므로, (B,f)는 이 사슬의 상계이다.

극대원소 (M,g)를 얻자. 만약 $[M]\le[A\backslash M]$이면,

$$[M]\le[A]=[M]+[A\backslash M]=[M] \tag{3.25}$$

이므로 증명이 끝이다.

만약 $[M]<[A\backslash M]$이면, $M_1\subset A\backslash M$이 존재해서, $[M_1]=[M]$이다.

$$\begin{aligned}&(M\cup M_1)\times(M\cup M_1) && (3.26)\\&=(M\times M)\cup(M\times M_1)\cup(M_1\times M)\cup(M_1\times M_1) && (3.27)\end{aligned}$$

이고, $\mathscr{F}$의 성질에 의해 $[M][M] = [M]$이므로 마지막 3항의 합집합 M_2는 크기가 M과 같고, $(M \times M) \cap M_2 = \emptyset$이다. 즉

$$(M \cup M_1) \times (M \cup M_1) = (M \times M) \cup M_2 \tag{3.28}$$

인데,

$$g_1 : (M \cup M_1) \to (M \cup M_1) \times (M \cup M_1) \tag{3.29}$$

를, $x \in M$이면 g로 정의하고, $x \in M_1$이면, $[M_1] = [M_2]$에 의한 일대일 대응으로 정의한다. 그러면 $(M \cup M_1, g_1) \geq (g, M)$에서 극대성에 모순이다. ////

따름정리 3.4.9.1. $[A]$가 무한하면, $\prod_{i=1}^{n}[A] = [A]$.

Proof. 귀납법. ////

따름정리 3.4.9.2. $A_1, \ldots, A_n$이 공집합이 아닌 무한한 집합이고, $[A_i] \leq [A_n]$이면, $[\prod_{i=1}^{n} A_i] = [A_n]$.

Proof. $[A_n] \leq [A_1] \cdots [A_n] \leq [A_n] \cdots [A_n] = [A_n]$. ////

따름정리 3.4.9.3. A가 무한집합이라고 하자. A'를 A의 모든 유한한 부분집합의 집합이라고 하면, $[A'] = [A]$.

Proof. A'_n을 원소 n개의 부분집합의 집합이라고 하자.

$\{x_1, \ldots, x_n\} \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$을 고려하면, $[A'_n] \leq [A]$이다. 그러면 위의 일대일함수 f_n에서, $\cup_{n\geq 1} A'_n$에서 $a \mapsto (f(a), n)$을 하면, $[\cup_{n\geq 1} A'_n] \leq [A][\mathbf{N}]$이다. 일대일함수의 증명은 $(f_n(a), n) = (f_{n'}(a'), n')$이면 $n = n'$이고, $f_n(a) = f_n(a')$에서 쉽게 된다. 즉

$$[A] \leq [\cup_{n\geq 1} A'_n] \leq [A][\mathbf{N}] = [A] \tag{3.30}$$

////

3.5 적용

정리 3.5.1. $[\mathbf{R}] = [\{0,1\}]^{[\mathbf{N}]} = 2^{\aleph_0}$.

Proof. $f : \mathbf{R} \to (0,1)$를 탄젠트 등을 사용해서 일대일 대응을 만들 수 있다. $(0,1)$에서 모든 숫자는 이진법의 무한소수로 (유일하진 않지만) 나타낼 수 있고, 이것은 일대일 함수이다. 즉 $\mathbf{R} \leq [\{0,1\}]^{[\mathbf{N}]}$이다. 반대로, 3진법의 숫자로 $[\{0,1\}]^{[\mathbf{N}]}$를 대응하면, 이것은 일대일 함수이므로 $[\mathbf{R}] = [\{0,1\}]^{[\mathbf{N}]}$이다. ////

정리 3.5.2. $\aleph_0 = [\mathbf{N}]$, $\mathbf{c} = [\mathbf{R}] = 2^{\aleph_0}$이라고 하자.

(a) 모든 실수 수열의 집합의 크기는 $\mathbf{c}$과 같다.

(b) 모든 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$의 함수의 집합의 크기는 $2^{\mathbf{c}}$과 같다.

(c) 모든 연속인 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$의 함수의 집합의 크기는 $\mathbf{c}$와 같다.

Proof. (a) $\mathbf{c}^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$.

(b) $\mathbf{c}^{\mathbf{c}} = (2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\mathbf{c}}$.

(c) 모든 유리수 점에서 함숫값이 정해지면, 연속함수는 $x_n \to x$이면 $f(x_n) \to f(x)$이다. 즉 연속함수에서 그 함수의 유리수에서 함숫값의 수열로의 대응은 일대일 함수이다. 즉 해당 집합을 S라고 하면 $[S] \le [\mathbf{R}]^{[\mathbf{Q}]} = \mathbf{c}^{\aleph_0} = \mathbf{c}$. 반대로 모든 상수함수는 연속이므로 $\mathbf{c} \le [S]$.

////

정리 3.5.3. 다음을 만족하는 함수 $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$이 존재한다. $n \to \infty$ 이면 (각 점에서) $f_n \to 0$이나, 어떠한 $\gamma_n \to \infty$에 대해서도 $\gamma_n f_n$는 어떤 점에서 수렴하지 않는다.

Proof. 0으로 수렴하는 모든 실수 수열은 모든 실수 집합의 부분집합이나, 첫 항을 마음대로 바꿀 수 있으므로 크기가 $\mathbf{c}$이다. 즉 $[0,1]$에서 0으로 수렴하는 모든 실수 수열의 일대일 대응이 존재한다. f_n을 $[0,1]$의 각 점에서 대응된 수열의 n번째 항으로 정의하자. 그러면 각 점에서 $n \to \infty$면 $f_n(x) \to 0$이다.

임의의 $\gamma_n \to \infty$에 대해서, t_n을 γ_n이 0이면 1로, 아니면 $|\gamma_n|^{-1/2}$로 정의하자. 그러면 $t_n\gamma_n \to \infty$이나, $t_n \to 0$이다. 어떠한 점 $x \in [0,1]$에서 $f_n(x)$은 t_n이므로, $\gamma_n f_n(x) \to \infty$이다. ////

챕터 4

명제와 수학기초론

4.1 불 대수

4.2 공리계

4.3 불완전성 정리

단원 II

실수와 복소수

챕터 5

대수적 구조: 군, 환, 체

5.1 연산의 성질

정의 5.1.1. 집합 S와 S 위에 주어진 이항연산(함수) $\cdot : S \times S \to S$에 대해,

(i) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$가 항상 성립한다면 $\cdot$을 결합적(associative)이라고, 또는 결합법칙(associativity)을 만족한다고 한다. $(a \cdot b) \cdot c$는 괄호 없이 $a \cdot b \cdot c$로 적어도 좋을 것이다.

(ii) $a \cdot b = b \cdot a$가 항상 성립한다면 $\cdot$을 가환적이라고(commutative), 또는 교환법칙(commutativity)을 만족한다고 한다.

(iii) $e \cdot a = a$(또는 $a \cdot e = a$)를 항상 만족하는 e가 존재한다면 e를 좌(우)항등원(identity)이라고 한다. 좌항등원이면서 우항등원인 원소를 (존재한다면) 항등원이라고 한다.

(iv) 항등원 e가 존재할 때, $r \cdot a = e$($a \cdot r = e$)인 원소 r이 존재한다면 r을 a의 좌(우)역원(inverse)이라고 한다. a의 좌역원이면서 우역원인 원소를 (존재한다면) a의 역원이라고 한다. a의 역원은 주로 a^{-1}로 표기한다.

챕터 6

정수론

6.1 정수론: 개요

실수와 복소수로 가는 길에 있어서 정수는 나눗셈이 불가능한 마지막 대수적 구조이다. 그렇기 때문에 몫과 나머지라는 특별한 연산이 생겨나고, 약수와 배수의 개념을 논할 수 있게 된다. 이를 일반화시킨 것이 환이라고 할 수 있다. 이제 정수가 갖는 여러 신기한 성질을 살펴보자.

정의 6.1.1. x 이하의 소수 개수를 $\pi(x)$로 표기한다.

정리 6.1.1 (Euclid)**.** 소수는 무한히 많다. 즉, $\pi(x)$는 발산한다.

Proof. 최대 소수 N을 가정하자. $N!+1$은 2 이상 N 이하의 약수를 가지지 않으므로 모순이다. ////

연습문제 6.1.1. n과 $n!+2$ 사이에 항상 소수가 존재함을 보여라.

물론 더 나은 결과가 존재한다.

정리 6.1.2 (Bertrand's postulate)**.** 2 이상의 n에 대해 n과 $2n$ 사이에 항상 소수가 존재한다.

정리 6.1.3 (Prime number theorem)**.** $\lim_{x\to\infty} \pi(x)\log x/x = 1$이다.

정리 6.1.4 (Dirichlet's theorem on arithmetic progressions)**.** 초항과 공차가 서로소인 등차수열에는 무한히 많은 소수가 존재한다.

챕터 7

실수

7.1 실수의 정의

우리는 실수라는 구조가 다음의 성질을 가지기를 바란다.

(i) 유리수들을 순서 성질과 대수적 성질들을 유지하면서 부분집합으로 가진다.

(ii) 적당한 극한들을 취할 수 있다.

여기서 두번째 조건인 '극한들을 취할 수 있다'를 생각해 보자. 유리수에서 성립하지 않으나 우리가 친숙하게 알고 있는 극한의 정리에는 단조수렴정리가 있다. 즉 단조수렴정리가 성립하고, 순서와 대수적 성질들이 있으며, 유리수를 이러한 성질들이 보존되도록 부분집합으로 가지는 집합을 실수라고 할 수 있을 것이다.

정의 7.1.1. 다음 조건들을 고려하자.

(a) 이항연산 $+, \times$와 관계 $\leq$를 가진다.

(b) 모든 원소 a, b, c에 대해서 $a \leq a$가 성립하고, $a \leq b$와 $b \leq a$가 성립하면 $a = b$이며, $a \leq b$, $b \leq c$가 성립하면 $a \leq c$가 성립한다.

(c) 임의의 두 원소 a, b에 대해서, $a \leq b$ 또는 $b \leq a$가 성립한다.

(d) 연산 $+$와 $\times$는 교환법칙과 결합법칙을 만족하고, 분배법칙 $a(b+c) = ab+ac$ 또한 성립한다.

(e) 연산 $+$에 대한 항등원 0과, $\times$에 대한 항등원 1이 있고, $0 \neq 1$이다.

(f) 모든 원소에 대해서 $+$에 대한 역원이 존재하며, 0이 아닌 원소에 대해서 $\times$에 대한 역원이 존재한다.

(g) 원소 a, b, c에 대해서, $b \leq c$이면 $a + b \leq a + c$가 성립한다.

(h) 원소 a, b에 대해서, $0 \leq a, b$이면 $0 \leq ab$가 성립한다.

(i) 유리수 $\mathbb{Q}$를 부분집합으로 가지고, $+$, $\times$ 그리고 $\leq$를 그대로 가진다.

(j) 단조수렴정리가 성립한다. 즉, 모든 단조이고 유계인 수열이 수렴한다. (cf. 정의 7.1.2)

조건 (b)와(c)를 만족하는 관계 $\leq$를 가지는 집합을 전순서집합(Totally ordered set)이라고 한다. 또한, 조건 (d), (e)와 (f)을 가지는 집합을 체(Field)라고 한다. 전순서집합이면서 체이며, 조건 (g)와 (h)를 만족하는 집합을 순서체(Ordered field)라고 한다.

실수란, 위의 성질을 모두 만족하는 집합을 말한다.

체와 순서체에서는 우리가 지금까지 배운 수학의 연산들이 그대로 성립하는 것을, 정의로부터 확인할 수 있다. 특수한 경우로 유리수는 (j)를 제외한 모든 조건을 만족하는 것을 볼 수 있다.

연습문제 7.1.1. 체의 정의만을 사용해 다음을 증명하여 보시오.

(a) $0a = 0$.

(b) $ab = 0$이 성립하면 $a = 0$ 또는 $b = 0$.

(c) $(-1)a + a = 0$, 즉 $(-1)a = -a$.

(d) $(-1)(-1) = 1$.

여기서 -1은 곱셈의 항등원 1의 덧셈에 대한 역원이다.

연습문제 7.1.2. 순서체의 정의만을 사용해 다음을 증명하여 보시오.

(a) $0 < x$이면 $0 > -x$.

(b) $0 < x$이면, $0 < x^{-1}$, 반대로 $x < 0$이면, $x^{-1} < 0$.

(c) $a \leq b$이고, $0 < x$이면, $ax \leq bx$.

(d) $a \leq b$이고, $x < 0$이면, $bx \leq ax$.

(e) $1 < x$이면, $0 < x^{-1} < 1$.

(f) 임의의 0이 아닌 x에 대하여, $0 < x^2$.

(g) $0 < 1$.

여기서 $-x$는 x의 덧셈에 대한 역원, x^{-1}은 곱셈에 대한 역원, x^2는 $x \times x$이다.

연습문제 7.1.3. 정의 7.1.1에서 조건 (i)은 엄밀히 말하여 없어도 되는 조건이다. 순서체 A를 고정하자.

(a) 귀납적으로, $f : \mathbb{N} \to A$를, $f(0) = 0_A$, 그리고 $f(n+1) = f(n) + 1_A$으로 정의하자. 이 때, f가 단사함수임을 증명하시오.

(b) 1이상의 자연수 n와 정수 m에 대해, $(m/n)_A$을 mn^{-1}이라고 정의하자. 이 때, $(a/b)_A = (c/d)_A$일 필요충분조건이, $ad = bc$임을 보이시오.

(c) 함수 $f : \mathbb{Q} \to A$를 $f(m/n) = (m/n)_A$로 정의하자. 이 함수가 단사함수이고, $f(xy) = f(x)f(y)$, $f(x+y) = f(x)f(y)$를 만족하며, $a \le b$이면, $f(a) \le f(b)$임을 보이시오.

그러나 우리는 이 절에서 혼동을 줄이기 위해, 유리수를 사용하는 순서체를 단조수렴정리를 제외한 정의 7.1.1의 모든 조건을 만족하는 순서체라고 표기할 것이다.

제일 중요한 조건 (j)를 엄밀하게 말하기 위해서 우리는 수렴성을 정의해야 한다. 그러기 위해, 우리는 먼저 숫자 사이 거리를 정의하는 함수인 절댓값 함수를 임의의 순서체에 다음과 같이 정의한다.

$$|x| = \begin{cases} x & (0 \le x) \\ -x & (0 > x) \end{cases} \tag{7.1}$$

이 정의에서 우리는 $0 \le |x|$와 $x \le |x|$가 모든 x에 대해서 성립함을 볼 수 있다. 또한, $|x - y| = 0$이면 $x = y$인 것도 볼 수 있다. 즉, $|x - y|$가 작을수록 x와 y가 가깝다고 말할 수 있다. 이렇게 생각함이 타당하다는 것을 뒷받침해주는 중요한 정리로 삼각부등식이 있다.

보조정리 7.1.1 (Triangle Inequality)**.** 순서체 A에 대해서, $|a + b| \le |a| + |b|$가 모든 $a, b \in A$에 대해 성립한다.

Proof. 정의 7.1에 의해, 우리는 경우를 나누는 수밖에 없다.

(a) 원소 a, b가 모두 0 이상이거나 미만일 경우는, 양변이 같은 것이 확인된다.

(b) 원소 a, b의 부호가 다르면, 대칭성에 의하여, $a < 0 \leq b$임을 가정하여도 된다. 또한, $|a+b|$는 $a+b$이거나 $-a-b$이다. 그러나 $a+b \leq -a+b$와 $-a-b \leq -a+b$이므로, 이 경우 또한 쉽게 확인된다.

////

연습문제 7.1.4. 순서체의 두 원소 x, y에 대하여, $|xy| = |x||y|$임을 보여라.

절댓값 함수의 다음 성질은 매우 중요하다.

보조정리 7.1.2. 순서체 A에서 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여, $|x-y| < \epsilon$이면, $x = y$가 성립한다.

Proof. 만약 $x \neq y$이면, $x - y \neq 0$으로, $0 < |x-y|$이다. 그러나, $\epsilon = |x-y|$라고 놓으면, $1 < 1$으로 모순이다. ////

연습문제 7.1.5. 보조정리 7.1.2의 테크닉은 다른 상황에도 적용될 수 있다.

(a) 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여, $x \leq y + \epsilon$이면, $x \leq y$이다.

(b) 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여, $x < y + \epsilon$이면, $x < y$이 아닐 수도 있음을 보여라.

우리는 절댓값 함수를 바탕으로 수열의 수렴을 정의할 것이다.

정의 7.1.2. (a) 순서체 A에 대해서, A의 수열이란, $a : \mathbb{N} \to A$인 함수를 말하고, 우리는 주로 $a(n)$을 a_n으로 표기한다.

(b) 수열 A가 유계라는 것은, $M > 0$이 존재해, 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해서 $|a_n| \leq M$이 성립함을 말한다.

(c) 수열 A가 단조라는 것은, 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해서 $a_n \leq a_{n+1}$이 성립하거나, 모든 n에 대해서 $a_{n+1} \leq n$이 성립함을 말한다.

(d) 순서체 A에 대해, 수열 a_n이 x로 수렴한다는 것은, 모든 $\epsilon > 0$에 대해서, $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$이 존재해, 모든 $N(\epsilon) \leq n$에 대해 $|a_n - x| < \epsilon$이 성립한다는 것을 뜻한다. 이 때 우리는 $\lim_{n\to\infty} a_n = x$이라고 표기한다.

참고. 프로그래밍에 익숙한 독자들에게 설명을 하자면 수열의 정의를 쓰는 증명은, 저수준 언어와 같다. 이 정의의 복잡함은 꽤 악명이 높으나, 이 ϵ과 N을 적절히 사용하면서 증명할 수 있는 정리들은, 주로 단조수렴정리와 극한의 대수적 성질들을 가지고 할 수 있는 것보다 주로 더 강력하다.

참고. 우리가 수렴을 정의할 때에, 순서체의 곱셈에 관련한 성질을 쓰지 않았음을 보았을 것이다. 실제로 우리는 9장에서 이 아이디어를 더 전개할 것이다.

연습문제 7.1.6. 모든 수렴하는 수열은 유계임을 보여라.

연습문제 7.1.7. 수열 a_n이 x로 수렴하고, 또한 y로 수렴하면, $x = y$임을 보여라.

연습문제 7.1.8. 수열 a_n이 a로 수렴하고, 수열 b_n과 어떤 자연수 N에 대해서 수열 c_n을

$$c_n = \begin{cases} a_n & (N \leq n) \\ b_n & (n < N) \end{cases}$$

으로 정의하면, c_n 또한 a로 수렴함을 보여라.

수열이 발산할 수 있는 방법들 중, 제일 "잘 행동하는" 방법은 무한으로 발산하는 것이다.

정의 7.1.3. 수열 a_n이, 임의의 $M > 0$에 대해서, N이 존재해, 모든 $N \leq n$에 대해 $M < a_n$이 성립하면, a_n이 무한으로 다가간다고 (또는 수렴, 또는 발산한다고) 하고, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$로 표기한다. 비슷하게, 임의의 $M < 0$에 대해서, N이 존재해, 모든 $N \leq n$에 대해 $a_n < M$이 성립하면, a_n이 음의 무한으로 다가간다고 하고, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$로 표기한다.

연습문제 7.1.9. 수열 a_n이 무한이나 음의 무한으로 다가가면, $1/a_n$은 0으로 수렴함을 보이시오.

연습문제 7.1.10. 반대로, a_n이 0으로 수렴하면, $1/|a_n|$은 무한으로 다가감을 보이시오.

이제 독자는 정의 7.1.1의 조건 (j)을 정확하게 이해할 수 있을 것이다.

연습문제 7.1.11. 임의의 단조증가하는 실수열은 수렴하거나, 무한으로 다가감을 보이시오.

연습문제 7.1.12. 이 연습문제는 유리수가 단조수렴정리를 만족하지 않음을 증명하는 한 가지 방법이다. 독자가 다른 방법을 생각해 보는 것도 좋을 것이다. 우리는 독자가 1장를 읽었음을 가정할 것이다.

(a) 1과 0으로 구성된 수열 중, 어떤 n이 존재하여, n자리 이후의 수들이 모두 1이거나 모두 0인 수열들의 집합 S가 비가산집합임을 보여라.

(b) 각 수들을 이진수의 “무한소수”로 생각하자. 유리수에서 각 $s \in S$에 대해서, s의 첫 n자리를 소숫점 아래 n자리로 가지는 이진수 유한소수 $f(s,n)$을 정의한다. 이 때, 각 s에 대해서 $f(s,n)$은 유계이고 단조인 유리수열임을 보여라.

(c) 만약 두 $s, s' \in S$에 대해, $s \neq s'$이면, 어떤 유리수 q와 자연수 N에 대해서, 모든 $N \leq n$에 대해 $q < |f(s,n) - f(s',n)|$이 성립함을 보여라. (이것은 각 $f(s,n)$이 다른 수로 “수렴”함을 보장해 준다.)

(d) 유리수가 가산집합임을 사용하여, 단조수렴정리를 만족하지 않음을 보여라.

7.2 실수와 유리수의 관계

우리는 정의 7.1.1의 조건을 만족하는 아무 순서체 F를 $\mathbb{R}$로 표기할 것이다. 먼저 다음 보조정리가 필요하다.

보조정리 7.2.1 (Archimedes)**.** 임의의 실수 $r \in \mathbb{R}$에 대해서, 자연수 $n \in \mathbb{N}$이 존재해 $|r| \leq n$이 성립한다.

Proof. 귀류법을 사용하자. 어떤 r가 해당 정리를 만족하지 않으면, 수열 $a_n = n$이 단조수렴정리에 의해 어떤 x로 수렴한다. 그러면 수렴의 정의에 의해, $N(1/3)$이 존재해 모든 $N \leq n$에 대하여, $|n - r| < 1/3$이 성립한다. 그러나 이것은 삼각부등식에 의해, $|n - (n+1)| < 2/3$임을 뜻하므로 모순이다. ////

이 정리로부터 우리는 유리수를 사용해 실수를 근사할 수 있다.

정의 7.2.1. 순서체 A의 부분집합 S에 대해서, 임의의 $a \in A$와, “오차” $\epsilon > 0$에 대해, $|a - s| < \epsilon$인 $s \in S$가 존재하면, S를 A에서 조밀(Dense)하다고 한다.

정리 7.2.2. (a) 임의의 $\epsilon > 0$에 대해, 자연수 n이 존재해 $0 < 1/n < \epsilon$이 성립한다.

(b) 유리수는 실수의 조밀한 부분집합이다.

Proof. 첫번째 부분은, ϵ^{-1}에 보조정리 7.2.1를 적용하라 (등호가 성립하지 않게 하기 위해, n에 1을 더하여도 된다).

첫번째 부분에 따라, 우리는 임의의 1이상의 자연수 n에 대하여, $|q - r| \leq 1/n$인 수를 찾으면 충분하다. 이것을 하기 위하여, $n|r| < N$인 자연수 N을 선택하고, 자연수의 부분집합 $\{m : nr + N \leq m\}$의 최소원소 m_0을 선택하자. 이 때,

$0 < nr + N$에서 다음 식이 성립하고,

$$nr + N \leq m_0 \leq nr + N + 1$$

양변에서 N을 뺀 후 n으로 나누면,

$$r \leq \frac{m_0 - N}{n} \leq r + \frac{1}{n}$$

으로, $|r - (m_0 - N)/n| \leq 1/n$임을 볼 수 있다. ////

이 정리에서, 우리는 임의의 실수 r에 대해, r로 수렴하는 유리수 수열을 획득할 수 있다.

연습문제 7.2.1. 실수에서, 정수 p, q에 대해 $\frac{p}{2^q}$로 표현되는 숫자들의 집합을 S라고 하자. S가 조밀함을 증명하시오.

연습문제 7.2.2. 모든 n 에 대해 $0 < a_n$인 수열 a_n을 고정하자. 정수 p와 자연수 q에 대해서 p/a_q 꼴의 실수들의 집합을 S로 정의한다. 만약, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이면, S가 조밀함을 증명하시오.

7.3 완비성의 다양한 표현

정의 7.1.1의 제일 중요한 조건 (j)는 실수의 완비성을 표현하는 한 가지 방법이다. 실수에서 성립하나 유리수에서는 성립하지 않는 정리들을 증명할 때에는, 조건 (j)를 필연적으로 써야 하고, 상황에 맞게 쓸 수 있도록 이 조건을 다양한 방법으로 표현하는 것이 매우 편리할 것이다.

7.3.1 볼자노-바이어슈트라우스 정리

정의 7.3.1. 수열 a_n의 부분수열 b_n은, 단사이고 증가하는 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$이 존재하여, $b(n) = a(f(n))$이 성립하는 수열을 말한다. (여기서 f는 $n < m$이면 $f(n) < f(m)$인 강한 조건의 증가를 만족해야 한다.)

정리 7.3.1 (Bolzano-Weierstrass)**.** 임의의 유계인 실수열 a_n은 수렴하는 부분수열 b_n을 포함한다.

Proof. 우리는 단조인 부분수열을 만들 것이다. 자연수 n에 대하여, n을 단조증가인 부분수열에 포함할 있는 필요조건은, $a_n \leq a_m$이고 $n \leq m$인 m의 개수가 무한한 것이다. 이 조건을 만족하는 자연수들의 부분집합을 S라고 정의하자.

(a) 집합 $S_0 = S$가 무한집합이라고 하자. 귀납적으로, m_n을 S_n에서 최소원으로 선택하고, S_n에서 제거한다. 이 때, $a_{m_n} \leq a_m$인 $m_n \leq m$의 개수가 유한하고, S_n은 무한하므로, 모든 $m \in S_{n+1}$에 대해 $a_m \leq a_{m_n}$이 성립하도록 S_n에서 원소를 제거해 S_{n+1}을 만들 수 있다. 집합 S_{n+1} 또한 무한하며, 여기서 다시 최소원으로 m_{n+1}을 선택하면, 단조감소하는 수열이 생성된다.

(b) 집합 S가 유한집합이면, 귀납적으로, m_n이 주어졌을 때, $a_{m_n} \leq a_m$이고 $m_n \leq m$인 m이 무한하므로, S를 제외하고 이 중에서 m_{n+1}을 선택할 수 있다. 이러면 단조증가하는 수열이 생성된다.

두 경우에서 단조이고 유계인 부분수열이 선택되었으므로, 증명이 끝났다. ////

연습문제 7.3.1. 볼자노-바이어슈트라우스 정리와, 단조수렴정리를 제외한 정의 7.1.1의 모든 조건을 만족하는 순서체 A에 대하여, 단조수렴정리를 증명하여라.

7.3.2 코시 수열

정의 7.3.2. 코시 수열이란, 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여, $N(\epsilon)$이 존재해, 모든 $N(\epsilon) \leq n, m$에 대하여 $|a_n - a_m| < \epsilon$이 성립하는 수열을 말한다.

코시 수열을 판별할 때의 장점은, 극한의 정의 (cf. 정의 7.1.2)와 다르게 극한을 계산할 필요가 없다는 것이다.

연습문제 7.3.2. 임의의 수렴하는 수열 a_n은 코시 수열임을 증명하여라.

정리 7.3.2. 실수의 코시 수열 a_n은 어떤 극한 x로 수렴한다.

Proof. 먼저 코시 수열 a_n은 유계이다. 이것을 보기 위해서는, $\epsilon = 1$을 선택하고, 모든 $N \leq n$에 대하여 $|a_n - a_N| < 1$임을 확인한 후, $M = \max\{|a_n| : n \leq N\} + 1$로 정의하면 된다.

정리 7.3.1에 의하여, 코시 수열 a_n은 x로 수렴하는 부분수열 a_{m_n}을 포함한다. 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여, $N \leq n$이면 $|a_{m_n} - x| < \epsilon/2$인 N을 선택한다. 그리고 나서 a_n이 코시 수열임을 이용해, $N_1 \leq m, n$이면 $|a_m - a_n| < \epsilon/2$인 N_1을 선택한다.

수열 m_n은 증가하는 수열이므로, $N_1 \leq m_{n'}$인 $m_{n'}$이 존재한다. 즉 $N_1 \leq n$이면,

$$|a_n - x| \leq |a_{m_{n'}} - a_n| + |a_{m_{n'}} - x| < \epsilon$$

이 성립함을 볼 수 있다. ////

연습문제 7.3.3. 위 정리의 증명에서 우리는 어떤 값이 ϵ보다 작은 것을 보이기 위해 두 부등식을 결합하였다. 이런 종류의 부등식에 쓸모있는 테크닉은 다음과 같다.

실수열 a_n이, 임의의 $\epsilon > 0$에 대해, $N_1(\epsilon)$이 존재하여, $N_1(\epsilon) \leq n$인 모든 n에 대해 $|a_n - x| < M\epsilon$이 성립한다 (여기서 M은 0초과인 어떤 고정된 실수이다). 이럴 때, a_n이 x로 수렴함을 보이시오.

연습문제 7.3.4. 위 연습문제에서 $M\epsilon$이, 이차다항식 $p(x) = ax^2 + bx + c$에 대하여, $p(\epsilon)$으로 교체되었다고 하자. 이 때, a_n이 x로 수렴하기 위해 p의 충분조건에는 무엇이 있는가?

연습문제 7.3.5. 정리 7.3.2과 보조정리 7.2.1를 만족하고, 단조수렴정리를 제외한 정의 7.1.1의 모든 조건을 만족하는 순서체 A가, 단조수렴정리를 만족함을 보이시오. [*힌트*: 수열이 포함된 구간을 잘게 나누어라.]

연습문제 7.3.6. 위 연습문제에서 왜 보조정리 7.2.1을 또한 가정하였는지 생각해 보아라. (반례는 만들 필요 없다.)

7.3.3 축소구간열 성질

이 정리는 실수에서 가끔씩 사용되는 "구간 분할"의 테크닉에 쓰인다.

정리 7.3.3 (Nested Interval Property)**.** 각 자연수 n에 대하여, 실수의 폐구간 $I_n = [a_n, b_n]$이 존재해, $I_{n+1} \subset I_n$가 성립하면, 모든 I_n에 포함된 실수 x가 존재한다.

Proof. 수열 a_n은 증가하는 수열이고, 모두 절댓값이 $\max(|b_0|, |a_0|)$이하이다. 즉 단조수렴정리에 의해 a_n은 어떤 극한 x로 수렴한다.

임의의 자연수 n을 고정하자. 임의의 실수 $\epsilon > 0$에 대하여, $n \leq N$이고 $|a_N - x| < \epsilon$인 N이 존재한다. 이 때, $a_n \leq a_N$에서, $a_n + \epsilon \leq x$이 성립한다. 마찬가지로, $a_N \leq b_n$에서, $x \leq b_n - \epsilon$이 성립한다.

만약 $a_n > x$이면, $a_n > (a_n + x)/2 > x$으로, $\epsilon = (a_n - x)/2$에서 모순이다. 마찬가지로, $b_n < x$이면, $\epsilon = (x - b_n)/2$에서 모순이다. 즉 $a_n \leq x \leq b_n$이므로, 증명이 끝났다. ////

참고. 이 증명은, 수열 a_n이 모든 n에 대하여 $A \leq a_n$을 만족하고, a로 수렴하면, $A \leq a$임을 보인다.

연습문제 7.3.7. 만약 정리 7.3.3에서 구간 $[a_n, b_n]$을 (a_n, b_n)꼴이나, $[a_n, b_n)$꼴로 하였을 때 정리가 성립하는가?

연습문제 7.3.8. 축소구간열 성질과 보조정리 7.2.1를 가정하고, 정리 7.3.1을 증명하여라. [*힌트*: 수열이 포함된 구간을 각 단계에서 절반으로 나누고, 해당 수열의 원소가 무한하게 많은 쪽을 선택하여 다시 절반으로 분할하여라. 이 때 수렴을 하는 것을 보이기 위해서, 정리 7.3.3와 $2^{-n} \to 0$이라는 사실을 쓸 것이다.]

7.3.4 최소상계공리

이 공리는 실수의 해석학에서 주로 실수의 완비성을 표현하기 위해 선택되는 공리이다. 집합 $[0, 1)$은 유계인 실수의 부분집합이 최댓값을 가지지 않을 수 있음을 보여준다. 그러나 이 제일 우측의 빈 "구멍"을 채우기 위해 다음 두 정의를 통해 조금 돌아가면, 최댓값과 비슷한 것을 얻을 수 있다.

정의 7.3.3. (a) 실수의 부분집합 S에 대해, 만약 x가 S의 모든 원소 이상이면, x를 S의 상계 (Upper bound)라고 한다.

(b) 실수의 부분집합 S에 대해, S의 모든 상계들의 집합 T가 최솟값을 가지면, 그 최솟값을 S의 최소상계 (Least upper bound or Supremum)라고 하고, $\sup S$로 표기한다.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\leq"] \arrow[d, "\leq"] & \sup S \arrow[dl, "\leq"] \\ x & \end{tikzcd}$$

자료 7.1: 최소상계의 도식적 표현

자료 7.1에서, $a \to b$를 $a \leq b$로 해석하면, $\sup S$는 S의 모든 원소 이상이며, 임의의 $S \leq x$, 즉 임의의 S의 상계에 대해 $\sup S \leq x$인 성질을 가짐을 볼 수 있다.

정리 7.3.4. 실수의 모든 유계이고 공집합이 아닌 부분집합 S는 최소상계를 가진다.

Proof. 이 증명은 연습문제 7.3.8와 같은 테크닉으로, 정리 7.3.3을 사용할 때 주로 쓰이는 테크닉이다.

집합 S가 $[-M, M]$에 포함되어 있다고 볼 수 있다. 이 때, S의 최대가 어디 있는지 "이분 탐색"을 실행하자. 귀납적으로, $[-M, M] = [a_0, b_0]$이라고 하고, 만약

$[(a_n+b_n)/2, b_n]$에 S의 원소가 있다면, 이 구간을 $[a_{n+1}, b_{n+1}]$로 놓고, 만약 S의 원소가 그 "오른쪽" 분할에 없으면, $[a_n, (a_n+b_n)/2]$를 $[a_{n+1}, b_{n+1}]$로 놓자. 그러면, 정리 7.3.3에 의해 $[a_n, b_n]$에 모두 포함된 x가 존재한다. 또한, 만약 다른 y가 모든 $[a_n, b_n]$에 포함되어 있으면, $|x-y| \leq 2^{-n}(b_0 - a_0)$가 성립하고 보조정리 7.2.1와 보조정리 7.1.2에 의해 $x = y$이므로, x는 유일하다.

먼저 임의의 $s \in S$를 고정하고 $s \leq x$임을 보이자. 만약 어떤 n에 대해 $s \notin [a_n, b_n]$이면, 이러한 최소의 n에 대해서, s는 $[a_{n-1}, (a_{n-1}+b_{n-1})/2]$의 원소이고, x는 $[(a_{n-1}+b_{n-1})/2, b_{n-1}]$의 원소이므로, $s \leq x$이다. 만약 모든 n에 대해 $s \in [a_n, b_n]$이면, x의 유일성에 의해 $s = x$이다.

반대로, 어떤 t가 모든 $s \in S$에 대해 $s \leq t$를 만족한다고 가정하고 $x \leq t$를 증명하자. 그러면 t는 $[-M, \infty)$에 포함되어있고, 일반성을 잃지 않고 $[-M, M]$의 원소라고 볼 수 있다. 만약 어떤 n에 대해 $t \notin [a_n, b_n]$이면, 이러한 최소의 n에 대해서, t가 왼쪽 분할에 들어가고 오른쪽 분할이 $[a_n, b_n]$인 경우, 오른쪽 분할에 S의 원소가 있으므로, t는 a_n으로 고정되고, 반대로 t가 오른쪽 분할에 들어가고 왼쪽 분할에 x가 있으면 바로 $x \leq t$이다. 마지막으로 모든 $[a_n, b_n]$에 t가 있으면 다시 $t = x$로 끝난다. ////

연습문제 7.3.9. 정의 7.3.3와 비슷하게, S의 모든 원소 s 에 대해 $x \leq s$인 x를 S의 하계 (Lower bound)로, 그리고 하계 중 최댓값을 최대하계 (Greatest lower bound 또는 Infimum)로 정의하고, $\inf S$로 표기하자. 정리 7.3.4을 사용해 모든 유계이고 공집합이 아닌 부분집합 S가 최소하계를 가짐을 보이시오.

연습문제 7.3.10. 정리 7.3.4을 강화해, S가 유계가 아니여도, 어떤 상계를 가지면, 최소상계를 가짐을 보이시오.

연습문제 7.3.11. 정의 7.1.1중 단조수렴정리를 제외한 모든 조건을 만족하는 순서체 A가 정리 7.3.4을 만족하면, 보조정리 7.2.1와 단조수렴정리를 만족함을 보이시오. [*힌트*: 보조정리 7.2.1를 증명하기 위해서는, $\mathbb{N}$이 유계임을 가정하고, 최소상계를 잡아라.]

7.4 극한의 계산

다음 두 정리는 대부분의 교과서에서 증명 없이 쓰인다.

정리 7.4.1. 실수열 a_n과 b_n이 각각 a와 b로 수렴한다고 하자.

(a) 실수열 $a_n + b_n$은 $a + b$로 수렴한다.

(b) 실수열 $a_n b_n$은 ab로 수렴한다.

(c) 만약 모든 n에 대해 $a_n \neq 0$이고 $a \neq 0$이면, $1/a_n$은 $1/a$로 수렴한다.

Proof. 먼저 임의의 $0 < \epsilon$을 잡자. 어떤 N에 대해서 $|(a_n+b_n)-(a+b)| < \epsilon$이 모든 $N \leq n$에 대해 성립해야 한다. 그러나 우리는 a_n이 a로, b_n이 b로 수렴하는 것을 알고 있으므로, $|a_n - a| < \epsilon$ 그리고 $|b_n - b| < \epsilon$이 각각 모든 $N_1 \leq n$과 $N_2 \leq n$에 대해 성립하는 것을 알 수 있다. 이 두 부등식을 결합한 후 삼각부등식을 쓰면, $|a_n + b_n - a - b| < 2\epsilon$이 모든 $\max(N_1, N_2) \leq n$에 대해 성립한다. 우리는 처음에 ϵ을 잡을 때, 주어진 ϵ에 대해 $\epsilon/2$로 (또는 $\epsilon/1000$로도!) 선택 가능하므로, 이렇게 하면 $|a_n + b_n - a - b| < \epsilon$ (또는 $\epsilon/500$)에서 증명이 끝난다.

다음으로 임의의 $0 < \epsilon$을 잡고, $a_n b_n \to ab$를 보이자. 우리는 다음 오차

$$|a_n b_n - ab|$$

를, $|a_n - a|$와 $|b_n - b|$가 충분히 작다는 사실을 사용해 작도록 만들어야 한다. 이렇게 하기 위해 인수분해를 하듯 식을 쪼개자.

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$$

먼저 두번째 항은 a_n의 수렴에서, $\epsilon/|b|$를 선택하면, $|a_n - a| < \epsilon/|b|$가 모든 $N_1 \leq n$에 대해 성립하므로 $|b||a_n - a| < \epsilon$이 성립한다. 그러나 첫번째 항은 $|b_n - b|$가 작아도, $|a_n|$이 n에 따라서 바뀌므로, 고정된 상수 ϵ 미만으로 보내기 힘들어 보인다. 이 문제는 $|a_n| < M$이 모든 n에 대해서 성립하는 M을 찾으면, $|b_n - b| < \epsilon/M$으로 잡으면 해결된다. 이러한 M을 찾기 위해서 우리는 정리 7.3.2의 첫번째 부분의 논법을 사용할 것이다.

$\epsilon = 1$을 선택하면, $|a_n - a| < 1$이 모든 $N \leq n$에 대해 성립하고,

$$M = \max\{|a| + 1, |a_0|, |a_1|, \ldots, |a_N|\}$$

으로 선택하면, (삼각부등식의 도움을 한번 받고) $|a_n| \leq M$임을 볼 수 있다. 즉, $N_2 \leq n$인 모든 n에 대해 $|b_n - b| < \epsilon/M$이도록 N_2를 선택하면,

$$|a_n||b_n - b| < \epsilon \frac{|a_n|}{M} \leq \epsilon$$

이고, 두 부등식을 결합하면 이 증명이 완료된다.

마지막 부분의 증명 또한,

$$|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}| = |\frac{a_n - a}{a_n a}|$$

에서, 모든 n에 대해 $1/|a_n a| \le M$인 M을 찾는 것으로 귀결되고, 이것은 모든 n에 대해 $\delta \le |a_n|$인 $0 < \delta$를 찾는 것과 연결된다. $\epsilon = |a|/2$로 선택하면, $|a_n - a| < |a|/2$가 모든 $N \le n$에 대해 성립하고,

$$\frac{|a|}{2} = |a| - \frac{|a|}{2} < |a| - |a_n - a| \le |a_n|$$

이다. 이 때,

$$\delta = \min\{|a|/2, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|\}$$

으로 정의하면, $0 < \delta$이고, 모든 n에 대해 $\delta \le |a_n|$이다. 즉, 모든 $M \le n$에 대해

$$|a_n - a| < \epsilon|a|\delta$$

이도록 M을 선택하면,

$$|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}| = \frac{|a_n - a|}{|a_n a|} < \epsilon\frac{\delta}{|a_n|} \le \epsilon$$

에서 증명이 끝났다. ////

정리 7.4.2. (a) 만약 모든 n에 대해 $a_n \le A$이고, a_n의 극한이 a이면, $a \le A$이다.

(b) 만약 모든 n에 대해 $a_n \le b_n \le c_n$이고, a_n과 c_n의 극한이 a이면, b_n 또한 a로 수렴한다.

Proof. 첫번째 부분을 증명하자. 극한의 정의에 따르면, 모든 $0 < \epsilon$에 대해, $N(\epsilon)$이 존재해, 모든 $N(\epsilon) \le n$에 대해 $|a_n - a| < \epsilon$가 성립한다. 그러나 $a_n \le A$이므로, 임의의 ϵ에 대해

$$a \le a_n + |a - a_n| < A + \epsilon$$

가 성립하고, 만약 $a > A$이면, $\epsilon = (a - A)/2$에서 모순이 발생한다.

두번째 부분을 증명하기 위해서는, 모든 $\epsilon > 0$에 대해 $|b_n - a| < \epsilon$이 모든 충분히 큰 n에 대해 성립함을 보여야 한다. 이 부등식을 보이기 위해서는 $b_n - a < \epsilon$과 $a - b_n < \epsilon$을 보이면 충분하고, 이를 보이기 위해 각각 c_n과 a_n이 a로 수렴함을 쓸 것이다. $N_1 \le n$이면 $|c_n - a| < \epsilon$이도록 N_1을 잡을 수 있고, 이러면

$$b_n - a \le c_n - a \le |c_n - a| < \epsilon$$

이 성립한다. 반대로, $N_2 \leq n$이면 $|a_n - a| < \epsilon$이도록 N_2 또한 잡을 수 있고, 이 때

$$a - b_n \leq a - a_n \leq |a_n - a| < \epsilon$$

에서 두 부등식을 얻을 수 있다. 즉 $\max(N_1, N_2) \leq n$이면 $b_n - a < \epsilon$과 $a - b_n < \epsilon$ 이므로 $|a - b_n| < \epsilon$에서, 우리의 결론에 도달했다. ////

다음 정의는 수렴하지 않을 수 있는 수열에 대해서도 극한을 일부 다룰 수 있게 해주는 유용한 도구이다.

정의 7.4.1. 수열 a_n에 대해 상극한 (Limit superior)을

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{n\leq k} a_k = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : n \leq k\}$$

로 정의하고, 비슷하게 하극한 (Limit inferior)을

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{n\leq k} a_k = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k : n \leq k\}$$

로 정의한다.

연습문제 7.4.1. 실수열 a_n이 유계이면 $\limsup_{n\to\infty} a_n$과 $\liminf_{n\to\infty} a_n$이 존재함을 보이시오. [*힌트*: 단조수렴정리]

연습문제 7.4.2. 유계인 실수열 a_n에 대해서, $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$을 보이시오.

연습문제 7.4.3. 만약 실수열 a_n이 $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a$를 만족한다면, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$임을 보이시오.

연습문제 7.4.4. 실수열 a_n이 모든 n에 대해 $a_n \leq M$을 만족하면, $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq M$을 만족함을 보이시오.

다음은 급수의 정의이다.

정의 7.4.2. 실수열 a_n에 대해 부분합 s_n을,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

로 정의하고, 만약 s_n의 극한이 존재하면, 그 값을 a_n의 무한급수 (또는 급수)로 정의하고,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$$

로 정의한다. 이 때, 급수 a_n이 S로 수렴한다고 한다.

정의 7.4.3. 급수 a_n에 대해

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

가 수렴하면, 이 급수 a_n이 절대수렴한다고 한다.

정리 7.4.3. 급수 a_n과 b_n이 각각 a와 b로 수렴하면, 다음이 성립한다.

(a) 급수 $a_n + b_n$ 또한 $a + b$로 수렴한다.

(b) 실수 c에 대해, 급수 ca_n 또한 ca로 수렴한다.

Proof. 정리 7.4.1에서 바로 유도가 가능하다. ////

정리 7.4.4. 급수 a_n이 절대수렴하면, 급수 a_n은 수렴한다.

Proof. 정리 7.3.2을 급수에 대해 적용하면, 급수 a_n이 수렴할 필요 충분조건이, 모든 $\epsilon > 0$에 대해, N이 존재하여, 모든 $N \leq n \leq m$에 대해

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \epsilon \tag{7.2}$$

이 성립하는 것이고, 급수 $|a_n|$이 수렴하므로, 어떤 N에 대해 모든 $N \leq n \leq m$에 대해 위 식, 즉

$$\left| \sum_{k=n}^{m} |a_k| \right| < \epsilon$$

가 성립하며, 삼각부등식에 의해 식 (7.2) 또한 모든 $N \leq n \leq m$에 대해 성립한다. ////

연습문제 7.4.5 (비교판정법)**.** 모든 n에 대해, $0 \leq a_n \leq b_n$이 성립하고, 급수 b_n이 수렴하면, 급수 a_n 또한 수렴함을 보이시오.

연습문제 7.4.6. 정리 7.4.4를, 급수 $a_n + |a_n|$을 사용해 증명하시오.

다음은 급수가 발산한다는 것을 보일 때 매우 쓸모있다.

정리 7.4.5. 급수 a_n이 수렴하면, $\lim_{n\to\infty} a_n$가 존재하고, 그 값은 0이다.

Proof. 먼저, 수열 s_n이 수렴하면 $t_n = s_{n+1}$로 정의된 수열 또한 같은 극한으로 수렴하는 것을 수렴의 정의에서 쉽게 확인할 수 있다. 즉, $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$이라고 놓으면, s_n과 s_{n+1}은 같은 극한으로 수렴하므로,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - s_n = 0$$

이고, 이것은 a_n이 0으로 수렴함을 의미한다. ////

정의 7.4.4. 실수열 a_n에 대해,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

로 f를 모든 수렴하는 실수 x에 대해 정의한 함수를 a_n에 대한 멱급수라고 한다.

정리 7.4.6. 수열 a_n에 대한 멱급수 f는,

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

으로 r을 정의하면, 모든 $|x| < r$인 x에 대해 수렴하고, $|x| > r$인 x에 대해 발산한다. 만약 우변의 값이 0이면 모든 x에 대해 수렴하며, 우변의 값이 무한으로 발산하면, 모든 x에 대해 발산한다. 이 r을 우리는 f의 수렴 반경이라고 한다.

7.5 극한의 계산 II

이 절의 테크닉들은 잘 알려져 있지 않지만, 몇가지 종류의 급수나 극한의 계산에 큰 도움을 준다.

정리 7.5.1 (Toeplitz)**.** 실수열 $c_{n,k}$가 다음 세가지 조건을 만족한다고 가정하자.

(a) 각 k에 대해서, $\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = 0$이다.

(b) 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} = 1$$

(c) 어떠한 $C > 0$에 대해서, 모든 n에 대해 $\sum_{k=0}^{n} |c_{n,k}| \le C$가 성립한다.

그리고 수열 a_n에 대해, “변환된 수열” b_n을

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_n c_{n,k}$$

로 정의하면, a_n이 a로 수렴할 때, b_n 또한 a로 수렴한다.

Proof. 첫번째 조건은 수열의 한 항이 b_n을 전체적으로 영향을 주지 않는다는 뜻이고, 두번째 조건은 a_n의 가중치들이 1로 수렴해, a로 수렴하는 것을 보장한다. 먼저 임의의 $\epsilon > 0$을 고정하고, 모든 $N_a \le n$에 대해 $|a_n - a| < \epsilon/C$이도록 $0 < N_a$를 잡자.

우리는 $0 \le k < N_a$인 a_k들의 기여를 최소화해야 하는데, 각 $c_{n,k}$는 n이 무한으로 가면서 0으로 가므로,

$$|c_{n,k}| < \frac{\epsilon}{N_a(|a_k|+1)} \tag{7.3}$$

가 모든 $N_k \le n$에 성립하도록 $0 \le k < N_a$에 대해 각각 N_k를 고를 수 있다. 그리고 나서

$$N = \max_{0 \le k < N_a} N_k$$

로 정의하면, 식 (7.3)가 모든 $N \le n$과 $0 \le k < N_a$에 대해 성립한다. 그러면

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}a_k - a\right| \le \left|\sum_{k=0}^{N_a-1} c_{n,k}a_k\right| + \left|\sum_{k=N_a}^{n} c_{n,k}a_k - a\right|$$

이 성립하고, 식 (7.3)을 적용하면, 모든 $N \le n$에 대해 첫번째 항을 다음과 같이 조절할 수 있다.

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}a_k - a\right| \le \epsilon + \left|\sum_{k=N_a}^{n} c_{n,k}a_k - a\right|$$

두번째 항을 조절하기 위해서 삼각부등식을 쓰면,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}a_k - a\right| \le \epsilon + \left|\sum_{k=N_a}^{n} c_{n,k}(a_k - a)\right| + \left|\sum_{k=N_a}^{n} c_{n,k} - 1\right| |a|$$

이고, 두번째 항은 삼각부등식과 N_a의 정의에 의해

$$\left|\sum_{k=N_a}^{n} c_{n,k}(a_k - a)\right| \le \sum_{k=N_a}^{n} |c_{n,k}||a_k - a| < C\epsilon/C = \epsilon$$

으로 조절된다. 즉

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}a_k - a\right| \le 2\epsilon + \left|\sum_{k=N_a}^{n} c_{n,k} - 1\right| |a|$$

이고, 다시 식 (7.3)에서

$$\left|\sum_{k=0}^{N_a-1} c_{n,k}\right| < \epsilon$$

이므로, 삼각부등식을 다음과 같이 사용해

$$\left|\sum_{k=N_a}^{n} c_{n,k} - 1\right| \le \left|\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} - 1\right| + \left|-\sum_{k=0}^{N_a-1} c_{n,k}\right| < \epsilon + \left|\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} - 1\right|$$

마지막 이 식으로 도달한다.

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}a_k - a\right| \le (2+|a|)\epsilon + \left|\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} - 1\right| |a|$$

두번째 조건에서 $N_b \leq n$에 대해

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} - 1\right| < \epsilon$$

이도록 할 수 있으므로,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} a_k - a\right| \leq (2 + 2|a|)\epsilon$$

을 $\max(N_a, N_b, N) \leq n$에 대해 획득하고, $|a|$는 미리 알려진 값이므로, 증명이 끝났다. ////

따름정리 7.5.1.1. 수열 a_n이 a로, b_n이 b로 수렴하면, 다음이 성립한다.

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} = a$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a_0 + na_1 + \cdots + a_n}{(n+1)^2} = \frac{a}{2}$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n+1} = ab$$

Proof. 각각 정리 7.5.1을 수열

$$c_{n,k} = \frac{1}{n} \quad (0 \leq k \leq n)$$
$$c_{n,k} = 2\frac{n-k+1}{n^2} \quad (0 \leq k \leq n)$$
$$c_{n,k} = \frac{b_k}{n} \quad (0 \leq k \leq n)$$

에 적용하라. ////

곱셈의 문제들은 가끔씩 로그로 덧셈의 문제들로 변환할 수 있다. 다음 두 연습문제에서는, 만약 $0 < a_n$이 $0 < a$로 수렴하면,

$$\lim_{n\to\infty} \log(a_n) = \log \lim_{n\to\infty} a_n$$

임을 사용하여도 된다.

정리 7.5.2. 만약 양수인 수열 a_n이 $0 < a$로 수렴하면, $(a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n}$ 또한 a로 수렴함을 보여라.

정리 7.5.3. 양수인 수열 a_n에 대해서,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a > 0$$

이면, $\lim(a_n)^(1/n)$ 또한 a임을 보이시오.

참고. 위에서 $a = 0$인 경우는 정리 7.5.1의 발산 버전에서 해결할 수 있다.

보조정리 7.5.4. 수열 $0 \le b_n$이

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$$

를 만족하고, a_n이 a로 수렴하는 수열이면,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} = a$$

가 성립한다.

Proof. 정리 7.5.1을

$$c_{n,k} = \frac{b_k}{\sum_{l=0}^{n} b_l}$$

로 정의하면 충분하다. ////

정리 7.5.5 (Stoltz)**.** 수열 x_n과 y_n에 대해 $y_n < y_{n+1}$이고, $\lim y_n = \infty$이며,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = s$$

이면,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = s$$

이다.

Proof. 수열 a_n을

$$a_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

으로, 그리고 $b_n = y_{n+1} - y_n$으로 정의하면,

$$\frac{a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} = \frac{x_{n+1} - x_0}{y_{n+1} - y_0}$$

이고, $(y_{n+1} - y_0)/y_{n+1}$은 1로, $x_0/(y_{n+1} - y_0)$은 0으로 수렴하며, 보조정리 7.5.4의 조건이 모두 만족되므로, 위 식은 s로 수렴한다. 즉 x_{n+1}/y_{n+1} 또한 s로 수렴한다.

////

연습문제 7.5.1. 다음을 계산하시오. [꼭 이 절의 내용만을 사용해야 하는 것은 아니다.]

(a)

$$\lim_{n\to\infty} n^{-p}(1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + n^{p-1}) \quad (0 < p < 1)$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k k!}$$

7.6 Miscellaneous: 무리수의 상등

유명한 문제를 생각하자.

예시. 제곱 인수를 갖지 않는 두 자연수 $n \neq m$과 $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$에 대해 $p_1\sqrt{n} + q_1\sqrt{m} = p_2\sqrt{n} + q_2\sqrt{m}$이면 $p_1 = p_2, q_1 = q_2$이다.

연습문제 7.6.1. 증명하여라.

이 명제를 다음과 같이 재해석할 수 있다.

예시. 제곱 인수를 갖지 않는(square-free) 두 자연수 $n \neq m$과 $p, q \in \mathbb{Q}$에 대해 $p\sqrt{n} + q\sqrt{m} = 0$이면 $p = q = 0$이다.

14장에서 보겠지만, 두 대상이 같을 조건은 위와 같이 적절한 선형성 아래서 어떤 대상이 0과 같을 조건으로 환원된다. 그리고 적당한 유리수 계수를 곱한 후 더해 0을 만드는 방법이 위처럼 (모든 계수가 0으로) 유일하면 이들을 $\mathbb{Q}$-선형 독립이라고 한다. 따라서 마지막으로 다음과 같이 재해석하자.

예시. square-free $n \neq m$에 대해 $\sqrt{n}$과 $\sqrt{m}$은 $\mathbb{Q}$-선형 독립이다.

이제부터 이 명제의 일반화인 다음 정리의 증명을 살펴볼 것이다.

정리 7.6.1. square-free 자연수의 유한집합 S에 대해, $\{\sqrt{s} | s \in S\}$는 항상 $\mathbb{Q}$-선형 독립이다.

Proof. `https://math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2007/REUPapers/FINALAPP/Jaffe.pdf`를 참고하라. ////

챕터 8

복소수

8.1 복소수의 대수적 정의

교과서에서 배운 복소수의 정의는 아직 해결해야 할 부분이 많다. 예를 들어, i는 어떤 집합에서 골라온 것일까? $\mathbb{C}$는 우리가 아는 집합들로부터 얻어진 집합이 맞을까? 이런 질문들에 답하기 위해서 $\mathbb{C}$를 $\mathbb{R}$로부터 정의하는 과정을 살펴보자.

8.1.1 $\mathbb{C}$ as $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

i라는 모호한 개념을 제하고 보면 결국 복소수는 실수부와 허수부라는 두 실수와 완전히 대응된다. 따라서 $a + bi$를 말할 때 실제로는 순서쌍 $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$을 생각한다고 하면 별다른 문제가 없다. 이제 i는 순전한 표기법으로 남게 되는 것이다. 그러나 순서쌍 위에는 연산이 주어져 있지 않으므로 $i^2 = -1$임을 유념하여 순서쌍 위에 연산을 잘 정의해야 한다. 즉, $(a, b)+(c, d)$는 두 복소수 $a1+bi, c1+di$의 합을 의미하고, 1과 i는 '다른 것'이므로 그 합은 $(a + b)1 + (c + d)i$, 또는 $(a + b, c + d)$가 되어야 한다. 또 $(a, b) \times (c, d) = ac + adi + bci + bdi^2$이고, $i^2 = -1$이므로 이를 정리하면 $(ac - bd) + (ad + bc)i = (ac - bd, ad + bc)$가 된다. 이렇게 $\mathbb{R}^2$ 위에 두 연산 $+, \times$를 정의하면 실제로 그 결과는 체가 된다. 그러나 여전히 남는 의문은, 왜 하필 이런 식으로 정의해야 하는지, 그리고 $i^2 = -1$이면서도 왜 i와 1은 '다른 것'인지, 등등이다. 다음 접근은 이러한 의문을 깔끔하게 해결한다.

8.1.2 $\mathbb{C}$ as $\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$

위 절의 내용을 되새겨 보자. 1과 i가 왜 다른지, 그리고 -1과 i^2은 왜 같은지, 이 두 질문이 결국 복소수를 구성하는 핵심 질문이다. 그런데 첫 번째 질문에 답하는 방법은 이미 알고 있다. 실계수 다항식들 또한 실수가 아닌 변수(indeterminate) t를 실수에 추가해서 만들어진 개념이므로, 1과 t는 다른 것이다. 이제 -1과 t^2이 같다는 성질, 실계수 다항식에서는 일어나지 않는 일을 만들어 주면 된다.
그 방법은 단순하게도 $t^2+1=0$이라고 '믿는', 다른 말로는 'mod out'하는 것이다. 이 터무니없어 보이는 믿음은 실제로 자주 일어난다. 예를 들어 시계는 $12 = 0$이라고 '믿어서' 만들어진 것이며, 각도 역시 $360° = 0°$이라고 '믿는' 것이다. 다른 말로, 시계에서는 12만큼 차이나는 수들은 같은 것으로 취급한다(이를 mod 12로 같다고 한다). 따라서 시계에서는 $\{\cdots, -24, -12, 0, 12, 24, \cdots\}$(coset이라고 한다)가 하나의 수 $[0]$이 되며, $\{\cdots, -17, -5, 7, 19, \cdots\}$는 다른 한 수 $[7]$이 된다.
Mod out을 통해 만들어진 공간을 quotient space라고 한다. 마찬가지로 복소수에서는 $i^2+1=0$이라고 '믿으면' 된다. 대수학의 용어로는, $\mathbb{R}[t]$를 ideal (t^2+1)로 quotient를 취해 주면 된다.
기존 공간에 있는 연산들을 quotient space로 가져오는 것 또한 자연스럽다. $[a]+[b]=[a+b], [a]\times[b]=[a\times b]$. 예리한 독자는 이것이 잘 정의되어 있는지 의문을 품을 것이다. 확인해 보라.
복소수를 이렇게 생각했을 때 각 coset은 1차 이하의 다항식을 정확히 하나 포함한다. 따라서 그 상수항이 실수부가 되고, 일차항은 허수부가 된다. 이제 이 환이 체를 이루는지만이 남아 있다. 직접 확인해 볼 수도 있고, 아니면 일반적으로 '0이라고 믿는' 다항식이 기약다항식이기만 한다면 된다는 사실을 증명해 볼 수도 있다. 연습문제로 남긴다.

8.2 대수학의 기본정리

참고. 이 절에서, 다항식이라고 하면 기본적으로 1차 이상의 다항식만을 의미한다. 이는 물론 상수 다항식 $1 \in \mathbb{F}[t]$가 근을 가질 리가 만무하기 때문이다.

다항식 $p(t) \in \mathbb{R}[t]$(이 표현에 대해서는 10.2절을 참조하여라)가 항상 $\mathbb{R}$에서 해를 갖는 것은 아니다. $F[t]$의 모든 (1차 이상의) 다항식이 F 안에서 해 하나 이상을 갖는 field F를 algebraically closed field, 또는 대수적으로 닫힌 체라고 한다.

연습문제 8.2.1. F가 algebraically closed field라고 하자. $F[t]$의 모든 다항식은

$F[t]$ 안에서 일차식으로 완전히 인수분해됨을 보여라.

참고. field F에 대해 그 algebraic closure(대수적 폐포)란 F를 포함하고 대수적으로 닫힌 가장 작은 체를 말하며, $\overline{F}$로 표기한다. F가 algebraically closed라는 것은 $\overline{F} = F$와 동치이다. algebraic closure의 여러 성질—가령 up to isomorphism 유일성—에 대해서는 대수학 교재(e.g. 이인석 - “대수학”)를 참조하라.

복소수는 대수적으로 닫혀 있을까? 복소수를 정의하는 방정식 $t^2 + 1 \in \mathbb{C}[t]$는 물론 $(t - i)(t + i)$로 인수분해된다. 이제 의문은 임의의 복소 계수 방정식, 예를 들면 $t^4 - it^3 + t + 2i + 3 = 0$이라는 방정식이 복소근을 가질지이다. 결과부터 소개하자.

정리 8.2.1 (대수학의 기본 정리)**.** $\mathbb{C}$는 대수적으로 닫혀 있다. 즉, 모든 1차 이상의 다항식 $p(t) \in \mathbb{C}[t]$는 일차식으로 완전히 인수분해된다.

참고. 그 이름에도 불구하고 이 정리는 순수하게 대수학적으로 증명할 수 없으며, 대수학에서 기본적이지도 않다. 여기서 대수(algebra)는 17세기의 대수, 즉 방정식을 푸는 학문을 지칭하고 있다.

이제부터 비교적 초등적으로 보이는 정리 8.2.1의 증명을 다룰 것이다. 정리 8.2.1의 전통적인 증명에는 대수적 증명과 해석적 증명이 있으나 대수적 증명은 갈루아 이론을, 그리고 해석적 증명은 복소해석학을 사용한다. 여기서 소개할 증명은 이런 고급 이론을 사용하지 않는 듯 보이지만, 그 기저에는 대수적 위상수학이라는 이론이 자리잡고 있으며 이들을 조금 더 암묵적으로 사용할 뿐이다. 이를 유념하고 다음의 guided tour을 시작하자.

8.2.1 감은 수를 이용한 증명

$n(\geq 1)$차 다항식 $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[t]$를 고정하자.

연습문제 8.2.2. 복소수에 대한 삼각 부등식 $|x + y| \leq |x| + |y|$를 증명하여라.

연습문제 8.2.3. $R = \max(1, |a_{n-1} + \cdots + a_0|)$으로 정의하자. $|z| > R$이라면 $|p(z)| > 0$임을 보여라.

연습문제 8.2.4. $p_s(t) = (1 - s)x^n + sp(t)$로 정의하자. $0 \leq s \leq 1$에 대해 $|z| > R$이라면 $|p_s(z)| > 0$임을 보여라.

연습문제 8.2.5. 복소함수는 결국 복소수를 복소수로 보내는 것이므로, 복소함수 $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$는 복소평면 위의 한 점을 다른 한 점으로 옮긴다. 즉, 점 t를 특정한

궤적을 따라 옮길 때, $p(t)$라는 점도 어떤 궤적을 그린다. t가 원점 주위를 1바퀴 감을 때 t^n은 원점 주위를 n바퀴 감음을 보여라.

연습문제 8.2.6. t가 절댓값을 R보다 크게 유지하며 원점 주위를 1바퀴 감을 때, 이에 대응하는 $p_s(t)$의 값은 $0 \leq s \leq 1$일 때 항상 원점 주위를 n바퀴 감음을 보여라. 특히, 이때 $p(t)$의 값이 원점 주위를 n바퀴 감는다.

연습문제 8.2.7. 그런데, t가 그리는 원의 반지름이 점점 작아져 한 점원(point-circle)을 그릴 때, 이에 대응하는 $p(t)$의 값은 마찬가지로 한 점이다.

1. 이 한 점이 원점이라면 $p(t)$가 근을 가짐을 보여라.

2. 이 한 점이 원점이 아니라면 감은 수가 0일 것이다. 이때도 $p(t)$가 근을 가지는 이유를 설명하여라. Hint: 곡선의 연속적인 변화에 대해 감은 수가 바뀌기 위해서는 어떤 일이 일어나야 하는가?

참고. '감은 수'는 연속적인 변화에 불변한다고 생각해 왔지만, 더 정확히는 연속적인 변화에 불변하는 값 그 자체가 '감은 수'이다. 공간 X의 기본군(fundamental group)을 다음과 같이 정의하는데, 먼저 X 위의 모든 '연속적인' loop, 즉 연속함수 $[0,1]/(0 \sim 1) \to X$들의 집합 S를 생각한다. 이제 S에서 '연속적으로 변환 가능한' loop들 사이에 동치 관계를 준다. 말인즉슨, 연속함수 $\tau : [0,1] \to S$에 대해 $\tau(0) \sim \tau(1)$로 생각하겠다는 뜻이다. 이제 $G = S/\sim$이라고 하면 G 위에 두 loop를 '이어붙이는' 방식으로 이항연산을 부여할 수 있고, 이는 군을 이룬다(증명하여라). 위 증명은 $\mathbb{C} - \{0\}$, 또는 $[0,1]/(0 \sim 1) = S^1$의 기본군은 $\mathbb{Z}$라는 것을 암시적으로 가정하고 있다.

8.2.2 복소해석적 증명

출처: https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf, https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_algebra

8.3 1의 제곱근

챕터 9

거리: 내적, 노름, 거리, 위상

9.1 거리

9.1.1 정의

거리라는 개념 자체는 근본적인 개념일 뿐만 아니라, 근사값이 얼마나 가까운지를 다루는 해석학에서는 더욱 더 중요하다. 이 거리를 수학적으로 다루기 위해서 가장 자연스러운 방법은 두 점 사이에 숫자를 하나 부여해주는 것이다. 즉, 공간 X위의 어떤 함수 $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ (d라고도 표기한다.)가 다음 조건을 만족하며 존재하면 이를 **거리 함수**라고 불러준다.

1. 모든 $x, y \in X$에 대해서 $0 \leq \rho(x, y) < \infty$
2. $x = y$와 $\rho(x, y) = 0$는 필요충분조건이다.
3. 모든 $x, y \in X$에 대해서 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
4. 모든 $x, y, z \in X$에 대해서 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

$\rho(x, y)$가 우리가 원래 $\mathbb{R}^2$ 등에서 상상하는 두 점 x, y 사이의 거리라고 생각하면 자명한 명제들이다. 이 중 가장 독특한 것은 네 번째 조건의 부등식인데, 이를 우리는 삼각부등식이라고 한다. 직관적으로는 x에서 y로 가는데, z를 거쳐서 가면 항상 길이가 같거나 길어진다는 것이다. 또한 이 때 어떤 집합과 그 위의 거리함수를 묶은 (X, ρ)를 거리 공간이라고 한다. X의 원소를 점이라고도 말한다.

거리 공간에 대한 정리들을 생각할 때 일반적인 유클리드 공간에서 생각하는 것이 큰 도움이 되고 증명의 아이디어를 제공해줄 수 있지만, 일반화를 위해 위

조건들만을 이용해서 추상적으로 증명하는 것 역시 중요하다.

참고. 위에서 나는 (X, ρ)를 *거리 공간*으로 언급하였다. X는 ρ의 존재성과 상관없이 어떤 집합일 뿐이기에, 또 모든 집합에는 해당하는 거리를 부여할 수는 있기 때문에 X 자체를 거리 공간으로 말하는 것은 옳지 않다. 하지만 (X, ρ)라고 매번 표기하는 것은 상당히 불편하고, 이미 다른 전문적 서적들도 이와 같은 표기법을 택하기에 앞으로 X를 거리 공간이라고 말할 것이다.

예시. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$는 다음과 같은 거리 함수가 존재하기에 거리 공간이라고 할 수 있다.

$$\rho(x, y) = |x - y| \tag{9.1}$$

이 함수가 거리 함수임을 각각 증명하여라.

예시. 유클리드 공간 $\mathbb{R}^n$는 n개의 실수로 이루어진 순서쌍의 집합이다.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | \forall i \leq n, x_i \in \mathbb{R}\} \tag{9.2}$$

이 공간에도 다음과 같은 거리 함수를 줄 수 있다. 어떤 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$에 대해서

$$|x| = \sqrt{\sum x_i^2} \tag{9.3}$$

라고 하면, 함수

$$\rho(x, y) = |x - y| \tag{9.4}$$

는 거리 함수가 된다. 증명하여라.

연습문제 9.1.1. ρ_0가 어떤 거리 공간 X위의 거리 함수라고 하자. 이 때 새로운 함수들 $\rho, \rho' : X \times X \to [0, \infty)$을 다음과 같이 정의하자.

$$\rho(x, y) = 2 \times \rho_0(x, y) \tag{9.5}$$

$$\rho'(x, y) = \frac{\rho_0(x, y)}{1 + \rho_0(x, y)} \tag{9.6}$$

ρ, ρ' 또한 거리 함수임을 보여라. (이 거리 함수들은 전부 수치적으로는 다름에도 같은 이야기를 하고 있다. 이후 등장하겠지만 “이야기”라는 개념이 위상에 해당하는데, 따라서 이 거리 함수들에 해당하는 위상은 전부 같다!)

연습문제 9.1.2. 위의 참고의 “모든 집합에는 해당하는 거리를 부여할 수는 있기 때문에 X 자체를 거리 공간으로 말하는 것은 옳지 않다.”를 정당화 하라. 즉 임의의 집합에 대해서 거리 함수를 부여하라. (힌트: 쉽게 생각해라)

9.1.2 위상적 성질

이후 “거리” 단원의 모든 이야기는 임의의 거리 공간 (X, ρ) 위에서 논한다.

정의 9.1.1. 어떤 점 p의 r-**근방**은, $\rho(p, q) < r$을 만족하는 모든 q의 집합이다. $N_r(p)$라고도 하고, 따라서

$$N_r(p) = \{q \mid \rho(p, q) < r\}$$

이다.

이제 거리라는 개념이 있는 공간으로 우리가 알고 있는 수렴의 개념을 옮길 수 있다.

정의 9.1.2. 점들의 열 $\{p_n\}$이 있다고 하자. 이 열이 어떤 점 p로 수렴한다 함은 다음과 같다. 임의의 $\varepsilon > 0$이 주어져도 어떤 자연수 N이 존재해서 $n \geq N$이라면 $\rho(p, p_n) < \varepsilon$이다.

마지막 부분을 다르게 표현하자면 p_n이 $n \geq N$이면 전부 $N_\varepsilon(p)$안에 포함된다는 것이다. 또 이때 p를 $\{p_n\}$의 극한이라 한다.

연습문제 9.1.3. 실수에서 $a_n = 1/n$이 수렴함을 보여라.

이 정의는 $\varepsilon - \delta$ 혹은 $\varepsilon - N$ 논법에 기초하고 있기에, 이 종류의 명제에 익숙하지 않으면 이해하기 힘들 것이다. 이해를 돕기 위해 극한의 기본적인 성질들을 증명해보자. (만약 이 정의를 본 적이 있다면 증명을 보지 않고 스스로 시도해 보는 것을 추천한다!)

정리 9.1.1. 극한이 존재한다면, 이 극한은 유일하다. 즉, $\{p_n\}$은 동시에 서로 다른 점 p, p'에 수렴할 수 없다.

Proof. 귀류법을 사용하여 이 극한이 유일하지 않다고 가정하여, $\{p_n\}$이 서로 다른 점 p, p'에 수렴하다고 하자. 직관적으로 이것이 안되는 이유는 n이 충분히 커지면 대부분의 점들이 p로 가야 p로 수렴하는데 동시에 p' 근처에도 점들이 많아야 하니 불가능하다고 할 수 있다. 이를 정확하게 말하기 위해서는 겹치지 않는 두 근방이 필요하다. 따라서, $r = \rho(p, p')/2$라고 하고, p의 근방 $N_r(p)$와 p'의 근방 $N_r(p')$을 생각해보자. 이 두 근방은 겹치지 않는다. $(N_r(p) \cap N_r(p') = \emptyset)$ 직관적으로 $\mathbb{R}^2$에서 생각해보아도 당연하고, 이를 믿지 못한다 하더라도 귀류법을 사용해 삼각부등식에 위배됨을 보일 수 있다. 이 때 극한의 정의를 사용하자. $\{p_n\}$이 p에 수렴해야 하기에 어떤 N_1이 존재해서

$$n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad p_n \in N_r(p) \tag{9.7}$$

이다. 똑같이 p'에 대해 생각하면 어떤 N_2가 존재하여

$$n \geq N_2 \quad \Longrightarrow \quad p_n \in N_r(p') \tag{9.8}$$

하지만 이때 N_1, N_2보다 더 큰 n, 즉 $n \geq N_1$과 $n \geq N_2$를 동시에 만족하는 n이 존재하는데, $p_n \in N_r(p)$와 $p_n \in N_r(p')$을 동시에 만족하기에 이 두 근방이 겹치지 않음에 모순이다. ////

참고. 이런 증명을 할 때는 귀류법을 많이 사용하게 되는데, 귀류법을 사용하면 더 자연스럽지만 사실 귀류법은 최소한으로 줄이는 것이 좋다. J.P. Serre가 말했듯이 일반적으로 증명을 하다가 실수해서 모순이 나오면 본인이 틀렸음을 알아낼 수 있는데, 귀류법을 하다가 실수해서 모순이 나오면 좋은 결과가 나왔다고 착각할 수도 있다. 개인적인 의견으로는 굳이 귀류법을 사용하지 않아도 될 때 귀류법을 사용하면 논리가 더 "더러워지고" 말이 많아져서 사용하지 않는 것을 권장한다.

> *Reductio ad absurdum, which Euclid loved so much, is one of a mathematician's finest weapons. It is a far finer gambit than any chess gambit: a chess player may offer the sacrifice of a pawn or even a piece, but a mathematician offers the game.* (G.H. Hardy, A Mathematician's Apology, 1940.)

위 증명은 사실 귀류법을 요하지 않는다. 귀류법을 사용하지 않고 같은 명제를 증명해보아라!

연습문제 9.1.4. 위 증명과 유사하게 다음 명제들을 증명해보아라.

1. $\{p_n\}$이 p로 수렴하기 위해서는 모든 p의 근방에 유한 개의 점을 제외한 모든 p_n의 점이 포함돼있어야 한다.

2. 어떤 $r > 0$이 존재해서 모든 p_n이 전부 $N_r(p)$에 포함됨을 보여라. (따라서 수렴하는 열은 *유계*이다.)

수열이 아닌 집합에도 이렇게 근처에 있는 점이라는 개념을 부여할 수 있다.

정의 9.1.3. p가 집합 E의 극한점이기 위해선 모든 p의 근방과 E의 교집합이 공집합이 아니어야 한다. 즉 모든 $\varepsilon > 0$에 대해서 $N_\varepsilon(p) \cap E \neq \emptyset$이어야 한다. 모든 E의 극한점의 집합은 E'이라고 표기하고, $\overline{E} = E \cup E'$

9.2 위상

9.3 노름

단원 III

다항식

챕터 10

환론과 다항식

10.1 아이디얼

10.2 다항식환

앞서 복소수에서와 마찬가지로, 다항식에서 새로운 formal symbol t의 도입은 말 그대로 편의를 위한 것이다. 예를 들어, $\mathbb{R}$ 위에서의 다항식 $f(t) = 5t^5 - 3t^2 + t + 2$라는 다항식은 실수열 $(2, 1, -3, 0, 0, 5, 0, 0, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$로 표현된다. 물론 n번째 원소 (0-index를 사용)는 n차항의 계수와 대응된다.
다른 말로, 어떤 집합 S 위에서의 다항식 $f(t) = \sum a_i t^i$은 $\{a_i\} \in S^{\mathbb{N}}$과 대응된다. 여기서 붙는 추가적인 조건은 어떤 N이 존재해 $a_N = a_{N+1} = a_{N+2} = \cdots = 0$이라는 것이다. 이 조건이 다항식의 차수가 유한함을 보장해 준다.
이렇게 해서 만들어진 집합을 $S[t]$, S 위의 다항식 집합이라고 한다. 유한 차수 조건 없이 만들어진 집합은 $S[[t]]$라고 하며, S 위의 formal power series 집합이라고 부른다. 단어 formal(형식적)은 수렴성을 요하지 않는다는 의미이다.

연습문제 10.2.1. 다음 명제들을 증명하여라.

(a) $\mathbb{Z}[t]$가 셀 수 있는(가산) 집합임을 보여라. 즉, $|\mathbb{Z}[t]| = |\mathbb{Z}|$임을 보여라.

(b) $|\mathbb{R}[t]| = |\mathbb{R}|$임을 보여라. Hint: $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$이다.

(c) $\mathbb{Z}[[t]]$는 셀 수 없는 집합임을 보여라. Hint: 실수의 부분집합 $[0, 1)$는 셀 수 없다.

참고. 일반적으로 S가 무한집합이면 항상 $|S[t]| = |S|$이다. 1장을 확인하라.

다항식을 정의하는 데는 S에 대한 추가적인 조건이 필요하지 않음에 주목하라. 그러니 물론 $\{e, \pi\}$ 위에서의 다항식을 생각할 수도 있다. 그러나 다항식 사이의 덧셈과 곱셈을 정의해야 비로소 다항식을 제대로 활용할 수 있으므로, 우리는 그 계수인 S가 먼저 덧셈과 곱셈이 잘 정의되어 있음을 가정하는 편이 좋을 것이다. 이런 집합 S를 환이라고 부른다. 즉 우리는 일반적인 환 R에 대해 $R[t]$를 환으로 만들 것이다. 덧셈은 element-wise, 즉 i차항은 i차항끼리만 더해지도록 정의하며, 곱셈은 convolution(합성곱)으로 정의한다. 즉 $\{a_i\} \times \{b_i\} = \{c_i\}$일 때 $c_i = \sum a_j b_{i-j}$가 된다.

연습문제 10.2.2. 앞서 배웠던 환의 정의를 복습하자. $(R, +, \times)$가 다음 조건들,

1. $(R, +)$는 abelian group(항등원을 0이라고 함)
2. $\times$는 결합법칙 만족: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$(따라서 이를 편의상 abc로 씀)
3. 분배법칙: $a(b + c) = ab + ac, (a + b)c = ac + bc$

을 만족하면 $(R, +, \times)$를, 혼동의 여지가 없을 때는 간단히 R을 환(ring)이라고 한다. R이 환이면 $R[t]$도 환임을 보여라. 특히, R이 ring with 1(또는 identity)이면, 즉 곱셈의 항등원 1을 가지면 $R[t]$도 ring with 1임을 보여라. R이 가환환(곱셈의 교환법칙을 만족하는 환)이면 $R[t]$도 가환환임을 보여라.

연습문제 10.2.3. 임의의 환 R에 대해, 집합으로서의 $R[t]$가 가질 수 있는 서로 다른 환 구조를 몇 개만 찾아보아라.

10.3 PID

10.4 ED

챕터 11

다항식의 여러 성질

11.1 보간법

1차 다항식의 그래프는 서로 다른 두 점, 즉 서로 다른 두 x에 대한 함숫값을 알면 완전히 결정된다. 마찬가지로 2차 다항식은 세 점을 알면 완전히 결정되는데, 이는 2차 다항식에는 미지수가 3개 있기 때문이다. 이와 같은 자유도(degree of freedom) 논증은 일반적으로는 엄밀한 정당화를 거쳐야 한다. 먼저 이 문제를 다른 식으로 서술해 보자. n차 다항식 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$가 있고, n개의 값 $x_0, \cdots, x_n$에 대해 함숫값 $p(x_0), \cdots, p(x_n)$가 주어져 있을 때 a_i들을 모두 알아내고 싶다. 이때 $p(x_j) = \sum_i a_i x_j^i$이므로 이를 행렬 표현으로 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \vdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x_0) \\ p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix}$$

여기서 $(n+1) \times (n+1)$ 행렬을 X라고 하자. 이 행렬을 $x_0, \cdots, x_n$에 대한 Vandermonde matrix라고 한다. X의 행렬식이 0이 아니라면 X^{-1}을 양변에 곱해

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \vdots & x_n^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p(x_0) \\ p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix}$$

를 얻는다. 따라서 이때는 모든 n차 다항식 p에 대해서 항상 이 접근을 통해 성공적으로 p의 계수들이(따라서 p가) 유일하게 결정됨을 알 수 있다. 이제 항상 $\det(X) \neq 0$임을 보이면 충분하다.

연습문제 11.1.1. $\det(X) = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$로 주어짐을 보여라. 행렬식의 정의 및 성질은 정의 14.3.1를 참조하라.

여기까지 행렬식을 통한 전통적인 접근을 살펴보았다. 그러나 선형성에 의해 다른 접근을 시도해 볼 수 있다.

연습문제 11.1.2. j를 고정하자. $p_j(x_j) = 1$, $i \neq j$에 대해 $p_j(x_i) = 0$이 성립하는 다항식 p_j를 하나 찾아라. Hint: $i \neq j$일 때 $p_j(x_i) = 0$이므로 p_j는 $(x - x_i)$를 근으로 가져야 한다.

연습문제 11.1.3. 원래 문제에서 찾고 싶은 다항식 $p(x)$의 한 후보를 $p_j(x)$들의 선형 결합으로 나타내어라.

연습문제 11.1.4. 위 연습문제에서 찾은 후보만이 유일한 답임을 보여라. Hint: $p(x_i) = q(x_i)$가 모든 x_i에 대해 성립한다면 $p - q$는 $(x - x_i)$를 근으로 갖는다.

정리하면:

정리 11.1.1 (Lagrange interpolation)**.** n차 이하 다항식 p의 $x_0, \cdots, x_n (x_i \neq x_j)$에서의 값이 주어져 있다고 하자.

$$p_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

라고 할 때, p는

$$p(x) = \sum p(x_j) p_j(x)$$

와 같이 유일하게 결정된다.

연습문제 11.1.5. 세 실근을 갖는 삼차함수가 있다. 두 근에서의 기울기가 각각 5와 -2이다. 나머지 한 근에서의 기울기는 얼마인가? 일반화해 보라.

출처: https://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial_interpolation, https://en.wikipedia.org/wiki/Vandermonde_matrix

11.2 다항식의 판별식

이차 다항식 $f(x) = ax^2 + bx + c$에 대해 그 판별식이 $D(f) = b^2 - 4ac$로 주어짐은 잘 알고 있다. 이제부터 판별식의 의미와 고차 다항식으로의 확장에 대해 논의해 볼 것이다.

정리 11.2.1. 실계수 이차 다항식 f에 대해,

1. $D(f) > 0$이면 f는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
2. $D(f) = 0$이면 f는 중근을 갖는다.
3. $D(f) < 0$이면 f는 서로 켤레인 두 허근을 갖는다.

하지만 아직 D의 정확한 값이 무엇을 의미하는지는 모른다. 따라서 근의 공식으로부터 시작하자. 두 근 α, β로부터 D를 얻는 방법은 바로 $D = a^2(\alpha - \beta)^2$이다. 최고차항의 계수를 1로 가정하면 $D = (\alpha - \beta)^2$라는 간결한 식을 얻는다.

연습문제 11.2.1. 이 식으로부터 위 정리를 유도하여라.

이제 이를 3차 다항식으로 일반화할 방법을 생각해 보자. 마찬가지로 서로 다른 세 실근을 가질 때는 $D > 0$, 중근을 가질 때는 $D = 0$, 허근을 가질 때는 $D < 0$이 되도록 하고 싶다. 이차 다항식에서 근의 차를 제곱한 것이 D임으로부터 착안해 보면, 세 근 α, β, γ에 대해 $D = ((\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha))^2$로 정의하면 이 성질을 만족할 것이라고 예상할 수 있다.

연습문제 11.2.2. 정리 11.2.1의 3차 analogue는 첫 두 경우에 대해서는 거의 자명하다. 이제 세 번째, 즉 허근을 갖는 경우에 대해 증명하여라. Hint: 실계수 3차 다항식이 허근 z를 가진다면 $\bar{z}$ 역시 근으로 가지고, 나머지 한 근은 실근이다.

일반화해 보자. 먼저 최고차항의 계수가 1인 n차 다항식 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$가 근 $x_1, \cdots, x_n$을 가질 때 $D(f) = \prod_{i<j}(x_j - x_i)^2$으로 정의한다.

참고. 이때 판별식은 근들에 대한 Vandermonde matrix의 determinant의 제곱이다. (연습문제 11.1.1을 참조하라)

그런데 이는 물론 x_i에 대한 $n(n-1)$차 대칭 다항식이므로 기본 대칭 다항식들에 대한 다항식으로 표현된다.

정의 11.2.1. n차 다항식 $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_0$에 대해, 그 판별식 $D(f) = a_n^{2n-2}\prod_{i<j}(x_j - x_i)^2$로 정의한다.

출처: https://en.wikipedia.org/wiki/Discriminant

단원 IV

방정식과 부등식

챕터 12

절대부등식

12.1 산술 기하 평균 부등식

정의 12.1.1. n개의 실수 $a_1, \cdots, a_n$에 대해 이들의 산술평균(arithmetic mean)을 $\mathrm{AM}(a_1, \cdots, a_n) = \frac{1}{n}\sum a_i$로 정의한다.

n개의 음 아닌 실수 $a_1, \cdots, a_n$에 대해 이들의 기하평균(geometric mean)을 $\mathrm{GM}(a_1, \cdots, a_n) = \sqrt[n]{\prod a_i}$로 정의한다.

정의 12.1.2. n개의 0 아닌 실수 $a_1, \cdots, a_n$에 대해 이들의 조화평균(harmonic mean)을 $\mathrm{HM}(a_1, \cdots, a_n) = 1/\mathrm{AM}(1/a_1, \cdots, 1/a_n)$으로 정의한다.

정리 12.1.1 (산술 기하 평균 부등식)**.** n개의 음 아닌 실수 $a_1, \cdots, a_n$에 대해, $\mathrm{AM}(a_1, \cdots, a_n) \geq \mathrm{GM}(a_1, \cdots, a_n)$이 성립한다. 등호는 정확히 $a_1 = \cdots = a_n$일 때만 성립한다.

연습문제 12.1.1. 양수 a_i들에 대해 $\mathrm{GM}(a_1, \cdots, a_n) \geq \mathrm{HM}(a_1, \cdots, a_n)$가 성립함을 정리 12.1.1으로부터 보여라.

여기서는 Cauchy의 forward-backward induction을 이용해 정리 12.1.1을 보일 것이다.

연습문제 12.1.2. $n = 2$일 때를 증명하여라. 즉, $a, b \geq 0$에 대해 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$임을 보여라.

연습문제 12.1.3. $n = n_1$일 때와 $n = n_2$일 때 정리 12.1.1이 성립한다면 $n = n_1 n_2$일 때도 성립함을 보여라. Hint: "평균은 평균의 평균이다..."

연습문제 12.1.4. n일 때 성립한다면 $n-1$일 때도 성립함을 보여라. Hint: $a_n = \mathrm{AM}(a_1, \cdots, a_{n-1})$을 대입하자.

연습문제 12.1.5. 증명을 완료하여라.

여기서,

$$1/\,\mathrm{HM}(a_1, \cdots, a_n) = \mathrm{AM}(1/a_1, \cdots, 1/a_n)$$

에 주목하자. 잘 생각해 보면 GM에 대해서도 비슷한 식을 세울 수 있다:

$$\log \mathrm{GM}(a_1, \cdots, a_n) = \mathrm{AM}(\log a_1, \cdots, \log a_n)$$

따라서 AM-GM 부등식을

$$\log \mathrm{AM}(a_1, \cdots, a_n) \geq \mathrm{AM}(\log a_1, \cdots, \log a_n)$$

으로 다시 쓸 수 있다. 또한 이 부등식이 성립하는 이유는 log의 그래프가 위로 볼록하기 때문이라고 추측해 볼 수 있다. 일반화해 보자.

정의 12.1.3. 함수 f가 어떤 구간에서 임의의 실수 $0 \leq c \leq 1$에 대해

$$f(ca + (1-c)b) \leq (\geq) cf(a) + (1-c)f(b)$$

를 만족할 때 f가 그 구간에서 아래로(위로) 볼록하다고, 영어로는 convex(concave)라고 한다. 아래로 볼록한 함수를 간단히 볼록하다고도 한다. 등호가 $c = 0, 1$에서만 성립한다면 f를 strictly convex(concave)라고 한다.

참고. 즉, 볼록함수는 할선이 항상 그래프보다 위에 있는 함수이다.

정리 12.1.2 (젠센 부등식)**.** n개의 실수 c_i가 $c_i \geq 0, \sum c_i = 1$을 만족한다고 하자. 아래로 볼록한 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대해

$$f\left(\sum c_i a_i\right) \leq \sum c_i f(a_i)$$

가 성립한다. 특히 f가 strictly convex이고 $\forall i, c_i > 0$이라면 등호는 $a_1 = \cdots = a_n$일 때만 성립한다.

연습문제 12.1.6. 정리 12.1.1과 같은 방식으로 증명할 수 있다. 증명하여라. 기하적으로도 설명해 보라.

참고. 이 정리에 $c_i = 1/n, f = -\log$를 대입하면 정리 12.1.1을 얻는다.

참고. 확률변수 X와 볼록함수 f에 대해 젠센 부등식의 다른 형태 $f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)]$도 짚고 넘어가자.

다음은 기하평균의 성질을 표현하는 다른 부등식이다.

정리 12.1.3 (Carleman)**.** 모든 $0 \leq a_n$과 N에 대해, 다음이 성립한다.

$$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{GM}(a_1, \ldots, a_n) \leq e \sum_{n=1}^{N} a_n$$

연습문제 12.1.7. 다음은 정리 12.1.3의 한 증명이다. 먼저, $(1+1/m)^m \leq e$가 모든 자연수 m에 대해서 성립한다는 사실은 자유롭게 사용하여도 된다.

(a) 정리 12.1.1을 사용하여 바로 증명을 시도해보아라.

(b) 위 증명이 안되는 이유는 정리 12.1.1는 $a_1, a_2, \ldots, a_n$의 크기가 다를 때, 잃는 것이 많기 때문이다. 즉 이 문제를 해결하기 위해 적당히 선택된 c_m에 대해 $a'_m = a_m c_m$로 놓고 증명을 마쳐라. [*힌트*: $(c_1 c_2 \ldots c_n)^{-1/n} n^{-1}$이 e에 가깝도록 선택을 해 보아라.]

12.2 $\mathbb{C}^n$ 공간 위 부등식

자연수 n에 대해서, $\mathbb{C}^d$ 집합 위의 다음 함수들을 고려하자.

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty) \\ \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq d} |x_i| \end{aligned} \tag{12.1}$$

이 때 지수 p는 ∞의 값 또한 가질 수 있고, $1/\infty = 0$으로 생각할 것이다.

정의 12.2.1. 집합 $\mathbb{C}^d$과 $\|x\|_p$를 묶어서, 간편하게 공간 L^p_d으로 표기한다.

참고. 공간 L^p를 따로 정의하는 것은, 우리의 부등식 대부분이 무한수열이나, $(-\infty, \infty)$위의 적당한 함수에 대해 성립하기 때문이다. 이 때에는 수렴성이 중요해지기 때문에, 적당한 의미에서 $|x|^r$의 합 (적분 또는 급수)가 수렴하는 수학적인 물체들의 집합을 L^r로 표기한다. 우리는 이 전통을 따라, $\mathbb{C}^d$의 경우에서도 L^r, L^p 등으로 따로 그 지수를 표기할 것이다.

연습문제 12.2.1. 식 (12.1)의 함수가 모든 $1 \leq p \leq \infty$와, $c \in \mathbb{C}, x \in L^p_d$에 대해, $\|cx\|_p = |c|\|x\|_p$를 만족함을 보이시오. 또한, $\|x\|_p = 0$과 $x = 0$이 필요충분조건임을 보이시오.

정의 12.2.2. 두 $x, y \in \mathbb{C}^d$에 대해, $xy = (x_i y_i) \in \mathbb{C}^d$으로 정의한다.

보조정리 12.2.1. 실수 $1 < p, q$가 $1/p + 1/q = 1$이라고 가정하자. 두 복소수 x, y에 대해, $|xy| \le |x|^p/p + |y|^q/q$이 성립한다.

연습문제 12.2.2. 보조정리 12.2.1을 증명하시오. [*힌트*: 자연로그 log는 $(0, \infty)$에서 위로 볼록하다.]

다음 두 부등식은 널리 알려져 있다. 자신 있는 독자는 증명을 먼저 시도해보는 것도 좋을 것이다.

정리 12.2.2 (Hölder)**.** 두 $1 \le p, q \le \infty$가 $1/p + 1/q = 1$을 만족한다고 하자. 그러면 $x \in L_d^p, y \in L_d^q$에 대해, $\|xy\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q$가 성립한다.

Proof. 보조정리 12.2.1에 $x_i/\|x\|_p, y_i/\|y\|_q$를 대입하면,

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \le \frac{1}{p}\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|y_i|}{\|y\|_q}\right)^q$$

를 얻고, 모든 i에 대해서 양변을 더하면,

$$\frac{\|xy\|_1}{\|x\|_p \|y\|_q} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

에서 증명이 끝났다. ////

연습문제 12.2.3 (Generalized Hölder)**.** 세 $1 \le p, q, r \le \infty$에 대해서,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

이 성립하면, 두 $x \in L_d^p, y \in L_d^q$에 대해 $\|xy\|_r \le \|x\|_p \|y\|_q$를 증명하여라. [*힌트*: $0 \le p \le 1$이고 a, b가 양수이면 $a^p b^{1-p} \le pa + (1-p)b$이 성립한다. 이를 이용해 $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$인 경우를 고려해라.]

정리 12.2.3 (Minkowski)**.** 임의의 $1 \le p \le \infty$에 대해서, $\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$가 성립한다.

Proof. 만약 $p = 1$이거나 $p = \infty$이면 매우 쉽다. 즉 $1 < p < \infty$임을 가정하자.

삼각부등식을 $|x_i + y_i|$에 적용하면

$$|x_i + y_i|^p \le |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$$

을 얻고, 모든 i에 대해 다 더한 뒤, 각 항에 횔더 부등식을 $1/p + 1/q = 1$인 q에 적용하자.

$$\|x + y\|_p^p \le (\|x\|_p + \|y\|_p)\left(\sum |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$

이 때, $q(p-1) = p$이므로, 다시 이 식을 쓰면,

$$\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)(\|x+y\|_p)^{p/q}$$

이므로, 양변을 $\|x+y\|_p^{p/q}$로 나누면 증명이 끝났다. ////

정리 12.2.4 (Hölder, Converse)**.** 지수 $1 \leq p, q \leq \infty$가 $1/p + 1/q = 1$을 만족한다고 가정하자. 만약 모든 $y \in L_d^q$에 대해서, $\|xy\|_1 \leq C\|y\|_q$가 성립시, $\|x\|_p \leq C$가 성립한다.

연습문제 12.2.4. 정리 12.2.4를 증명하시오.

서로 다른 p_1, p_2에 대해서, $\|x\|_{p_1}, \|x\|_{p_2}$의 연관을 물어볼 수 있다. 즉 x를 고정하고, $\|x\|_p$를 p의 함수로 보는 관점 또한 유효하다.

정리 12.2.5. 두 지수 $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$에 대해서, 아무 $0 \leq t \leq 1$에 관해 지수 $1/p = t/p_1 + (1-t)/p_2$로 정의하자. 그러면 모든 $x \in \mathbb{C}^d$에 대해,

$$\|x\|_p \leq \|x\|_{p_1}^t \|x\|_{p_2}^{1-t}$$

가 성립한다.

Proof. 만약 $p_2 = \infty$이면 $|x_i|^p \leq |x_i|^{p_1}\|x\|_\infty^{p-p_1}$로 쉽게 증명 가능하다. 즉 $p_2 < \infty$인 경우를 해보자. 우리는 어떤 상수 $0 \leq \alpha \leq 1$에 대해 $p = \alpha p_1 + (1-\alpha)p_2$임을 알고, 우리가 했듯이 로그가 위로 볼록한 사실을 사용해, 다음을 보일 수 있다.

$$\alpha \log |x_i|^{p_1} + (1-\alpha)\log |x_i|^{p_2} \leq \log(\alpha|x_i|^{p_1} + (1-\alpha)|x_i|^{p_2})$$

여기에서 식을 정리하면,

$$|x_i|^p \leq \alpha|x_i|^{p_1} + (1-\alpha)|x_i|^{p_2} \tag{12.2}$$

을 볼 수 있고, x_i를 모두 다 더하면, $\|x\|_{p_1} = \|x\|_{p_2} = 1$인 경우에 해당 부등식을 얻을 수 있다. 더욱 더 나아가, 양변에 $0 < C$를 곱하면, 우리의 결론은 $\|x\|_{p_1}^{p_1} = \|x\|_{p_2}^{p_2} = C$일 때에도 성립한다. ////

연습문제 12.2.5. 정리 12.2.5의 증명을 완료하시오. [*힌트*: 식 (12.2)에서, x_i 대신 βx_i을 고려해라.]

연습문제 12.2.6. 정리 12.2.5를, $|x|^{(1-t)p+tp}$와 횔더 부등식을 사용해서 증명하시오.

이제 두 $\mathbb{C}^d$에 대한 합성곱 연산을 정의할 것이다.

정의 12.2.3. 두 $x, y \in \mathbb{C}^d$의 합성곱(Convolution) $x * y$는 다음과 같이 정의한다.

$$(x * y)(i) = \sum_{1 \le j \le n} x(j)y(i-j)$$

여기서 i와 j는 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 즉 $i, j \mod n$으로 본다.

참고. 우리는 앞으로 간편함을 위해, 특별한 말이 없으면 $\sum$의 인덱스를 1에서 d까지, 그리고 모든 $x \in \mathbb{C}^d$에 대해서, $x(n)$은 $x(n \pmod d)$로 해석할 것이다.

연습문제 12.2.7. 벡터 $x, y, z \in \mathbb{C}^n$에 대해, $x*y = y*x$와 $(x*y)*z = x*(y*z)$를 증명하시오. 또한, $a, b \in \mathbb{C}$에 대해, $(ax+by)*z = a(x*z)+b(y*z)$를 증명하시오.

예시. 복소수 ω가 $\omega^n = 1$를 만족한다고 가정하자. 그러면 n차 복소다항식 $p(x), q(x)$을 각각

$$p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1}$$
$$q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_{n-1}x^{n-1}$$

로 정의하고, $x(i) = p_i, y(i) = q_i$로 정의하면 (여기서 $0 = n$으로 생각한다),

$$p(\omega)q(\omega) = (x*y)(0) + (x*y)(1)\omega + \cdots + (x*y)(n-1)\omega^{n-1}$$

이 성립한다.

예시. 면이 n개이고, 각각 0에서 $n-1$이 적혀있는 주사위 A에서 i가 쓰여진 면이 나올 확률이 a_i이고, B에서 마찬가지로 b_i이라고 하자. 주사위 A, B를 나타내는 $a, b \in \mathbb{C}^d$을 $a = (a_i), b = (b_i)$로 정의하면, $(a*b)(i)$는, 각각 A, B를 굴려 나온 값의 합이 $i \pmod n$일 확률이다.

합성곱 연산에 대한 다음 부등식을 증명할 것이다.

정리 12.2.6 (Young)**.** 지수 $1 \le p, q, r \le \infty$가 다음을 만족하면,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

두 $x \in L_d^p, y \in L_d^q$에 대해, $\|x*y\|_r \le \|x\|_p \|y\|_q$가 성립한다.

여기에 증명이 하나 있다. (필자가 추천하지는 않는 증명이다.)

Proof. 만약 $r=\infty$이면 횔더 부등식에서 바로 유도가 가능하다. 즉 $r<\infty$라고 가정 가능하다.

먼저 $(x*y)(n)$을 다음과 같이 쓰자.

$$|(x*y)(n)| = \sum_m |x(m)|^{\frac{r}{r+1}}|y(n-m)|^{\frac{1}{r+1}}|x(m)|^{\frac{1}{r+1}}|y(n-m)|^{\frac{r}{r+1}}$$

나누어진 두 부분에 횔더 부등식을 적용하자. 우리의 지수에 대한 조건을

$$\frac{1}{\frac{r+1}{r}p}+\frac{1}{\frac{r+1}{r}q}=1$$

으로 쓰면, 횔더 부등식의 조건을 만족함을 볼 수 있고, 적용시

$$|(x*y)(n)| \le \left(\sum_m |x(m)|^p|y(n-m)|^{\frac{p}{r}}\right)^{\frac{r}{(r+1)p}}\left(\sum_m |x(m)|^{\frac{q}{r}}|y(n-m)|^q\right)^{\frac{r}{(r+1)q}}$$

첫번째 항에서 $|y|^q$ 꼴을 만들기 위해 지수 $\alpha = rq/p$를 준비한다. 그리고 $|x|^p$를 유지하기 위해, $1/\alpha+1/\alpha'=1$이라고 할 때, $|x|^p$를 각각 $|x|^{\frac{p}{\alpha}}|x|^{\frac{p}{\alpha'}}$로 쪼갠다. 다시 횔더 부등식 지수 α,α'에 대해 적용하면,

$$\left(\sum_m |x(m)|^p|y|^{\frac{p}{r}}(n-m)\right) \le \left(\sum_m |x(m)|^p\right)^{\frac{1}{\alpha'}}\left(\sum_m |x(m)|^p|y(n-m)|^q\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

을 얻는다. 비슷한 방법으로 두번째 항을 $\beta = rp/q$로 정리하고, x,y의 단독항을 $\|x\|_p,\|y\|_q$로 쓰면,

$$|(x*y)(n)| \le \left(\sum_m |x(n)|^p|y(m-n)|^q\right)^{\frac{1}{r+1}(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}\|x\|_p^{\frac{r}{r+1}(1-\frac{p}{qr})}\|y\|_q^{\frac{r}{r+1}(1-\frac{q}{pr})}$$

을 얻는다. 양쪽을 r승한 뒤에, 모든 n에 대해서 더하면, 원하는 부등식이 나온다. ////

연습문제 12.2.8. 버튼을 누르면 $1,\ldots,n$중 하나를 각각 $p_1,\ldots,p_n$의 확률로 출력하는 기계가 있다. 이 기계의 버튼을 두번 눌러, 그 합을 n으로 나눈 나머지를 얻는 시행을 시행 A라고 하자. 만약 $p_i<t$가 어떤 $1/n<t<1$에 대해, 모든 i에 대해 성립시, 시행 A를 m번 하여 나온 값이 모두 같을 확률이 t^{m-1} 이하임을 증명하시오. [*힌트*: 시행 1회당 오직 하나가 일어나는 사건들의 벡터를 x라고 하자. 그러면 $\|x\|_p^p$는 x를 p번 독립시행시, 같은 사건이 p번 일어날 확률이다. 정리 12.2.6를 사용하시오.]

연습문제 12.2.9. 정리 12.2.6를 다음과 같이 일반화 하시오. 만약, $1 \leq i \leq n$ 각각에 대해, $x_i \in L_d^{p_i}$가 존재하고, 지수들이 다음 식을 만족하면,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = n - 1 + \frac{1}{r}$$

부등식 $\|x_1 * x_2 * \cdots * x_n\|_r \leq \|x_1\|_{p_1}\|x_2\|_{p_2} \ldots \|x_n\|_{p_n}$ 이 성립한다.

12.3 L^p 공간 위 부등식

우리는 지금까지 정의 12.2.2에서 성립하는 매우 다양한 부등식들을 보았다. 그러나 우리는 복소수의 중요한 성질들을 쓰기 보다는, 절댓값 함수의 몇가지 중요한 성질들만을 사용하여 모든 식을 이끌어 내었다. 즉, 우리는 지금까지 사용했던 정의를 살짝 추상적으로 바꾸어 손쉽게 더 많은 부등식들을 얻을 수 있다.

정의 12.3.1. 실수나, 복소수 위 정의된 벡터공간 V위의 함수 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$가 다음을 만족하면, 우리는 이 함수를 세미노름이라고 부른다.

(a) 모든 벡터 $x \in V$에 대해, $0 \leq \|x\|$이다.

(b) 모든 벡터 $x \in V$와 (실수 또는 복소수인) 스칼라 α에 대해, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$이다.

(c) 모든 벡터 $x, y \in V$에 대해, 삼각부등식 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$이 성립한다.

벡터공간 V와 세미노름 $\|\cdot\|$을 묶어 세미노름벡터공간이라고 부른다.

정의 12.3.2. 집합 $\{1, \ldots, d\} = I_d$에서, 음이 아닌 실수들로 가는 함수 μ를 우리는 가중치함수라고 한다. 가중치에 대한 a_m의 급수를 다음과 같이 정의한다.

$$\sum_m a_m \mu(m)$$

정의 12.3.3. 정의역 집합 $\{1, \ldots, d\} = I_d$과, 치역인 세미노름벡터공간 V, 그리고 가중치함수 μ에 대해, 모든 $f : I_n \to V$의 함수들의 벡터 공간에, 각 지수 $1 \leq p \leq \infty$에 대해서 다음과 같은 세미노름을 부여하자.

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{d} \|x_i\|^p \mu(i) \right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty) \\ \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq d} \|x_i\| \end{aligned} \tag{12.3}$$

이 때, $\|\cdot\|_p$을 부여한 이 세미노름벡터공간을 우리는 $L_d^p(\mu; V)$로 부른다.

참고. 세미노름과 노름의 정의의 차이는, 노름은 $\|x\| = 0 \iff x = 0$이라는 조건이 있으나, 세미노름은 이 조건이 없다. 우리가 세미노름을 취한 이유는 가중치 함수 μ가 어떤 점에서 0인 경우, $\|x\| = 0$이나 $x \neq 0$ 일 수 있기 때문이다. 현대 적분론 그리고 측도론에서는 이 문제를 해결하기 위해, 각 함수들이 아닌, "가중치 함수"가 0을 부여하는 집합에서만 서로 다른 함수들의 동치관계를 생각한다. 예를 들어, $[0,1]$의 적분 가능한 복소함수들의 공간 $L^1[0,1]$에서, 0에서 1이고 나머지 부분에서 0인 함수와, 그냥 영함수는 같은 원소이다. 그렇기 때문에 μ-a.e., 즉 가중치 μ가 0일 수 있는 부분을 제외하고 라는 뜻의 표현을 자주 볼 수 있다. 그러나 우리는 L^p공간을 자세하게 다룰 것이진 않을 것이므로, 간편성을 위해, 노름이라는 조건을 세미노름으로 약화시켰다.

예시. 가중치함수 μ를 $\mu(i) = 1$로 정의하고, 치역을 $\mathbb{C}$로 하면, 정의 12.2.2의 L^p_d 공간을 얻을 수 있다. 일반적으로, $\mu(i) = 1$인 가중치 함수를 가진 $L^p_d(\mu; V)$ 공간을 우리는 $L^p_d(V)$로 축약해 쓴다. 비슷하게, $V = \mathbb{C}$이면, $L^p_d(\mu; V)$ 공간을 우리는 $L^p_d(\mu)$로 축약해 쓴다.

참고. 가중치함수는 엄밀한 의미의 일반화는 아니지만, (cf. 연습문제 12.3.2), 몇가지 증명을 더 간단하게 할 수 있다. 예를 들어, 정리 12.2.6의 $|x|^p$를 쪼개는 과정을, 가중치함수를 $\mu'(m) = |x(m)|\mu(m)$으로 변화하는 과정으로 더 쉽게 볼 수 있다.

예시. $e_i \in \mathbb{C}^n$를 i번째 성분이 1이고 나머지 성분이 0인 벡터로 정의하고, 각 i에 대해, $f_i = e_1 + \cdots + e_i$로 정의하자. 그러면 함수 (또는 순서쌍) $f = i \mapsto f_i$는 공간 $L^p_d(L^p_d)$의 원소이다. 이 벡터의 노름은

$$\|f\|_p = \left(\sum_m \|f_m\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_m \sum_l |f_{m,l}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

으로, $(d(d+1)/2)^{(1/p)}$이다.

연습문제 12.3.1. 다음을 $x \in L^p_d(\mu; V)$에 대해 증명하시오.

$$\|\sum_m x(m)\mu(m)\| \le \sum_m \|x(m)\|\mu(m)$$

이 일반적인 경우에 대해서도 같은 부등식들을 증명할 수 있다.

정리 12.3.1 (Generalized Hölder, L^p)**.** 지수 $1 \le p, q, r \le \infty$가

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

를 만족하고, $x \in L^p_d(\mu), y \in L^q_d(\mu; V)$이면, $\|xy\|_r \le \|x\|_p\|y\|_q$이다. 여기서 xy는, 각 i에 대해 $x(m)y(m)$의 값을 가지는 $L^r_d(\mu; V)$의 원소이다.

연습문제 12.3.2. 연습문제 12.2.3와 같은 방법으로 증명하시오. [힌트: $|\mu(n)|^r = |\mu(n)|^{r/p}|\mu(n)|^{r/q}$]

정리 12.3.2 (Hölder, L^p Converse)**.** 지수 $1/p + 1/q = 1, 1 \le p, q \le \infty$이라고 하자. 만약 $x \in L^p_d(\mu)$가 모든 $y \in L^q_d(\mu)$에 대해 $|\sum x(n)y(n)\mu(n)| \le C\|y\|_q$이면, $\|x\|_p \le C$이다.

연습문제 12.3.3. 정리 12.3.2를 증명하시오.

정리 12.3.3 (Minkowski, L^p)**.** 지수 $1 \le p \le \infty$와, $x, y \in L^p(\mu; V)$에 대해 $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$가 성립한다.

연습문제 12.3.4. 정리 12.2.3와 같은 방법으로 증명하시오.

보조정리 12.3.4. 벡터 $K \in L^1_{d_1}(\mu_1; L^p_{d_2}(\mu_2; V))$를, $K(m,n) = (K(m))(n)$으로, 즉 $K(m) \in L^p_{d_2}(\mu_2; V)$의 n번째 성분을 $K(m,n)$으로 표기하자. 만약 $1 \le p \le \infty$이면, 다음이 성립한다.

$$\left(\sum_n \left(\sum_m |K(m,n)|\mu_1(m)\right)^p \mu_2(n)\right)^{1/p} \le \sum_m \left(\sum_n |K(m,n)|^p \mu_2(n)\right)^{1/p} \mu_1(m)$$

더 축약하여, $K(n)$을 $K(m,n)$의 m에 대한 함수로, $L^1_{d_1}(\mu_1; V)$의 원소로 취급하면, 다음이 성립한다.

$$\left(\sum_n \|K(n)\|_1^p \mu_2(n)\right)^{1/p} \le \sum_m \|K(m)\|_p \mu_1(m)$$

Proof. 이 식의 우변은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_m \|K(m)\|_p \mu_1(m)$$

그러나 정리 12.3.3에 의해, 다음이 성립한다.

$$\left\|\sum_m K(m)\mu_1(m)\right\|_p \le \sum_m \|K(m)\|_p \mu_1(m)$$

좌변 안의 급수의 n번째 성분은 $\sum_m K(m,n)\mu_1(m)$과 같다. 즉 여기에 $\|\cdot\|_p : L^p_{d_2}(\mu_2; V) \to \mathbb{R}$의 정의를 사용하면

$$\left(\sum_n \left|\sum_m K(m,n)\mu_1(m)\right|^p \mu_2(n)\right)^{1/p}$$

가 된다. 절댓값을 안에 넣기 위해서는, $K(m,n)$의 모든 원소에 절댓값을 미리 취해준 $|K(m,n)| \in L^q_{d_1}(\mu_1; L^p_{d_2}(\mu_2; \mathbb{R}))$에 이 정리를 적용하면, 원했던 식을 얻는다. ////

정리 12.3.5 (Generalized Minkowski, L^p)**.** 지수 $1 \le p, q \le \infty$가 $p \le q$을 만족하고, 보조정리 12.3.4의 표기법에 따른 $K \in L^q_{d_1}(\mu_1; L^p_{d_2}(\mu_2; V))$와, $K'(n,m) = K(m,n)$으로 정의된 $K' \in L^p_{d_2}(\mu_2; L^q_{d_1}(\mu_1; V))$에 대해, $\|K'\|_p \le \|K\|_q$가 성립한다. 더 자세히 쓰면,

$$\left(\sum_m \left(\sum_n |K(m,n)|^p \mu_2(n)\right)^{q/p} \mu_1(m)\right)^{1/q} \le \left(\sum_n \left(\sum_m |K(m,n)|^q \mu_1(m)\right)^{p/q} \mu_2(n)\right)^{1/p}$$

가 성립한다.

Proof. 지수 $k = q/p$와 벡터 $|K|^p$를 보조정리 12.3.4에 적용해라. ////

참고. 정리 12.3.5는 $0 < p \le q$일때 또한 성립하나, 우리는 $0 < p < 1$인 지수는 고려하지 않을 것이다.

다음 정의는 특히 선형인 부등식에서, 결과를 쉽게 정리하는데 도움을 준다.

정의 12.3.4. 두 세미노름벡터공간 V, W에 대해서, $T : V \to W$가 모든 $x \in V$에 대해 $\|Tx\| \le C\|x\|$가 성립하도록 하는 C의 최솟값을 T의 (존재하면) 연산자 노름이라고 하고, $\|T\|$로 표기한다.

예시. 벡터 $x \in L^q_d$에 대해서, $T : L^p_d \to \mathbb{C}$를 $T(y) = \sum x(n)y(n)$으로 정의하면, $\|T\| = \|x\|_q$이다. (정리 12.2.2, 정리 12.2.4)

예시. 지수 $1 \le p \le \infty$에 대해서 $1/p + 1/q = 1 + 1/r$이라고 하자. 벡터 $y \in L^p_d$를 고정하고, $x \in L^q_d$에 대해 $T : L^q_d \to L^r_d$를 $(Tx)(n) = (y * x)(n)$으로 정의하면, $\|T\| \le \|y\|_p$이다. (정리 12.2.6)

이 예제를 다음과 같이 일반화할 수 있다.

정리 12.3.6. 벡터 $K \in L^{p'}_d(\mu_1; L^q(\mu_2))$를 고정해 각 $x \in L^p(\mu_2)$에 대해서, $T : L^p(\mu_2) \to L^q(\mu_2)$를 다음과 같이 정의하자.

$$(T(x))(m) = \sum_n K(m,n)x(n)\mu_2(n)$$

만약 $1/p' + 1/p = 1$이면, $\|T\| \le \|K\|_{p'}$이다.

연습문제 12.3.5. 정리 12.3.6을 증명하시오.

기타 L^p의 부등식을 하나 더 살펴보자.

정리 12.3.7 (Hardy-Littlewood-Polya)**.** 지수 $1 < p < \infty$와, $1/p + 1/q = 1$인 q를 고정하자. 1이상의 자연수들의 쌍에 정의된 함수 $K : \mathbb{N}_+^2 \to \mathbb{R}$이 $0 \leq K$이고, $K(sa, sb) = s^{-1}K(a, b)$을 만족하며, $K(x, 1)x^{-1/p}, K(1, y)y^{-1/q}$이 x, y에 대해 (단조)감소함수이고

$$\int_0^\infty K(x,1)x^{-1/p}dx = A$$
$$\int_0^\infty K(1,y)y^{-1/q}dy = A'$$

이면, 모든 N, M과, $x \in L_N^p(\mu_1), y \in L_M^q(\mu_2)$에 대해,

$$\left|\sum_m \sum_n K(m,n)x(m)y(n)\mu_2(n)\mu_1(m)\right| \leq A^{1/p}A'^{1/q}\|x\|_p\|y\|_q$$

가 성립한다.

연습문제 12.3.6. 다음은 정리 12.3.7의 증명이다.

(a) 모든 n, N, M에 대해, 다음이 성립함을 보여라.

$$\sum_{k=1}^N K\left(\frac{k}{n}, 1\right)\left(\frac{k}{n}\right)^{-1/p}\frac{1}{n} \leq A$$
$$\sum_{k=1}^M K\left(1, \frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^{-1/q}\frac{1}{n} \leq A'$$

(b) 공간 $L_{m\times n}^p(\mu, V)$를 정의 12.3.3와 같지만, 정의역을 $I_m \times I_n$으로 하도록 정의하고,

$$\mu(m,n) = |K(m,n)|\mu_1(m)\mu_2(n)$$

으로 정의하면,

$$\left|\sum_{m,n} x(m)y(n)\mu(m,n)\right| \leq A^{1/p}A'^{1/q}\|x\|_p\|y\|_q$$

임을 증명하면 충분함을 보여라.

(c) 급수 안의 $x(m)y(n)$을 $x(m)(m/n)^{1/pq}y(n)(n/m)^{1/pq}$으로 정의한 후, 횔더 부등식을 써서, 증명을 마쳐라.

정리 12.3.8 (Hilbert's Double Series)**.** 지수 $1 < p < \infty$와, $1/p + 1/q = 1$인 q를 고정하자. 다음 부등식이 모든 M, N, $x \in L_M^p, y \in L_N^q$에 대해 성립한다.

$$\left|\sum_m \sum_n \frac{x(m)y(n)}{m+n}\right| \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|x\|_p\|y\|_q$$

Proof. 정리 12.3.7에서, $K(m,n) = 1/(m+n)$을 사용하라. ////

12.4 지수의 볼록성

먼저, 다변수함수 f의 볼록성을 고려하자.

정의 12.4.1. 유클리드 공간 $\mathbb{R}^d$의 볼록한 부분집합 S에 정의된 함수 $f : S \to \mathbb{R}$가 모든 $0 \le t \le 1$과 $x, y \in S$에 대해 $f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$가 성립하면, f를 볼록하다고 한다.

다음은 볼록함수들의 일반적 성질 몇가지이다.

연습문제 12.4.1. 평면 $\mathbb{R}^2$에 정의된 함수 $|x|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2$가 볼록함을 보여라.

연습문제 12.4.2. 평면 $\mathbb{R}^2$에 정의된 함수 f가, 모든 $x, y \in \mathbb{R}$에 대해서 $z \mapsto f(x,z)$와 $z \mapsto f(z,y)$가 볼록함수라고 해서 f가 볼록함수일 필요는 없음을 보이시오.

연습문제 12.4.3. 두 실수 a, b가 양수이고, f, g가 같은 정의역 위 정의된 볼록함수이면, $af + bg$ 또한 볼록함수임을 보이시오.

연습문제 12.4.4. 유클리드 공간 $\mathbb{R}^d$에 대해 $0 \le a_1, \ldots, a_d$를 고정하고, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$을 $f(t) = a_1^{t_1} \ldots a_d^{t_d}$로 정의하자. 함수 f가 볼록함을 보이시오.

정리 12.4.1 (Jensen)**.** 임의의 $0 \le \lambda_i \le 1, \sum \lambda_i = 1$에 대해서, f가 볼록하면, $f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \le \sum \lambda_i f(x_i)$가 성립한다. (cf. 정리 12.1.2)

연습문제 12.4.5. 정리 12.4.1을 증명하시오.

이제 정리 12.2.6의 훨씬 좋은 증명을 보일 것이다. 먼저 합성곱의 (실질적으로 같은) L^p 정의를 하자.

정의 12.4.2. 두 $x \in L^p(\mu), y \in L^q(\mu)$에 대해 합성곱 $x * y \in L^r(\mu)$를 다음과 같이 정의한다.

$$(x * y)(n) = \sum_m x(m)y(n-m)\mu(m)$$

연습문제 12.4.6. 모든 $x \in L^p(\mu), y \in L^q(\mu), z \in L^r(\mu)$에 대해 $x * y = y * x$와, $(x * y) * z = x * (y * z)$를 증명하시오. 또한, $a, b \in \mathbb{C}$에 대해, $(ax + by) * z = a(x * z) + b(y * z)$를 증명하시오. [지금까지 그랬듯이, 증명에 큰 차이가 없을 것이다.]

보조정리 12.4.2. 임의의 N에 대해서, $1 \le i \le N$에 각각 $x_i \in L_d^{p_i}(\mu)$를 대응하자. 지수들 $1 \le p_i \le \infty$가 $\sum 1/p_i = N-1$을 만족하면, $|(x_1 * x_2 * \cdots * x_N)(0)| \le \|x_1\|_{p_1} \ldots \|x_N\|_{p_N}$가 성립한다.

Proof. 어느 $\|x_i\|_{p_i} = 0$이면, 자명하므로, 모두 0이 아니라고 가정하고, 각 x_i를 $\|x_i\|_{p_i}$로 나누면, 모든 $\|x_i\|_{p_i} = 1$이라고 가정 가능하다. 또한 어느 $p_i = \infty$이면, 나머지 $p_j = 1$이므로, 이 경우는 완전히 자명하다. ($p_i = \infty$ 인 x_k를 횔더 부등식을 사용해 제거한 후, 모든 $p_j = 1$이므로, 귀납법과 횔더 부등식을 사용해라.) 마지막으로, $y_i(n) = |x_i(n)|^{p_i}$, 그리고, $s_i = 1/p_i$로 정의하면, 모든 $y_i \in L_d^1(\mu), \|y_i\|_1 = 1$에 대해,

$$|(y_1^{s_1} * \cdots * y_N^{s_N})(0)| \le 1 \tag{12.4}$$

임을 증명하는 것으로 간단화 할 수 있다. 여기서부터 y_i를 고정하자.

모든 $0 \le a_1, \ldots, a_N$에 대해서, $t \in \mathbb{R}^N$에 대해 $f(t) = a_1^{t_1} \ldots a_N^{t_N}$로 정의하면, (모든 i에 대해) $0 \le t_i \le 1$인 영역에서 f는 볼록이다. 식 (12.4)의 좌변을 $s \in \mathbb{R}^N$의 함수 $F(s)$로 보자. 이 때 $F(s)$는 모두 $a_1^{s_1} \ldots a_N^{s_N}$ 꼴의 항들의 합으로 표현되므로, 이 함수는 $0 \le s_i \le 1$인 영역에서 볼록이다. 그런데

$$\sum s_i = N - 1$$

이므로, f_i를 i번째 성분이 0이고 나머지 성분이 1인 $\mathbb{R}^N$의 원소로 놓으면

$$(s_1, \ldots, s_N) = \sum (1 - s_i) f_i \tag{12.5}$$

가 성립한다. 식 (12.5)의 식을 사용해 F의 볼록성을 (cf. 정리 12.4.1) 사용하자. 그러나 우리가 말했듯이 $F(f_i) \le 1$이므로, ($p_i = \infty$인 경우에 대응된다.)

$$F(s) \le \sum (1 - s_i) F(f_i) \le \sum (1 - s_i) \le 1$$

에서 증명이 끝났다. ////

정리 12.4.3 (Young)**.** 임의의 N에 대해서, $1 \le i \le N$에 각각 $x_i \in L_d^{p_i}(\mu)$이고, 모든 지수$1 \le p_i \le \infty$가 $\sum 1/p_i = N - 1 + 1/q$를 만족하면,

$$\|x_1 * \cdots * x_N\|_q \le \|x_1\|_{p_1} \ldots \|x_N\|_{p_N}$$

이다.

Proof. 먼저 지수 q'를 $1/q+1/q' = 1$이도록 잡자. 각 $x \in L_d^{q'}(\mu)$에 대해 $(Rx)(n) = x(d-n+1)$으로 정의하면,

$$(x_1 * \cdots * x_N) * (Rx)(0) = \sum_n (x_1 * \cdots * x_N)(n)x(n)\mu(n)$$

이고, $\|Rx\|_{q'} = \|x\|_{q'}$이다.

정리 12.3.2를 보조정리 12.4.2와, $(x_1 * \cdots * x_N), x$에 적용하면, 원하는 결론이 나온다. ////

연습문제 12.4.7. 정리 12.4.3과 같은 방법으로 일반화된 횔더 부등식, 즉, $1 \le p_i, r \le \infty$가 $\sum 1/p_i = 1/r$을 만족하면, 모든 $x_i \in L_d^{p_i}(\mu)$에 대해

$$\|x_1 \dots x_N\|_r \le \|x_1\|_{p_1} \dots \|x_N\|_{p_N}$$

를 만족함을 보이시오.

정리 12.2.5, 정리 12.3.7, 그리고 보조정리 12.4.2의 증명은 $\|\cdot\|_p$간의 "연속적 보간"이 가능할 수도 있다는 인상을 준다. 이것이 실제로 가능하다는 놀라운 사실이 바로 다음 정리이다.

다음 정리에서도 변함 없이 모든 지수는 $[1, \infty]$의 범위로 본다.

정리 12.4.4 (Riesz-Thorin)**.** 선형 함수 $T : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^{d'}$, 즉 모든 $c \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{C}^d$

$$T(x+y) = Tx + Ty$$
$$Tcx = cTx$$

를 만족하는 T에 대해, T를 $L_d^{p_1}(\mu) \to L_{d'}^{q_1}(\mu')$로 본 함수를 T_1, $L_d^{p_2}(\mu) \to L_{d'}^{q_2}(\mu')$로 본 함수를 T_2라고 정의하자. 그러면, 모든 $0 \le t \le 1$에 대해

$$\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) = t\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right) + (1-t)\left(\frac{1}{p_2}, \frac{1}{q_2}\right)$$

이면, $L_d^p(\mu) \to L_d^q(\mu')$로 본 T'은 $\|T'\| \le \|T_1\|^t \|T_2\|^{1-t}$를 만족한다.

예시. 선형 함수 $L : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^{d'}$을 $K(m,n) \in \mathbb{C}^{d \times d'}$, 즉 $1 \le m \le d, 1 \le n \le d'$에 정의되어 있는 K에 대해,

$$(Lx)(n) = \sum_{m=1}^{d} K(m,n)x(m)$$

으로 정의하고, $\sum_m |K(m,n)| \le M_1, \sum_n |K(m,n)| \le M_2$라고 하자. 그러면,

$$\|Lx\|_1 \le \sum_{m=1}^{d} M_2|x(m)| = M_2\|x\|_1$$

이고,

$$\|Lx\|_\infty \le \max_n \left| \sum_{m=1} K(m,n)x(m) \right| \le \|x\|_\infty \max_n \left| \sum_{m=1} K(m,n) \right| \le \|x\|_\infty M_1$$

이므로,

$$\|Lx\|_p \le M_2^{1/p} M_1^{1-1/p} \|x\|_p$$

가 성립한다.

예시. 일반화된 횔더 부등식, 즉 $x_i \in L^d_{p_i}(\mu)$일 때,

$$\sum \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}$$

이면,

단원 V

함수

챕터 13

함수

13.1 극한

정의 13.1.1. 거리 공간 A, B와 $p \in A, L \in B$, 그리고 함수 $f : A \to B$에 대해, [모든 양수 $\varepsilon > 0$에 대해] [어떤 양수 $\delta > 0$이 존재하여] [[$d(p, y) < \delta$를 만족하는 $y \in A$에 대해] 항상 [$d(f(y), L) < \epsilon$가 성립한다면]] $\lim_{x \to p} f(x) = L$이라고 한다. 이때 $f(x)$는 $x = p$ 주변에서 극한 L을 가진다, 또는 L로 수렴한다고 한다. 이러한 L이 존재하지 않으면 발산한다고 한다.

13.2 함수의 연속

정의 13.2.1. 함수 f의 $x = p$ 주위에서의 극한이 $f(p)$와 같으면 f는 $x = p$에서 연속이라고 한다. (정의역의) 모든 점에서 연속인 함수를 연속함수라고 한다.

참고. $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = 1/x$는 연속함수이다.

정의 13.2.2. 위상 공간 A, B와 함수 $f : A \to B$에 대해 $S \subset B$ open $\implies$ $f^{-1}(S) \subset A$ open이면 f를 연속함수(continuous function)라고 한다.

정리 13.2.1 (중간값 정리)**.**

13.3 점근 표기법과 시간 복잡도

점근 표기법이란, 함수의 증감 추세를 비교적 간단한 다른 함수와 비교하는 표기법이다. 일반적으로는 Big-O notation이 쓰이며, 다음과 같이 정의한다.

정의 13.3.1. 함수 $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$에 대해, 양의 실수 x_0, c가 존재하여 모든 실수 x에 대해 $x > x_0 \Rightarrow |f(x)| \leq c|g(x)|$를 만족하면, $x \to \infty$에 대해 $f(x) = O(g(x))$라고 한다.

위 정의는 간단히 '$\limsup_{x\to\infty} |f(x)/g(x)| < \infty$일 때, $f(x) = O(g(x))$이다.'로 표현할 수 있다.

예시. $\lceil x \rceil = O(x)$이다.

참고. $f(x) = O(g(x))$라는 표현에서 등호는 '같다'는 의미보다는 '경향을 띤다'는 의미로 통한다. 그래서 $O(g(x))$를 하나의 집합으로 보고 $f(x) \in O(g(x))$로 표기하기도 한다.

Big-O notation 이외에도 점근 표기법에는 Little-o notation, Big-Omega notation, Little-omega notation, Big-Theta notation이 있다. 이 중 Big-Omega notation은 $\liminf_{x\to\infty} |f(x)/g(x)| > 0$일 때 $f(x) = \Omega(g(x))$로 정의되며, Big-Theta notation은 $f(x) = O(g(x))$이며 $f(x) = \Omega(g(x))$일 때 $f(x) = \Theta(g(x))$로 정의된다.

참고. 앞선 정의들을 보면 Big-Theta notation이 Big-O notation보다 더 엄격한 표기임을 알 수 있다. 그러나 통상적으로는 Big-O을 더 많이 쓰며, 암묵적으로 Big-O를 Big-Theta처럼 사용한다.

점근 표기법은 컴퓨터 과학에서 알고리즘의 시간/공간 복잡도를 나타내는데 많이 사용된다. 시간 복잡도는 입력의 크기를 나타내는 미지수(들)에 대해 수행 시간이 어느 정도인지를 나타내는 척도이다. 시간 복잡도는 주어진 입력에 대한 연산 횟수를 정확히 계산하기보다는 점근적으로 얼마인지를 나타내기에 점근 표기법을 이용하여 표현한다.

예시. 길이 N 배열을 비교 기반 정렬을 통해 정렬할 때, 시간 복잡도 하한은 $O(N \log N)$이다.

Proof. 비교 k번을 통해 구분할 수 있는 경우는 최대 2^k가지이므로 이를 이용해 가능한 모든 길이 N 배열을 정렬하려면 $2^k \geq N!$이어야 한다. 따라서 $k = \Omega(N \log N)$(증명하여라). ////

무한대 점근을 통하여 시간 복잡도를 표기하면 근사를 통해 '보기 좋은' 형태로 식을 정리할 수 있다. 이는 특히 *분할 정복*(Divide and Conquer)이라 불리는 알고리즘의 시간 복잡도를 표기할 때 유용하다. 다음 연습문제를 통해 알아보자.

연습문제 13.3.1. 함수 $T(n)$, $f(n)$, 상수 $a > 1$, $b > 1$에 대해 $T(n) = aT(n/b) + f(n)$를 모든 n에 대해 만족하면 $T(n)$은

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_b n} a^i f(n/b^i) + O(n^{\log_b a}) \tag{13.1}$$

로 표현됨을 보여라(Σ의 첨자가 실수여도 $\lceil x \rceil = O(x)$이므로 점근적으로 동일하다는 것을 관찰하면 좋다).

물론, 식 (13.1)로는 $T(n)$이 어떤 경향성을 가지는지 알아보기 어렵다. 그러므로 해당 식을 통해 유도된 더 '보기 좋은' 정리를 알아보자.

정리 13.3.1 (Master theorem)**.** 함수 $T(n)$, $f(n)$, 상수 $a > 1$, $b > 1$에 대해 $T(n) = aT(n/b) + f(n)$를 모든 n에 대해 만족하면 다음이 성립한다.

(A) 어떤 양의 실수 ϵ에 대해 $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$이면 $T(n) = O(n^{\log_b a})$이다.

(B) $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$이면 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$이다.

(C) 어떤 양의 실수 ϵ에 대해 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$이며, 어떤 상수 $c < 1$에 대해 $af(n/b) \le cf(n)$이면 $T(n) = \Theta(f(n))$이다.

Proof. (A)에서

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\log_b n} a^i f(n/b^i) &\le \sum_{i=0}^{\log_b n} a^i (n/b^i)^{\log_b a - \epsilon} = n^{\log_b a - \epsilon} \sum_{i=0}^{\log_b n} b^{\epsilon i} \\ &= n^{\log_b a - \epsilon} \frac{b^{\epsilon(\log_b n + 1)} - 1}{b^\epsilon - 1} = n^{\log_b a - \epsilon} \frac{n^\epsilon b^\epsilon - 1}{b^\epsilon - 1} \\ &\le n^{\log_b a} \frac{b^\epsilon}{b^\epsilon - 1} = O(n^{\log_b a}) \end{aligned}$$

를 만족하므로, 식 (13.1)에 의해 $T(n) = O(n^{\log_b a}) + O(n^{\log_b a}) = O(n^{\log_b a})$.
(B)에서

$$\sum_{i=0}^{\log_b n} a^i f(n/b^i) = \sum_{i=0}^{\log_b n} a^i (n/b^i)^{\log_b a} = n^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\log_b n} 1 = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

이므로, 식 (13.1)에 의해 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n) + O(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
(C)에서 식 (13.1)에서 하한 $T(n) = \Omega(f(n))$은 자명. $af(n/b) \le cf(n)$이므로 $a^i f(n/b^i) \le c^i f(n)$이기에 식 (13.1)에서

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=0}^{\log_b n} a^i f(n/b^i) + O(n^{\log_b a}) \le f(n) \sum_{i=0}^{\log_b n} c^i + O(n^{\log_b a}) \\ &\le f(n) \sum_{i=0}^{\infty} c^i + O(n^{\log_b a}) = f(n) \frac{1}{1-c} + O(n^{\log_b a}) = O(f(n)) \end{aligned}$$

이므로 $T(n) = \Theta(f(n))$. ////

위 정리는 아래의 연습문제에서 소개할 상황에서 가장 빈번하게 쓰인다.

연습문제 13.3.2. 정리 13.3.1에서 $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$ $(k \geq 0)$이면 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$임을 보여라.

예시. 병합 정렬(Merge sort)의 시간 복잡도는 길이 n 배열에 대해 $O(n \log n)$이다. 병합 정렬의 시간 복잡도를 $T(n)$이라 했을 때, 분할 과정에서 $2T(n/2)$, 병합 과정에서 $\Theta(n)$의 시간 복잡도를 가져 $T(n)$은 $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$을 만족한다. 이는 연습문제 13.3.2의 상황과 일치하므로 $T(n) = \Theta(n \log n)$이 성립한다.

출처: `https://www.cs.cornell.edu/courses/cs3110/2012sp/lectures/lec20-master/mm-proof.pdf`

13.4 코시 함수 방정식

코시 함수 방정식이란 방정식 $f(x+y) = f(x) + f(y)$를 말한다. 물론 선형 함수 $f(x) = cx$은 자명히 이 방정식을 만족한다.

연습문제 13.4.1. 코시 함수 방정식의 해 f와 유리수 q에 대해 $f(qx) = qf(x)$여야 함을 보여라.

따름정리 13.4.0.1. 코시 함수 방정식의 해 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$는 $f(x) = cx$뿐이다.

질문. 이 방정식의 비선형 해 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$이 존재하는가?

잘 생각해 보면 $f(1)$이 $f(\pi)$의 값에 영향을 줄 방법은 전혀 없음을 알 수 있다. 즉 $f(1) = 1, f(\pi) = 3$으로 정해도 될 것으로 보인다. 물론 이로부터 $f(2-3\pi)$의 값은 -7로 결정된다.
이를 추상화해 보자. $\{1, \pi\}$의 원소가 독립적으로 f 값을 가질 수 있는 이유는 π가 1의 유리수배가 아니기 때문이다. 반면 $\{1, \pi, 2-3\pi\}$의 세 원소에 임의의 값을 할당할 수 없는 이유는 $2-3\pi = 2\cdot(1) + (-3)\cdot(\pi)$의 관계가 있기 때문이다. 이는 이항을 통해 $2\cdot(1) + (-3)\cdot(\pi) + (-1)\cdot(2-3\pi) = 0$으로 쓸 수 있다. 즉, 원소들에 적절한 유리수 계수를 곱한 후 더했을 때 0이 된다면 이 잡합들에 마음대로 함숫값을 부여할 수 없다(단 모든 계수가 0인 경우는 제외해야 할 것이다). 이제 다음 정의가 자연스럽다.

정의 13.4.1. 유한집합 $S = \{s_i\}$가 있을 때, $a_i \in F$에 대해 $\sum a_i s_i$를 S의 F-linear combination(F-선형결합)이라고 한다.

정의 13.4.2. 유한집합 $S = \{s_i\}$가 있을 때 S의 F-선형결합이 0이 되는 방법이 하나뿐이면(즉, 모든 계수가 0) S를 F-linearly independent(F-선형독립)이라고 한다.

무한집합 S에 대해서는 유한 부분집합을 취하여 정의하는데, 일반적인 무한집합에서 합을 논하기는 어렵기 때문이다.

정의 13.4.3. 집합 S에 대해, S의 선형결합은 S의 어떤 유한 부분집합에 대한 선형결합을 뜻한다. S가 선형 독립이라는 것은 S의 임의의 유한 부분집합이 선형 독립임을 의미한다.

참고. 위 정의에서 사실 F가 field이고 S가 F-vector space V의 부분집합이라는 조건이 필요하다. 벡터 공간에 대한 논의는 선형대수학 교재(e.g. 이인석 - "선형대수와 군")나, 14장를 참고하라.

이 정의로 위 문단을 다시 쓰면, $\mathbb{Q}$-선형독립인 몇 개의 실수들에 대해서는 f의 값을 임의로 정해 줄 수 있고, $S \subset \mathbb{R}$에 대해 f의 값을 결정하면 S의 $\mathbb{Q}$-선형결합 전체의 집합에 대해서 f의 값이 결정된다. 따라서 우리가 해야 할 일은 $\mathbb{Q}$-선형독립이며, $\mathbb{Q}$-선형결합 전체의 집합이 $\mathbb{R}$이 되는 집합 S를 찾는 것이다. 이런 집합 S를 basis(기저), 더 정확히는 $\mathbb{R}$의 $\mathbb{Q}$-basis라고 한다.
모든 벡터 공간에 기저가 존재한다는 사실은 선택 공리(공리 1.1.2)와 동치임이 알려져 있다.

예시. $\{(0,1),(1,0)\} \subset \mathbb{R}^2$는 $\mathbb{R}^2$의 $\mathbb{R}$-basis이다.

예시. $\{1, t, t^2, \cdots\}$는 $F[t]$의 F-basis이다.

연습문제 13.4.2. $\mathbb{R}$의 모든 $\mathbb{Q}$-basis는 무한집합임을 보여라.

이제 $\mathbb{R}$의 $\mathbb{Q}$-basis S 하나를 (존재한다고 가정하고) 고정하자. f는 $f|_S$에 의해 완전히 결정된다. 따라서 코시 함수 방정식의 선형 해는, 사실은 아무런 제약 조건이 없는 $f|_S$가 우연히 선형 함수가 된 경우에만 만들어진다! 직관적으로 말하면, '코시 함수 방정식의 거의 모든 해는 선형이 아니다.'
코시 함수 방정식의 비선형 해에 대한 여러 성질이 알려져 있다. 직관적으로 비선형 해를 이해할 수 있는 강력한 정리를 소개한다.

정리 13.4.1. 코시 함수 방정식의 비선형 해 f의 그래프 $G = \{(x, f(x)) | x \in \mathbb{R}\}$는 좌표평면에서 조밀하다. 즉, 좌표평면 위 임의의 원반을 하나 그려도 f의 그래프는 그 원반과 교점을 갖는다.

연습문제 13.4.3. 정리 13.4.1에서, 사실 임의의 원반과 f의 그래프가 갖는 교점은 무한히 많다. 정리 13.4.1만을 이용해 증명하여라.

연습문제 13.4.4. 정리 13.4.1를 증명하여라. Hint: 비선형 해 f에 대해, $f(a)/a \neq f(b)/b$인 두 수 $a, b \neq 0$를 잡자.

이런 성질은 물론 우리가 한 번도 본 적 없는 것이다.

연습문제 13.4.5. 연속의 정의를 이용하여, 한 점에서라도 연속인 함수의 그래프는 좌표평면에서 조밀하지 않음을 증명하여라.

연습문제 13.4.6. 증가함수의 그래프는 좌표평면에서 조밀하지 않음을 증명하여라.

다음 연습문제로 마무리하자.

연습문제 13.4.7. $f(x + y) = f(x) + f(y), f(1/x) = 1/f(x)$를 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 찾아라.

출처: `https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy's_functional_equation`

챕터 14

선형대수학

14.1 서론

이 단원에서는 *선형*인 연산과 함수들의 기본적인 성질을 탐구할 것이다. 선형이란, 덧셈과 상수의 곱셈에 대해서 가환인 것들을 말한다. 예를 들어서, 실수 2개의 쌍들의 집합인 $\mathbb{R}^2$은

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ a(b_1, b_2) &= (ab_1, ab_2)\end{aligned} \tag{14.1}$$

와 같이 덧셈과, 상수의 곱셈을 정의할 수 있다. 그러면 함수 $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$가 선형이라는 것의 정의는, 다음 식이 모든 $x, y \in \mathbb{R}^2$와 $a \in \mathbb{R}$에 대해 성립하는 것이다.

$$\begin{aligned}L(x + y) &= L(x) + L(y) \\ L(ax) &= aL(x)\end{aligned}$$

이런 함수들을 우리는 행렬로 나타낼 수 있음을 볼 것이다.

유한한 집합 A, B에 대하여, $f : A \to B$가 단사임과 전사임은 동치이다. *기저*(basis)라는 도구는 선형인 함수들을 제한된 정의역에 대한 일반 함수로 다룰 수 있게 해준다. 이것을 사용해 A, B가 어떤 유한한 조건을 만족하면, 선형인 $f : A \to B$가 단사임과 전사임이 동치임을 보일 수 있다.

우리의 예시인 $\mathbb{R}^2$로 다시 돌아와, 다음 함수를 고려하자.

$$f(x) = (ax_1, bx_2) \tag{14.2}$$

이 함수는 $\mathbb{R}^2$에서 자기 자신으로 가는 선형 함수이다. 더욱더, f를 n번 x에 적용하면, 그 결과를 $(a^n x_1, b^n x_2)$로 쉽게 계산할 수 있다. 일반적인 선형 함수에 대해서

이런 계산을 할 수 있을지 우리는 살펴볼 것이다. 이것은 임의의 선형 함수 f에 대해서, $f(x) = \lambda x$인 x를 찾는 문제와 긴밀히 연결되어 있다. 식 (14.2)과 같은 꼴로 변환하는 테크닉은 점화식 등을 일반항으로 정리하는데 쓸 수 있다.

14.2 벡터 공간

우리는 먼저 식 (14.1)의 조건들을 공리적으로 다룰 것이다. 식 (14.1)에 먼저 두가지 수학적 물체가 존재함에 주목해라. 먼저 곱할 수 있는 상수는 실수와 비슷하게, 덧셈과 곱셈이 자유로운, 임의의 체 (cf. 정의 7.1.1)의 원소로 하는 것이 적당해 보인다.

참고. 추상적으로 생각하기 부담스러운 독자는 임의의 체를 실수나 복소수라고 생각하여도 된다.

상수가 아니지만 더하고 상수를 곱할 수 있는 물체들을 우리는 관용적으로 *벡터*라고 부른다. 14.1절에서 다룬 벡터는 실수들의 쌍인 (a, b)이다. 그러나 우리는 벡터들을 이런 쌍이 아닌 어떤 연산에 관한 성질들을 만족하는 추상적인 물체들로 볼 것이다. 다음 두번째 예시가 이 관점의 장점을 말해준다.

예시. 임의의 체 (예시: 유리수, 실수, 복소수) F위의 모든 다항식들의 집합 $F[x]$는 F위의 벡터 공간을 이룬다.

예시. 실수에 정의된 모든 실함수들의 공간, 모든 연속인 실함수들의 공간, 모든 미분 가능한 실함수들의 공간, 상수함수들의 공간은 모두 각각 벡터 공간을 이룬다.

예시. 우리가 14.1절에서 본 실수 2개의 쌍들의 공간, 그리고 더욱 더 일반적으로 임의의 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해서 체 F의 원소 n개의 순서쌍들의 공간은 식 (14.1)과 비슷한 연산 아래에서 벡터 공간을 이룬다. 특수한 경우로 유클리드 공간 $\mathbb{R}^n$과 공간 $\mathbb{C}^n$이 있다. 특별한 말이 없으면, F^n은 F위의 F의 원소 n개의 순서쌍들의 벡터 공간을 뜻할 것이다.

다음 정확한 정의는 정확히 무슨 연산 법칙들이 성립하는지를 정확하게 말하여 주나, 너무 강조해서 볼 필요는 없다.

정의 14.2.1. 체 F위의 벡터 공간 V이란, 이항 연산 $\cdot : F \times V \to V$와 $+ : V \times V \to V$를 가지고, 다음 성질을 만족하는 집합을 말한다.

(a) 덧셈의 교환법칙과 결합법칙이 성립한다. 즉 임의의 $v, w, u \in V$에 대해서, $(v + w) + u = v + (w + u)$이고, $v + w = w + v$이다.

(b) 덧셈의 항등원, 즉 $v + 0 = 0 + v = v$가 모든 $v \in V$에 대해서 성립하는 벡터 0이 존재한다. 이 벡터를 관용적으로 영벡터라고 한다.

(c) 각 $v \in V$에 대하여, 덧셈의 역원인, 즉 $v + w = w + v = 0$를 만족하는 벡터 w가 존재한다. 우리는 이 벡터를 $-v$로 표기한다.

(d) 각 $a, b \in F, v \in V$에 대해서 결합법칙 $a(bv) = (ab)v$가 성립한다. (우리는 연산 $\cdot$를 주로 생략하고 표기한다.)

(e) 각 $a, b \in F, v, w \in V$에 대해서 분배법칙 $(a + b)v = av + bv$와 $a(v + w) = av + aw$가 성립한다.

(f) 체 F의 항등원 1과 모든 $v \in V$에 대해 $1v = v$가 성립한다.

벡터 공간 V의 원소들을 우리는 벡터라고 부르고, F의 원소들을 우리는 관용적으로 스칼라라고 한다.

우리는 다음 논의에서 모든 벡터 공간을 어떤 고정된 체 F위의 벡터 공간이라고 생각할 것이다.

해당 정의에서 다음 “자명한” 사실들을 유도할 수 있다.

연습문제 14.2.1. 벡터 공간 V에서 항등원이 유일하고, 각 벡터 $v \in V$에 대한 덧셈의 역원 또한 유일함을 증명하여라.

연습문제 14.2.2. (a) 모든 $v \in V$에 대하여, $0v = 0$이 성립함을 증명하시오.

(b) 모든 $a \in F$에 대하여, $a0 = 0$이 성립함을 증명하시오.

(c) 위 두 연습문제에서 등장하는 0 4개 중, 하나는 나머지와 다르다. 어떤 것인지, 어떻게 다른지 찾으시오.

(d) 만약 $a \in F$와 $v \in V$에 대해 $av = 0$가 성립하면, $a = 0$이거나 $v = 0$임을 증명하시오.

(e) 스칼라 -1과 v의 곱인 $(-1)v$과, v의 덧셈에 대한 역원 $-v$가 같음을 증명하시오.

정의 14.2.2. 벡터 공간 V의 부분집합 S가 V의 연산 아래에 벡터 공간이 될 때, 우리는 S를 부분공간이라고 한다.

보조정리 14.2.1. 벡터 공간 V의 부분집합 S가 부분공간일 필요충분조건은, 모든 $a, b \in F$와 $v, w \in S$에 대해, $av + bw \in S$인 것이다.

Proof. 만약 상수곱과 덧셈에 대해 S가 닫혀있다면, 항등원 조건은 $0v = 0$에서 (S가 공집합이면 증명할 것이 없다), 역원 조건은 $(-1)v + v = 0$에서, 나머지 연산의 조건은 V가 벡터 공간이라는 사실에서 바로 자명하다. ////

예시. 실수 위의 공간 $\mathbb{R}^2$의 부분공간 S는 $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$이거나, 어떤 벡터 $v \in \mathbb{R}^2$에 대해서 $\{cv : c \in \mathbb{R}\}$꼴의 원점을 지나는 직선이다.

연습문제 14.2.3. 이 예시를 증명하시오. [*힌트*: 0이 아닌 벡터 $x \in S$를 선택하고, 실수 c에 대해 cx꼴이 아닌 벡터가 있는 경우와 없는 경우로 나누어라.]

벡터 공간 V의 두 부분공간 W_1, W_2에 대해서, $W_1 \cap W_2$ 또한 연산에 대해 닫혀 있으므로, 또한 부분공간이다. 일반적으로 (무한할 수 있는) 아무 부분 공간들의 집합 $\mathcal{F}$에 대해서, $\cap_{W \in \mathcal{F}} W$은 부분공간이다. 반대로, 두 부분공간 W_1, W_2를 포함하는 부분공간을 만들기 위해서는, $W_1 \cup W_2$로는 충분하지 않다. (예시: $\{(a, 0)\} \cup \{(0, a)\}$) 두 부분공간 W_1, W_2를 포함하는 "제일 작은" 부분공간은

$$W_1 + W_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}$$

이다. 부분공간임을 확인하기 위해서는, 두 $x, y \in W_1 + W_2$에 대해 $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$가 어떤 $x_1, y_1 \in W_1$와 $x_2, y_2 \in W_2$에 대해 성립하고,

$$ax + by = (ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2) \in W_1 + W_2$$

를 계산 하면 된다.

벡터 공간의 구조를 보존 하는 함수를 선형이라고 한다.

정의 14.2.3. 두 벡터 공간 V, W에 대해, 함수 $f : V \to W$가 모든 벡터 $x, y \in V$와 스칼라$a, b \in F$에 대해

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

를 만족하면, 이 함수를 선형이라고 한다.

예시. 닫힌 구간 $[0, 1]$위의 모든 복소 연속함수들의 벡터 공간 $C[0, 1]$에서 $L : C[0, 1] \to C[0, 1]$을 어떤 $g \in C[0, 1]$에 대해 $L(f)(x) = g(x)f(x)$로 정의하면, L은 선형 함수이다.

예시. 공간 $\mathbb{R}^3$에서 $\mathbb{R}^2$로 가는 함수 f를

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_2 - x_3, x_1 + 6x_2)$$

로 정의하면, f는 선형이다.

정의 14.2.4. 선형 함수 $f : V \to W$에 대해, f의 치역을 $\operatorname{Im} f$, $f(x) = 0$인 V의 부분집합을 $\operatorname{Ker} f$이라고 한다.

연습문제 14.2.4. 선형 함수 $f : V \to W$에 대해, $\operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f$가 각각 V와 W의 부분공간임을 증명하시오.

연습문제 14.2.5. 선형 함수 $f : V \to W$에 대해, $f(0) = 0$임을 증명하시오.

물리에서 벡터 $(2, 1, -1)$을 $2i + j - k$로 표현하듯이, 모든 벡터들을 상수들과 특정한 벡터들의 곱과 합으로 표현하는 것이 쓸모 있을 수 있다. 벡터들의 집합 S가 있을 때, S의 원소들의 상수배와 합으로 표현 가능한 모든 벡터들을 생각해 보자. 표현 가능한 두 벡터들의 합과, 그것의 상수배 또한 S로 표현 가능하므로, 이 집합은 부분공간이다.

다음 정리는 집합 S를 포함하는 "가장 작은" 부분 공간을 설명한다.

정의 14.2.5. 스칼라 $a_i \in F$와 $v_i \in V$에 대해서,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

를 v_i들의 선형 결합(Linear combination)이라고 한다.

정리 14.2.2. 벡터 공간 V의 부분집합 S에 대해서, W를 S를 포함하는 모든 부분공간들의 교집합으로 정의하고, W'을

$$W' = \{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n : n \in \mathbb{N}, x_i \in S, a_i \in F\},$$

즉 S의 선형 결합들의 집합으로 정의하자. 그러면 $W = W'$이다.

Proof. 먼저 $W \subset W'$임을 보기 위해서는, W'또한 S를 포함하는 부분공간임에서 자명하다. 반대로, $W' \subset W$를 증명하기 위해서는, 모든 S를 포함하는 부분공간 X가 W'를 포함하는 것을 보이면 된다. 그러나 X는 덧셈과 상수곱에 대해 닫혀 있으므로 이것은 자명하다. ////

정의 14.2.6. 정리 14.2.2에서 설명된, 벡터 공간 V의 부분집합 S를 포함하는 가장 작은 부분공간 W를 S가 생성하는 부분공간(Subspace) 이라고 하고, $\operatorname{Span} S$로 표기한다.

연습문제 14.2.6. 두 부분공간 W_1, W_2에 대해서 $W_1 + W_2$가, W_1, W_2를 모두 포함하는 모든 부분공간들의 교집합임을 보이시오. [*힌트*: 정리 14.2.2의 테크닉을 사용하라.]

그러나, 우리가 만약 표현하는 벡터들의 집합을 너무 크게 잡으면, 이것 또한 문제가 된다. 즉 예시로, $\mathbb{R}^3$에서

$$x_1 = (1,0,0) \quad x_2 = (0,1,0)$$
$$x_3 = (0,0,1) \quad x_4 = (1,1,0)$$

으로 정의하면, $\operatorname{Span}\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \mathbb{R}^3$이나, 벡터 $(1,1,1)$은 $x_4 + x_3 = 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4$으로 그 표현이 유일하지 않다.

이 현상을 조사해 보자. 집합 S에 대해 $v \in \operatorname{Span} S$가 두가지 선형 결합으로 표현되면,

$$v = a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n = a_1' s_1' + \cdots + a_m' s_m'$$

가 어떤 $a_i, a_i' \in F, s_i, s_i' \in S$에 대해 성립한다. 왼쪽 두 표현을 이항하고, 인덱스를 적당히 밀어주면,

$$a_1 s_1 + \cdots + a_{n'} s_{n'} = 0 \tag{14.3}$$

가 어떤 $a_i \in F, s_i \in S$에 대해 성립하는 것과 동치이다. 만약 두 표현이 같으면, s_i가 모두 같도록 적당히 조정을 해주고 나서는, 식 (14.3)에서 모든 $a_i = 0$일 것이다.

정의 14.2.7. 어떤 벡터들의 집합 S이 모든 자연수 n, $a_i \in F$와 $s_i \in S$에 대해,

$$a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n = 0$$

이 서로 모두 다른 s_i에 대해 성립하였을 때, 각 i에 대해 $a_i = 0$이면, S를 선형 독립(Linearly independent)이라고 한다.

예시. 모든 실수열들의 벡터공간 (1이상의 자연수에 정의된 실함수들의 공간이라고 봐도 된다)을 V라고 하자. 이 공간에서 0벡터는 모든 자연수에 0을 대응하는 함수이다.

V에서 벡터 v_i를 i번째 성분이 2^{-i}이고 나머지 성분이 0인 벡터로 정의하고,

$$v_\infty = (2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \dots) = (n \mapsto 2^{-n})$$

으로 정의한 후, $S = \{v_\infty\} \cup \{v_i : i \in \mathbb{N}\}$로 정의하자. 그러면 S는 선형 독립이다.

이것을 보기 위해서는, 만약,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$

이면, 각 i번째 성분이 0이므로, $a_i = 0$임을 보면 되고,

$$a v_\infty + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$

이면, $n+1$ 번째 성분이 0이므로 $a=0$이고, 위와 같은 논리에 의해서 다시 모든 $a_i = 0$이다.

연습문제 14.2.7. 어떠한 선형 독립인 집합 S의 원소도 될 수 없는 벡터를 임의의 벡터 공간 V에서 하나 찾아라.

정의 14.2.8. 벡터공간 V의 부분집합 S가 $\operatorname{Span} S = V$를 만족하고, 선형 독립이면, S를 기저 (Basis) 라고 한다.

예시. 공간 $\mathbb{R}^3$의 부분집합

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

은 $\mathbb{R}^3$의 기저이다. 비슷하게 $\mathbb{R}^n$에 대해, e_i를 i번째 성분이 1이고 나머지 성분이 0인 벡터로 정의하면, $\{e_i\}$는 $\mathbb{R}^n$의 기저이다.

연습문제 14.2.8. 모든 실수열들의 벡터공간 V (위의 예시와 같다)과, 유한한 개수를 제외한 모든 성분이 0인 실수열들의 V의 부분공간 W를 고려하자. 벡터 e_i를 i번째 성분이 1이고 나머지 성분이 0인 벡터로 정의하면, $\{e_i\}$는 V와 W중 어느 공간의 기저인지 찾고 증명하시오.

다음 정리는 기저가 "딱 알맞게" V를 표현함을 보여준다.

정리 14.2.3. 벡터 공간 V의 부분집합 S에 대해 다음 조건은 동치이다.

(a) 집합 S가 V의 기저이다.

(b) 모든 $v \in V$가 s_i의 순서 바뀜을 제외하면, 0이상 자연수 n에 대해

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i$$

으로 $0 \neq a_i \in F$와 서로 다른 $s_i \in S$으로 유일하게 표현된다. (빈 합은 0으로 취급한다.)

(c) 집합 S는 $\operatorname{Span} S = V$를 만족하나, 어떤 $T \subset S$또한 $\operatorname{Span} T = V$를 만족하면, $T = S$이다.

(d) 집합 S는 선형 독립이나, $S \subset T$에 대해 T가 선형 독립이면, $T = S$이다.

Proof. 먼저 (a)가 성립한다고 가정하자. 벡터 $v \in V$가 두가지 표현이 있으면, 서로 빼서 0을 표현할 수 있고, 기저 조건에 의해 모든 계수가 0이므로, (b)가 성립한다.

반대로 (b)가 성립하면, $v = 0$ 대입 시 선형 독립임이 확인되고, 모든 벡터가 표현되므로 $\operatorname{Span} S = V$이다.

(a)가 성립하고, $T \subset S$또한 $\operatorname{Span} T = V$를 만족한다고 하자. 만약 $v \in S \backslash T$가 존재하면,

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i t_i$$

가 어떤 $0 \neq a_i \in F$와, 서로 다른 $t_i \in T$에 대해 성립하고, 모두 왼쪽으로 이항하면 S의 선형 독립에 의해 모든 계수가 0이나, v의 계수는 1이므로 모순이다. 반대로, (c)가 성립하고, $0 \neq a_i \in F$와 서로 다른 $s_i \in S$에 대해

$$\sum_{i=1}^{n} a_i s_i = 0$$

이 성립한다고 하자. 만약 $1 \leq n$이면 (즉, 0이 아닌 계수가 존재하면),

$$s_1 = -\sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{a_1} s_i \tag{14.4}$$

가 성립하고, S에서 s_1을 제거한 집합을 S_1이라고 하면, 모든 $v \in V$의 S의 벡터들의 선형 결합에, s_1에 식 (14.4)를 대입시, v가 S_1의 벡터들의 선형 결합으로도 표현될 수 있음을 볼 수 있다. 즉 $\operatorname{Span} S_1 = V$이고, $S_1 \subset S$이나 $S_1 \neq S$ 이므로 모순이다.

마지막으로, S가 (a)를 만족한다고 했을 때 (d)임을 보이자. 어떤 $S \subset T$이고 선형 독립인 T를 잡자. 만약 $v \in T \backslash S$가 존재하면, $\operatorname{Span} S = V$이므로,

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i$$

가 $0 \neq a_i \in F$와 서로 다른 $s_i \in S$에 대해 성립하고 (필요시 S의 순서를 바꾸면 된다), 다시 왼쪽으로 이항하면, T의 선형 독립성에 의해 모순임을 볼 수 있다. 반대로, (d)를 만족하는 S가 있을 때, $\operatorname{Span} S \neq V$이면, $v \in V \backslash \operatorname{Span} S$가 존재한다. 집합 S에 v를 추가한 것을 S_1이라고 하면, 어떠한 $a, a_i \in F$에 대해

$$av + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$

이라고 할 때, $a \neq 0$이면

$$v = -\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a} v_i$$

에서 $v \in \operatorname{Span} S$이므로 모순이다. 즉 $a = 0$이고, S의 선형 독립성에 의해 $a_i = 0$ 또한 성립해, S_1이 선형 독립이다. 이것은 (d)에 모순이다. ////

기저의 두 조건인 $\operatorname{Span} S = V$와 선형 독립은 각각 집합의 확장과 축소에 대해 불변인 성질이다. 즉, $\operatorname{Span} S = V$는 기저의 크기가 일정 이상, 선형 독립은 일정 이하로 제한하는 것에서, 우리는 기저의 크기가 어떠한 기저에 대해서도 불변일 것임을 예측할 수 있다.

정리 14.2.4. 벡터 공간 V에서 두 유한집합 S, T가, $\operatorname{Span} S = V$를 만족하고, T는 선형 독립이라고 하자. 그러면 $|T| \leq |S|$이다.

Proof. 집합 S의 원소들을 $s_1, \ldots, s_n$이라고 하고, T의 원소들을 $t_1, \ldots, t_m$이라고 하자. 만약 $|S| < |T|$이면, 우리는 S의 원소들을 T로 대체한 다음, $\operatorname{Span} S = V$ 조건에서 T가 선형 독립이 아니라는 결론을 유도할 것이다.

t_1은 어떤 $0 \neq a_i \in F$와 (다시, 적당한 재배열 후) 서로 다른 $s_i \in S$에 대해

$$t_1 = \sum_{i=1}^{k} a_i s_i$$

로 표현되고, $k = 0$이면, $t_1 = 0$에서 모순이다. 즉

$$s_1 = \frac{1}{a_1} t_1 - \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i}{a_1} s_i$$

에서, S에서 s_1을 제거하고 t_1을 추가한 집합을 S_1이라고 하면, $\operatorname{Span} S_1 = V$이다. 집합 T에서 t_1을 제거한 것을 T_1이라고 하면, T_1 또한 선형 독립이다.

일반적으로, S_l과 T_l이 주어져 있고, $0 \leq n - l$이면, S_l은 T의 원소 l개와 S의 원소 $n - l$개로 이루어져 있고, T_l은 T의 원소 $m - l$개로 이루어져 있으며, $\operatorname{Span} S_l = V$를 만족하고, T_l은 선형 독립이다. 여기서 T_l에 있는 아무 원소를 t라고 하면, t는 S_l의 원소들의 상수곱과 합으로 표현되고, 만약 t가 $S_l \cap T$의 원소들로만 표현되면 T의 선형 독립에 모순이다. 즉 t는 $S_l \cap S$의 어떤 원소 s를 포함하는 선형 결합에 의해 표현되므로, 반대로 이 s는 t와 $S_l \backslash \{s\}$의 선형 결합으로 표현된다. 즉 S_l에서 s를 제거하고 t를 포함해 S_{l+1}을 만들고, T_l에서 t를 제거해 T_{l+1}을 만들면, 이 과정을 계속 반복할 수 있다.

결국 만약 $|S| < |T|$, 즉 $n < m$이면, T_n은 원소 개수가 $0 < m - n$으로 비어 있지 않고, 집합 S_n은 $\operatorname{Span} S = V$를 만족하므로, S_n의 선형 결합으로 모든 T_n의 원소를 표현할 수 있으나, 어떤 T_n의 원소를 t라고 하면,

$$t = \sum_{i=1}^{n} a_i t_i$$

에서 T의 선형 독립에 모순임을 볼 수 있다. ////

따름정리 14.2.4.1. 만약 어떤 벡터 공간 V가 유한한 크기의 기저 B를 가진다면, 모든 기저의 크기는 같다.

Proof. 만약 다른 기저 B'이 존재해 B'이 무한하다면, B'에서 B보다 많은 수의 원소를 선택하여도 선형 독립이나, $\operatorname{Span} B = V$이므로 정리 14.2.4에 모순이고, 같은 논리로 $|B'|$이 유한하고 $|B| < |B'|$이여도 모순이다. 반대로, $|B'| < |B|$이면, $\operatorname{Span} B' = V$이고 B가 선형 독립이므로 모순이다. ////

정의 14.2.9. 어떤 벡터 공간 V가 유한한 크기의 기저를 가진다면, 우리는 그 벡터 공간이 유한차원이라고 하고, $\dim V < \infty$라고 한다. 반대로, 유한한 크기의 기저가 없다면, 우리는 그 벡터 공간이 무한차원이라고 하고, $\dim V = \infty$라고 한다. 유한차원 벡터 공간 V에 대해 $\dim V$는 V의 어떤 기저의 크기를 뜻하고, 이 값은 기저의 선택에 대해 따름정리 14.2.4.1에 의해 무관하다.

예시. 공간 $\{0\}$은 0차원이고, 일반적으로 $\mathbb{R}^n$은 i번째 성분이 1이고 나머지 성분이 0인 벡터들의 기저 e_i를 가지므로, 차원 n이다.

14.3 행렬의 관점

정의 14.3.1.

14.4 선형 사상의 관점

14.5 벡터 공간의 연산

정의 14.5.1.

정의 14.5.2.

단원 VI

도형의 방정식

챕터 15

이산기하와 그래프 이론

이산기하란 이산적인 기하 형상들, 예를 들면 다각형, 격자점, 또는 몇몇 그래프와 같은 대상을 다루는 학문이다.

15.1 미술관 문제

질문. n각형 형태의 미술관이 있다. n개의 변은 서로 겹치지 않는다(이를 두고 simple이라고 한다). 미술관 내부에 몇 대의 감시 카메라를 달아 미술관 전체를 지키려 한다. 일반적으로 몇 대의 카메라면 충분한가?

정리 15.1.1. $[n/3]$대면 충분하다. 단, $[x]$는 x 이하의 최대 정수이다. 실제로 이는 최적의 값이다. 즉, 항상 $[n/3]$대의 카메라를 요구하는 n각형 미술관이 존재한다.

Proof. 미술관을 삼각 분할한 후 총 3가지 색을 이용해 미술관의 꼭짓점을 칠하자. 단 분할된 삼각형의 세 꼭짓점의 색이 모두 다르도록 한다(가능성 증명은 아래 책으로 넘긴다). 이제 가장 적은 색의 꼭짓점에 카메라를 달면 $[n/3]$대 이하이다. ////

연습문제 15.1.1. k대의 카메라를 요구하는 $3k$각형 미술관을 찾아라.

참고. 상세한 증명 및 확장은 Joseph O'Rourke의 책 *Art Gallery Theorems and Algorithms*(http://www.science.smith.edu/~jorourke/books/ArtGalleryTheorems/Art_Gallery_Full_Book.pdf)를 참고하라.

15.2 정사각형의 등면적 분할

정사각형을 항상 2개 이상의 삼각형으로 쪼갤 수 있다는 것은 자명하다. 더군다나, 그 개수가 짝수라면 모든 삼각형을 합동으로 만드는 것도 어렵지 않다. 하지만 만약 홀수라면 어떻게 될까?

정리 15.2.1 (Monsky's theorem)**.** 정사각형을 홀수 개의 넓이가 같은 삼각형으로 쪼개는 것은 불가능하다.

어려운 증명이지만, guided tour을 통해 천천히 따라가 보자. 이번에는 미술관 문제와는 조금 다른 방식으로 각 꼭짓점을 3가지 색으로 칠하려 한다.

보조정리 15.2.2 (Sperner's lemma)**.** 단순 다각형 R이 삼각형 T_i들로 분할되어 있고, 모든 꼭짓점은 A, B, C 세 가지 색 중 하나로 칠해져 있다고 하자. 만약 R의 각 변은 두 가지 이하의 색만을 포함하며, R의 원래 변들 중 한 끝점이 A, 다른 끝점이 B인 변(AB-선분이라고 하자)의 수가 홀수라면, 세 꼭짓점의 색이 모두 다른 T_i가 존재한다.

정의 15.2.1. 사이에 다른 점을 갖지 않는 선분을 기초 선분이라고 하자.

연습문제 15.2.1. R의 변은 T_i의 꼭짓점들에 의해 기초 선분들로 쪼개진다. 이들 중 AB-선분의 수가 홀수임을 보여라.

기초 선분을 벽으로, AB-기초 선분을 벽에 달린 문으로 생각하자. 그렇다면 R은 삼각형 방들로 쪼개어진 미궁이 된다. 이제부터 R의 변에 달린 문(즉, 입구)을 통해 미궁으로 들어갈 것이다. 한 번 쓴 문은 다시 쓸 수 없다고 하자.

정의 15.2.2. R 밖으로 빠져나왔거나 더 이상 다른 문이 없어 이동이 불가능해질 때까지 문을 통해 움직이는 것을 '최대 이동'이라고 하자.

연습문제 15.2.2. 한 문에서 시작하는 최대 이동은 유일함을 보여라. Hint: 문이 3개 달린 방은 없다.

연습문제 15.2.3. 들어갔을 때 탈출(다시 R 외부로 나오는 것)이 가능한 문을 '좋은 문', 불가능한 문을 '나쁜 문'이라고 하자. '좋은 문'의 수는 짝수임을 보여라. 따라서 '나쁜 문'이 존재한다.

연습문제 15.2.4. '나쁜 문'에서 시작하는 '최대 이동'을 통해 어떤 방에 도달하는가? 설명하여라.

그렇다면, 정사각형의 점들에 세 가지 색을 잘 주면 세 꼭짓점의 색이 모두 같은 삼각형이 있을 것이다. 먼저 색칠 방법을 살펴본 다음 다시 논의하자.

정의 15.2.3. 체 F에 대해, 함수 $|\,| : F \to [0, \infty)$가

(1) $|x| \cdot |y| = |xy|$

(2) $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$

(3) $|x| = 0 \iff x = 0$

을 만족하면 $|\,|$를 ultranorm이라고 한다.

연습문제 15.2.5. 자명한 ultranorm을 하나 찾아라.

연습문제 15.2.6. $|1| = |-1| = 1$임을 보여라.

연습문제 15.2.7. (2)에서 $|x| \neq |y|$이면 항상 등호가 성립함을 보여라. Hint: $|x| > |y|$를 가정하고 $|x + y| = |x|$임을 보이자.

연습문제 15.2.8. $|2| < 1$인 ultranorm $|\,|$에 대해 홀수의 ultranorm은 항상 1임을 보여라.

정의 15.2.4. 0이 아닌 정수 n에 대해, $\nu_p(n) = \max_k p^k | n$으로 정의하자. 유리수 m/n에 대해 $\nu_p(m/n) = \nu_p(m) - \nu_p(n)$으로 확장한다. ν_p를 p-adic valuation이라고 한다.

연습문제 15.2.9. $|x|_p = p^{-\nu_p(x)}$(단, $|0|_p = 0$)으로 $\mathbb{Q}$ 위에 p-adic norm을 정의하자. $|\,|_p$는 ultranorm이 됨을 보여라. 즉, $|\,|_2$는 $|2|_2 < 1$을 만족하는 $\mathbb{Q}$ 위의 ultranorm이다.

연습문제 15.2.10. $\mathbb{Q}$ 위의 ultranorm이 $|2| < 1$를 만족한다면, $|x| = |x|_2^c$를 만족하는 $0 < c < \infty$가 존재함을 보여라. https://en.wikipedia.org/wiki/Ostrowski's_theorem을 읽어 보아도 좋다.

참고. $|\,|_2$를 확장해 $\mathbb{R}$ 위의 $|2| < 1$을 만족하는 ultranorm을 찾을 수 있다는 것이 알려져 있다. 이제부터 이러한 ultranorm의 존재를 가정하자. 즉, $|\,|$은 이제부터 $|2| < 1$을 만족하는 $\mathbb{R}$ 위의 ultranorm을 의미한다.

이제 단위 정사각형 위의 점을 3가지 색으로 칠할 것이다. $|x|, |y| < 1$인 점은 A로, $x| \geq 1, |x| \geq |y|$인 점은 B로, $|y| \geq 1, |x| < |y|$인 점은 C로 칠하자.

연습문제 15.2.11. $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$은 각각 무슨 색으로 칠해지는가?

연습문제 15.2.12. A에 속한 임의의 점 (p,q)에 대해, (x,y)와 $(x+p,y+q)$는 색이 같음을 보여라.

연습문제 15.2.13. 한 직선 위에는 최대 두 가지 색의 점만 있을 수 있음을 보여라. Hint: 아니라고 가정하면, 평행이동을 통해 원점, B에 속한 점, C에 속한 점이 한 직선 위에 있게 된다. 이는 왜 모순인가?

연습문제 15.2.14. 세 꼭짓점의 색이 모두 다른 삼각형 T에 대해, $|T|>1$임을 보여라.

연습문제 15.2.15. Monsky's theorem의 증명을 완성하여라.

출처: `http://alpha.math.uga.edu/~pete/Monsky70.pdf`
마지막으로 위 정리와 직접적으로 관련되어 있지는 않지만, 재미있는 *SpanningTree*의 문제 하나를 소개한다.

질문. 임의의 삼각형을 유한 개의 등변 사다리꼴로 분할할 수 있는가?

15.3 잘라 붙이기

정리 2.5.1에서 보았듯이 한 입체를 여러 조각으로 잘라서 재조합해 다른 입체를 만드는 것은 꽤나 쉬운 일이다. 그러나 이 정리는 부피를 잴 수 없는 조각들을 마구 남긴다. 따라서, '좋은 조각들'만을 이용해서 잘라 붙이기를 다시 해 보자. 다른 말로, 다각형이나 다면체 조각만을 사용하자는 뜻이다.

정의 15.3.1. 몇 개의 다각형(다면체)을 겹치지 않게 이어붙여서 A와 B를 각각 만들 수 있을 때, A,B를 equidecomposable(등분해성), 또는 scissors congruent(가위 합동)이라고 한다. 이 절에 한해서 $A\sim B$로 표기하자.

보조정리 15.3.1. $A\sim B$라면 A와 B는 면적(부피)이 같다.

질문. 위 보조정리의 역도 성립하는가?

이제부터 우리는 그 답이 2차원에서는(그리고 당연히 1차원에서도) '예', 3차원부터는 '아니오'라는 것을 증명할 것이다. 3차원에서 부피가 같은 정사면체와 정육면체가 가위 합동인지는 힐베르트가 제시한 23개의 문제 중 하나였으며, Max Dehn이 해결하였다.

정리 15.3.2 (Wallace–Bolyai–Gerwien)**.** 두 다각형 A, B의 면적이 같다면 $A \sim B$이다.

증명해 보자.

연습문제 15.3.1. $\sim$은 동치 관계임을 보여라.

연습문제 15.3.2. 임의의 삼각형은 어떤 직사각형과 가위 합동임을 보여라.

연습문제 15.3.3. 임의의 직사각형은 폭이 1인 어떤 직사각형과 가위 합동임을 보여라. 시간을 조금 들여서 고민해 보자. Hint: 한 평행사변형을 잘라 붙여서 다른 폭을 갖는 평행사변형을 만드는 것이 핵심이다.

연습문제 15.3.4. 증명을 완료하여라.

이제 3차원일 때를 살펴보자. 같은 과정을 할 수 있을까? 문제가 되는 부분은 바로 사면체를 직육면체로 만드는 과정에 있다. 사면체의 공간적 구조가 삼각형보다 복잡하다는 것의 한 증거는 바로 임의의 삼각형으로는 평면을 타일링할 수 있지만 임의의 사면체로는 그렇지 않다는 것이다.
정사면체의 예시를 갖고 생각해 보자. 정사면체에는 무리수가 많이 존재하는데, 예를 들어 두 면 사이의 각(이면각) ω에 대해 ω/π가 있다. 편의상 각의 유리성을 따질 때는 π로 나누어 생각한다.

연습문제 15.3.5. $\cos(\omega) = 1/3$임을 보여라.

참고. ω/π가 무리수라는 것은 본 증명에 필요하다. 여기서는 생략하고 R. Schwartz의 *Dehn's Dissection Theorem*을 인용하는 것으로 대신한다.

그러나 직육면체의 변을 만들기 위해서는 $\pi/2$라는 유리수 각이 필요하다. 이 각을 만들기 위해서는 ω들을 붙이는 것으로는 부족하므로, 기존의 각을 쪼개어 새로운 각을 만들어 '빈틈'을 채워야 한다. 그러나 이는 또 다른 무리수를 만들 뿐이다.
평면상에서도 무리수 각을 갖는 도형이 충분히 존재하지 않냐고 반문할 수 있지만—이들의 합은 물론 π의 정수 배가 되므로 잘 모으면 그 '무리수'들이 없어질 수 있는 것이다. 따라서 이 상황과 정사면체의 상황은 조금 다르다.
한 대상이 다른 대상으로 변할 수 없다는 것을 보이는 주요한 방법은 불변량(invariant)이다. 예를 들어, 다음 유명한 문제를 기억하는가?

예시. 8×8 체스판에서 두 어두운 색 칸을 제거하자. 2×1 도미노 31개를 갖고 이 체스판을 완전히 덮을 수 없는데, 도미노를 덮는 과정에서 (밝은 색 칸의 수-어두운 색 칸의 수)는 2로 유지되므로 0이 될 수 없기 때문이다.

다른 유명한 불변량 문제로는 샘 로이드의 14-15 퍼즐이 있다.

예시. 14-15퍼즐의 불변량은 (순열의 홀짝성+빈칸의 x좌표+빈칸의 y좌표)의 홀짝성이다.

다시 본 문제로 돌아오자. 모든 이면각의 총합을 불변량으로 하고 싶지만 그럴 수 없는 이유가 몇 가지 있다.

1. 이면각들의 총합은 이면각들이 입체 내부에 모이면 2π씩 변할 수 있고, 표면에 모이면 π씩 변할 수 있다.

2. 한 변을 둘로 쪼갤 때 같은 이면각이 두 개가 된다.

첫 번째 문제는 이면각을 π로 나눈 나머지를 생각해 해결할 수 있다. 즉, 각도를 $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$의 원소로 생각하는 것이다. 그리고 두 번째 문제는 이면각에다 그에 상응하는 변의 길이를 곱하면 된다. 즉, 한 변이 1인 정육면체가 있다면 그 한 변에 대응하는 불변량은 $1 \times \pi/2$이 되고, 정육면체 전체에 대응하는 불변량은 $12 \cdot (1 \times \pi/2)$이다.
여기서, $1\times\pi/2$를 단순히 실수 사이의 곱셈으로 생각할 수 없음에 유의하라. 따라서 다른 기호 $\otimes$를 사용하자. 그러나 앞에 곱해진 12는 우리의 이론에 따르면 '곱셈' 안으로 자유롭게 들어갈 수 있어야 한다. 다른 말로, $12\cdot(1\otimes\pi/2) = 12\otimes\pi/2 = 1\otimes 6\pi$라는 것이다. 이를 위해서는 유리수만이 곱셈 기호 앞뒤를 자유롭게 '드나들' 수 있도록 하면 된다. 이를 엄밀하게는 텐서곱(tensor product)이라고 한다. 여기서는 텐서곱이 정확히 무엇인지는 다루지 않고, 다만 우리의 '곱셈'이 일반적인 곱셈이 아니라는 것 정도만 유념하고 지나가도록 하자. 정의에 대해서는 정의 14.5.2을 참조하라.
이제 준비가 모두 되었다.

정의 15.3.2. 다면체 P에 대해 P의 Dehn invariant $D(P)$를, P의 모든 변 l_i와 그 이면각 θ_i에 대해 $\sum l_i \otimes \theta_i \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$로 정의한다.

참고. Dehn invariant는 (부피와 마찬가지로) 3차원에서 $\sim$의 불변량이다.

이제 힐베르트의 문제를 해결해 보자.

정리 15.3.3. 부피가 같은 정사면체와 정육면체 P, Q는 가위 합동이 아니다.

Proof. $D(P) = 6(l \otimes \omega) = l \otimes 6\omega \neq l \otimes 0 (\because 6\omega \neq n\pi) = 0$인 반면, $D(Q) = 12(l' \otimes \pi/2) = l' \otimes 6\pi = l' \otimes 0 = 0$이므로 P와 Q는 가위 합동일 수 없다. ////

15.4 그래프 채색과 5색 정리

평면에 그려진 모든 지도를 4가지 색으로 이웃한 영역이 항상 다른 색이 되도록 칠할 수 있다는 이야기는 유명하며, 4색 정리라고 한다. 4색 정리는 Appel과 Haken이 컴퓨터를 이용하여 증명한 것으로 널리 알려져 있다. 4색 정리의 증명은 방대해 직접 다룰 수 없지만, 대신 여기서는 그 핵심적 접근 중 하나가 담겨 있는 5색 정리의 증명을 살펴볼 것이다.

정의 15.4.1. 그래프 $G = (V, E)$는 꼭짓점의 집합 V와 변의 집합 E로 이루어진다. E의 각 원소는 V의 두 원소의 쌍이다. 이 쌍이 순서를 상관한다면 유향 그래프, 그렇지 않다면 무향 그래프라고 한다. 일반적으로 그래프라고 하면 무향 그래프를 의미한다.

참고. 집합론에서 a, b를 순서를 상관하여 묶는 방식은 $\{a, \{a, b\}\}$, 순서에 상관없이 묶는 방식은 $\{a, b\}$로 볼 수 있다.

정의 15.4.2. 두 꼭짓점을 양 끝 점으로 하는 변이 존재할 때 이들을 이웃하다고 한다. 어떤 두 꼭짓점이 몇 개의 변들을 통해 이어질 때 이들을 연결되었다고 한다. 모든 점쌍이 연결된 그래프를 연결 그래프라고 한다.

정의 15.4.3. 그래프의 채색수(chromatic number) $\chi(G)$을, 그래프의 이웃한 꼭짓점을 다른 색으로 칠하기 위한 서로 다른 색의 최소 개수로 정의한다.

정의 15.4.4. n개의 꼭짓점을 가지며 서로 다른 꼭짓점끼리 정확히 하나의 변으로 연결된 그래프를 완전 그래프 K_n이라고 한다.

참고. $\chi(K_n) = n$이다.

정의 15.4.5. 꼭짓점 $v \in V$의 차수 $\deg(v)$를 v에 연결된 변의 개수로 정의한다.

정의 15.4.6. 그래프의 꼭짓점들을 평면 위의 점으로, 변을 두 꼭짓점을 잇는 곡선으로 하여 변들끼리 겹치지 않게 평면 위에 그릴 수 있다면 이 그래프를 평면 그래프라고 한다.

보조정리 15.4.1. 평면 지도에 대해 한 영역을 꼭짓점으로 하고, 이웃한 영역을 변으로 연결하여 얻어지는 그래프는 평면 그래프이다.

따라서 평면 지도를 색칠하는 문제는 평면 그래프의 채색수를 구하는 문제와 같다.

정리 15.4.2 (Euler)**.** 연결된 평면 그래프에 대해 꼭짓점의 개수를 V, 변의 개수를 E, 면의 개수를 F라고 하자. 이때 면은 유계가 아닌 연결성분(외부) 또한 포함하여 센다. 예를 들어 삼각형에 대해 $F = 2$이다. 이때 항상 $V - E + F = 2$가 성립한다.

Proof. $V + E$에 대해 귀납적으로 증명할 수 있다. 예를 들어 새로운 꼭짓점을 연결할 때는 V와 E가 1씩 늘고, 이미 있는 꼭짓점들 사이에 변 하나를 추가할 때는 E와 F가 1씩 는다. 자세한 증명은 독자에게 맡긴다. ////

정리 15.4.3. 모든 평면 그래프에는 차수가 5 이하인 꼭짓점이 존재한다.

Proof. 아니라고 가정하자. $6V \leq 2E, 3F \leq 2E$이므로 $V - E + F = 2$에 모순이다. ////

따름정리 15.4.3.1. 모든 평면 그래프는 6색으로 칠할 수 있다.

정의 15.4.7. 그래프에 대한 (참이 아닌) 명제 $P(G)$의 최소 반례란 $\neg P(G)$인 G 중 V가 최소인 G(중 하나)를 말한다. $P(G)$의 최소 반례를 가정했더니 모순이 나온다면 물론 $P(G)$는 모든 G에 대해 성립한다. 이는 수학적 귀납법과 동치이다.

연습문제 15.4.1. 증명하여라. Hint: 최소 반례 G와 G의 차수 5 이하인 꼭짓점 v를 가정하고, $G - \{v\}$를 생각하자.

정리 15.4.4. 모든 평면 그래프는 5색으로 칠할 수 있다.

연습문제 15.4.2. 귀류법을 사용한다. 최소 반례 G를 가정하고, 차수가 5 이하인 G의 한 꼭짓점을 v라고 하자. 다음 성질들을 보여라.

1. G는 연결 그래프이다.
2. $\chi(G) = 6$이다.
3. $\deg(v) = 5$이다.
4. v와 이웃하는 5개 꼭짓점의 색은 모두 다르다.
5. $\chi(G - \{v\}) = 5$이다.

Proof. 연습문제와 같은 가정에서 시작하자. v와 연결된 5개 꼭짓점을 시계 방향으로 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5라고 하자. 이제 v_1의 색과 v_3의 색을 갖는 꼭짓점 및 이들을 잇는 변만을 남긴다. 이때 v_1과 v_3이 적당한 경로로 연결되어 있지 않다면, v_1을 포함하는 연결성분의 색을 반전시킬 수 있다. 이제 다시 나머지 꼭짓점들을 되돌려놓으면

v 주위에는 이제 4가지 색만이 쓰이므로 $\chi(G) \le 5$이므로 가정에 모순이다. 따라서 v_1과 v_3을 연결하는, 2색을 교대로 사용하는 경로가 존재한다. 마찬가지로 v_2와 v_4를 연결하는 alternating chain도 존재한다. 그런데 이 두 chain은 G의 평면성에 의해 한 꼭짓점에서 만나야 한다. 모순. ////

이제 채색수 개념을 일반화한 채색다항식을 살펴보자.

정의 15.4.8. 그래프 G에 대해, G의 채색 다항식 χ_G란 $\chi_G(k)$가 G를 k색으로 채색하는 방법의 수가 되게 하는 함수이다.

연습문제 15.4.3. $\chi_{K_n}(k) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$임을 보여라.

정의 15.4.9. 그래프 G의 이웃한 두 꼭짓점 x, y에 대해 G에서 변 xy를 지운 그래프를 $G - xy$, $G - xy$에서 x와 y를 한 꼭짓점으로 만들어 버린(즉 몫연산을 취한) 그래프를 G/xy라고 한다.

단순그래프 G에 대해 $G-xy$를 k색으로 칠하자. 이제 x와 y가 같은 색인 경우는 본질적으로 x와 y를 한 꼭짓점으로 붙인 다음 채색한 경우로 볼 수 있고, 다른 색인 경우는 반대로 x와 y를 잇는 변을 그린 후 채색한 경우와 같다. 따라서,

정리 15.4.5 (Deletion-contraction)**.** $\chi_G = \chi_{G-xy} - \chi_{G/xy}$가 성립한다.

참고. 이제 n개의 꼭짓점을 갖는 그래프 G의 채색 '다항식'이 실제로 다항식이며 n차 이하임을 확인할 수 있다.

응용 하나를 살펴보자.

정의 15.4.10. 회로, 즉 자기 자신으로 돌아오는 경로가 없는 그래프를 숲(forest)이라고 한다. 연결된 숲을 나무(tree)라고 한다.

다음은 아마도 본 교재에서 가장 중요한 정의일 것이다.

정의 15.4.11. 그래프 G에 대해, G에서 몇몇 변을 삭제해 만들어진 트리를 G의 *SpanningTree*라고 한다.

연습문제 15.4.4. 정리 15.4.5의 증명을 본따, G의 *SpanningTree* 개수 $t(G)$에 대한 점화식을 하나 찾아라.

연습문제 15.4.5. 아무 그래프 하나를 그린 후 그 스패닝 트리의 수를 세 보아라.

15.5 그래프의 평면성 판정

위 절에서는 평면 그래프의 한 성질을 살펴보았다. 그러나 잠시 후 만나겠지만, 채색수가 2인 비-평면 그래프도 존재한다. 따라서 이 절에서는 평면 그래프를 판정할 다른 조건을 살펴볼 것이다.
먼저 평면 그래프가 아닌 그래프 두 개로 시작하자.

정리 15.5.1. K_5는 평면그래프가 아니다.

Proof. 변이 너무 많다. $2e \geq 3f$이므로 면은 최대 6개일 수밖에 없는데, $5-10+6 < 2$. ////

이번에는 다른 형태의 그래프가 필요하다.

정의 15.5.1. 완전 이분 그래프 $K_{m,n}$은 m개의 A-꼭짓점들과 n개의 B-꼭짓점들이 있어서, 서로 다른 타입의 꼭짓점들끼리는 항상 연결되어 있고 같은 타입은 전혀 연결되어 있지 않은 그래프를 말한다.

다음 정리는 배관 문제라는 이름으로 본 적이 있을지도 모른다.

정리 15.5.2. $K_{3,3}$은 평면 그래프가 아니다.

Proof. 평면 그래프라고 가정하면 한 면이 항상 4개 이상의 꼭짓점으로 이루어져야 한다(타입이 교대하므로). 따라서 $2e \geq 4f$이고, 정리 15.4.2에 모순. ////

연습문제 15.5.1. K_4와 $K_{2,n}$은 모두 평면 그래프임을 보여라. 따라서 위 예시들은 어떤 의미에서 '최소'이다.

이제 평면 그래프의 위계를 살펴보자.

정의 15.5.2. 한 그래프의 subdivision은 그 그래프의 변 위에 꼭짓점을 새로 추가해 만들어진 그래프를 말한다.

참고. G와 G의 subdivision의 평면성은 항상 같다.

정의 15.5.3. 그래프 G가 그래프 H의 부분 그래프(subgraph)라는 것은 H에서 몇몇 꼭짓점과 변을 삭제해 G를 만들 수 있다는 것이다.

참고. G가 평면 그래프라면 그 subgraph 역시 평면 그래프이다.

Kuratowski의 놀라운 발견은 바로 평면성을 이야기하는 데 이 정도면 충분하다는 것이다.

정리 15.5.3 (Kuratowski)**.** G가 평면 그래프임은 G의 subgraph 중 $K_{3,3}$ 또는 K_5의 subdivision과 동형인 그래프(a.k.a. Kuratowski subgraph)가 없다는 것과 동치이다.

증명은 Adam Sheffer의 강의록(`http://www.math.caltech.edu/~2014-15/2term/ma006b/10Planar3.pdf` 및 `http://www.math.caltech.edu/~2014-15/2term/ma006b/11Planar4.pdf`)을 읽어 보길 바란다.

챕터 16

이차곡선과 사영기하

16.1 이차곡선의 여러 가지 정의

물리학에서 역제곱장에서 움직이는 물체의 궤적이 에너지에 따라 원, 타원, 포물선, 또는 쌍곡선 형태의 궤적을 가진다는 사실을 배운 것을 기억하는가? 총 에너지가 음수라면 유계인 원 또는 타원형의 궤적, 0이라면 포물선 궤적, 양수라면 쌍곡선 궤적을 그린다. 즉 탈출 속도는 포물선 궤적을 그리게 하는 속도이다. 역제곱장의 운동방정식으로부터 시작해 보자.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$$

이제 극좌표계를 이용해 이를 변형할 것이다. 원점과의 거리를 r, 편각을 θ라고 하자.

$$\ddot{re^{i\theta}} = -ke^{i\theta}/r^2$$

이제 r과 θ를 분리할 준비를 하자.

$$(\ddot{r} + ir\ddot{\theta} + 2i\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\theta}^2)e^{i\theta} = -ke^{i\theta}/r^2$$

양변을 $e^{i\theta}$로 나눈 후 실수부와 허수부를 각각 취하여 다음을 얻는다.

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -k/r^2$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

연습문제 16.1.1. 두 번째 식으로부터 $r^2\dot{\theta}$가 일정함을 도출해 내어라. 이것은 어떠한 물리량의 보존 법칙에 상응하는가?

$r^2\dot{\theta} = l$를 첫 번째 식에 대입하면, 아래와 같은 r의 시간 미분으로 이루어진 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{r} - l^2/r^3 = -k/r^2$$

연습문제 16.1.2. 궤도를 구한다는 것은 r을 시간이 아닌 θ에 대한 함수로 나타내는 것이다. r의 시간 미분을 θ 미분으로 바꾸어 궤도 방정식을 구하여라. [Hint: $r = u^m$으로 치환하여 $(du/d\theta)^2$ 또는 $d^2u/d\theta^2$항이 없어지는 m을 찾아라.]

최종적으로 역제곱장에서 물체는 $(l^2/k)/r = 1 + e\cos(\theta - \theta_0)$의 궤도를 따라 운동한다. $l^2/k = \alpha$로 치환하면 $r = \alpha/(1 + e\cos(\theta - \theta_0))$의 식을 얻는다.

연습문제 16.1.3. $r(\theta)$의 궤도 방정식을 $f(x, y) = 0$ (단, f는 x, y에 대한 다항식)으로 바꾸어라. $\mathbf{r} = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = x + iy$를 이용하라. 결과를 보면 왜 이 곡선들–타원, 포물선, 쌍곡선–이 이차곡선이라 불리는지 알게 될 것이다.

연습문제 16.1.4. 뒤에서 보겠지만 이차곡선은 $e < 1$, $e = 1$, $e > 1$로 분류할 수 있다. 이 분류는 회전(θ_0)과 확대축소(α)에 무관해야 한다. $f(x, y)$의 이차항이 $Ax^2 + Bxy + Cy^2$인 이차곡선에 대하여 이를 나타내는 A, B, C에 대한 식 $\Delta(A, B, C)$을 찾아라. [Hint: $\Delta < 0$, $\Delta = 0$, $\Delta > 0$은 각각 $e < 1$, $e = 1$, $e > 1$과 대응될 것이다.]

연습문제 16.1.5. 이제 다시 물리학으로 돌아가자. $r = \alpha/(1 + e\cos\theta)$의 궤도를 도는 질량 m의 물체가 있다. 이 물체의 각운동량과 에너지를 α, e에 대한 식으로 나타내어라. 궤도의 분류(i.e. e와 1의 대소관계)는 각운동량에 의존하지 않고 오직 에너지–정확히는 에너지의 부호–에만 의존하는 것이 신기하지 않나.

앞에서 보았듯이 역제곱장의 물체는 $\alpha/r = 1 + e\cos\theta$의 궤도를 따라 운동한다. 그리고 e의 값에 따라 궤도가 원, 타원, 포물선, 쌍곡선이 가능하다. 궤도의 모양이 계의 에너지와 각운동량에 의해 결정되는 것을 보았을 때 이들 곡선 사이에는 연속적인 연결이 있음을 짐작해 볼 수 있다. 이 세 가지 곡선–원은 타원의 한 종류로 본다–은 이차곡선이라 불린다. 독자에게 가장 친숙한 이차곡선의 정의는 두 정점까지의 거리 합이 일정한 점의 자취 타원, 정점과 정직선까지의 거리가 동일한 점의 자취 포물선, 두 정점까지의 거리 차가 일정한 점의 자취 쌍곡선일 것이다. 하지만 이 정의는 이차곡선의 연속성과 가장 동떨어진 정의라고 생각된다. 이차곡선에 대한 대체 정의 세 가지를 알아보자.

정의 16.1.1. 타원은 두 정점까지의 거리 합이 일정한 점의 자취이다. 포물선은 한 정점까지의 거리와 한 정직선까지의 거리가 동일한 점의 자취이다. 쌍곡선은 두 정점까지의 거리 차가 일정한 점의 자취이다.

정리 16.1.1. (대체 정의1)이차곡선은 한 정직선(준선)까지의 거리에 대한 한 정점(초점)까지의 거리의 비가 e로 일정한 점의 자취이다. $e < 1$이면 타원, $e = 1$이면 포물선, $e > 1$이면 쌍곡선이다.

Proof. $e = 1$: 포물선의 정의와 동일하다.
$e < 1$: 아폴로니우스의 원 - 대칭성 - 초점 2개
$e > 1$: in same way ////

연습문제 16.1.6. 대체 정의1를 이용하여 원점이 초점인 이차곡선의 극좌표 방정식을 구하여라. 이제 독자들은 확실히 역제곱장에서 운동하는 물체의 궤도가 이차곡선임을 알게 되었을 것이다.

정리 16.1.2. (대체 정의2)이차곡선은 원뿔과 평면의 교선으로 정의된다. 원뿔의 축과 평면, 모선이 이루는 각을 각각 α, β라 하면, $\alpha > \beta$이면 타원, $\alpha = \beta$이면 포물선, $\alpha < \beta$이면 쌍곡선이다.

참고. 이러한 이유에서 이차곡선은 원뿔곡선(conic section)으로 불리기도 한다.

연습문제 16.1.7. 이차곡선의 정의와 대체 정의2 동치임을 보여라. 그리고 대체 정의1에서 정의된 e가 $\cos\alpha/\cos\beta$임을 보여라. [Hint. 원뿔의 모든 모선에 접하는 구 한 개와 그 접점들을 지나는 평면을 생각해보라.]

정리 16.1.3. (대체 정의3)이차곡선은 좌표평면에서 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$으로 표현되는 도형이다.

Proof. 대체 정의1과 대체 정의3이 동치임을 금방 확인할 수 있을 것이다. ////

연습문제 16.1.8. 이차곡선의 대체 정의1 또는 대체 정의2를 통해 역제곱장에서 물체의 운동이 이차곡선임을 보이시오.

16.2 원뿔과 사영

정리 16.2.1 (Pascal)**.** 원뿔곡선 C 위의 점들이 (어떤 순서로든) 육각형을 이룬다고 하자. 세 쌍의 대변의 교점은 한 직선 위에 있다.

Proof. ////

챕터 17

도형의 면적: 측도론

챕터 18

미분기하

우리는 3차원 공간 상에서의 도형과 기하적인 값들을 다루기 위해 벡터 미적분을 사용한다. 이 벡터 미적분을 조금 확장해서 일반적인 공간에서 할 수 있게 하는 것이 미분기하이다.

18.1 다양체

미분기하에서 관심을 가지는 공간은 다양체라는 공간이다. 다양체란 국소적으로 보았을 때 $\mathbb{R}^n$인 공간이다. 이 챕터에서는 다양체의 엄밀한 정의는 다루지 않고, 미분기하에서 다루는 대상인 vector와 differential form에 집중할 것이다. 앞으로는 미분가능다양체만을 다루도록 한다. 쉽게 생각해볼 수 있는 다양체의 예시로는 2차원 구, 토러스 등이 있다. 다양체의 이미지를 떠올릴 때 이런 식으로 떠올리면 이해에 도움이 될 것이다.

18.2 벡터

우선 vector에 대해 알아보자. 이 장에서는 벡터공간의 원소로서의 벡터와의 구분을 위해 기하적인 벡터는 영어로 쓰겠다.

m차원 다양체 M상에 매개변수 λ로 주어지는 곡선이 있다 하자. 함수 $f(x)$를 이 곡선을 따라 미분하는 것을 생각해 보면, 편미분 연쇄 법칙에 따라 $\frac{df}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{m} \frac{dx_i}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x_i}$로 쓸 수 있다. f의 임의성에 의해 f를 뗄 수 있고, 따라서 $\frac{d}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{m} \frac{dx_i}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x_i}$로 쓸 수 있다. 여기서 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 부분을 벡터의 기저로, $\frac{dx_i}{d\lambda}$ 부분을 벡터의 성분으로 보면 곡선 상의 미분 $\frac{d}{d\lambda}$를 벡터로 볼 수 있고, 이것이 vector의 정의가

된다.

3차원 미적분학에서 사용했던 '크기와 방향이 있는 값'으로서의 기하적인 벡터와 이 vector가 같다는 것은 기저를 변환해보면 알 수 있다. vector는 미분 연산자이지만, 기하적인 양으로서 직관적으로 생각할 때는 미분 기호의 '탈을 쓴' 화살표라 보면 된다. 기저벡터 e_i가 미분 기호의 탈을 써서 $\frac{\partial}{\partial x_i}$가 되는 것이다.

연습문제 18.2.1. 좌표평면에서 직교좌표계를 극좌표계로 변환할 때 vector가 변환되는 행렬이 화살표로서의 벡터가 변환되는 행렬과 같음을 보여라.

18.3 1-형식

vector는 자주 사용해왔던 익숙한 개념이지만, 1-형식, 즉 one-form은 처음 들어볼 것이다. 간단하게 말하면 one-form은 vector와 쌍대를 이루는 개념이다. 다음 설명을 통해 기하적인 직관을 얻어 보도록 하자.

우리는 미적분을 배우며 무한소라는 개념을 다뤄 왔다. 이 무한소를 확장한 개념이 differential form이고, differential form 중 1차원, 즉 '무한소 길이'가 one-form이라 생각하면 된다. 함수 f에 대해 df로 예를 들어 보자. df에 대해서도 vector에서 했던 것과 똑같이 편미분 연쇄법칙을 사용하여 $\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$로 쓸 수 있을 것이다. 그러면 dx_i를 기저로, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$를 성분으로 하여 무한소를 벡터로 생각할 수 있다.

one-form이 vector와 다른 점은 기저의 변환에 대해 반응하는 방식이다. vector에서 기저를 변환했을 때 one-form에 대한 변환행렬은 vector에서의 것의 역변환이 된다.

연습문제 18.3.1. 좌표평면에서 직교좌표계를 극좌표계로 변환할 때 one-form이 변환되는 행렬이 vector의 변환행렬과 역행렬 관계에 있음을 보여라.

vector와 one-form은 서로가 서로의 dual이다. vector는 반변벡터, contravariant vector로도 불리고, one-form은 공변벡터, covariant vector, dual vector로도 불린다.

vector의 성분과 one-form의 성분은 기저바꿈에 대해 반대로 반응한다. 여기서 알아둬야 할 것은 이들은 기하적인 값으로, 원래 정의는 기저의 선택에 무관하다는 것이다. 즉 이들은 좌표를 바꿔도 성분과 기저는 바뀌지만 그 실체인 vector(one-form) 그 자체는 바뀌지 않는다. 그리고 성분과 기저가 결합되어 있는 형태로 보아, 성분이 바뀌는 것을 표현하는 변환행렬과 기저가 바뀌는 것을 표현하는 변환행렬은 서로 역행렬 관계를 가져야 한다는 것을 알 수 있다. 이것을 수식으로 표현하면

아래와 같이 표현될 것이다.

$$\vec{V}' = V'e' = V\Lambda\Lambda^{-1}e = Ve = \vec{V} \tag{18.1}$$

여기서 쓴 표현이 제대로 된 표현은 아니다. vector와 one-form의 성분 표기법을 소개하기 전에 기저와 성분이 반대로 바뀌는 과정을 표현하려고 쓴 것이다.

그런데 one-form과 vector의 성분은 서로 반대로 변한다는 것을 위에서 보았다. 그렇다면, vector의 성분과 one-form의 기저가 같은 방식으로 변하고, one-form의 성분과 vector의 기저가 같은 방식으로 변한다는 결론을 내릴 수 있다.

이쯤에서 물리에서 자주 사용하는 표기법을 소개하겠다. vector는 알파벳 위에 bar를, one-form은 알파벳 위에 tilde를 써서 표현하고, 성분으로 쓸 때는 변환규칙에 따라 첨자의 위치를 바꾼다. 그리고 반복되는 첨자의 합이 나오면 시그마 기호를 생략한다. 주로 vector의 기저는 $\{\bar{e}\}$, one-form의 기저는 $\{\tilde{\omega}\}$로 쓴다.

$$\bar{V} = V^i \bar{e}_i \tag{18.2}$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha_i \tilde{\omega}^i \tag{18.3}$$

18.4 텐서

이제는 이들의 성분을 늘린 텐서에 대해 알아보도록 하자. 우선 텐서에 대해 설명하기 전에, vector와 one-form에 대해 조금 더 깊게 알아보자.

18.4.1 접공간

다양체에는 각 점마다 할당된 벡터공간인 접공간이 존재한다. 다양체 M의 점 p에 할당된 접공간을 tangent space의 t를 따와 T_pM으로 쓴다. 그리고 그 점에 있는 vector들이 바로 T_pM의 원소이다. T_pM은 각 점의 vector가 '사는' 곳으로 생각할 수 있다. 모든 점에 대해 이러한 T_pM들을 모은 공간을 접다발이라 한다. one-form에 대해서도 같은 식으로 one-form이 사는 공간을 생각할 수 있는데, 그 공간은 접공간과 쌍대를 이룬다는 의미에서 cotangent space, cotangent bundle(여접다발)이라 하고, *을 붙여 T_p^*M으로 쓴다.

18.4.2 내적

vector와 one-form의 실체가 기저의 선택에 무관한 이유를 떠올려 보자. 이들의 성분과 기저가 기저바꿈에 대해 반대로 반응하여 그 실체는 불변인 것이었다. 그

렇다면 이들의 성분을 연결한 값 또한 vector 성분과 one-form 성분이 반대로 바뀌어 총 값은 기저에 무관할 것임을 추론할 수 있다. 이런 맥락 안에서 vector $\bar{V}$와 one-form $\tilde{\alpha}$의 내적을 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$(\bar{V}, \tilde{\alpha}) = V^i \alpha_i \tag{18.4}$$

이 연산은 내적이므로 선형성을 만족한다. δ^i_j는 크로네커 델타라 불리는 기호로, $i = j$일 때 1이고 나머지일 때 0인 기호이다. 단위행렬을 성분으로 쓴 걸로 생각하면 편하다.

$$(V^i \bar{e}_i, \alpha_j \tilde{\omega}^j) = V^i \alpha_j (\bar{e}_i, \tilde{\omega}^j) = V^i \alpha_j \delta^j_i = V^i \alpha_i \tag{18.5}$$

기저를 미분 기호로 보면 조금 더 직관적인 이해가 가능하다.

$$(\bar{e}_i, \tilde{\omega}^j) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j \right) = \delta^j_i \tag{18.6}$$

유념할 것은, 이 내적은 우리가 기하에서 배운 내적과는 다르다. 사실 이게 더 일반적인 것인데, 내적은 어떤 대상과 그 쌍대가 되는 대상을 이어 준다. 이 내적이 유클리드 기하에서의 내적과 연결되는 과정을 나중에 볼 것이다.

이러한 맥락에서 우리는 one-form과 vector를 다른 관점에서 볼 수 있다. one-form은 vector를 받아 실수를 출력하는 함수이고, vector는 one-form을 받아 실수를 출력하는 함수이다.

18.4.3 텐서

이제 텐서를 도입해보자. 우리는 지금까지 첨자가 한 개인 대상만을 다뤘지만, 첨자의 개수를 여러 개로 늘리고 싶다. 그러면 어떻게 해야 할까? 답은 간단하다. T_pM과 T_p^*M의 원소가 vector와 one-form이므로 그 공간들을 단순히 곱해서 나온 공간의 원소는 여러 개의 첨자를 가지는 텐서가 될 것이다. 이런 식으로 T_pM n개와 T_p^*M m개를 곱한 공간의 원소 $\mathbb{T}$를 (n, m) 텐서라 한다. 그리고 이러한 텐서는 n개의 one-form과 m개의 vector를 받아 실수를 출력하는 함수가 된다. 물론 이 함수는 선형성을 만족한다. (n, m) 텐서를 성분으로 쓰면 아래와 같다.

$$\mathbb{T} = T^{i_1 i_2 \ldots i_n}{}_{j_1 j_2 \ldots j_m} \bar{e}_{i_1} \bar{e}_{i_2} \ldots \bar{e}_{i_n} \tilde{\omega}^{j_1} \tilde{\omega}^{j_2} \ldots \tilde{\omega}^{j_m} \tag{18.7}$$

기저 부분을 보면 알 수 있듯, 그저 vector와 one-form을 여러 개 곱해 놓은 것에 불과하다.

18.4.4 축약

텐서는 vetor나 one-form과 내적을 확장한 개념 격인 축약이라는 연산을 할 수 있다. 우선 텐서를 함수 형태로 표현하면 아래와 같이 나타난다.

$$\mathbb{T}(\quad,\quad,\quad ...;\quad,\quad,\quad ...) \tag{18.8}$$

세미콜론을 기준으로 앞의 빈칸은 one-form이, 뒤의 빈칸은 vector가 들어가는 자리이다. 이 자리 중 하나에 vector나 one-form을 넣는 것이 축약이며, 기저 표현으로는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbb{T}(\tilde{\alpha},\quad,\quad ...;\quad,\quad,\quad ...) = \alpha_{i_1} T^{i_1 i_2 ... i_n}{}_{j_1 j_2 ... j_m} \bar{e}_{i_2} ... \bar{e}_{i_n} \tilde{\omega}^{j_1} \tilde{\omega}^{j_2} ... \tilde{\omega}^{j_m} \tag{18.9}$$

i_1은 dummy index, 나머지는 실제로 '유효한' index임에 주의하자.

one-form과 vector를 서로를 받아 실수를 출력하는 함수라 했으므로, vector와 one-form의 축약(=내적)은 아래와 같다.

$$\bar{V}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}(\bar{V}) = \alpha_i V^i = (\tilde{\alpha}, \bar{V}) \tag{18.10}$$

아래 예시처럼 텐서와 텐서 간의 축약이나 두 성분을 모두 축약하는 것도 가능하다.

$$A_{ijk} B^{ijl} \tag{18.11}$$

축약에 대한 직관을 조금 쓰자면, 성분 표기로 썼을 때 두 텐서 간의 인덱스들 중 축약할 인덱스를 dummy index로 만들면서 '유효한 첨자'의 개수를 줄이는 과정으로 볼 수 있다. 이를테면 위 예시에서 축약된 결과는 $(1,1)$ 텐서가 될 것이다. 조금 더 시각적인 이해를 원한다면 구글에 Penrose graphical notation을 검색해 보라.

18.4.5 텐서 첨자 연산 예시

변환행렬. vector, one-form의 성분은 기저바꿈에 반응하는 방식이 반대라고 하였다. 즉 해당 기저 변환 아래 변환행렬이 역행렬 관계를 가진다.

변환행렬을 $\Lambda^i{}_j$라 하자. 그러면 변환 Λ에 대해 vector의 성분은 $v^{i'} = \Lambda^i{}_j v^j$처럼 변환되고, one-form의 성분은 $\alpha'_i = [\Lambda^{-1}]^j{}_i \alpha_j$처럼 변환될 것이다. 이때 $\Lambda^i{}_j [\Lambda^{-1}]^j{}_k = \delta^i{}_k$이다. (역행렬.)

일반적으로 텐서의 변환은 위의 규칙을 따라, 각 윗첨자마다 Λ를 축약시키고, 아랫첨자마다 Λ^{-1}을 축약시킨다.

메트릭 텐서. 메트릭 텐서 g는 vector를 one-form으로 바꿔 주는 텐서로, vector와 축약해서 one-form을 만든다는 것에서 $(0,2)$텐서임을 유추할 수 있다. vector $\bar{V}$를 one-form $\tilde{V}$로 바꾸는 것을 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$g(\bar{V},\quad) = \tilde{V}(\quad) \tag{18.12}$$

이를 성분으로 쓰면 아래와 같다.

$$g_{ij}V^j = V_i \tag{18.13}$$

즉, g는 윗첨자를 아래로 내려 주는 역할을 한다.

여기서 아래첨자를 위로 올려 주는 텐서를 생각해볼 수 있다. 이러한 (2,0)텐서 g를 inverse metric이라 한다. 이때 inverse metric은 $g^{ij}g_{jk} = \delta^i{}_k$를 만족한다. (역행렬.) metric과 inverse metric은 성분 표기로 썼을 때 첨자의 위치를 통해 구분할 수 있기에 따로 문자를 다르게 쓰지는 않는다. 성분 표기로 아래첨자를 올려 주는 것을 쓰면 아래와 같다.

$$g^{ij}V_j = V^i \tag{18.14}$$

메트릭 텐서는 대칭 텐서이다. 즉, $g_{ij} = g_{ji}$를 만족한다. inverse metric 또한 대칭 텐서임을 쉽게 확인할 수 있다.

metric을 통해 첨자를 내린 vector와 다른 vector를 내적할 수 있다. 이를 성분 표기로 쓰면 $V^i g_{ij} U^j = V^i U_i = V_i U^i$가 되며, 이 식에서 좌변의 것이 바로 기존의 기하적인 벡터 간의 내적이 된다.

다시 말해 메트릭 텐서는 공간의 벡터 간의 내적을 결정하는 '내적 규칙'이며, 벡터 간의 내적 규칙이 정의되면 벡터의 크기를 정의할 수 있고 두 벡터 간의 각을 정의할 수 있으므로, 메트릭 텐서를 알면 공간의 기하를 아는 것이 된다.

유클리드 공간에서 메트릭 텐서는 $g_{ij} = \delta_{ij}$로 주어지며, 따라서 유클리드 공간에서의 내적은 벡터의 각 성분끼리 곱해서 단순히 모두 더하는 것이 된다. 또한 유클리드 공간에서 메트릭 텐서가 δ_{ij}로 주어지기 때문에 유클리드 공간에서는 vector와 one-form의 구분이 크게 중요하지 않다.

레비-치비타 텐서. 레비-치비타 텐서는 레비-치비타 심볼을 '텐서화'시키고 일반화시킨 것이다. 우선, 레비 치비타 심볼은 ϵ_{ijk}로 표기하며, ijk가 123과 cyclic하게 같을 때는 1, 213과 cyclic하게 같을 때는 -1, 나머지 경우에는 0의 값을 가지는 기호이다. 그러면 이 정의를 확장해서, ijk를 123에서 두 숫자를 골라 바꾸는 시행을 짝수 번 반복해 얻을 수 있다면 1, 홀수 번 반복해 얻을 수 있다면 -1, 어느 쪽도

아니라면 0의 값을 가지는 것으로 재정의할 수 있다. 두 정의는 동치임을 쉽게 확인할 수 있다. 이때 123에서 두 숫자를 짝수 번 바꿔 얻는 순열을 even permutation, 홀수 번 바꿔 얻는 순열을 odd permutation이라 한다.

이 정의를 통해 ϵ_{ijk}의 첨자 개수를 늘려 일반화할 수 있다. 일반화된 레비-치비타 심볼 $\epsilon_{i_1 i_2 i_3 ... i_n}$은 아래와 같이 정의된다.

$$\epsilon_{i_1 i_2 i_3 ... i_n} = \begin{cases} 1, & \text{if } i_1 i_2 i_3 ... i_n \text{ is an even permutation of 123...n} \\ -1, & \text{if } i_1 i_2 i_3 ... i_n \text{ is an odd permutation of 123...n} \\ 0, & \text{else} \end{cases} \tag{18.15}$$

여기서 주의할 것은 레비-치비타 심볼은 텐서가 아니라는 것이다. 기저를 바꿔보면 불변이 아님을 쉽게 확인할 수 있다.

레비-치비타 심볼을 사용하면 외적을 깔끔하게 표현할 수 있다. 유클리드 공간에서 벡터의 외적을 레비-치비타 심볼을 사용해 표현하면 아래와 같다.

$$(a \times b)^k = \epsilon_{ij}{}^k a^i b^j \tag{18.16}$$

이때 $\epsilon_{ij}{}^k = g^{km} \epsilon_{ijm}$이다.

출처: geometrical methods of mathematical physics - Bernard F. Schutz

찾아보기