

林晓明 执业证书编号: S0570516010001
研究员 0755-82080134
linxiaoming@htsc.com

黄晓彬 执业证书编号: S0570516070001
研究员 0755-23950493
huangxiaobin@htsc.com

基金定投: 马科维茨有效性检验

基金定投系列专题研究报告之三

采用连续时间模型构建定投与基准投资的马科维茨有效性对比分析框架

基于资产价格服从几何布朗运动的连续时间模型, 推导了定投净值的期望、标准差、夏普比率等的解析表达式, 并与基准投资(期初一次性构建风险资产与无风险资产组合)对比, 检验其马科维茨有效性。通过理论推导、实验与实证检验发现: 当标的资产价格波动率或漂移率足够大时, 或在 $\mu < 0$ 的不利市场条件下, 从马科维茨有效性的角度, 定投表现优于基准投资。

发现定投净值的亚式期权等效性

通过公式推导、定量计算分析发现, 定投净值与零执行价的标准算数亚式看涨期权(standard zero-strike arithmetic Asian call option)的到期收益(或净值)同分布。这意味着, 定投可以获得与亚式期权类似的投资效果, 这一研究发现加深了我们对定投策略本质的认知, 也为我们优化定投策略提供理论依据。

“ M_2 、 M_1 的大小关系”作为衡量定投马科维茨有效性的标准

基于马科维茨有效性的角度构建模型, 发现当 $\mu > g$ (g 近似为无风险利率)时, 在 $M_1 > M_2$ 的有利情形下, 定投更优, 此时, 资产价格漂移率 μ 或波动率 σ 较大。在 $M_1 < M_2$ 的不利情形下, 基准投资更优。当 $\mu < g$ 时, 判别标准发生逆转, 此时 $M_1 < M_2$ 反而利于定投。通过境内外主要股票指数的实证发现, 当出现 $\mu < 0$ 明显不利的市场条件时, $M_2 - M_1 > 0$ 显示应当进行定投, 且随着时间 T 的增加, 该指标数值显著增长, 定投的优势越加明显。而在 $\mu > 0$ 的一般市场条件下, 定投相对于基准投资的优势并不明显。

应用布朗桥假设刻画对资产价格具有明确预期的定投情景并与基准投资对比

假设“资产价格符合布朗桥”, 即开始时刻与最终时刻的资产价格是确定的, 然而中间的变化过程未知, 以此为基础来比较定投和基准投资的马科维茨有效性。这种假设符合投资人对投资标的未来价格点位具有较为明确预期, 然而价格运动路径未知的情况。理论推导与实验检验发现, 在布朗桥的假设下, 当 $\mu \leq 0$ 时, 无论 σ 如何取值, 定投更优; 当 $\mu > 0$ 时, 总存在有一定阈值, 当 σ 大于该阈值时, 定投优于基准投资。

中国 A 股相比境外成熟市场更适合定投

通过实证分别测算了境内、境外主要股票指数与主要商品指数 $M_2 - M_1$ 的数值特征, 境内主要指数存在小于 0 的区间, 境外主要指数样本区间几乎都大于 0。说明不考虑 $\mu < 0$ 的情形, A 股市场更适合定投; 而在 $\mu < 0$ 的市场条件下, 境内外市场都适合采用定投的方式提升投资的马科维茨有效性。

本文成果可应用于智能定投策略的构建与智能投顾系统相关模块的设计等

本文的发现不但能够加深我们对定投本质、科学性等的认知, 相关成果还能应用于智能定投策略的构建与智能投顾系统相关模块的设计, 以及生命周期基金等 FOF 类型基金产品的设计等。

风险提示: 本文研究基于“资产价格符合几何布朗运动或布朗桥”的假设展开, 现实的资本市场不一定符合以上基本假设, 可能导致模型解释力不及预期。定投相比基准投资具有马科维茨有效性时, 不代表能够带来绝对回报。

相关研究

- 1 《50ETF 价跌量涨, IVIX 再创历史新低》
2016.10
- 2 《指数振幅创新低, 分级交投活跃度显降》
2016.09
- 3 《波动率持续低位, IVIX 创历史新低》
2016.09

正文目录

定投的连续时间模型回顾	4
资产价格服从几何布朗运动的假设	4
连续时间模型下定投净值的表达式	4
连续时间模型下定投净值的积分表达式	5
定投与基准投资的马科维茨有效性对比分析	6
亚式期权等效性	6
与基准投资的对比分析	8
定投的净值期望、标准差和夏普比率	9
基准投资的净值期望、标准差和夏普比率	9
相同的净值期望下比较净值标准差	9
相同的净值标准差下比较净值期望	10
比较净值夏普比率	11
有利情形和不利情形	11
定义与公式推导	11
$M2 - M1$ 数值规律的实验测算 ($g = 0$ 、 $T = 1$)	12
$M2 - M1$ 数值规律的实验测算 ($g = 0$ 、 T 变动)	13
$M2 - M1$ 数值规律的实验测算 ($T = 1$ 、 g 变动)	15
假设已知资产期末价格的条件下对比	16
实验模拟布朗桥的价格路径	16
布朗桥假设下定投的净值期望	17
布朗桥假设下定投与基准投资净值期望对比	18
实验证明满足 $\mu \leq g$ 的布朗桥定投期望净值恒优于基准投资	19
主要风险资产定投的马科维茨有效性的实证检验	21
境内主要股票指数	21
境外主要股票指数	24
主要商品指数	26
本文结论	27

图表目录

图 1: 随机生成的 S_t 和 St 价格曲线 ($\mu = 10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$)	6
图 2: S_t 和 St 的价格分布 ($\mu = 10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$)	7
图 3: 亚式期权净值和定投净值的分布 ($\mu = 10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$)	8
图 4: $M2 - M1$ 的取值 ($g = 0$ 、 $T = 1$)	12
图 5: σ^* 的取值 ($g = 0$ 、 $T = 1$)	13
图 6: $M2 - M1$ 在不同 T 下的二值化取值 ($g = 0$)	14
图 7: $M2 - M1$ 在不同 T 下的取值 ($g = 0$)	15
图 8: 当 $T = 1$ 时, σ^* 在不同 g 下的取值	16
图 9: 随机生成的 4 条 St^* 价格曲线 ($\mu = 10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$)	17
图 10: 随机生成的 4 条 St^* 价格曲线 ($\mu = -10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$)	17
图 11: 定投和基准投资的差别 $DiffT^*$ ($g = 0$ 、 $T = 1$)	19
图 12: 定投和基准投资的差别 $DiffT^*$ 二值化图 ($g = 0$ 、 $T = 1$)	20
图 13: 4 种国内股票指数的日收盘价	21
图 14: 4 种境内股票指数的波动率 σ 和漂移率 μ	22
图 15: 4 种境内股票指数的 $M2 - M1$ 值 ($T = 1$)	22
图 16: 4 种境内股票指数的 $M2 - M1$ 值 ($T = 3$)	23
图 17: 4 种国内股票指数的 $M2 - M1$ 值 ($T = 5$)	23
图 18: 4 种境外股票指数的日收盘价	24
图 19: 4 种境外股票指数的波动率 σ 和漂移率 μ	24
图 20: 4 种境外股票指数的 $M2 - M1$ 值 ($T = 1$)	25
图 21: 4 种境外股票指数的 $M2 - M1$ 值 ($T = 3$)	25
图 22: 4 种境外股票指数的 $M2 - M1$ 值 ($T = 5$)	26
图 23: 3 种典型商品期货的 $M2 - M1$ 值 ($T = 1$)	26
图 24: NYMEX 轻质原油的价格和 $M2 - M1$ 值 ($T = 1$)	27
表格 1: S_t 和 St 的关键性统计指标 ($\mu = 10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$)	7
表格 2: 亚式期权净值和定投净值的关键性统计指标 ($\mu = 10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$)	8

在 2016 年 7 月 11 日发布的华泰基金定投系列专题一《基金定投：分析方法与理论基础》（以下简称“专题一”）中，我们介绍了定投的基本分析方法，基于均值不等式关系解释了定投降低平均投资成本的原理，并发现在假定平均净值一致的情况下，波动率越高的基金，定投收益率越高的规律。

在 2016 年 08 月 22 日发布的专题二《基金定投：投资标的与时机的选择方法》（以下简称“专题二”）中，我们从金融工程学一个基本的假设：“资产价格服从几何布朗运动”出发，推导了定投期望收益率表达式，基于此分析了资产波动、定投频率、定投长度等对定投收益的影响，以此得出了简便有效的定投标的与时机选择的理论方法。

在本期专题报告中，我们在专题二连续时间模型的基础上，研究发现了基金定投的净值与标的资产的执行价为零的标准算数亚式看涨期权的价值具有相同分布的性质，推导了定投的夏普比率解析表达式，并与基准投资（期初一次性构建的标的风险资产与无风险资产组合）对比检验其马科维茨有效性：当标的资产价格波动率或漂移率足够大时，从马科维茨有效性的角度，定投表现恒优于基准投资。

本文的发现不但能够加深我们对定投本质、科学性的认识，相关成果也能应用于智能定投与智能投顾策略的构建、策略效果的评价，以及生命周期基金等 FOF 类型基金产品的设计等。

定投的连续时间模型回顾

资产价格服从几何布朗运动的假设

在专题报告二中，我们给出了定投净值的连续时间模型。首先假设资产每日价格满足几何布朗运动，则资产价格变化是一个连续时间过程。假设资产在 t 时刻的价格为 S_t ，那么我们可以对资产的价格进行建模：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \Leftrightarrow S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t} \quad \text{等式(1)}$$

其中， μ 是资产价格漂移率， σ 是资产价格波动率， W_t 代表一维标准布朗运动。显然，根据等式（1）， T 时刻的资产价格期望是：

$$E[S_T] = S_0 e^{\mu T} \quad \text{等式(2)}$$

同时，资产的对数收益服从正态分布：

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma\sqrt{t}\right) \quad \text{等式(3)}$$

连续时间模型下定投净值的表达式

假设定投的总资金为 M ，平均分为 N 个部分，在 T 年时间内，定期定额的投资到风险资产中。在等待投资过程中，假设已定投之外的剩余资金能获得（连续复利）利率为 g 的收益。由于剩余资金的流动性要求较高，此处的利率 g 往往会低于市场无风险利率 r 。当所有资金全部完成投资后，在 T 时刻，定投的净值为：

$$DC_T = S_T \sum_{i=0}^{N-1} \frac{M e^{\frac{iT}{N}g}}{S\left(\frac{iT}{N}\right)} \quad \text{等式(4)}$$

等式（4）中，分子代表第 $i+1$ 次投资的金额，分母表示了此时刻 $\left(\frac{iT}{N}\right)$ 的资产价格。将每次投资获得的基金份额数累加后乘以 T 时刻的资产价格，就得到了定投的资产净值。

更进一步的，我们也可以用下式计算在任意 $t < T$ 时刻定投的净值：

$$DC_t = S_t \sum_{i=0}^m \frac{M e^{\frac{itg}{N}}}{S_{\left(\frac{it}{N}\right)}} + \left(1 - \frac{m+1}{N}\right) M e^{gt} \cdot \delta, m = \left\lfloor \frac{tN}{T} \right\rfloor \leq N-1, \delta \in \{0,1\} \quad \text{等式 (5)}$$

等式 (5) 中，加号左边表示的是已投资的资产净值，加号右边表示的是等待投资的资金净值。式中含有一个虚拟变量 δ ，取值为 0 或者 1，加入该变量是为了将本文模型 ($\delta = 1$ ，即考虑剩余未投资资金的时间价值，令其能够获取利率为 g 的收益) 与前期专题二报告中使用的等额现金流模型 ($\delta = 0$ ，即不考虑剩余未投资资金的时间价值，等待时无收益) 统一在一个框架中，利于研究成果的拓展。

若需切换为等额现金流模型，只需将变量 δ 设置为 0。相应的，投入成本调整为已投入风险资产的资金，而非总资金 M 。

在后文中，如无特殊说明，在计算 T 时刻定投净值时，我们将 g 置为 0 等效于 $\delta = 0$ 的情形，即采用一般的等额现金流模型。

连续时间模型下定投净值的积分表达式

在专题报告二中，我们发现在 T 时间内定投次数 N 超过一个不大的数值后，定投次数的进一步增加对定投收益的变化影响不大，且相关参数对投资收益的影响方向不发生改变。为此，我们令定投次数 N 趋于无穷大，得到定投净值的积分表达式。在极限状态下，不但可以求得更加简洁、方便的应用定投收益解析解，且能够发现在离散模型中无法直接观测的定投规律。以下是定投净值的积分表达式：

$$DC_T = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(S_T \sum_{i=0}^{N-1} \frac{M e^{\frac{itg}{N}}}{S_{\left(\frac{it}{N}\right)}} \right) = \frac{MS_T}{T} \int_0^T \frac{e^{gt}}{S_t} dt \quad \text{等式 (6)}$$

在下文中，为了方便讨论，我们令 M 为 1，如此， DC_T 不仅可以代表资产净值，还可以代表定投收益（等式 (6) 除以 M 可得到相同表达式）。

定投与基准投资的马科维茨有效性对比分析

本部分我们首先对定投净值的积分表达式做进一步的剖析,并发现其具有亚式期权等效性的特点;其次,我们写出定投与基准投资的净值期望、标准差、夏普比率的表达式,对比两者的马科维茨有效性;再次,我们对决定定投与基准投资马科维茨有效性的数值标准 $M_2 - M_1$ 展开讨论;最后,我们在假设已知资产期末价格的条件下,应用布朗桥的方法设计模型,进一步拓展本文研究成果。

亚式期权等效性

根据等式 (1) 和等式 (6), 定投的净值可以展开为

$$DC_T = \frac{e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T}}{T} \int_0^T e^{gt - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \sigma W_t} dt \quad \text{等式 (7)}$$

假设 $\tau = T - t$, 通过变量代换可以得到

$$DC_T = \frac{e^{gT}}{T} \int_0^T e^{\left(\mu - g - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma(W_T - W_{T-\tau})} d\tau \quad \text{等式 (8)}$$

等式 (8) 中, $W_T - W_{T-\tau}$ 本身也是标准布朗运动。令 $\widehat{W}_\tau = W_T - W_{T-\tau}$, 不难得到 $\widehat{W}_0 = 0$ 以及 $\widehat{W}_T = W_T$ 。由于 \widehat{W}_τ 是一个时间反演的布朗运动, 可通过将一般的布朗运动进行时间镜像来构建。等式 (8) 进一步化简得:

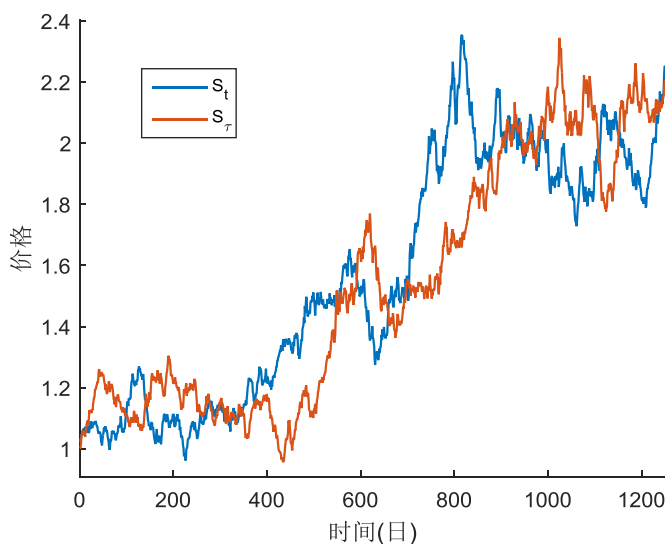
$$DC_T = \frac{e^{gT}}{T} \int_0^T e^{\left(\mu - g - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma \widehat{W}_\tau} d\tau = e^{gT} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\widehat{S}_\tau}{e^{g\tau}} d\tau \right] \quad \text{等式 (9)}$$

上式中 \widehat{S}_τ 代表时间反演的布朗运动所对应的资产价格, 其表达式为:

$$\widehat{S}_\tau = e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma \widehat{W}_\tau} \quad \text{等式 (10)}$$

通过与等式 (1) 相比较, \widehat{S}_τ 和 S_t 仅在系数 (常数) 和布朗运动项上存在差别。下图为给定参数 $\mu = 10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$ (5 年, 假设每年有 250 个交易日, 下同), 根据等式 (1) 和等式 (10) (令 $S_0 = 1$), 随机生成的 \widehat{S}_τ (图中表示为 S_τ) 和 S_t 价格曲线。

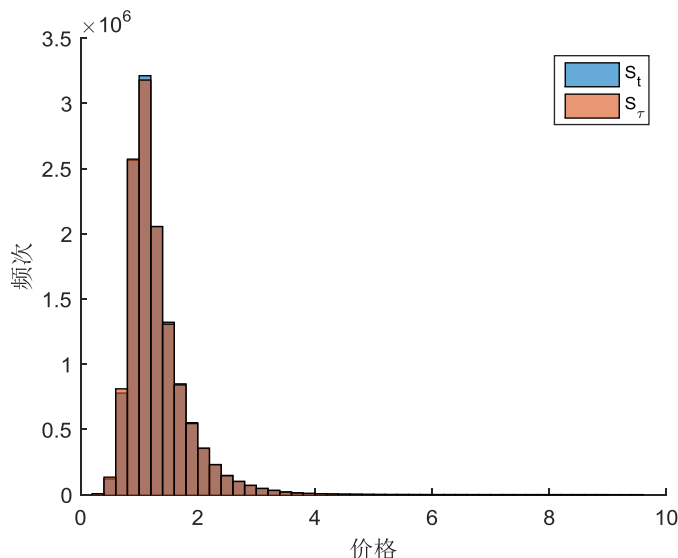
图1: 随机生成的 \widehat{S}_τ 和 S_t 价格曲线 ($\mu = 10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$)



资料来源: 华泰证券研究所

虽然 \hat{S}_t 和 S_t 表达式中含有的不是同一个布朗运动项，但他们都是标准布朗运动，被同样的概率分布函数所描述，因此 \hat{S}_t 与 S_t 的统计学性质一致。给定参数 $\mu = 10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$ ，我们进行了 10,000 次随机试验分别生成 10,000 条 \hat{S}_t 和 S_t 的价格路径，统计二者在 5 年内的价格分布如下图所示，可见两分布几乎完全重叠。

图2: \hat{S}_t 和 S_t 的价格分布 ($\mu = 10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$)



资料来源：华泰证券研究所

基于随机生成的 \hat{S}_t 和 S_t ，我们还计算了它们的关键性统计指标如下。其中，“差别”定义为 $[f(\hat{S}_t) - f(S_t)]/f(S_t)$ 。这些指标进一步确认了二者分布的全同性。

表格1: \hat{S}_t 和 S_t 的关键性统计指标 ($\mu = 10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$)

	均值	中位数	标准差	偏度	峰度
S_t	1.297	1.167	0.496	2.038	10.825
\hat{S}_t	1.294	1.166	0.498	2.041	10.843
差别(%)	-0.179	-0.113	0.547	0.130	0.159

资料来源：华泰证券研究所

为了便于理解，我们还可以将等式 (9) 解释为定投区间 T 内， \hat{S}_t 所代表的资产价格曲线折现平均值 $\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hat{S}_\tau}{e^{g\tau}} d\tau$ ，乘以单位资金在 T 时刻的连续复利价值 (连续复利乘数 e^{gT})。更进一步的，当令 $g = 0$ 时，等式 (9) 可以简化为

$$DC_T = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{S}_\tau d\tau \quad \text{等式 (11)}$$

此时，定投净值形如一个执行价为零的标准算数亚式看涨期权¹ (standard zero-strike arithmetic Asian call option) 的到期收益 (或净值)。亚式期权净值的计算频率也是时间离散的，然而按日频、周频，甚至月频采样计算的亚式期权净值相差较小²。因此，我们也将

¹ 亚式期权又称为平均价格期权，是股票期权的衍生，是在总结真实期权、虚拟期权和优先认股权等期权实施的经验教训基础上推出的。亚式期权是当今金融衍生品市场上交易最为活跃的奇异期权之一，与标准期权的区别在于：在到期日确定期权收益时，不是采用标的资产当时的市场价格，而是用期权合同期内某段时间标的资产价格的平均值，这段时间被称为平均期。在对价格进行平均时，采用算术平均或几何平均。

本文所述的执行价为零的标准算数亚式看涨期权 (standard zero-strike arithmetic Asian call option) 属于亚式平均价格期权，其收益为零执行价格与标的资产在有效期内的平均价格之差。

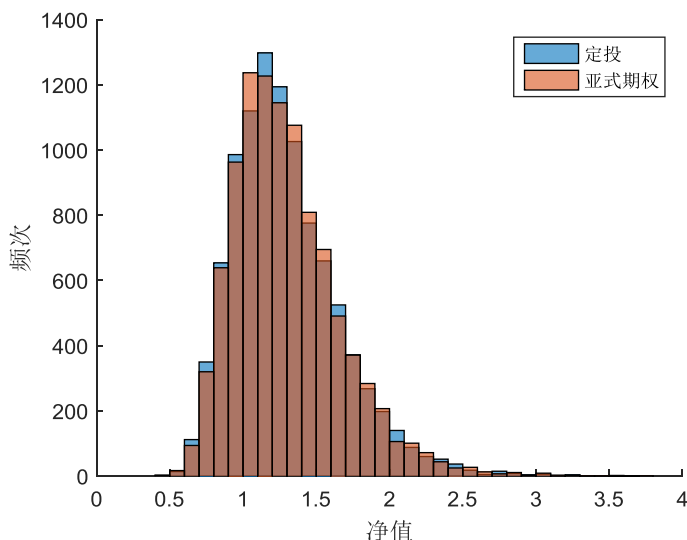
² T. Vorst. "Averaging Options". The Handbook of Exotic Options, pages 175-199. IRWIN, 1996.

原本离散的亚式期权在连续时间的框架下进行研究。

需要说明的是，我们使用 \hat{S}_t 构造亚式期权，而不是实际的资产价格 S_t 。对于同一资产标的，基于 S_t 的亚式期权净值和定投净值往往是不一样的。然而，由于 \hat{S}_t 和 S_t 同分布，即基于 \hat{S}_t 的亚式期权净值和基于 S_t 的亚式期权净值同分布，因而可推导出：基于 S_t 的亚式期权净值和定投净值具有相同的统计分布：该亚式期权净值落在某一价格区间的概率和定投净值落在该区间的概率完全一致。

以下采用模拟试验进一步论证。给定参数 $\mu = 10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$ ，随机生成 10,000 条资产价格曲线，计算得到基于 S_t 的执行价为零的标准算数亚式看涨期权的净值和定投净值（ $g = 0$ ）的分布。可以明显看出，基于 S_t 的亚式期权净值和定投净值同分布。

图3： 亚式期权净值和定投净值的分布（ $\mu = 10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$ ）



资料来源：华泰证券研究所

类似的，我们也计算了基于同一资产标的价格的亚式期权净值和定投净值的关键性统计指标如下：

表格2： 亚式期权净值和定投净值的关键性统计指标（ $\mu = 10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$ ）

	均值	中位数	标准差	偏度	峰度
定投净值	1.294	1.236	0.366	1.043	5.003
亚洲期权净值	1.297	1.243	0.362	1.033	4.912
差别(%)	0.211	0.537	-0.972	-1.042	-1.811

资料来源：华泰证券研究所

当 $g > 0$ 的时候，定投净值对应的是 e^{gT} 乘以执行价为零的非标准算数亚式看涨期权（non-standard zero-strike arithmetic Asian call option）的净值。

以上，我们通过定量计算分析发现，定投净值与执行价为零的标准算数亚式看涨期权的净值同分布。这意味着，定投可以获得与亚式期权相同的投资效果，这一研究发现加深了我们对定投策略本质的认知，也为我们优化定投策略提供理论依据。

与基准投资的对比分析

本节基于马科维茨的有效性理论，采用基准投资（一次性构建的标的风险资产与无风险资产的组合）与定投进行比较。首先，我们使二者具有相同的净值期望，比较它们净值标准差的

大小；其次，我们使二者具有相同的净值标准差，比较它们的净值期望的大小；最后，我们用净值的夏普比率（Sharpe Ratio）来对本部分的比较结果进行总结。

定投的净值期望、标准差和夏普比率

根据等式（11）以及亚式期权定价理论，定投的净值期望为：

$$E[DC_T] = E\left[\frac{e^{gT}}{T} \int_0^T e^{(\mu-g-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W_\tau} d\tau\right] = \frac{e^{gT}}{T} \left(\frac{e^{(\mu-g)T}-1}{\mu-g}\right) \quad \text{等式 (12)}$$

净值平方的期望为：

$$E[DC_T^2] = \frac{2e^{2gT}}{T^2} \left[\frac{e^{(2(\mu-g)+\sigma^2)T}}{(u-g+\sigma^2)(2u-2g+\sigma^2)} + \frac{1}{\mu-g} \left(\frac{1}{2(\mu-g)+\sigma^2} - \frac{e^{(\mu-g)T}}{\mu-g+\sigma^2} \right) \right] \quad \text{等式 (13)}$$

定投的净值标准差为：

$$STD[DC_T] = \sqrt{E[DC_T^2] - E^2[DC_T]} \quad \text{等式 (14)}$$

进而我们容易求得定投的净值夏普比率为：

$$\text{Sharpe}(DC_T) = \frac{E[DC_T] - e^{rT}}{STD[DC_T]} \quad \text{等式 (15)}$$

夏普比率对收益进行了风险调整，是一个同时考虑了收益与风险的综合指标，夏普比率越大，定投净值越高、风险越小。

基准投资的净值期望、标准差和夏普比率

在一次性投资基准中，我们假设将 α ($0 < \alpha \leq 1$) 的资金投资于标的风险资产， $1 - \alpha$ 的资金投资于无风险资产，那么基准投资的净值期望为：

$$E[BH_T^\alpha] = \alpha e^{\mu T} + (1 - \alpha)e^{rT} \quad \text{等式 (16)}$$

净值标准差为：

$$STD[BH_T^\alpha] = \alpha e^{\mu T} \sqrt{e^{\sigma^2 T} - 1} \quad \text{等式 (17)}$$

进而我们求得基准投资的净值夏普比率为：

$$\text{Sharpe}(BH_T^\alpha) = \frac{E[BH_T^\alpha] - e^{rT}}{STD[BH_T^\alpha]} = \frac{1 - e^{-(\mu-r)T}}{\sqrt{e^{\sigma^2 T} - 1}} \quad \text{等式 (18)}$$

值得一提的是，从等式（18）可以发现，夏普比率和 α ($\alpha \neq 0$) 的大小无关，即与资金在风险资产和无风险资产之间的配置比例无关。这印证了投资学中的一个受到广泛认可的观点——夏普比率独立于投资者在风险资产上的激进程度。

相同的净值期望下比较净值标准差

根据净值期望相同这一条件，基准投资中比例 α 需要相应调整。假设此时 $\alpha = M_1$ ，令

$$E[DC_T] = E[BH_T^{M_1}] \quad \text{等式 (19)}$$

不难求得：

$$M_1 = \frac{e^{\mu T} - e^{gT}}{(e^{\mu T} - e^{rT})(\mu - g)T} - \frac{e^{rT}}{e^{\mu T} - e^{rT}} \quad \text{等式 (20)}$$

特别的, 当 $g = r$ 时:

$$M_1 = \frac{1}{(\mu - r)T} - \frac{1}{e^{(\mu - r)T} - 1} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu - r)T \quad \text{等式 (21)}$$

上述的近似结果通过泰勒展开至第二项得到。在 $g = r$ 的条件下, 比较基准投资和定投的净值标准差:

$$\text{STD ratio} := \frac{\text{STD}[DC_T]}{\text{STD}[BH_T^{M_1}]} = \frac{M_2}{M_1} \quad \text{等式 (22)}$$

其中:

$$M_2 = \sqrt{\frac{E[DC_T^2] - E^2[DC_T]}{e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1)}} \quad \text{等式 (23)}$$

在下一节, 我们将展开说明: 当资产价格波动率或漂移率较大时 (我们称之为“有利情形”) $M_1 > M_2$, 在此条件下, 相同的净值期望, 定投的净值标准差更小, 其所对应的风险也 smaller。反之, $M_1 < M_2$ 时 (我们称之为“不利情形”), 相同的净值期望, 定投的净值标准差更大, 其所对应的风险也更大。

相同的净值标准差下比较净值期望

根据净值标准差相同这一条件, 基准投资中比例 α 需要相应调整。同样的, 在 $g = r$ 的条件下, 令:

$$\text{STD}[DC_T] = \text{STD}[BH_T^\alpha] \quad \text{等式 (24)}$$

可以求得 $\alpha = M_2$ 。以下对比基准投资和定投的净值期望

$$\text{Mean ratio} := \frac{E[BH_T^{M_2}]}{E[DC_T]} = \frac{M_2 e^{\mu T} + (1 - M_2) e^{gT}}{\frac{e^{gT}(e^{(\mu - g)T} - 1)}{T(\mu - g)}} = 1 + (M_2 - M_1)T(\mu - g) \quad \text{等式 (25)}$$

如等式 (25), 当 $\mu > g$ 时, 在 $M_1 > M_2$ 的有利情形下, 该比值小于 1, 即相同的净值标准差, 定投的净值期望更大。在 $M_1 < M_2$ 的不利情形下, 该比值大于 1, 即相同的净值标准差, 定投的净值期望更小。

当 $\mu < g$ 时, 标的风险资产的期望收益率低于无风险收益, 显而易见这种情况下, 配置风险资产是不符合马科维茨有效性的。然而, 由于标的资产的 μ 难以预测, 在此我们依然对可能出现的这种情形进行讨论: 在 $M_1 > M_2$ 的有利情形下, 该比值大于 1, 即相同的净值标准差, 定投的净值期望更小; 在 $M_1 < M_2$ 的不利情形下, 该比值小于 1, 即相同的净值标准差, 定投的净值期望更小。这一结果与 $\mu > g$ 的理性情形相比正好相反。

综上, 我们应当避免定投 $\mu < g$ 的风险资产, 首先, 这种投资选择明显不符合马科维茨有效性, 其次, 它与我们定投择基所依据的基本规律相悖, 不利于采用统一标准判断。

比较净值夏普比率

在比较基准投资和定投的净值的夏普比率之前，我们根据等式（19）与等式（24），对定投的净值夏普比率作如下变换

$$\text{Sharpe}(DC_T) = \frac{E[DC_T] - e^{rT}}{\text{STD}[DC_T]} = \frac{E[BH_T^{M_1}] - e^{rT}}{\text{STD}[BH_T^{M_2}]} \quad \text{等式 (26)}$$

接下来我们定义定投相对于基准投资的夏普比率之差的百分比为：

$$\frac{\text{Sharpe}(DC_T) - \text{Sharpe}(BH_T^{\alpha})}{\text{Sharpe}(BH_T^{\alpha})} = \frac{\text{STD}(BH_T^{\alpha})}{\text{STD}(BH_T^{M_2})} \frac{E[BH_T^{M_1}] - e^{rT}}{E[BH_T^{\alpha}] - e^{rT}} - 1 = \frac{\alpha}{M_2} \frac{M_1(e^{\mu T} - e^{rT})}{\alpha(e^{\mu T} - e^{rT})} - 1 = \frac{M_1 - M_2}{M_2} \quad \text{等式 (27)}$$

同样的，在 $M_1 > M_2$ 的有利情形下，该比值大于 0，说明定投的夏普比率更高； $M_1 < M_2$ 的不利情形下，该比值小于 0，说明定投的夏普比率更低。

在专题一中，我们分析了不同市场条件下，定投降低择时风险的原理：无论是下跌市，还是上涨市场，定投在前期都能够有效的“跟上”市场波动的方向，而在震荡市场，则能够降低平均投资成本，为此，直观上理解，定投能够降低投资的波动率。在专题二中，我们进一步发现，定投多期后会出现平均投资成本“钝化”的现象：平均投资成本变动对于市场波动敏感性大幅降低。专题二还通过实验与实证的方法得出以下结论：（1）定投 20 期后，由于定投平均成本“钝化”，超过 20 期的定投波动率与资产本身波动率趋于一致；定投期数在 20 期以内时，定投能够降低投资波动率。（2）定投波动率的变化规律仅与定投次数、标的资产波动率相关，与不同的资产价格漂移率 μ 无关。

本节我们通过严格的数学推导，证明了在连续时间模型中，在 $M_1 > M_2$ 的有利情形下，即定投标的的价格波动率或漂移率足够大时，从马科维茨有效性的角度，定投是更优的选择。这一结论与专题二推导的定投择基方法：“ μ 法则”³一致。证明漂移率 μ 大的基金不但可以获得更高的预期定投收益，还符合马科维茨有效性的标准。这一发现进一步的深化了我们对定投择基标准的认识。

有利情形和不利情形

定义与公式推导

本节我们给出有利情形 $M_1 > M_2$ 与不利情形 $M_1 < M_2$ 的推导过程。之所以采用“有利”与“不利”的名称，原因在于在这一命名方法与专题二我们发现的适合定投的有利条件相吻合，这样的命名方法利于读者理解我们系列报告的统一逻辑。

假定 $g = r$ 的条件下，我们定量的给出 M_1 和 M_2 的表达式：

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{(\mu - g)T} - \frac{1}{e^{(\mu - g)T} - 1} \\ M_2 = \sqrt{\frac{E[DC_T^2] - E^2[DC_T]}{e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1)}} = \sqrt{\frac{K_1}{K_2(e^{\sigma^2 T} - 1)}} \end{cases} \quad \text{等式 (28)}$$

其中：

$$K_1 = (2e^{\sigma^2 T} - 2)g^2 + (e^{2(g - \mu)T} \sigma^2 - 4\sigma^2 e^{(g - \mu)T} + 3\sigma^2 - 4\mu e^{\sigma^2 T} + 4\mu)g +$$

³ 华泰基金定投专题二《基金定投：投资标的与时机的选择方法》从定投收益解析表达式 $\frac{e^{\mu T} - 1}{\mu T}$ 出发，推导出“ μ 法则”可作为基金定投收益的评价标准，同时也可以作为定投标的选择的参考。

$$(2e^{\sigma^2 T} - 2)\mu^2 + (4e^{(g-\mu)T} - 3 - e^{2(g-\mu)T})\sigma^2\mu + (2e^{(g-\mu)T} - e^{2(g-\mu)T} - 1)\sigma^4 \quad \text{等式 (29)}$$

$$K_2 = T^2(g - \mu)^2(g - \mu - \sigma^2)(2g - 2\mu - \sigma^2) \quad \text{等式 (30)}$$

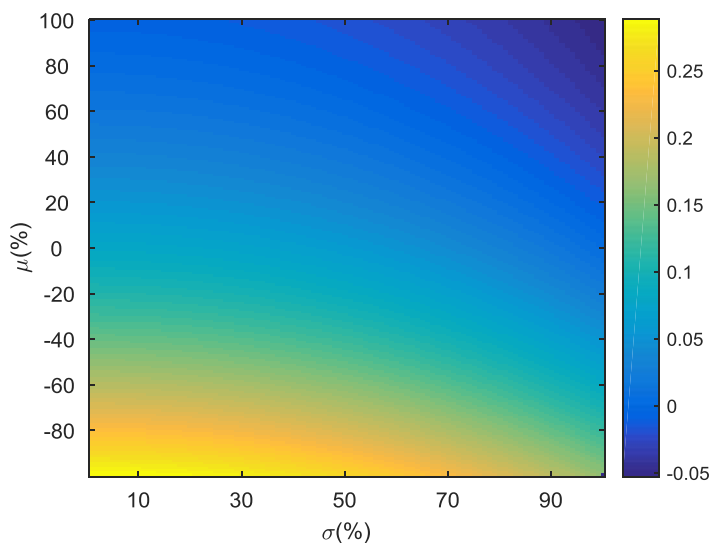
特别的, 当 $g = 0$ 且 $T = 1$ 时:

$$M_2 = \sqrt{\frac{(2e^{\sigma^2} - 2)\mu^2 + (4e^{-\mu} - 3 - e^{-2\mu})\sigma^2\mu + (2e^{-\mu} - e^{-2\mu} - 1)\sigma^4}{\mu^2(\mu + \sigma^2)(2\mu + \sigma^2)(e^{\sigma^2} - 1)}} \quad \text{等式 (31)}$$

$M_2 - M_1$ 数值规律的实验测算 ($g = 0$ 、 $T = 1$)

下面我们给出了当 $g = 0$ 、 $T = 1$ 时, $M_2 - M_1$ 在不同 μ 和 σ 下的取值。需要说明的是, 由于 $M_2 - M_1$ 在某些极少数的 μ 和 σ 取值组合下会出现未定义值 (分母为零) 或奇异值 (分母极端小), 因而我们对这些未定义值或奇异值进行了平滑处理, 即取周围正常数值的平均值代替。这样的处理不仅有助于我们从整体把握数值变化规律, 而且也更具有实际意义—资产价格的 μ 和 σ 处于不断的变化中, 保持在单一数值上的概率几乎为零, 因而我们更应关注附近区域取值的平均情况。

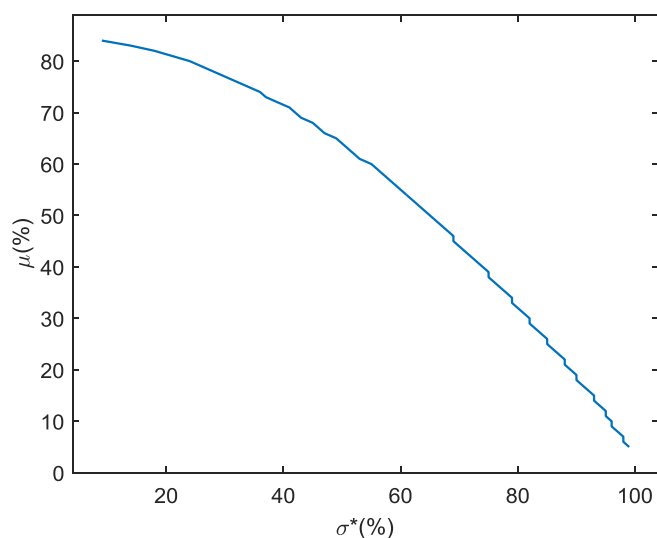
图4: $M_2 - M_1$ 的取值 ($g = 0$ 、 $T = 1$)



资料来源: 华泰证券研究所

我们发现当 $\sigma > \sigma^* = f(\mu)$ 时, 均有 $M_2 - M_1 < 0$ 即 $M_1 > M_2$, 此时对应“有利情形”即资产价格波动率较大。当 $\sigma < \sigma^*$ 时, 均有 $M_2 - M_1 > 0$ 即 $M_1 < M_2$, 此时对应“不利情形”, 即资产价格波动率小于一定的范围。

以下, 我们给出了当 $g = 0$ 、 $T = 1$ 时 σ^* 的数值曲线。

图5: σ^* 的取值 ($g = 0$ 、 $T = 1$)

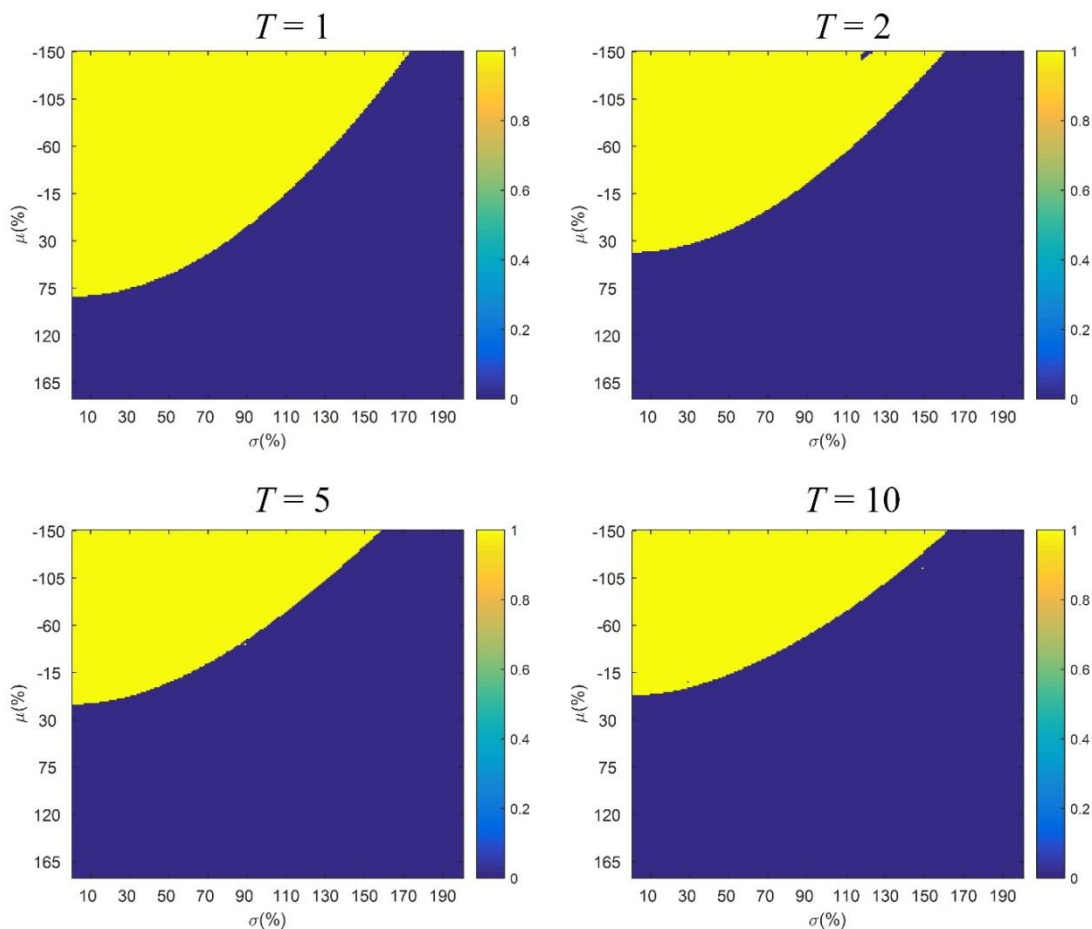
资料来源：华泰证券研究所

由图 5 可见， $M_2 - M_1$ 与资产价格漂移率 μ 同样呈类似反相关关系，即漂移率越大，越容易出现有利情形，这一结论与前文的理论推导，以及与专题二推导的定投择基“ μ 法则”具有一致性。

$M_2 - M_1$ 数值规律的实验测算 ($g = 0$ 、 T 变动)

以上结果是基于 $g = 0$ 、 $T = 1$ 的假设得到的。放开此限制时，可以观察到更加丰富的结果。

首先，我们给定 $g = 0$ ，计算不同 T 下 $M_2 - M_1$ 的取值。为了方便展示 M_2 和 M_1 的大小关系，我们对其进行了二值化处理，即将 $M_2 - M_1 \leq 0$ 的部分置为 0（定投优势区域，图中设为蓝色），将 $M_2 - M_1 > 0$ 的部分置为 1（基准投资优势区域，图中设为黄色），结果汇总如下。

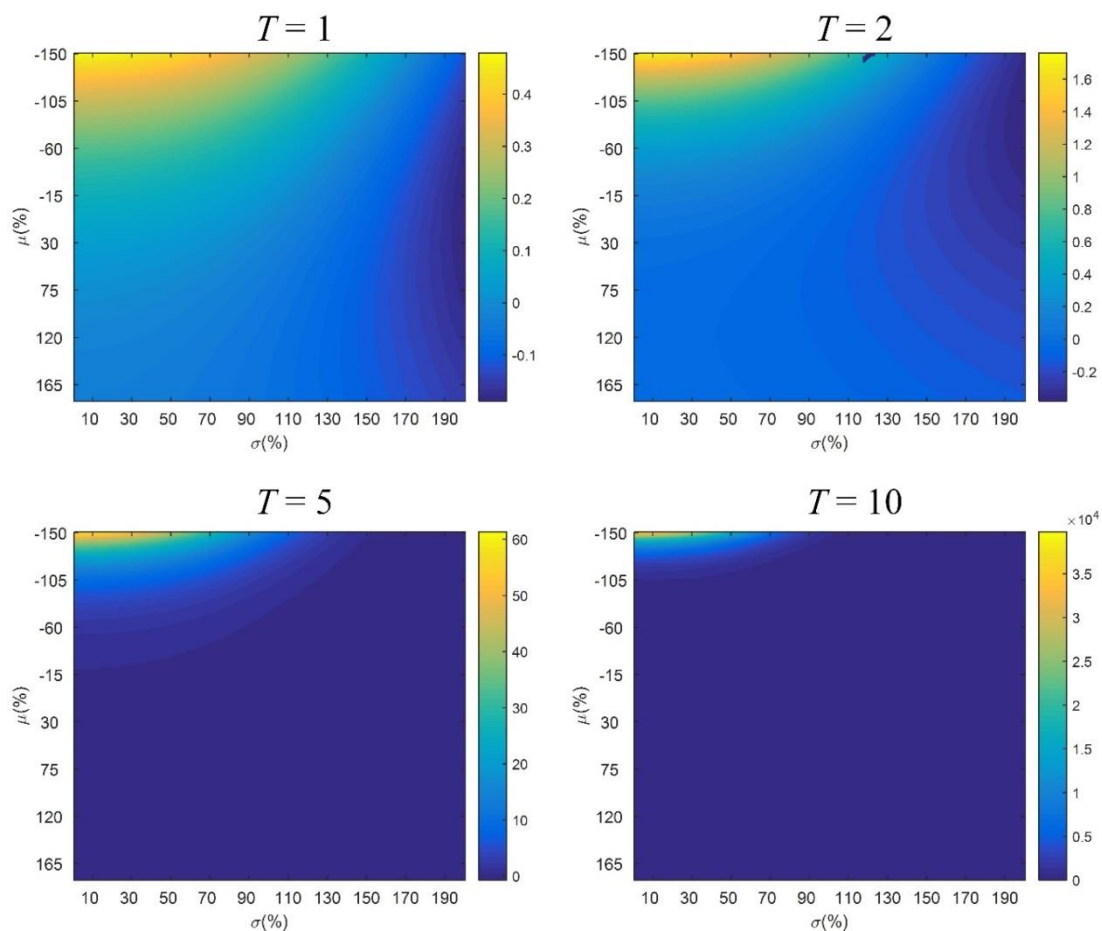
图6: $M_2 - M_1$ 在不同 T 下的二值化取值 ($g = 0$)

资料来源: 华泰证券研究所

显而易见的, 随着定投时间 T 的不断增大, 有利情形区域面积越来越大, 定投优势越来越明显。相对于基准投资, 定投也将越频繁的显现出马科维茨有效性。似乎我们只要不断的增大投资时间, 总会使得定投优于基准投资。

然而, 事实情况却是, 随着 T 的不断增大, $M_2 - M_1$ 大于0的部分数值增长显著, 而 $M_2 - M_1$ 小于0的部分数值变化不明显。因而, 基准投资优势区域虽然面积减小, 但是数值上大幅增加; 而定投优势区域虽然面积有所增大, 但是数值上变化有限。简言之, 随着 T 的不断增大, 适合定投的机会越来越多, 然而在适合基准投资的区域其优势更加明显。

为了表征这一特点, 我们下面直接画出未二值化的 $M_2 - M_1$ 。

图7: $M_2 - M_1$ 在不同 T 下的取值 ($g = 0$)

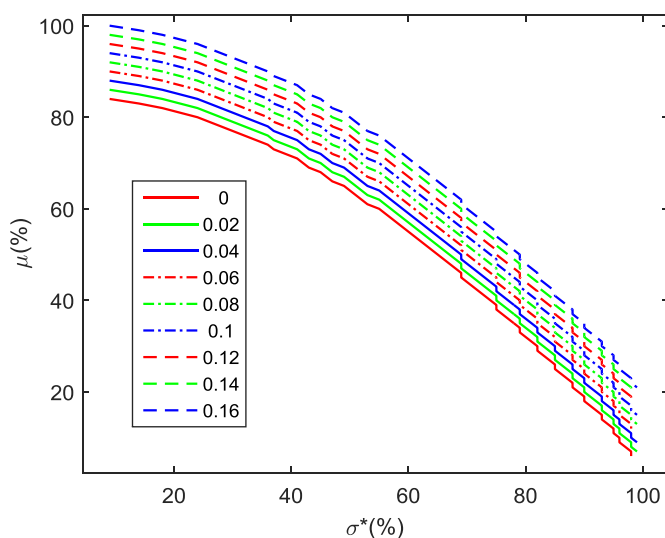
资料来源：华泰证券研究所

可以看出，随着 T 的不断增大，在 $\mu < 0$ 的区域， $M_2 - M_1$ 最大值增长迅猛（图中右侧刻度随着 T 的增加显著增长），而 $M_2 - M_1$ 的最小值（负数）仍然徘徊在零点附近。结合前文“相同的净值标准差下比较净值期望”的推导中，我们发现 $\mu < g$ 时和 $\mu > g$ 两种不同的情境下，基于 M_1 和 M_2 的大小关系来判断定投的马科维茨有效性结论正好相反，这提醒我们在分析中应当将 μ 两种不同的取值状态分别进行分析。 g 在现实中往往是一个较小的正数，为了方便分析，我们令其为0，即我们将 $\mu < 0$ 时和 $\mu > 0$ 两种情况分别讨论。

由图7，我们发现随着 T 的增加， $\mu < 0$ 的区域， $M_2 - M_1$ 数值增长迅猛，表明从长期投资的角度看，当遭遇 μ 值为负的不利投资环境，定投能够更加显著的改善投资的马科维茨有效性。而在 $\mu > 0$ 的区域， $M_2 - M_1$ 数值变化不大，定投与基准投资的马科维茨有效性的差异不明显，这一发现与专题二中“定投收益与定投时间长度的关系”的结论：存在定投时间越长，年化收益越高的现象，然而收益增幅并不明显，具有逻辑一致性。

$M_2 - M_1$ 数值规律的实验测算 ($T = 1$ 、 g 变动)

其次，我们限制 $T = 1$ ，通过实验模拟发现 σ^* 对参数 g 的变化并不敏感。

图8: 当 $T = 1$ 时, σ^* 在不同 g 下的取值

资料来源: 华泰证券研究所

随着 g 的增大, σ^* 小幅增大, 反而使得定投的优势小幅下降。这个结论并不直观, 究其原因, 在于 g 的增大会同时降低定投和基准投资的夏普比率, 但定投的夏普比率下降更多。

综上所述, 当标的资产价格波动率或漂移率足够大时, 将出现 $M_2 > M_1$ 的有利情形, 从马科维茨有效性的角度, 定投表现恒优于基准投资。

假设已知资产期末价格的条件下对比

前文我们已经说明了有利情形和不利情形下定投的马科维茨有效性特征。本节我们假设标的资产期末价格已知 (在之前部分期末价格是随机的、未知的), 以此为基础来比较定投和基准投资的马科维茨有效性。

不同于之前“资产价格符合几何布朗运动”的假设, 在这里我们假设“资产价格符合布朗桥⁴”, 即开始时刻与最终时刻的资产价格是确定的, 然而中间的变化过程未知。这种假设符合投资人对投资标的未来价格点位具有较为明确预期, 然而价格运动路径未知的情况。此时:

$$\ln\left(\frac{S_t^*}{S_0}\right) = \mu t + \sigma\left(W_t - \frac{t}{T}W_T\right), \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{等式 (32)}$$

因此 S_t^* 可以表示为:

$$S_t^* = S_0 e^{\mu t + \sigma\left(W_t - \frac{t}{T}W_T\right)} = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t^*}, \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{等式 (33)}$$

其中, W_t^* 描述了符合布朗桥的资产价格变化过程。资产期末价格为:

$$S_T^* = S_0 e^{\mu T} \quad \text{等式 (34)}$$

实验模拟布朗桥的价格路径

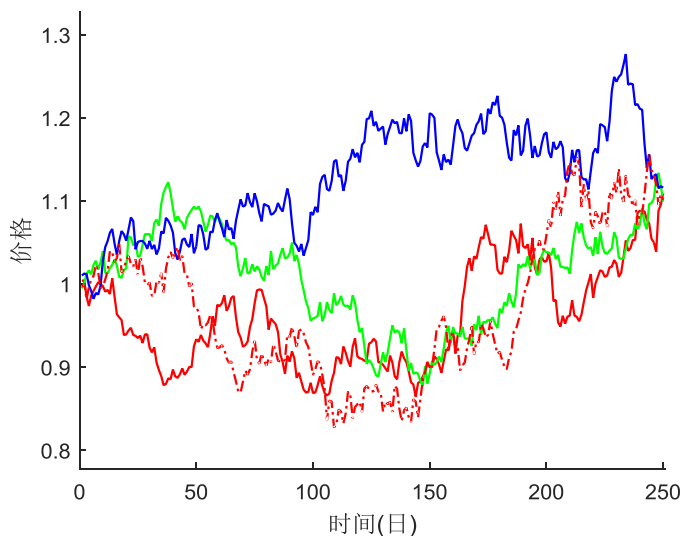
以下我们通过两组模拟实验绘制基于布朗桥的资产价格路径, 以便获得更加直观的认识。

我们依然假设 $g = 0$, 则下图给出 $\mu = 10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$ 时, 根据等式 (33) (设 $S_0 = 1$),

⁴ 布朗桥 (Brownian bridge) 是连续时间的随机过程 $W(t)$, 在 $W(0) = W(T) = 0$ 的条件下, 它的概率分布服从维纳过程的条件概率分布。

随机生成的 4 条 S_t^* 价格曲线。

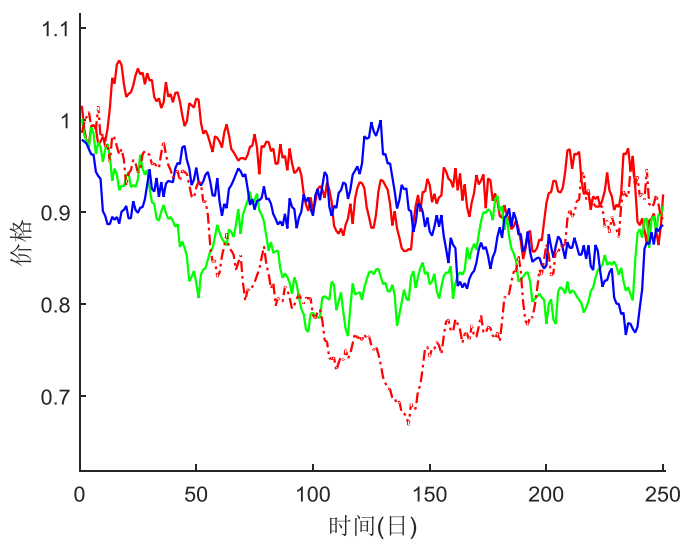
图9： 随机生成的 4 条 S_t^* 价格曲线 ($\mu = 10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$)



资料来源：华泰证券研究所

下图给出 $\mu = -10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$ 时随机生成的 4 条 S_t^* 价格曲线。

图10： 随机生成的 4 条 S_t^* 价格曲线 ($\mu = -10\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 、 $T = 5$)



资料来源：华泰证券研究所

通过以上两组模拟实验，显而易见的，在布朗桥的假设下资产价格路径的起止点相同，而价格路径虽然都满足布朗运动，却有着明显的差别，这启发我们根据资产价格路径的特征在时间轴上选择不同的投资策略，将带来不同的投资效果。

布朗桥假设下定投的净值期望

更进一步的，与前文思路类似，我们将推导布朗桥假设下定投的净值期望表达式。由等式(6)，定投的净值表示为：

$$DC_T^* = \frac{S_T^*}{T} \int_0^T \frac{e^{gt}}{S_t^*} dt = \frac{S_0 e^{\mu T}}{T} \int_0^T e^{(g-\mu)t - \sigma \left(W_t - \frac{t}{T} W_T \right)} dt \quad \text{等式 (35)}$$

于是，定投净值的期望为：

$$E[DC_T^*] = \frac{S_0 e^{\mu T}}{T} E \left[\int_0^T e^{(g-\mu)t - \sigma \left(W_t - \frac{t}{T} W_T \right)} dt \right] = \frac{S_0 e^{\mu T}}{T} \int_0^T e^{(g-\mu)t} E \left[e^{-\sigma \left(W_t - \frac{t}{T} W_T \right)} \right] dt \quad \text{等式 (36)}$$

为了化简等式 (36)，我们先求解 $W_t - \frac{t}{T} W_T$ 的均值和方差。均值为：

$$E \left[W_t - \frac{t}{T} W_T \right] = 0 \quad \text{等式 (37)}$$

由于 $W_t - \frac{t}{T} W_T = \left(1 - \frac{t}{T}\right) W_t - \frac{t}{T} (W_T - W_t)$ ，且前后两部分相互独立，所以 $W_t - \frac{t}{T} W_T$ 的方差为：

$$\text{Var} \left[W_t - \frac{t}{T} W_T \right] = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 t + \left(-\frac{t}{T}\right)^2 (T - t) = t - \frac{t^2}{T} \quad \text{等式 (38)}$$

所以我们有：

$$E \left[e^{-\sigma \left(W_t - \frac{t}{T} W_T \right)} \right] = e^{\frac{\sigma^2}{2} \left(t - \frac{t^2}{T} \right)} \quad \text{等式 (39)}$$

进而有：

$$E[DC_T^*] = \frac{S_0 e^{\mu T}}{T} \int_0^T e^{(g-\mu)t + \frac{\sigma^2}{2} \left(t - \frac{t^2}{T} \right)} dt \quad \text{等式 (40)}$$

经过一系列繁琐但不复杂的计算，我们得到

$$E[DC_T^*] = \frac{S_0 e^{\mu T}}{\sigma \sqrt{T}} \left[\frac{N(d_1) - N(d_2)}{n(d_2)} \right] \quad \text{等式 (41)}$$

其中：

$$d_1 = \frac{\sqrt{T} \left(\mu - g + \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma}, d_2 = \frac{\sqrt{T} \left(\mu - g - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma} \quad \text{等式 (42)}$$

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, N(d) = \int_{-\infty}^d n(x) dx \quad \text{等式 (43)}$$

布朗桥假设下定投与基准投资净值期望对比

以下我们将证明，当 $\mu = g$ 时，总有 $E[DC_T^*] > S_0 e^{\mu T}$ ，即在布朗桥的假定下，定投的净值期望大于基准投资。需要证明的式子可转化为

$$\frac{2}{x} [N(x) - N(-x)] > n(-x), \quad x = \frac{\sigma \sqrt{T}}{2} \quad \text{等式 (44)}$$

利用函数的对称性，得到：

$$N(x) - \frac{1}{2} - x n(x) > 0 \quad \text{等式 (45)}$$

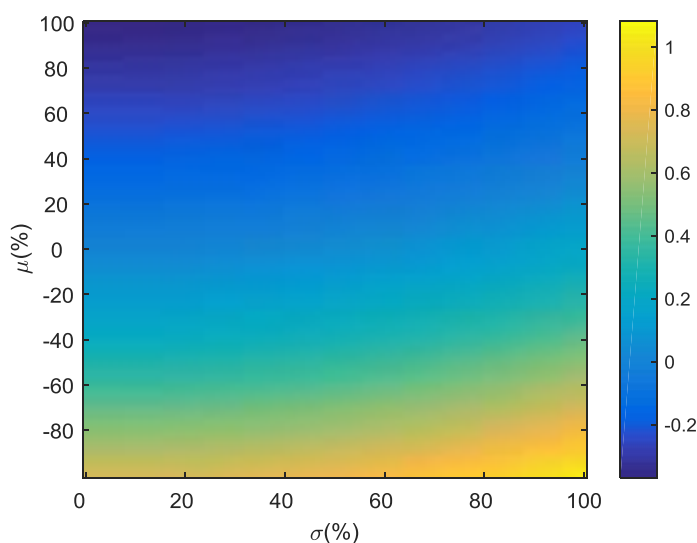
由于上式在 $x = 0$ 时取等号，且左边部分的一阶导数在 $x > 0$ 时恒为正，所以当 $\mu = g$ 时，总有 $E[DC_T^*] > S_0 e^{\mu T}$ ，无论 σ 和 T 的取值。

类似的，当 $\mu < g$ 时，我们也可推导出 $E[DC_T^*] > S_0 e^{mT}$ 。本节的发现与专题二发现的规律类似，即在 μ 较小时，定投是明显优于基准投资。

实验证明满足 $\mu \leq g$ 的布朗桥定投期望净值恒优于基准投资

下面给出数值模拟试验结果。令 $g = 0$ 、 $T = 1$ ，对于不同的 μ 和 σ 的组合，都进行 10,000 次独立试验以生成足够的随机资产价格曲线，并以这些资产价格曲线为基础计算定投的净值期望。我们定义定投和基准投资的差别为： $\text{Diff}_T^* = (E[DC_T^*] - S_0 e^{\mu T}) / (S_0 e^{\mu T})$ 。

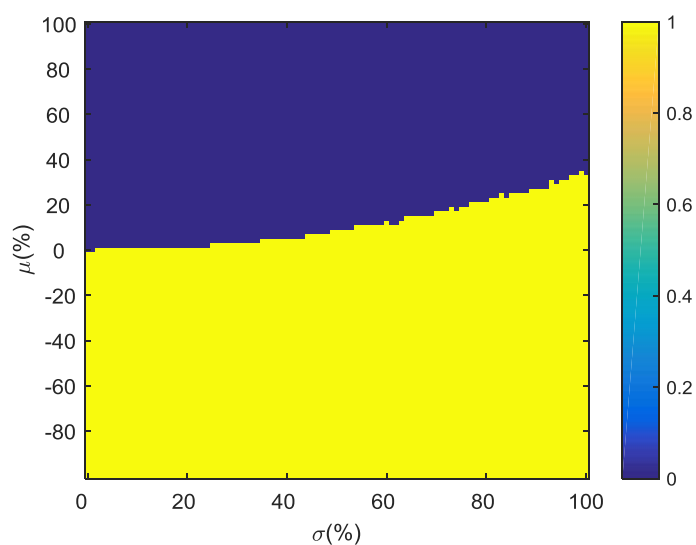
图11： 定投和基准投资的差别 Diff_T^* ($g = 0$ 、 $T = 1$)



资料来源：华泰证券研究所

可以发现，当 $\mu \leq 0$ ，无论 σ 如何取值，定投更优；当 $\mu > 0$ 时，总存在有一定阈值，当 σ 大于该阈值时，定投优于基准投资。

为了能够更加清晰的研究定投和基准投资占优的分界特点，我们采用了上文所述的二值化方法，将定投和基准投资的差别进行二值化处理。

图12: 定投和基准投资的差别 Diff_T^* 二值化图 ($g = 0$ 、 $T = 1$)

资料来源: 华泰证券研究所

通过模拟实验,我们证明了假定已知资产期末价格时,当 $\mu \leq g$,无论资产价格波动率如何,定投的期望总是大于基准投资;当 $\mu > g$ 时,总存在有一定阈值,当资产价格波动率大于该阈值时,定投的期望大于基准投资;而当 μ 足够大时,基准投资恒优于定投,这与我们直观的认知是一致的。

主要风险资产定投的马科维茨有效性的实证检验

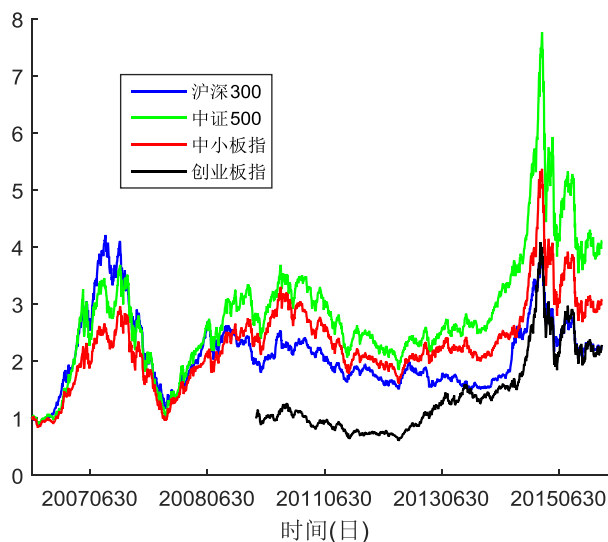
在前文章节“亚式期权等效性”和“假设已知资产期末价格的条件下对比”两个部分，尽管我们已经进行了数值模拟实验，但是进行相应的实证检验却相对困难：前者要求大量波动率和漂移率一致且恒定的不同资产价格曲线，以获得稳定的统计特性；而后者不仅需要大量波动率和漂移率一致且恒定的不同资产价格曲线，还需保证它们的最终价格也是一致且确定的，以获得稳定的统计特性。因而，本部分我们仅对“与基准投资的对比分析”部分的理论进行实证检验，研究主要风险资产定投的马科维茨有效性。

以下，我们分别测算境内、境外主要股票指数与主要商品指数 $M_2 - M_1$ 的数值特征，从马科维茨有效性的角度判断这些指数所代表的风险资产是更适合定投还是基准投资。

境内主要股票指数

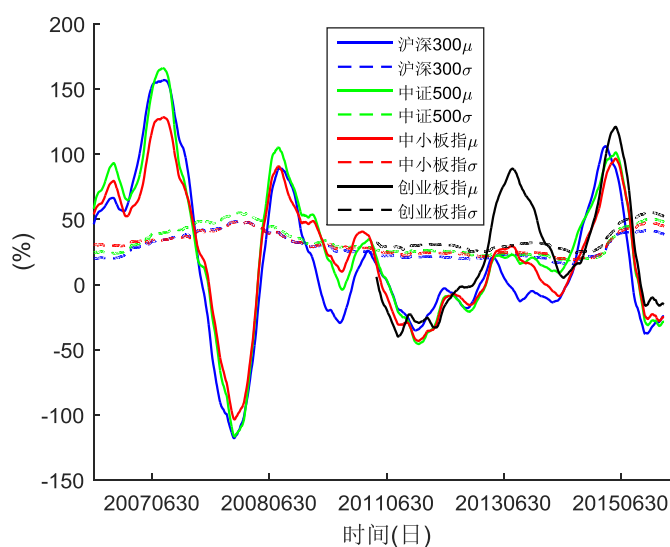
我们选择的样本区间为：2006 年 6 月 30 日至 2016 年 6 月 30 日的 10 年，首先考察了境内市场的沪深 300、中证 500、中小板指和创业板指一共 4 种指数的收盘价（后复权，下同），并使用“起点标准化处理”，即使所有指数的开端均归一化至 1。

图13： 4 种国内股票指数的日收盘价



资料来源：Wind，华泰证券研究所

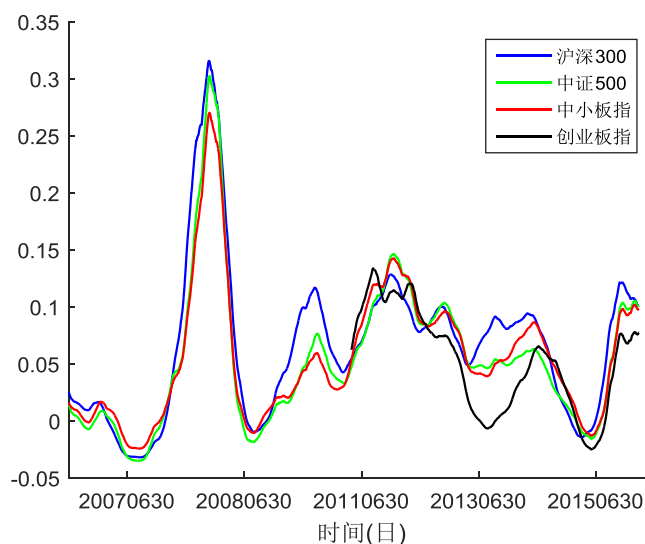
我们使用了专题报告二中的方法，以一年（250 个交易日）的收盘价为计算基础，估计 4 个指数的波动率 σ 和漂移率 μ 。由图 14 可见，资产价格的一阶矩 μ 随着指数变化明显，而二阶矩 σ 则相对稳定。

图14: 4种境内股票指数的波动率 σ 和漂移率 μ 

资料来源: Wind, 华泰证券研究所

基于估计出的波动率 σ 和漂移率 μ ，我们令 $T = 1$ 、 $g = 0$ ，计算了不同时段 $M_2 - M_1$ 的数值。由于指数的波动率较为稳定， $M_2 - M_1$ 的大小主要取决于漂移率。

在前文“相同的净值标准差下比较净值期望”的推导中，我们发现 $\mu < g$ 和 $\mu > g$ 两种不同的情境下，基于 M_1 和 M_2 的大小关系来判断定投的马科维茨有效性结论正好相反，这提醒我们在分析中应当将 μ 两种不同的取值状态分别进行分析。 g 在现实中往往是一个较小的正数，为了方便分析，我们令其为0，即将 $\mu < 0$ 和 $\mu > 0$ 两种情况分别讨论。

图15: 4种境内股票指数的 $M_2 - M_1$ 值 ($T = 1$)

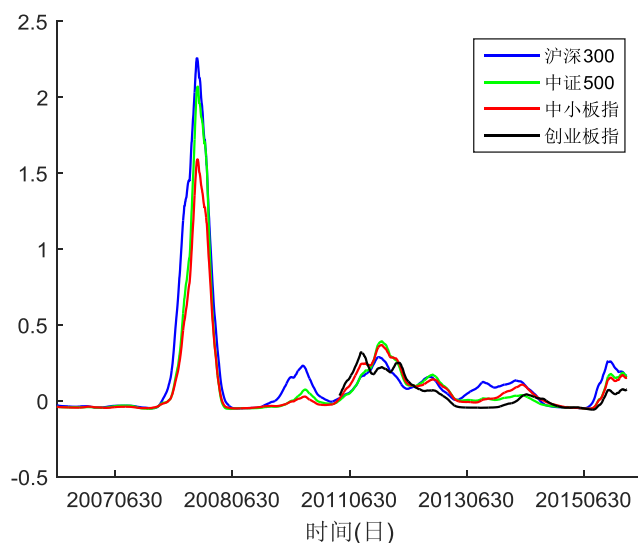
资料来源: Wind, 华泰证券研究所

综合图 13-图 15 的结果，我们不难发现，当指数有较为明显的增长趋势时，漂移率 μ 较大，而此时对应的 $M_2 - M_1$ 值较小，甚至为负值，即 $M_1 > M_2$ ，定投的马科维茨有效性更强。当 $\mu < 0$ 时，我们发现此时 $M_2 - M_1$ 为正，且 μ 值越小， $M_2 - M_1$ 值越大，表明在明显不利的投资环境中，定投的马科维茨有效性相比基准投资更强。这一结论与专题二提出的择时指标 $\sigma^2 - \mu$ 具有逻辑上的一致性： $\mu < 0$ 时， $\sigma^2 - \mu > 0$ ，以期望收益的判别标准定投也是优于基准投资的。

以下，我们进一步给出了当 $T = 3$ 和 $T = 5$ 时的 $M_2 - M_1$ 数值，以观测随着 T 的变化， $M_2 - M_1$

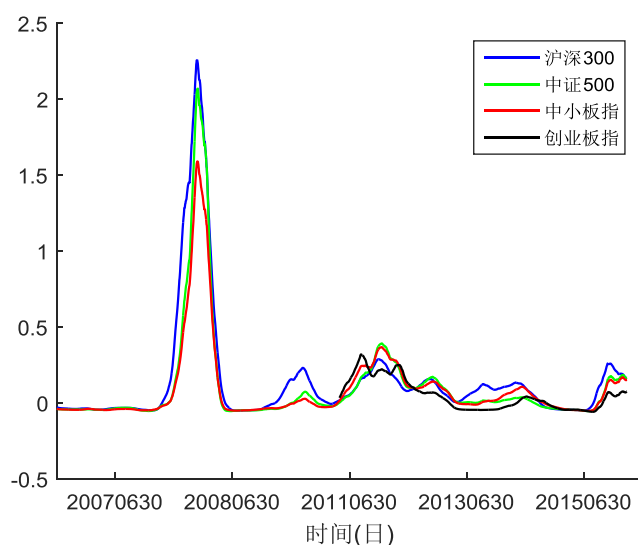
数值变化规律。

图16: 4种境内股票指数的 $M_2 - M_1$ 值 ($T = 3$)



资料来源: Wind, 华泰证券研究所

图17: 4种国内股票指数的 $M_2 - M_1$ 值 ($T = 5$)



资料来源: Wind, 华泰证券研究所

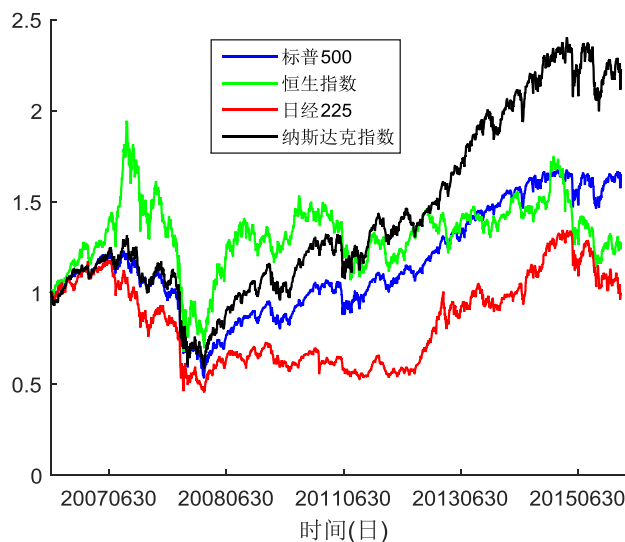
由图 15-17, 我们发现随着 T 的增加, $\mu < 0$ 的区域, $M_2 - M_1$ 数值增长迅猛, 表明从长期投资的角度看, 当遭遇 μ 值为负的不利投资环境, 定投能够更加显著的改善投资的马科维茨有效性。这一实证结果与“ $M_2 - M_1$ 数值规律的实验测算 ($g = 0$, T 取值不固定)”的实验结果一致。而在 $\mu > 0$ 的区域, $M_2 - M_1$ 数值变化不大, 定投与基准投资的马科维茨有效性的差异不明显, 这一发现与专题二中“定投收益与定投时间长度的关系”的结论: 存在定投时间越长, 年化收益越高的现象, 然而收益增幅并不明显, 具有逻辑一致性。

$M_2 - M_1$ 值 ($\mu > g$ 时) 与专题二提出的择基指标“ μ ”存在正相关关系, 他首先可以作为定投马科维茨有效性的评价标准, 其次, 他可以作为“ μ 法则”基于收益率择基的辅助判断指标—基于马科维茨有效性的判断。

境外主要股票指数

在 2006 年 6 月 30 日到 2016 年 6 月 30 日这同一时间范围，我们接着考察了境外成熟市场的标普 500、恒生指数、日经 225、纳斯达克指数一共 4 种指数的收盘价。

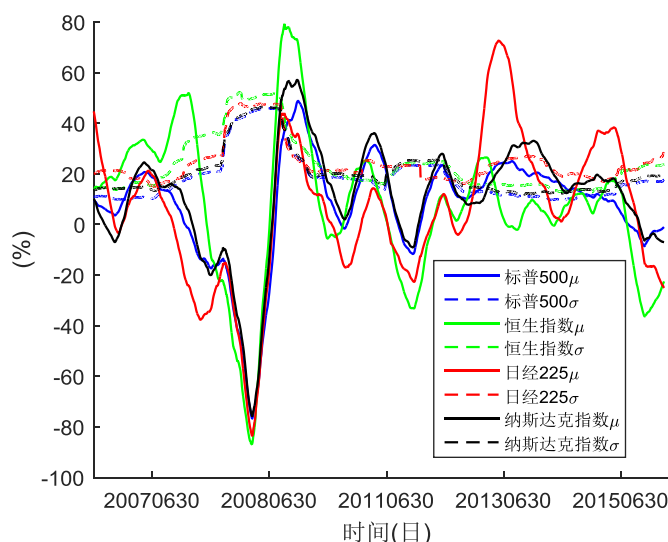
图18: 4 种境外股票指数的日收盘价



资料来源: Wind, 华泰证券研究所

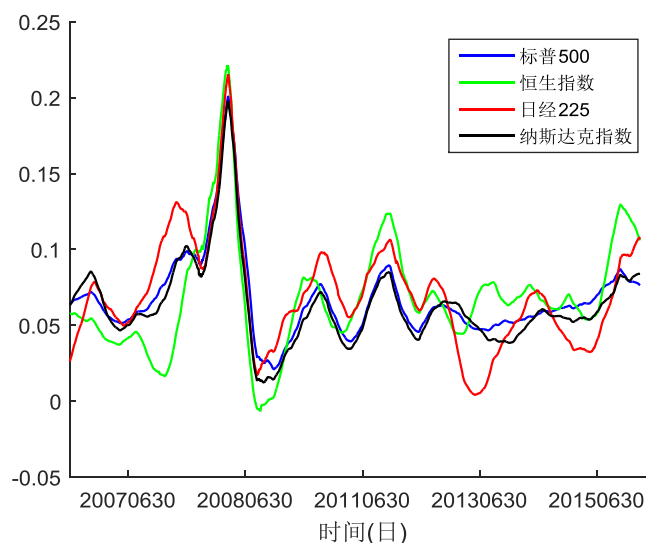
我们继续使用专题报告二中的方法，以一年（250 天）的收盘价为基准，计算了 4 种国外指数的波动率 σ 和漂移率 μ 。如图 19，我们发现相比我国 A 股指数，境外成熟市场指数的 μ 值大于 0 的比例更大，且取值相对均匀。

图19: 4 种境外股票指数的波动率 σ 和漂移率 μ



资料来源: Wind, 华泰证券研究所

基于计算出的波动率 σ 和漂移率 μ ，我们再次假设 $T = 1$ 和 $g = 0$ ，计算了不同时刻 $M_2 - M_1$ 的大小。同样的，国外指数的波动率相对稳定， $M_2 - M_1$ 的大小主要取决于漂移率。

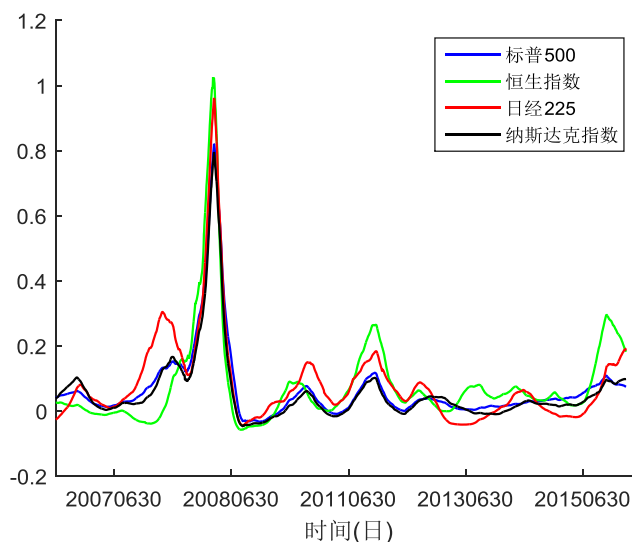
图20: 4种境外股票指数的 $M_2 - M_1$ 值 ($T = 1$)

资料来源: Wind, 华泰证券研究所

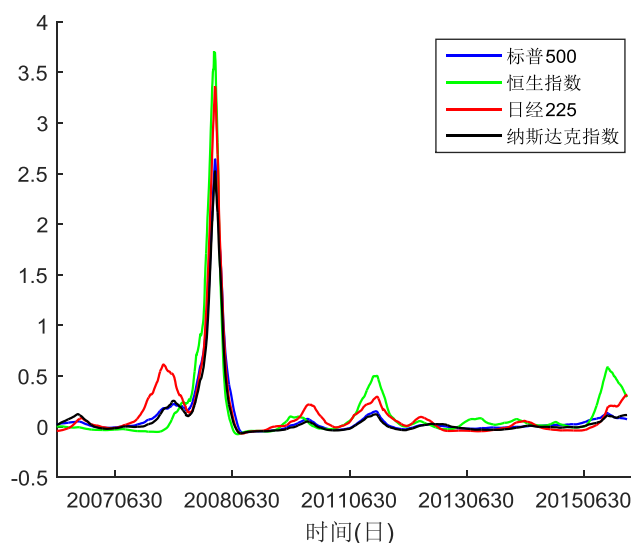
综合图 18-图 20 的结果，与 A 股指数有相似的规律，即当指数有较为明显的增长趋势时，漂移率 μ 较大，对应的 $M_2 - M_1$ 值较小，且在 $\mu < 0$ 时， $M_2 - M_1$ 值显著增大，与中国 A 股发现的规律一样，在明显不利的投资环境中，定投的马科维茨有效性相比基准投资更强。

此外，在样本起内，由于漂移率的最大峰值有限， $M_2 - M_1$ 值几乎恒为正，表明除了 $\mu < 0$ 明显不利的投资环境中，定投具有显著优势，在 $\mu > 0$ 的市场条件下，境外成熟市场定投股票指数相比基准投资不存在明显优势。

同样的，我们给出了当 $T = 3$ 和 $T = 5$ 时的 $M_2 - M_1$ 数值。

图21: 4种境外股票指数的 $M_2 - M_1$ 值 ($T = 3$)

资料来源: Wind, 华泰证券研究所

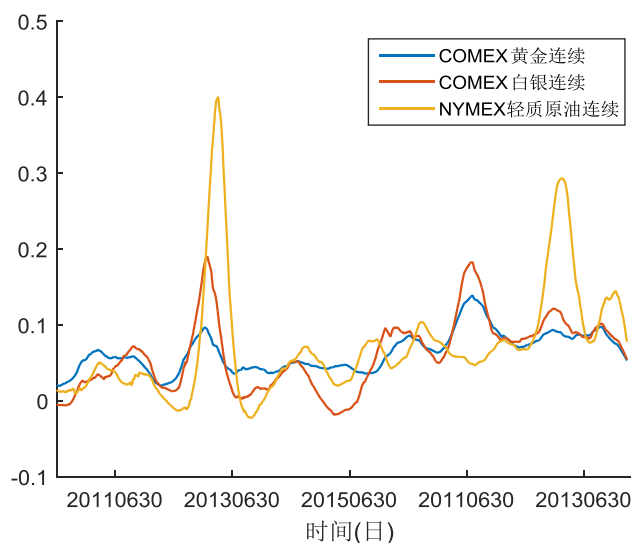
图22: 4种境外股票指数的 $M_2 - M_1$ 值 ($T = 5$)

资料来源: Wind, 华泰证券研究所

由图 20-22，我们发现境外市场主要股票指数也存在随着 T 的增加， $\mu < 0$ 的区域， $M_2 - M_1$ 数值增长迅猛的规律，表明从长期投资的角度看，当遭遇 μ 值为负的不利投资环境，定投能够更加显著的改善投资的马科维茨有效性。而在 $\mu > 0$ 的区域， $M_2 - M_1$ 数值变化同样不大，定投与基准投资的马科维茨有效性的差异也不明显。境内外指数在过去 10 年虽然表现具有较大差异，A 股市场波动更大， μ 取到极端值、负值的概率更高，然而基于本文的马科维茨有效性判别方法在两个市场都具有较好的适用性，能够有效识别定投有利的市场条件。

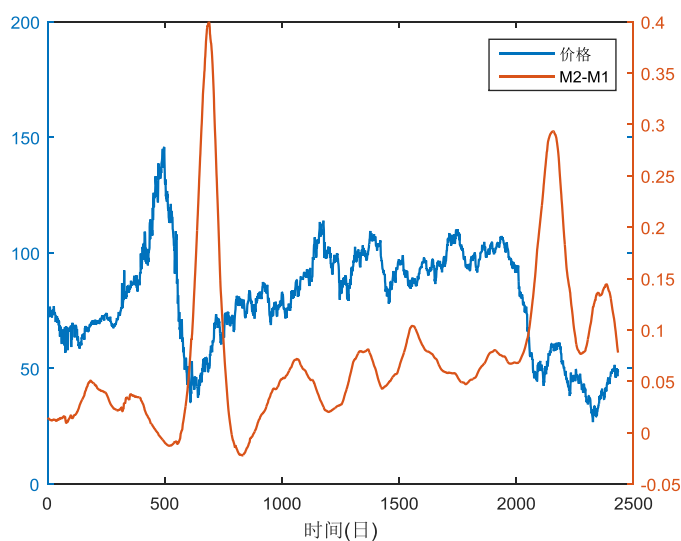
主要商品指数

接下来，我们对 3 种典型商品期货（COMEX 黄金连续、COMEX 白银连续、NYMEX 轻质原油连续）收盘价进行了回测，考察时间段为 2010 年 6 月 30 日到 2016 年 6 月 30 日，在假设 $T = 1$ 和 $g = 0$ 的前提下，求解 $M_2 - M_1$ 的数值。

图23: 3种典型商品期货的 $M_2 - M_1$ 值 ($T = 1$)

资料来源: Wind, 华泰证券研究所

在绝大多数时段内， $M_2 - M_1$ 的恒大于零。我们选择 NYMEX 轻质原油连续这一期货商品进行进一步研究。

图24: NYMEX 轻质原油的价格和 $M_2 - M_1$ 值 ($T = 1$)

资料来源: Wind, 华泰证券研究所

同样的， $M_2 - M_1$ 负值的时段对应着价格有增长趋势的时段，且在 $\mu < 0$ 的区域， $M_2 - M_1$ 值显著增大，这与我们之前发现的规律是类似的。

本文结论

本文是华泰基金定投系列研究中又一核心理论篇章，在专题一和专题二的基础上，进一步研究定投相比基准投资具有马科维茨有效性的条件。研究发现，在 $\mu < 0$ 的不利市场条件下，从马科维茨有效性的角度，定投优于基准投资。而在 $\mu > 0$ 时，若 μ 或者 σ 足够大，定投也会具有优势。

定投是一项中长期的投资行为，投资者通过定投规避短期择时风险，为此，在专题二研究基金定投择基和择时的方法时，我们以期望收益作为评价标准，未考虑资产价格波动，弱化投资过程中的组合波动的影响。本文研究采用的是定投与基准投资的风险调整后收益：夏普比率，考虑了资产价格波动。在这样的研究框架下，我们发现的规律是对专题一、专题二的有益补充。本文的发现不但能够加深我们对定投本质、科学性等的认识，相关成果还能应用于智能定投策略的构建与智能投顾系统相关模块的设计，以及生命周期基金等 FOF 类型基金产品的设计等。

此外，值得一提的是，本系列报告在资产价格服从布朗运动的基础上构建模型，这一基础假设使得模型设计思路、方法可以应用于其他资产类别策略的设计，调整投资时间尺度甚至能够应用于高频投资策略的构建等。

免责声明

本报告仅供华泰证券股份有限公司（以下简称“本公司”）客户使用。本公司不因接收人收到本报告而视其为客户。

本报告基于本公司认为可靠的、已公开的信息编制，但本公司对该等信息的准确性及完整性不作任何保证。本报告所载的意见、评估及预测仅反映报告发布当日的观点和判断。在不同时期，本公司可能会发出与本报告所载意见、评估及预测不一致的研究报告。同时，本报告所指的证券或投资标的的价格、价值及投资收入可能会波动。本公司不保证本报告所含信息保持在最新状态。本公司对本报告所含信息可在不发出通知的情形下做出修改，投资者应当自行关注相应的更新或修改。

本公司力求报告内容客观、公正，但本报告所载的观点、结论和建议仅供参考，不构成所述证券的买卖出价或征价。该等观点、建议并未考虑到个别投资者的具体投资目的、财务状况以及特定需求，在任何时候均不构成对客户私人投资建议。投资者应当充分考虑自身特定状况，并完整理解和使用本报告内容，不应视本报告为做出投资决策的唯一因素。对依据或者使用本报告所造成的一切后果，本公司及作者均不承担任何法律责任。任何形式的分享证券投资收益或者分担证券投资损失的书面或口头承诺均为无效。

本公司及作者在自身所知情的范围内，与本报告所指的证券或投资标的不存在法律禁止的利害关系。在法律许可的情况下，本公司及其所属关联机构可能会持有报告中提到的公司所发行的证券头寸并进行交易，也可能为之提供或者争取提供投资银行、财务顾问或者金融产品等相关服务。本公司的资产管理部门、自营部门以及其他投资业务部门可能独立做出与本报告中的意见或建议不一致的投资决策。

本报告版权仅为本公司所有。未经本公司书面许可，任何机构或个人不得以翻版、复制、发表、引用或再次分发他人等任何形式侵犯本公司版权。如征得本公司同意进行引用、刊发的，需在允许的范围内使用，并注明出处为“华泰证券研究所”，且不得对本报告进行任何有悖原意的引用、删节和修改。本公司保留追究相关责任的权力。所有本报告中使用的商标、服务标记及标记均为本公司的商标、服务标记及标记。

本公司具有中国证监会核准的“证券投资咨询”业务资格，经营许可证编号为：Z23032000。

© 版权所有 2016 年华泰证券股份有限公司

评级说明

行业评级体系

- 报告发布日后的 6 个月内的行业涨跌幅相对同期的沪深 300 指数的涨跌幅为基准；
- 投资建议的评级标准

增持行业股票指数超越基准

中性行业股票指数基本与基准持平

减持行业股票指数明显弱于基准

公司评级体系

- 报告发布日后的 6 个月内的公司涨跌幅相对同期的沪深 300 指数的涨跌幅为基准；
- 投资建议的评级标准

买入股价超越基准 20% 以上

增持股价超越基准 5%-20%

中性股价相对基准波动在 -5%~5% 之间

减持股价弱于基准 5%-20%

卖出股价弱于基准 20% 以上

华泰证券研究

南京

南京市建邺区江东中路 228 号华泰证券广场 1 号楼/邮政编码: 210019

电话: 86 25 83389999 / 传真: 86 25 83387521

电子邮件: ht-rd@htsc.com

深圳

深圳市福田区深南大道 4011 号香港中旅大厦 24 层/邮政编码: 518048

电话: 86 755 82493932 / 传真: 86 755 82492062

电子邮件: ht-rd@htsc.com

北京

北京市西城区太平桥大街丰盛胡同 28 号太平洋保险大厦 A 座 18 层
 邮政编码: 100032

电话: 86 10 63211166 / 传真: 86 10 63211275

电子邮件: ht-rd@htsc.com

上海

上海市浦东新区东方路 18 号保利广场 E 栋 23 楼/邮政编码: 200120

电话: 86 21 28972098 / 传真: 86 21 28972068

电子邮件: ht-rd@htsc.com