オイラーの素数生成多項式が合成数となる条件に関する考察

大石勲斗

2019 年 10 月 29 日

1　はじめに

二次関数と素数の関係について研究を行っていたところ，$f(x) = x^2 + x + 41$ $(x \in \mathbb{N}_0)$ という式で表現される整数に多くの素数が現れることに気づいた。この発見の新規性を確かめるために調査を行ったところ，オイラーによって既に発見されていたことがわかった。この式にはオイラーの素数生成多項式という名前がついている。この式が評価されている点は，x を 0 から 39 まで動かしたとき連続で素数となる点と，1000 万以下の x では 47.5% の確率で素数となる点である。筆者はこの式に隠された謎がまだ解明されていないと直感し，研究を進めることにした。筆者は数学の専門家ではない。研究の手法としては，実験的に得られた情報からその性質を推測するものである。よって，厳密性に欠ける議論が含まれることを予めご了承いただきたい。

2　オイラーの素数生成多項式の観察

まず，オイラーの素数生成多項式 $f(x)$ が合成数となる x, x_p について調査を行った。$(x_p : f(x_p))$ の組で順に列挙する。

(40:1681), (41:1763), (44:2021), (49:2491), (58:3233), (65:4331), (76:5893), (81:6683), (82:6847),⋯

本研究の目的は，一言でいえばこの数列に隠された規則性を見出すことである。

さらに $f(x_p)$ を素因数分解したものを考える。$(x_p :$ 素因数分解$)$ の組で順に列挙する。

(40:41,41), (41:41,43), (44:43,47), (49:47,53), (56:53,61), (65:61,71), (76:71,83), (81:41,163), (82:41,167),⋯

この数列を眺めると，ある規則が確認できる。

(40:41,41), (41:41,43), (44:43,47), (49:47,53), (56:53,61), (65:61,71), (76:71,83), (81:41,163), (82:41,167),⋯

色付けされているように，各合成数同士で共通する素因数を持つ場合がある。全ての連続する $f(x_p)$ が同じ性質を持っていれば，単純計算で先の合成数を予測できるのだが，残念ながらこの式はさらに複雑な構造を持っている。上記の数列からもわかるように，$x_p = 81$ のとき性質が途切れている。しかし，なんらかの規則性があることは確かであり，この事実を軸に研究を進めていく価値は十分にあると考えられる。

3　オイラーの素数生成多項式のグループ化

自然数列を考えたとき，全ての数はある素数の倍数である。各素数の倍数は等間隔に分布し，それぞれが異なる周期を持った波のように捉えることもできる。この性質に似たものが $f(x)$ に現れることについて述べる。2 章では，$x_p = 81$ で性質が途切れているようにみえた。しかし，その先を注意深く調査すると，さらに興味深い性質を確認できる。

(40:41,41), (41:41,43), (44:43,47), (49:47,53), (56:53,61), (65:61,71), (76:71,83), (81:41,163), (82:41,167), (84:43,167), (87:43,179), (89:83,97), (91:47,179),⋯

色付けされているように，同じ性質を持った合成数のグループが混合していることが確認できる。この先も調査したところ，同じように新しいグループが出現することが確認できた。新しいグループが出現するタイミングは一定であり，$x_{pp} = 41n + 40\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ であることが分かった。

4 各グループの定式化

各グループを個別に観察すると，x_p が二次関数的に増加していることが確認できる。各グループに対して出現順に 1 から番号をつけ，定式化を試みる。以降各グループの性質が $f(x)$ 内で途絶えないと仮定し，議論を進める。以下に各グループの x_p を表す式を示す。

$$
\begin{aligned}
\text{グループ 1：} & 1y^2 + 2y + 1 \cdot 41 \\
\text{グループ 2：} & 2y^2 + 3y + 2 \cdot 41 \\
\text{グループ 3：} & 3y^2 + 4y + 3 \cdot 41 \\
\text{グループ 4：} & 4y^2 + 5y + 4 \cdot 41 \\
& \vdots \\
& \vdots
\end{aligned}
$$

各グループにおいて，y は-1 以上の整数である。
ただし，二次関数の双対性より $y \in \mathbb{Z}$ としてよい。

各グループの式を観察すると，式同士に規則性があることが確認できる。グループ番号を自然数 k で表すと，次のように書ける。

$$\text{グループ } k\text{：} ky^2 + (k+1)y + k \cdot 41$$

予想を含む推測的なプロセスではあるが，各グループを定式化することができた。

$f(x)\ (x \in \mathbb{N}_0)$ が合成数のときの x がいつでも $x_p = ky^2 + (k+1)y + k \cdot 41\ (y \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N})$ を満たしているかどうか，逐次計算により確かめる。結論から述べると $x = 244$ のとき，条件を満たさない合成数が出現することが確認できた。続いて，$x = 249, 251 \cdots$ で条件を満たさなかった。

これらの x における合成数の素因数分解を以下に示す。

$$
\begin{aligned}
f(244) &= 163 \times 367 \\
f(249) &= 167 \times 373 \\
f(251) &= 167 \times 379 \\
& \vdots \\
& \vdots
\end{aligned}
$$

なんらかの規則性があるようにも見えるが，これを定式化することは筆者には難しく感じたため，アプローチを変更する。また，これらのように条件を満たさない x を**亜種**，満たす x を**原種**と呼ぶことにする。

5　x_p の観察

$x_p = ky^2 + (k+1)y + k\cdot 41$ を変数 y について解くことを考える。
解の公式より，

$$\begin{aligned} y &= \frac{-k-1 \pm \sqrt{(k+1)^2 - 4\cdot k\cdot(41k - x_p)}}{2k} \\ &= \frac{-k-1 \pm \sqrt{-163k^2 + 2(2x_p+1)k + 1}}{2k} \end{aligned}$$

$y \in \mathbb{Z}$ より，少なくとも根号が外れなければならない。よって，根号の中身は平方数でなければならない。
$z \in \mathbb{Z}$ とすれば,

$$z^2 = -163k^2 + 2(2x_p+1)k + 1 \tag{1}$$

$$y = \frac{-k-1 \pm |z|}{2k}$$

と書ける。
ここで，y を整数とするためにまずは y を有理数の範囲で考え，観察することにする。二つの解を以下のように表現する。

$$\frac{-k-1-|z|}{2k} = \frac{n_1}{m_1}$$

$$\frac{-k-1+|z|}{2k} = \frac{n_2}{m_2}$$

ただし，$m_i \in \mathbb{N},\ n_i \in \mathbb{Z},\ gcd(m_i, n_i) = 1\ (i = 1, 2)$

このとき，因数定理と $gcd(k, k+1) = 1$ より次の関係が成り立つ。

$$(m_1 y - n_1)(m_2 y - n_2) = ky^2 + (k+1)y + k\cdot 41 - x_p$$

左辺を展開して,

$$m_1 m_2 y^2 - (m_1 n_2 + m_2 n_1)\, y + n_1 n_2 = ky^2 + (k+1)y + k\cdot 41 - x_p \tag{2}$$

係数を比較すると,

$$m_1 m_2 = k \tag{3}$$

$$-(m_1 n_2 + m_2 n_1) = k + 1 \tag{4}$$

$$n_1 n_2 = k\cdot 41 - x_p \tag{5}$$

(3),(4) より,

$$m_1 n_2 + m_2 n_1 + m_1 m_2 = -1 \tag{6}$$

また，(2) について, 最高次数の係数を 1 としたものを考えると，

$$y^2-\frac{m_1n_2+m_2n_1}{m_1m_2}y+\frac{n_1n_2}{m_1m_2}=y^2+\frac{k+1}{k}y+\frac{k\cdot 41-x_p}{k} \tag{7}$$

係数を比較すると，

$$-\frac{m_1n_2+m_2n_1}{m_1m_2}=\frac{k+1}{k} \tag{8}$$

$$\frac{n_1n_2}{m_1m_2}=\frac{k\cdot 41-x_p}{k} \tag{9}$$

(8) を k について解くと，

$$\begin{aligned} k\left(m_1n_2+m_2n_1+m_1m_2\right)&=-m_1m_2 \\ k&=-\frac{m_1m_2}{m_1n_2+m_2n_1+m_1m_2} \end{aligned} \tag{10}$$

(9) を x_p について解くと，

$$x_p=k\left(41-\frac{n_1n_2}{m_1m_2}\right) \tag{11}$$

(10) を (11) に代入すると，

$$x_p=\frac{n_1n_2-41m_1m_2}{m_1n_2+m_2n_1+m_1m_2} \tag{12}$$

(12) を $f(x)$ に入力し, 因数分解を試みる。計算には, 式の帝国 (https://ja.numberempire.com/factoringcalculator.php) を用いた。結果のみ示す。

$$f(x_p)=\frac{(n_1^2+m_1n_1+41m_1^2)(n_2^2+m_2n_2+41m_2^2)}{(m_1n_2+m_2n_1+m_1m_2)^2} \tag{13}$$

(6) を (13) に代入して，

$$f(x_p)=(n_1^2+m_1n_1+41m_1^2)(n_2^2+m_2n_2+41m_2^2) \tag{14}$$

(14) より，y が整数のとき，つまり m_1, m_2 が 1 のとき，(14) の右辺は整数の積となるので，$f(x_p)$ は合成数となる。さらに，m_1, m_2 が 1 以外の自然数であっても，(14) の右辺は整数の積となるので，$f(x_p)$ は合成数となる。つまり，y は整数だけでなく有理数の範囲で有効であることがわかった。このことから，次の定理が導かれる。

定理 1　$x_p=ky^2+(k+1)y+k\cdot 41$ において，y が有理数解を持つ k が存在するなら，$f(x_p)$ は合成数である。

以降では (14) を**分解式**と呼ぶことにする。

6 亜種の正体

亜種の例として $x_a = 244$ を挙げ，$x_a = ky^2 + (k+1)y + k \cdot 41$ について y が有理数解を持たないか調査する。k を順に変化させ調査を行うと，次の結果となった。

$k = 6$ のとき，

$$y = -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2} \text{ を解にもつ。}$$

よって，$m_1 = 3,\ n_1 = -2,\ m_2 = 2,\ n_2 = -1$ である。分解式に当てはめれば，

$$\begin{aligned} f(244) &= ((-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 41 \cdot 3^2)((-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 41 \cdot 2^2) \\ &= 367 \times 163 \end{aligned}$$

のように分解できる。このことから亜種は，y が整数でない有理数解をもつときに現れると考えられる。

次に，逐次計算によって，y が有理数解を持たなくても合成数となる場合がないか調査を行った。計算リソースの関係上 x を 0 から 10 万まで動かして実験した。結果，そのような x は見つからなかった。このことから，次の予想が立つ。

予想 1　$x_p = ky^2 + (k+1)y + k \cdot 41$ において，任意の k で y が有理数解を持たないなら，$f(x_p)$ は素数である。

7 予想 1 を仮定した考察

これまで扱った合成数は素因数が二個であるものだけであった。しかし，x が大きくなれば当然その限りではない。例えば，$x_p = 420$ のとき $f(x_p)$ は 47,53,71 の素因数を持つ。このとき，$x_p = ky^2 + (k+1)y + k \cdot 41$ の解を求めると，

$k = 6$ のとき，

$$y = -6,\ \frac{29}{6}$$

$k = 8$ のとき，

$$y = -4,\ \frac{23}{8}$$

$k = 9$ のとき，

$$y = -3,\ \frac{17}{9}$$

となる。
それぞれ分解式で計算すると，$f(x_p)$ は

$$
\begin{gathered}
71 \times 2491 \\
53 \times 3337 \\
47 \times 3763
\end{gathered}
$$

のように分解される。この結果からわかることは，$f(x_p)$ を二つの整数の積で表現するパターンがすべて表れていることである ($1 \times f(x_p)$ を除く)。つまり，有理数解一つが $f(x_p)$ の約数二個分に対応していると推測できる。

予想 1 が正しいと仮定すると，式 (1) が非常に重要になる。なぜなら，式 (1) によって y の根号の有無が決まり，根号の有無によって $f(x)$ の素数性が決まるからである。式 (1) の変数を $z = X, k = Y$ のように変換しとしたものを示す。

$$X^2 = -163Y^2 + 2(2x_p + 1)Y + 1 \tag{15}$$

(15) は楕円であり，y が有理数解を持てばその解に対応する格子点を持つことになる。また，この楕円は Y 軸対称なので，(X, Y) が格子点なら $(-X, Y)$ も格子点となる。つまり有理数解一つが，二個の格子点に対応している。さらに，$(X, Y) = (\pm 1, 0)$ は自明な格子点である。この自明な格子点二個が，1 と自分自身に対応していると考えれば，次の予想が立つ。

予想 2　楕円 $X^2 = -163Y^2 + 2(2x_p + 1)Y + 1$ 上の格子点の個数は，$f(x_p)$ の約数の個数に等しい。

予想 1 と予想 2 は同値である。

8　結論

本研究では，オイラーの素数生成多項式が合成数となる条件について考察した。特殊な条件のとき，$f(x)$ が合成数となることを示し，その延長にある予想について述べた。本研究ではオイラーの素数生成多項式に焦点を当てて議論を進めたため，$x^2 + x + c$ において $c = 41$ で考察したが，同様の性質は，c =3, 5, 11, 17 のときにも現れる。また，定理 1 は c が任意の整数のとき成り立つ。予想 1, 2 については c が特殊な場合 (3, 5, 11, 17, 41) のときに限り成り立つと推測している。今後の研究では，予想の証明に取り組みたい。