2022학년도 1학기 컴퓨터언어학

제2강 NumPy 실습: 행렬과 벡터

박수지

서울대학교 인문대학 언어학과

2022년 3월 7일 월요일

오늘의 목표

1. 주어진 벡터를 더하거나 내적할 수 있다.
2. 주어진 행렬을 더하거나 곱할 수 있다; 할 수 없다면 그 이유를 말할 수 있다.
3. NumPy에서 벡터와 행렬을 만들고 계산할 수 있다.

데이터의 유형

- 범주형
  - 명목형
  - 순서형
- 수치형
  - 이산형
  - 연속형

예시: 언어학 데이터

명목형 '밀덕'(밀리터리 덕후)을 어떻게 발음합니까?
- [밀덕], [밀떡]

순서형 이 문장이 자연스럽습니까?
- 매우 어색/어색한 편/보통/···

이산형 각 단어에 장애음이 몇 개 있는가?
- 0, 1, 2, 3, ···

연속형 어두 자음의 VOT가 몇 ms인가?
- -14.15, 3.60, 23.61, -7.42,···

벡터

(주로 수치형) 데이터를 표현하는 방식

성분 표시 $\mathsf{v} = (\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, \ldots, \mathsf{v}_n) \leftarrow$ n-차원 벡터

연산
- 덧셈 $(5, 0, 1) + (7, 5, 0) = (12, 5, 1)$
- 상수배 $2 \times (5, 0, 1) = (10, 0, 2)$

속성
- 내적 $(5, 0, 1) \cdot (7, 5, 0) = (5 \times 7) + (0 \times 5) + (1 \times 0) = 35$
- 길이 $\|(5, 0, 1)\| = \sqrt{(5, 0, 1) \cdot (5, 0, 1)} = \sqrt{26}$
- 거리 $\|(5, 0, 1) - (7, 5, 0)\| = \|(-2, -5, 1)\| = \sqrt{30}$

벡터 연산 시도

```
>>> [5, 0, 1] + [7, 5, 0] # 연결
[5, 0, 1, 7, 5, 0]
>>> 2 * [5, 0, 1] # 반복
[5, 0, 1, 5, 0, 1]
```

해결 방법

1. 정의를 따라 코드를 작성한다.
2. NumPy를 사용한다.

벡터의 덧셈의 정의

$$\mathrm{v} + \mathrm{w} = (\mathrm{v}_1 + \mathrm{w}_1, \mathrm{v}_2 + \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{v}_\mathrm{n} + \mathrm{w}_\mathrm{n})$$

```python
def vector_add(v, w):
    result = []
    for i in range(len(v)):
        result.append(v[i] + w[i])
    return result
```

개선

- 두 개 이상의 열에 대한 반복문 ⇒ `zip()` 함수 사용
- 열에 대응하는 리스트 ⇒ List comprehension 사용

벡터의 덧셈·뺄셈·상수배

```python
def vector_add(v, w):
    return [v_i + w_i for v_i, w_i in zip(v, w)]

def vector_subtract(v, w):
    return [v_i - w_i for v_i, w_i in zip(v, w)]

def scalar_multiply(c, v):
    return [c * v_i for v_i in v]
```

행렬

(벡터를 쌓아서) 직사각형으로 배열한 것

성분 표시 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ddots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) \leftarrow (m \times n)$ 행렬

연산

- 덧셈(addition) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix}$
- 상수배(scalar multiplication) $2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}$
- 전치(transposition) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

행렬

- 영행렬(zero matrix): 모든 성분의 값이 0인 행렬
  - 예: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- 항등행렬(identity matrix): 대각선 성분의 값은 1이고 나머지 성분은 모두 0인 정사각행렬
  - 예: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

벡터와 행렬

$(1, 2, 3)$ 길이 3인 벡터

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (1×3) 행렬

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (2×3) 행렬

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ (2×4) 행렬

행렬의 곱셈

예시

$$A = \begin{array}{|c|r|r|r|} \hline & \text{라면} & \text{김밥} & \text{두유} \\ \hline \text{학관} & 1000 & 700 & 1300 \\ \hline \text{중도} & 900 & 850 & 1000 \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|r|r|r|} \hline & \text{라면} & \text{김밥} & \text{두유} \\ \hline \text{아침} & 0 & 1 & 1 \\ \hline \text{점심} & 1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow B^{\mathsf{T}} = \begin{array}{|c|r|r|} \hline & \text{아침} & \text{점심} \\ \hline \text{라면} & 0 & 1 \\ \hline \text{김밥} & 1 & 2 \\ \hline \text{두유} & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$AB^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \text{학관} \cdot \text{아침} & \text{학관} \cdot \text{점심} \\ \text{중도} \cdot \text{아침} & \text{중도} \cdot \text{점심} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 + 1300 & 1000 + 700 \cdot 2 \\ 850 + 1000 & 900 + 850 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

행렬의 곱셈

다른 예시

$$A = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A{\cdot}B = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \cdot \vec{c}_1 & \vec{r}_1 \cdot \vec{c}_2 \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{c}_1 & \vec{r}_2 \cdot \vec{c}_2 \\ \vec{r}_3 \cdot \vec{c}_1 & \vec{r}_3 \cdot \vec{c}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1000 \\ 1 & 100 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1000 \\ 1 & 100 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

행렬의 곱셈

성질

- 결합법칙(associativity) 성립함 $(AB)C = A(BC)$
- 분배법칙(distributivity) 성립함 $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$
- 교환법칙(commutativity) 성립 안 함 $AB \neq BA$

실습 코드:
`https://github.com/insight-book/data-science-from-scratch/blob/master/scratch/linear_algebra.py`

오늘 배운 것

벡터와 행렬

- 덧셈과 상수배, 내적
- 내적 및 행렬곱

다음 시간에 할 일

SLP3 5장 읽어 오기