Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΜΕΜ-254 Αριθμητικη Γραμμικη Αλγεβρα
Χειμερινο Εξαμηνο 2016
Εργαστηριο 4
1-11-2016
Η Αναλυση Cholesky
B

1. Διατύπωση του προβλήματος.
Έστω:
- $d \in \mathbb{N}$,
- τριδιαγώνιος, συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$,
- διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^d$.

Σκοπός μας είναι να βρούμε τη λύση $x \in \mathbb{R}^d$ του γραμμικού συστήματος $A\,x = b$, χρησιμοποιώντας την ανάλυση Cholesky. Σημειώνουμε ότι ένας πίνακας $B \in \mathbb{C}^{d\times d}$ είναι τριδιαγώνιος όταν $B_{ij} = 0$ για όλα τα $i, j = 1, \dots, d$ με $|i-j| \geq 2$.

2. Περιγραφή της ανάλυσης Cholesky.
Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, υπάρχει κάτω τριγωνικός πίνακας $L \in \mathbb{R}^{d\times d}$ με θετικά διαγώνια στοιχεία τέτοιος ώστε $A = L\,L^T$.

Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός και τριδιαγώνιος μπορούμε να αποθηκεύσουμε τα στοιχεία του σε ενα πίνακα $B \in \mathbb{C}^{d\times 2}$ ως εξής: $A_{i,i} = B_{i,2}$ για $i = 1, \dots, d$, και $A_{i,i-1} = B_{i,1}$ για $i = 2, \dots, d$. Για τυπικούς λόγους θέτουμε $B_{1,1} = 0$. Ο πίνακας L έχει μη μηδενικά μόνο στη διαγώνιο και στην υποδιαγώνιο, επομένως μπορείς να αποθηκευτεί σε πίνακα $\Gamma \in \mathbb{C}^{d\times 2}$, όπου: $L_{ii} = \Gamma_{i,2}$ για $i = 1, \dots, d$, $L_{i,i-1} = \Gamma_{i,1}$ για $i = 2, \dots, d$, και $\Gamma_{1,1} = 0$.

Για $k = 1, \dots, d$, πρώτα υπολογίζουμε το διαγώνιο στοιχείο $L_{kk} = \Gamma_{k,2}$ ως εξής:

$$\begin{aligned}\Gamma_{k,2} &= \left[A_{k,k} - \sum_{j=1}^{k-1} (L_{k,j})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[A_{k,k} - (L_{k,k-1})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[B_{k,2} - (\Gamma_{k,1})^2 \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

και στη συνέχεια υπολογίζουμε το στοιχείο $L_{k+1,k} = \Gamma_{k+1,1}$ ως εξής:

$$\begin{aligned}\Gamma_{k+1,1} &:= \tfrac{1}{L_{k,k}} \left[A_{k+1,k} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{k+1,j}\, L_{kj} \right] \\ &= \tfrac{1}{L_{k,k}} \left(A_{k+1,k} - L_{k+1,k-1}\, L_{k,k-1} \right) \\ &= \tfrac{1}{L_{k,k}}\, A_{k+1,k} \\ &= \tfrac{1}{\Gamma_{k,2}}\, B_{k+1,1}.\end{aligned}$$

Επειδή το γραμμικό σύστημα παίρνει τη μορφή: $L(L^T\,x) = b$, πρώτα βρίσκουμε τη λύση $y \in \mathbb{R}^d$ του γραμμικού συστήματος $L\,y = b$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \tfrac{1}{L_{1,1}}\,b_1 = \tfrac{1}{\Gamma_{1,2}}\,b_1,\\
y_i &= \tfrac{1}{L_{i,i}}\,\left[\,b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j}\,y_j\,\right] = \tfrac{1}{L_{i,i}}\,(\,b_i - L_{i,i-1}\,y_{i-1}\,)\\
&= \tfrac{1}{\Gamma_{i,2}}\,(\,b_i - \Gamma_{i,1}\,y_{i-1}\,) \quad i = 2,\ldots,d,
\end{aligned}$$

και στη συνέχεια βρίσκουμε τη λύση x λύνοντας το γραμμικό σύστημα $L^T\,x = y$, ως εξής:

$$\begin{aligned}
x_d &= \tfrac{1}{L_{d,d}}\,y_d = \tfrac{1}{\Gamma_{d,2}}\,y_d\\
x_i &= \tfrac{1}{L_{i,i}}\,\left[\,y_i - \sum_{j=i+1}^{d} L_{j,i}\,x_j\,\right] = \tfrac{1}{L_{i,i}}\,(y_i - L_{i+1,i}\,x_{i+1}\,)\\
&= \tfrac{1}{\Gamma_{i,2}}\,(\,y_i - \Gamma_{i+1,1}\,x_{i+1}\,)\,, \quad i = d-1,\ldots,1.
\end{aligned}$$

3. Αντικείμενο εργαστηρίου.

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει τη λύση x του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ χρησιμοποιώντας την ανάλυση Cholesky όπως περιγράψαμε στις προηγούμενες παραγράφους.

Παράδειγμα. Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας με ένα τριδιαγώνιο πίνακα A με διαγώνια στοιχεία $A_{j,j} = 2$ για $j = 1,\ldots,d$, υπερδιαγώνια στοιχεία $A_{j,j+1} = -1$ για $j = 1,\ldots,d-1$, και υποδιαγώνια στοιχεία $A_{j,j-1} = -1$ για $j = 2,\ldots,d$. Για $b \in \mathbb{R}^d$ με $b_1 = 1$, $b_j = 0$ για $j = 2,\ldots,d-1$, και $b_d = 1$, η λύση $x \in \mathbb{R}^d$ του γραμμικού συστήματος έχει συντεταγμένες $x_i = 1$ για $i = 1,\ldots,d$.

Γ. Ζουράρης