金融工程 / 市场量化分析

2016年08月22日

林晓明 执业证书编号：S0570516010001
研究员 0755-82080134
linxiaoming@htsc.com
黄晓彬 执业证书编号：S0570516070001
研究员 0755-23950493
huangxiaobin@htsc.com

基金定投：投资标的与时机的选择方法

基金定投系列专题研究报告之二

采用连续时间模型获得定投收益等的解析解

定投是一种时间离散的投资策略，在投资时间长度T内，定投次数N的大小决定了定投频率的高低。我们发现当N超过一个不大的数值后（如1年按月定投12次），定投频率的进一步提高对定投收益的影响并不显著，且相关参数对投资收益的影响方向不发生改变。为此，我们对N求极限，在极限状态下，我们发现不但可以求得更加简洁、方便应用的解析解，且能够发现在离散模型中无法直接观测的定投规律。

推导了定投标的与时机选择的理论方法

连续时间模型从“资产价格符合几何布朗运动”的基本假设出发，推导定投期望收益率表达式，基于此分析标的资产波动率、定投频率、定投长度等对定投收益的影响，以此得出简便有效的定投标的与时机选择的理论方法。

“μ法则”选择定投标的

从定投收益解析表达式$(e^{\mu T}-1)/\mu T$出发，本文论证了其计算的有效性，进而推导出“μ法则”可作为基金定投收益的评价标准，同时也可作为定投标的选择的参考。

“$\sigma^2-\mu$”作为定投择时的参考指标

本文推导了定投与一次性投资的对比标准：$\sigma^2-\mu$。在$\sigma^2-\mu$大于0时，标的资产大多处于震荡、下跌或没有明显上涨的形态，此时，定投优于一次性投资。$\sigma^2-\mu$小于0时，市场一般出现趋势性上涨，一次性投资更优。我们发现，$\sigma^2-\mu$可以作为定投择时的参考指标，根据$\sigma^2-\mu$数值与0的大小关系选择定投或一次性投资。

定投波动率与资产波动率的关系

由于定投多期后会出现平均投资成本“钝化”的现象：一般而言，在定投超过20期后，它与一次性投资确定性的投资成本的情况便趋于一致。通过实验与实证研究，我们发现，在期数较少的定投中，定投波动与一次性投资差异较为明显，定投能够降低波动；然而定投期数越长，两者的差异越小。

定投收益与定投时间长度、投资频率的关系

一般而言，定投的时间越长，年化期望收益越大，然而差别较小，给定$\mu=0.2$，定投1年、3年、5年的年化收益相差不到0.4%。我们还发现，给定$|\mu|\le 0.3$，1年时间，月频、周频定投收益的差异小于1%。定投频率对定投收益的影响较小。

风险提示：在趋势性上涨的市场中，定投的投资效果弱于一次性投资；长期定投并不一定能够带来绝对回报；本文研究基于“资产价格符合几何布朗运动”的假设展开，现实的资本市场不一定符合这一基本假设，可能导致模型效果不及预期。

相关研究

1《指数普涨，分级交投活跃、规模上涨》2016.08
2《期权行情过山车，成交创历史新高》2016.08
3《市场持续升温，两融余额增速加快》2016.08

正文目录

图表目录

在 2016 年 7 月 11 日发布的华泰基金定投系列专题研究报告之一《基金定投：分析方法与理论基础》一文中，我们介绍了定投的基本分析方法，基于均值不等式关系解释了定投降低平均投资成本的原理，以及发现在假定平均净值一致的情况下，波动率越高的基金，定投收益率越高的规律。

专题一是我们研究基金定投的基本方法准备，本期报告专题二，我们从金融工程学一个基本的假设："资产价格符合几何布朗运动"出发，推导定投期望收益率表达式，基于此分析资产波动、定投频率、定投长度等对定投收益的影响，以此得出简便有效的定投标的与时机选择的理论方法。

定投的连续时间模型

采用连续时间模型的可行性与原因

基金每个交易日仅有一个单位净值，然而由于基金所投标的：股票、债券等资产价格都是连续的，且一般假设满足几何布朗运动。因此，本质上基金单位净值也是一个连续时间过程。

假定资产初始价格S_0，那么我们有等式：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \qquad \text{等式（1）}$$

通过伊藤引理（Itō's lemma），我们能够解出以上偏微分方程，从而推导 t 期资产价格：$S_t = S_0 e^{(\mu - 1/2\sigma^2)t + \sigma W_t}$ 等式（2）

假设股票、债券等基金投资标的都服从以上连续时间过程，那么基金净值也可以用等式（2）表示。给定这样的模型假设，我们就能够推导出，在连续时间过程下基金定投收益等的相关表达式。

连续时间的研究框架能够提供更加丰富的研究方法，利于研究成果的拓展。

连续时间模型下定投与一次性投资的表达式

假设投资时间长度为 T，投资资金总额为 M。对于一次性投资而言，期末基金资产净值表示为$V_1 = \frac{M \cdot S_T}{S_0}$。而对于定投，我们将投资时间 T 分为 N 期，每期定投金额表示为：$\frac{M}{N}$，每期得到的基金份额为：$\frac{M}{NS_t}$。投资到期时，定投获得的期末总份数为$\sum_{i=0}^{N-1}\frac{M}{NS_{i \cdot T/N}}$，此时定投期末的基金资产净值为：

$$V_2 = \sum_{i=0}^{N-1}\frac{M}{NS_{i \cdot T/N}} \times S_T \qquad \text{等式（3）}$$

定投是一种时间离散的投资策略，在投资时间长度 T 内，N 的大小决定了定投频率的高低(一般定投频率为每周、每月、每季)。我们发现当 N 超过一个不大的数值后（如 1 年按月定投 12 次），定投频率的进一步提高对定投收益的影响并不显著（后文有相应证明），且相关参数对投资收益的影响方向不发生改变。为此，我们尝试着对 N 求极限，在极限状态下，我们发现不但可以求得更加简洁、方便应用的解析解，且能够发现在离散模型中无法直接观测的定投规律。

如上分析，令$N \to +\infty$，得到V_2的表达式如下：

$$\lim_{N\to\infty} V_2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1}\frac{M}{NS_{iT/N}} \times S_T = \frac{\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{M}{S_{i/N}}\times\frac{T}{N}\times S_T}{T} = \frac{\int_0^T \frac{MS_T}{S_t}dt}{T} \qquad \text{等式（4）}$$

连续时间模型下定投与一次性投资对比

首先对比定投和一次性投资的收益情况，用二者的期末净值之比的大小来衡量定投策略的表现。期末净值之比：

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{\int_0^T \frac{MS_T}{S_t}dt}{T}}{\frac{MS_T}{S_0}}=\frac{\int_0^T e^{(1/2\sigma^2-\mu)t-\sigma W_t}dt}{T} \quad \text{等式（5）}$$

对上式求期望得：

$$E[\frac{V_2}{V_1}]=\frac{E[\int_0^T e^{(1/2\sigma^2-\mu)t-\sigma W_t}dt]}{T}=\frac{\int_0^T E[e^{(1/2\sigma^2-\mu)t-\sigma W_t}]dt}{T} \quad \text{等式（6）}$$

采用 Girsanov 定理，令$d\,Q/d\,P=e^{-1/2\sigma^2 t-\sigma W_t}$，做相应替代后得：$E[e^{(1/2\sigma^2-\mu)t-\sigma W_t}]=E^Q[e^{(\sigma^2-\mu)t}]=e^{(\sigma^2-\mu)t}$，于是比值的期望为可表示为：

$$E[\frac{V_2}{V_1}]=\frac{\int_0^T e^{(\sigma^2-\mu)t}dt}{T}=\frac{e^{(\sigma^2-\mu)T}-1}{(\sigma^2-\mu)T} \quad \text{等式（7）}$$

从上式中，我们可以推导出定投与一次性投资期末的比值期望是$(\sigma^2-\mu)T$的增函数，当$\sigma^2-\mu=0$时，$E[\frac{V_2}{V_1}]=1$；当$\sigma^2-\mu>0$时，$E[\frac{V_2}{V_1}]>1$；当$\sigma^2-\mu<0$时，$E[\frac{V_2}{V_1}]<1$。

在给定投资时间 T 不变时，通过上式可以直观的发现：当σ越大，或者当μ越小时，等式（7）越大，即定投表现相对一次性投资收益期望越好。当$\sigma^2-\mu>0$时，平均而言定投比一次性投资效果好。

以下我们采用蒙特卡洛模拟的方法进一步论证等式（7）发现的规律。实验方法设计如下：（1）将定投时间长度 T 设定为 1 年、3 年、5 年；（2）给出的不同的漂移率μ和波动率σ；（3）分别在 3 个不同的时间长度下，定投 20、50、100、1,000 次，每项实验模拟 1,000 次；（4）将每一参数组合模拟的结果取平均值，得到定投收益与一次性投资收益比值期望的结果。

以上模拟实验结果如附录中的表格 7 至表格 18，从表格数据，我们能够总结出定投与一次性投资的规律：

1) 标的资产预期收益率越低，定投策略相比一次性投资越有优势。
2) 对于标的资产预期收益给定的情况下，资产价格波动率越大，定投策略优势越明显。例如，某投资者预期未来某指数型基金未来可涨 30%，同时预期上涨过程将面临较大波动，那么此时他可以选择定投来降低择时风险与投资成本，提升投资收益。
3) 在预期收益率和波动率给定的情况下，定投时间越长，定投相比一次性投资的优势越明显。
4) 在单边上涨市中，定投难以战胜一次性投资；然而，在下跌市场中、横盘走势或者震荡上行走势中，定投策略优势显著。

连续时间模型下定投期望收益和波动

定投期望收益的解析解

选择任一基金进行定投，将等式（4）展开，我们可以得到其定投期末的基金净值表达式：

$$V_2 = \frac{\int_0^T \frac{MS_T}{S_t} dt}{T} = \frac{\int_0^T \frac{MS_T}{S_t} dt}{T} = \frac{\int_0^T e^{(1/2\sigma^2-\mu)t-\sigma W_t} \times e^{(\mu-1/2\sigma^2)T+\sigma W_T} dt}{T} \times M \qquad \text{等式（8）}$$

令$M=1$，可得$E[V_2] = E\left[e^{(\mu-1/2\sigma^2)T+\sigma W_T} \times \int_0^T e^{(1/2\sigma^2-\mu)t-\sigma W_t}\, dt\right]$

$$= \int_0^T E\left[e^{(\mu-1/2\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}\right] dt = \int_0^T e^{\mu(T-t)}\, dt$$

$$= \frac{e^{\mu T}-1}{\mu T} \qquad \text{等式（9）}$$

以上等式（9）是连续时间模型下定投策略的期末资产净值期望（由于假定$M=1$，所以同时也是收益率期望）的表达式，该表达式中只有参数μ，也即给定任意定投标的，我们只要估计出μ便能够判断定投的收益期望，或者说μ越大的资产标的，在连续时间模型下测算的定投效果越好。

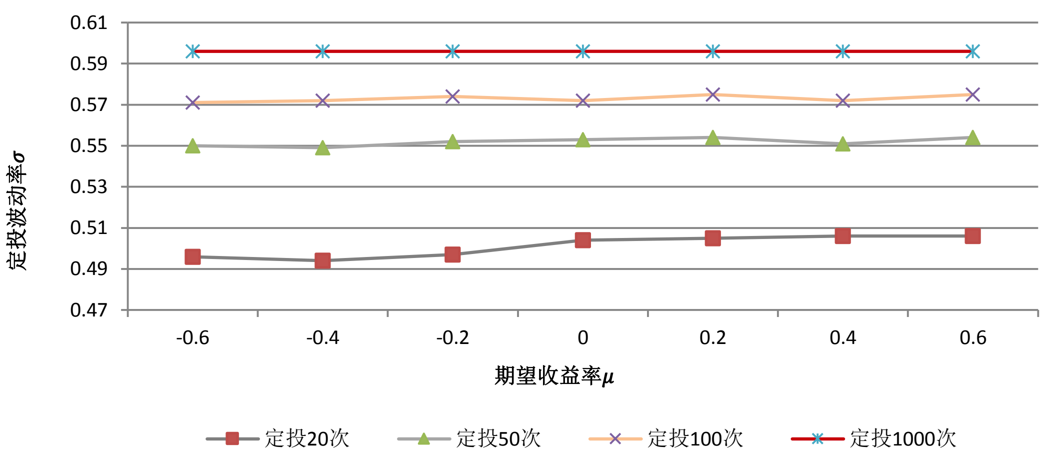
定投期望波动的蒙特卡洛模拟

由于定投波动率的解析解难以通过计算得出，因此我们选用蒙特卡洛模拟法模拟基金的净值序列，以此研究定投策略的波动率特点。

由于定投多期后会出现平均投资成本"钝化"的现象：一般定投超过 20 期后，新增投资占已有投资约为 5%，对总投资平均成本的影响变得微弱。此时，虽然定投还在不断增加资金投入，然而平均投资成本变动对于市场波动引起的当期投资成本变化反应不敏感，即"钝化"。在定投超过 20 期后，他与一次性投资确定性的投资成本的情况便趋于一致。因此，我们推测，在期数较少的定投中，定投的风险收益情况与一次性投资会出现较为明显的差异，然而期数较长时，两者的差异会不断缩小。

以下我们采用蒙特卡洛模拟的方法论证以上猜想，实验方法设计如下：（1）设计不同的漂移率μ（-0.6 至 0.6）和波动率σ（0 至 0.6）组合；（2）在不同的组合下，分别定投 20、50、100、1,000 次，每项实验模拟 1,000 次；（3）将每一参数组合模拟的结果取平均值，得到不同的漂移率μ、波动率σ、定投次数下，定投波动率与标的波动率之间的关系。

图1: 定投期望波动的蒙特卡洛模拟（以标的资产σ=0.6 为例）



资料来源：华泰证券研究所

模拟实验结果如附录中的表格 19 至表格 22。此外，为更加清晰的展示实验结果差异，我们还选取标的资产σ=0.6 的情形，将四种定投次数下，定投波动率σ绘制于同一图形中。基于本次模拟实验我们能够总结出以下规律：

1) 定投 20 期后，由于定投平均成本"钝化"，超过 20 期的定投波动率与资产本身波动

率趋于一致；定投期数在 20 期或以内时，定投能够降低投资波动率。

2) 在不同的资产价格漂移率μ下，实验结果无显著差异，即定投波动率的变化规律仅与定投次数、标的资产波动率相关。

连续时间模型的参数估计

在上一节的内容中，我们推导了定投期望收益的表达形式等式（9），然而式中的μ是连续时间过程中资产价格的漂移率，并不可直接观测到。那么，要想通过等式（9）来指导我们进行定投标的与时机的选择，首先就要估计参数μ。

我们把μ称作资产价格的漂移率。这一漂移率，是由公式：$E[S_t]=S_0e^{\mu t}$定义的，是指很短的时间Δt内，资产收益率的期望值。根据几何布朗运动方程和伊藤引理，我们能够推出资产的对数收益率服从以下正态分布：

$$\ln\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\sim N((\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t,\sigma^2\Delta t)$$ 等式（10）

根据等式（10）可得，对数收益率的期望：

$$E[r_i]=(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t$$ 等式（11）

在我们的计算过程中，由于每天的对数收益r_i独立同分布，我们可以用样本均值来估算总体均值，由等式（11）可以推出：

$$\hat{\mu}=\frac{\bar{r}_i}{\Delta t}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2$$ 等式（12）

等式（12）是对参数μ的估计，其中$\hat{\sigma}$是样本每日对数收益率的标准差

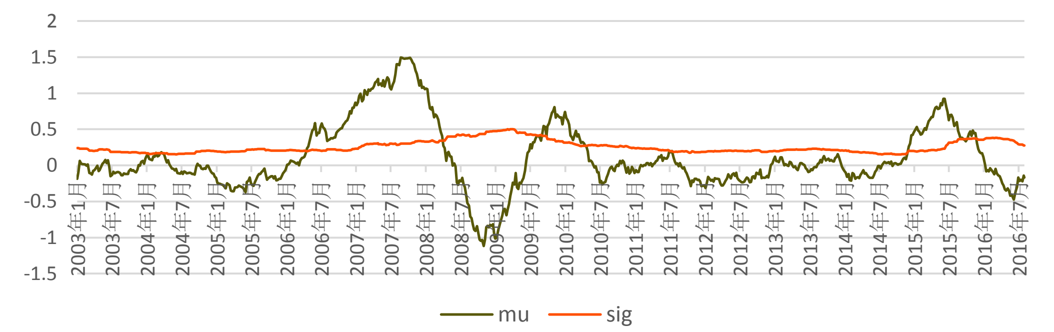
我们把上式写成另外一种形式：

$$\hat{\mu}=\frac{\sum\ln(S_t/S_0)}{N\cdot\Delta t}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2=\frac{\ln(S_T)-\ln(S_0)}{T}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2$$ 等式（13）

我们可以看到，在资产价格$(0,T)$区间涨跌幅一致的情况下，资产的波动率越大，资产价格的漂移率$\hat{\mu}$也越大。也即固定区间收益，波动率越大的资产定投降低定投成本、提升投资收益的效果越好，这一结论与我们在专题一《基金定投：分析方法与理论基础》中采用离散时间模型推导的结论是一致的。

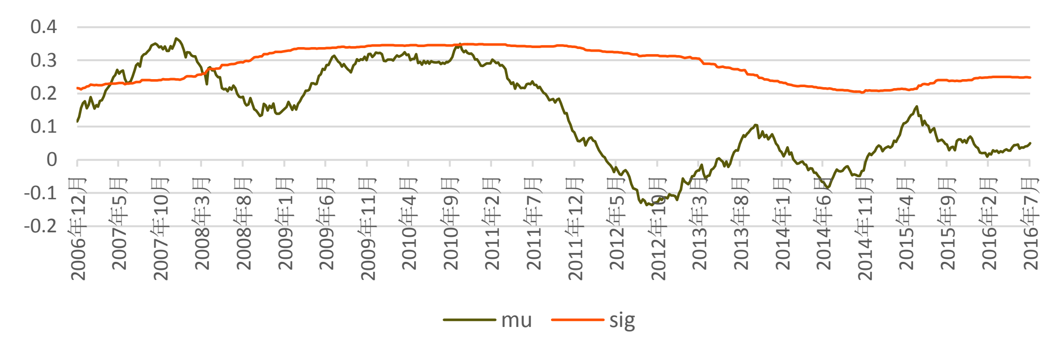
以下我们测算了截至 2016 年 8 月，近十年沪深 300 指数的μ和σ的估计值。

图2: 沪深 300 指数μ和σ的估计值（历史 1 年数据估计）



资料来源：华泰证券研究所

图3: 沪深 300 指数μ和σ的估计值（历史 5 年数据估计）



资料来源：华泰证券研究所

图 2 与图 3，我们分别采用历史 1 年数据和 5 年数据来测算当前时点的μ和σ，基于本次实证我们能够总结出以下规律：

1) 采用的历史测算数据越长，参数μ和σ波动越小，说明在进行长期定投时，为把握资产比较稳定的参数规律，可以采用较长的历史数据测算；而较短的历史数据则能够较为敏感的反应近期资产价格属性的变化。

2) σ的取值较μ稳定（本质上μ是资产价格的一阶矩，σ^2是资产价格的二阶矩），相比μ而言σ^2是一个较小的正数。也即，在μ为负数，或μ为较小正数时，σ^2的大小才对$\sigma^2-\mu$（定投与一次性投资对比标准）起到较为明显的影响。或者说，在一个明显较大的μ的投资决策中，资产波动性对于决定是一次性投资还是定投，几乎不起作用：进行一次性投资明显优于定投。

连续时间模型的应用

在上节推导出的理论公式基础上，本节进行相关理论的模拟实验、实证检验，证明相关公式的有效性；同时，开展应用性研究。数据样本采自 Wind 数据库存续期超过 5 年的 450 只偏股型基金（包括股票型、偏股混合型），实证区间为 2011 年 7 月至 2016 年 7 月。

定投期望收益解析解用于定投收益测算

在前文“连续时间模型下定投与一次性投资的表达式”中，我们分析了定投期望收益解析解是测算定投收益的一个简洁、有效的手段。本节我们将采用实证的方法，证明前文推导的定投期望收益解析解能够应用于各种不同条件下定投收益的估计。

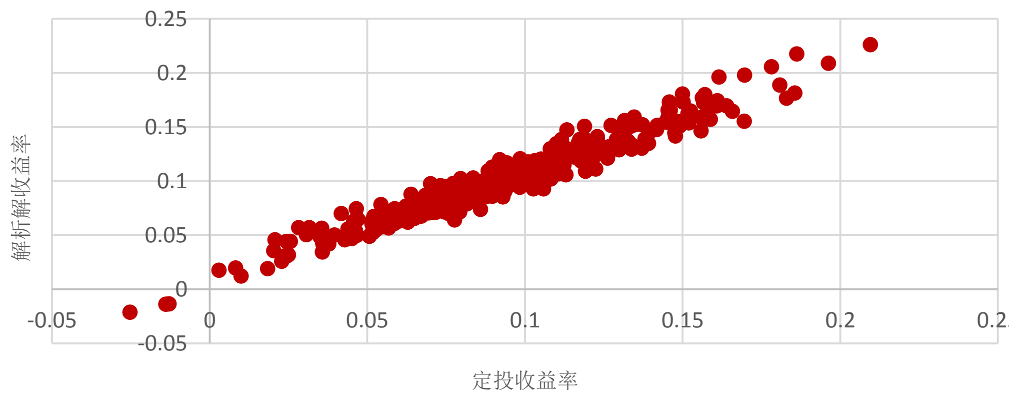
由于在连续时间模型中，资产价格的漂移率μ无法直接观测到，我们需要采用等式（11）：$\hat{\mu}=\frac{\bar{r}_i}{\Delta t}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2$的方法来估计漂移率$\mu$。本次实证，我们采用截至 2016 年 7 月的最近 2 年和 5 年的样本数据，分别按月和按周定投，两个实证分别代表定投次数较少和次数较多的情形。

首先，求得样本基金每月和每周的对数收益率r_i；其次，用月频和周频收益率序列数据计算波动率σ，并通过等式（11）估计每月和每周漂移率$\hat{\mu}$；再次，分别将$\hat{\mu}$年化计算得到年漂移率μ；最后，通过等式（9）：$E[V]=\frac{e^{\mu T}-1}{\mu T}$计算定投 2 年、5 年的收益及其收益率，并与实际定投的收益率进行对比，考察解析解计算的结果与实际计算数据的差异。

定投频次较少的情形

我们首先观察定投频次较少的情况：月频定投 2 年。定投收益与上述解析解收益散点图如下：

图4: 定投实际收益与解析解收益散点图（月频定投 2 年）



资料来源：华泰证券研究所

如图 4 可见，采用解析式计算得出的定投收益与定投实际的收益呈明显的线性分布，相关性很高。进一步的，我们对两条收益序列做回归分析，结果如下：

表格1: 定投实际收益与解析解收益回归统计量（月频定投 2 年）

	系数	标准误差	t Stat	P-value
截距	0.00	0.00	-2.83	0.00
理论收益率	0.95	0.01	91.45	0.00

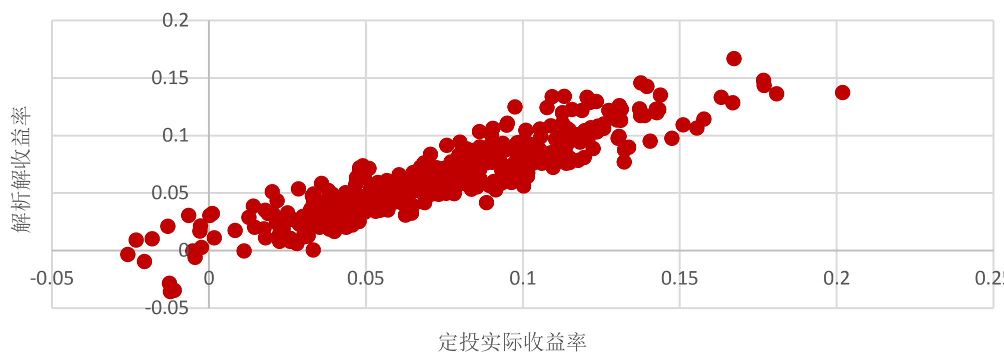
资料来源：华泰证券研究所

回归结果显示，在低频定投的情况下，两者收益率回归系数为 0.95，截距项为 0 且都非常显著，因此，我们可以认为低频情况下可以采用解析解估计定投实际收益。

定投频次较多的情形

随后，我们观察定投频次较多的情况：周频定投 5 年。由于定投频率更高了，实际定投收益更趋近于解析解，可以猜想到本次实证的结果应当好于定投频次较少的情形。

图5：定投实际收益与解析解收益散点图（周频定投 5 年）



资料来源：华泰证券研究所

如图 5，按周定投 5 年，解析式计算得出的定投收益率与定投实际的收益率也呈明显的线性分布，相关性很高。同样的，我们对两条收益率序列做回归分析，结果如下：

表格2：定投实际收益与解析解收益回归统计量（周频定投 5 年）

	系数	标准误差	t Stat	P-value
截距	0.01	0.00	5.06	0.00
理论收益率	1.04	0.02	46.52	0.00

资料来源：华泰证券研究所

可见，两个变量的回归系数为 1.04，截距项几乎为 0，并且两者都十分显著，说明在定投次数较多的情形下，通过本文推导公式计算得出的定投收益可以代表实际收益。

以上两项实证证明，本文推导的定投收益解析解公式可以直接用于定投收益的计算，这同时也说明了根据资产价格μ的大小来构建定投策略，具有理论与现实的可行性。

定投标的的选择方法

我们前面的理论和实证表明在选择定投基金的时候应采用等式（9）提出的“μ法则”，即预期μ越大的基金定投收益越高。而μ的计算方法以上已有实例，不再赘述。

本节我们研究“μ法则”除了是基金定投收益的评价标准外，是否可用于定投标的的选择。我们同样选用前文所述的 450 只开放式基金最近 5 年的基金净值数据，使用前 3 年的数据估计每只基金的μ，然后，根据μ的大小排序分十组，每组 45 只基金，分别计算每组在其后两年的定投收益，得到收益数据如下：

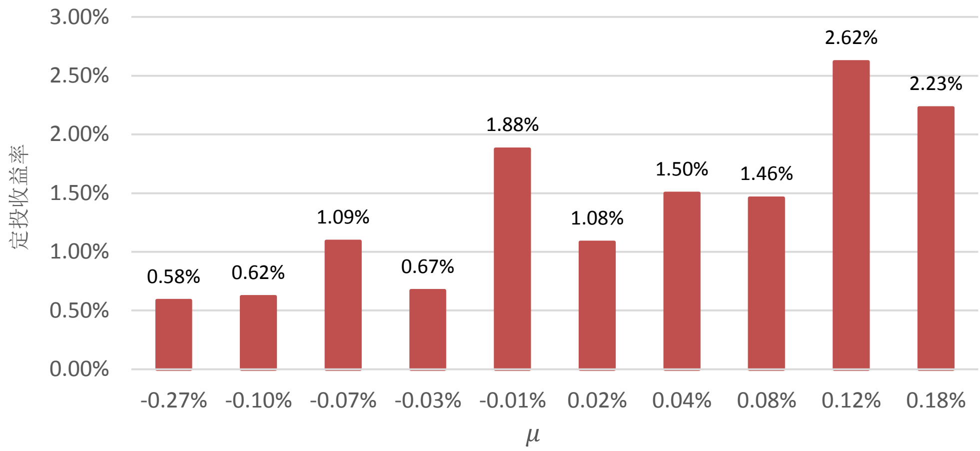
表格3：定投 2 年年化收益率对比

分位数	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
前 3 年的μ	-0.27%	-0.10%	-0.07%	-0.03%	-0.01%	0.02%	0.04%	0.08%	0.12%	0.18%
定投平均收益	0.58%	0.62%	1.09%	0.67%	1.88%	1.08%	1.50%	1.46%	2.62%	2.23%

资料来源：华泰证券研究所

同时将前 3 年各组合的μ值与后 2 年定投平均收益绘制如下：

图6: 漂移率 μ 与定投收益关系图



资料来源：华泰证券研究所

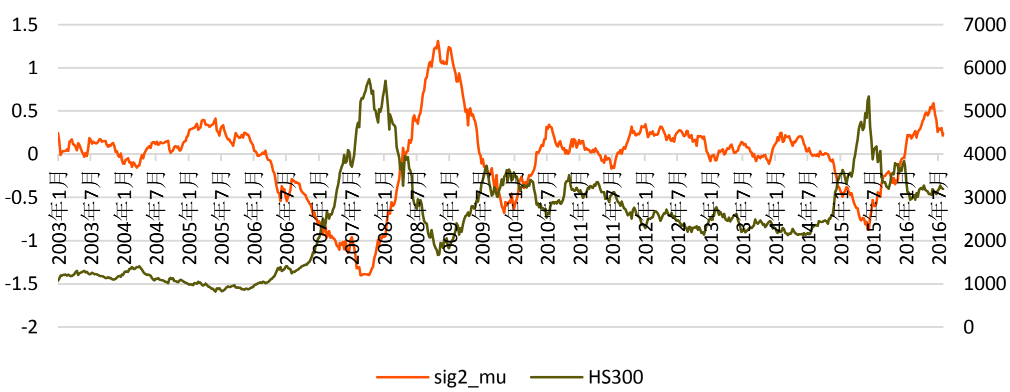
由图表数据可见一个比较清晰的规律：μ越大的分组中，基金定投的收益越高。因此我们认为，“μ法则”不仅仅可以作为基金定投收益的评价标准，同时也可以作为定投选择投资标的的参考方法。

定投时机的选择方法

在上文“连续时间模型的参数估计”中，根据资产价格每日对数收益率，我们可以估计资产价格的μ和σ。前文，我们给出了定投与一次投资的对比标准$\sigma^2-\mu$，以下，我们采用沪深 300 指数过去 1 年、5 年的每日收盘价数据滚动测算$\sigma^2-\mu$，并将其与沪深 300 指数进行对比分析，以此来探索定投时机选择的可行方法。

如图 7 是采用每个定投时点过去 1 年数据测算的$\sigma^2-\mu$值，我们可以明显的发现，在$\sigma^2-\mu$的值大于 0 时，指数大多处于震荡、下跌或没有明显上涨的形态，此时，定投优于一次性投资。在市场出现趋势性上涨较早期时，$\sigma^2-\mu$就已小于 0，提示一次性投资更优。我们发现，$\sigma^2-\mu$具有一定的预测作用，如若按照$\sigma^2-\mu$选择定投或一次性投资，具有明显的优势。

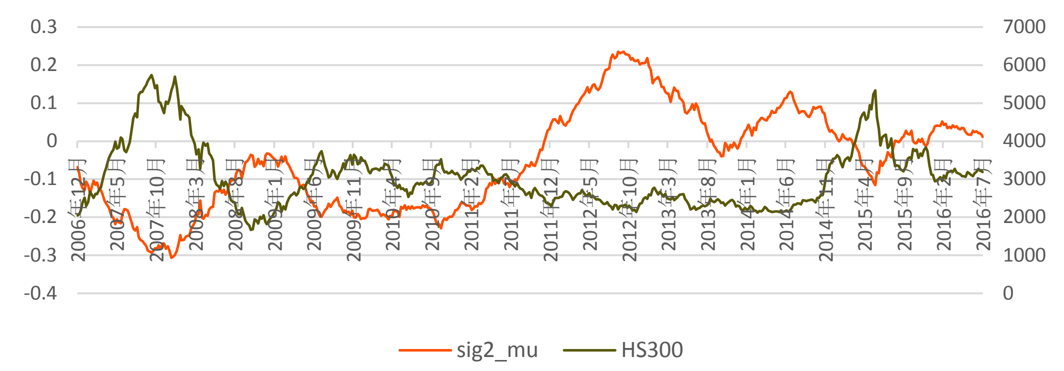
图7: $\sigma^2-\mu$的估计值（采用每个定投时点过去 1 年数据）



资料来源：华泰证券研究所

而图 8 是采用每个定投时点过去 5 年数据测算的$\sigma^2-\mu$值，由于数据时间较长，更多的是反应资产本身一个长期的属性，不能够较为及时的捕获市场变化，图中可见，$\sigma^2-\mu$值对于投资人采用定投或是一次性投资的指示作用明显弱于前例。

图8: $\sigma^2-\mu$的估计值（采用每个定投时点过去 5 年数据）



资料来源：华泰证券研究所

定投是否能够降低投资波动率的研究

华泰基金定投专题一《基金定投：分析方法与理论基础》，分析了不同市场条件下，定投降低择时风险的原理：无论是下跌市，还是上涨市场，定投在前期都能够有效的“跟上”市场波动的方向，而在震荡市场，则能够降低平均投资成本，为此，直观上理解，定投能够降低投资的波动率。然而，另一方面如前文所讨论，定投多期后会出现平均投资成本“钝化”的现象：平均投资成本变动对于市场波动敏感性大幅降低。一般在定投超过 20 期后，定投平均投资成本趋于稳定，此时，定投收益的波动主要受资产本身波动的影响。

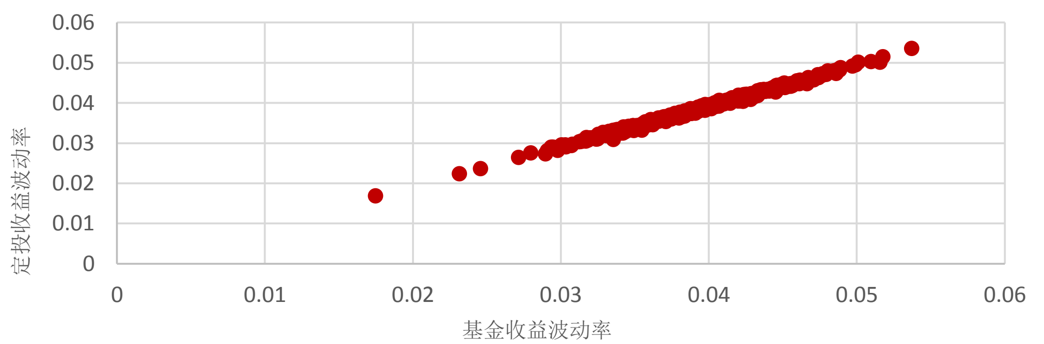
综上，我们推测，在期数较少的定投中，定投的波动与一次性投资会出现一定的差异；期数较长时，两种投资的波动都主要取决于资产波动，因此，波动的差异随着定投时间的拉长会不断弱化。

定投波动率与资产波动率相互关系的实证检验

在前文的理论证明中，由于无法推得波动率与定投收益关系的解析表达式，我们通过蒙特卡洛模拟的方法发现定投策略的波动率与标的资产波动率之间的规律（见前文“定投期望波动的蒙特卡洛模拟”），本节我们将采用实证的方法，进一步证明规律的现实有效性。

本节实证中，我们同样是采用前文所述的 450 只基金最近 5 年的净值数据，分别计算定投 20 次、50 次、100 次及 1,000 次（50 次、100 次的实证结果请见附录）定投收益波动率与基金收益波动率分布散点图：

图9: 定投波动率与资产波动率散点图（定投 20 次）



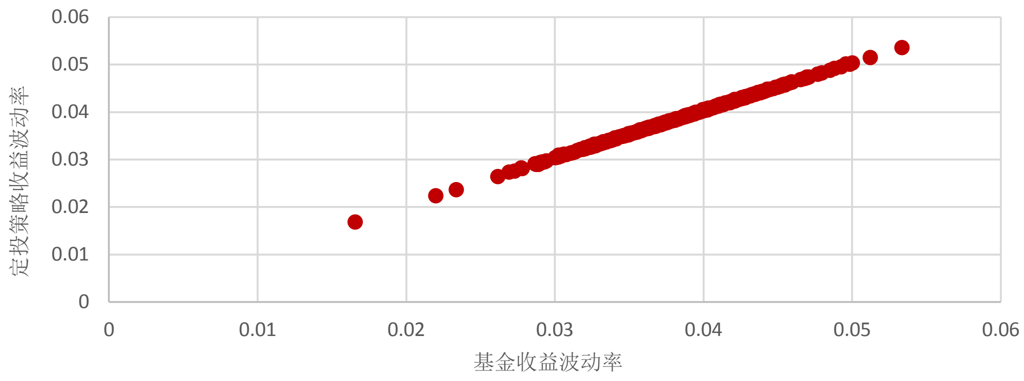
资料来源：华泰证券研究所

表格4: 定投收益波动率与基金波动率回归统计量（定投 20 次）

	系数	标准误差	t Stat	P-value
截距	0.0012	0.0001	8.9893	0.0000
基金波动率	0.9901	0.0036	275.7475	0.0000

资料来源：华泰证券研究所

图10: 定投波动率与资产波动率散点图（定投 1,000 次）



资料来源：华泰证券研究所

表格5: 定投收益波动率与资产波动率回归统计量

	系数	标准误差	t Stat	P-value
截距	-0.0003	0.0000	-12.9806	0.0000
基金波动率	0.9998	0.0007	1361.0264	0.0000

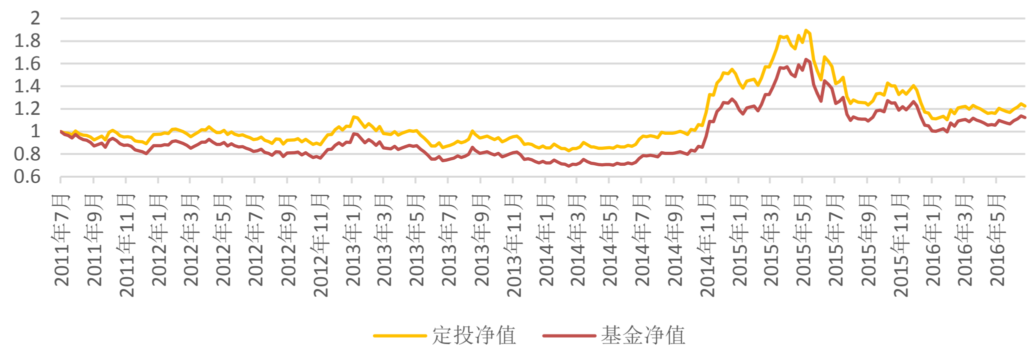
资料来源：华泰证券研究所

从以上分别定投 20 次和 1,000 次以及附录中定投 50 次和 100 次的散点图来看，次数越多的定投散点图的线性性越强，当然他们之间差异并不大。而从回归的结果来看，定投 20 次系数为 0.9901，定投 1,000 次的系数则高达 0.9998。可以认为，定投收益波动率与资产本身收益波动率随着定投次数的增加越来越接近，回归系数逐渐接近于 1。回归实证结果与我们前面的蒙特卡洛模拟所发现的规律具有一致性。

定投波动率与资产波动率相关关系的直观检验说明

为了更直观的理解定投波动与资产波动的关系，我们选取易方达上证 50 指数型基金（110003）为例进行定投实证。首先，我们计算每期份额的平均成本与投资收益；其次，绘制每单位定投份额的单位净值曲线；最后，将定投的净值曲线和基金本身的净值曲线（经过标准化，单位净值起点都为 1）作对比：

图11: 定投波动率与基金波动率散点图（定投 1000 次）



资料来源：华泰证券研究所

直观可见，定投多期后，定投策略净值走势与基金净值走势基本一致。说明定投多期后，平均投资成本"钝化"，使得定投波动的形态越加趋近于一次性投资。

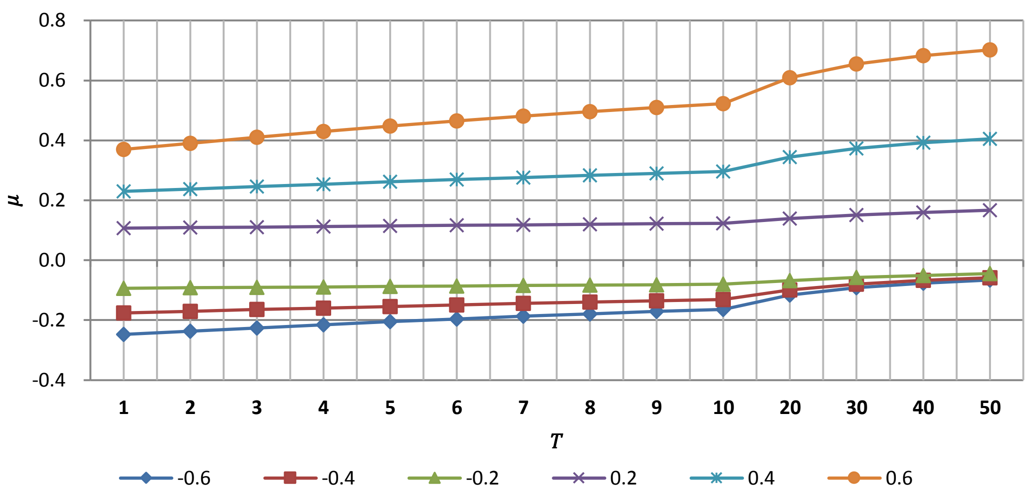
定投收益与定投时间长度的关系

将定投期望收益等式（9）转化为年化收益：

$$r = \left(\frac{e^{\mu T}-1}{\mu T}\right)^{1/T} - 1 \qquad \text{等式（14）}$$

上式是关于μ和T的增函数，定投的时间越长，年化期望收益越大。如图 12 与表格 6，我们计算μ从-0.6 至 0.6，在 T 为 1 至 30、50 的定投年化收益。通过这两张图表，我们可以明显的发现，在定投时间 T 小于 10（年）的情况下，r随着 T 的增大并未显著增大，尤其是μ的绝对值较小时，更是如此。市场实际中，大多数情况下$|\mu| \le 0.3$。给定$\mu = 0.2$，由等式（14）计算得的定投 1 年、3 年、5 年的年化收益相差不到 0.4%，差异非常小。此外，通过两张图表，我们也能观测到，无论μ多大，存在定投时间越长，年化收益越高的普遍现象，虽然增幅并不大。

图12: 定投年化收益率与μ、T的关系



资料来源：华泰证券研究所

表格6: 定投年化收益率与μ、T的关系

μ \ T	1	3	5	10	20	30
-0.6	-24.80%	-22.60%	-20.54%	-16.42%	-11.68%	-9.19%
-0.4	-17.58%	-16.49%	-15.44%	-13.11%	-9.88%	-7.95%
-0.2	-9.37%	-9.06%	-8.77%	-8.04%	-6.78%	-5.81%
0.2	10.70%	11.07%	11.43%	12.32%	13.86%	15.05%
0.4	22.96%	24.58%	26.15%	29.63%	34.45%	37.32%
0.6	37.02%	41.04%	44.78%	52.28%	60.92%	65.48%

资料来源：华泰证券研究所

定投收益与投资频率的关系

我们在本文开篇“采用连续时间模型的可行性与原因”说明了我们采用连续时间研究框架的可行性与原因。为了便于分析，获得简洁方便的解析解，我们令$N \to +\infty$,求出了定投在连续时间下的表达式。如果我们考虑离散模型，那么有：

$$E[V_2] = \sum_{i=0}^{N-1} E[\frac{M}{NS_{iT/N}} \times S_T] = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} e^{\mu T \times \frac{N-i}{N}} \qquad \text{等式（15）}$$

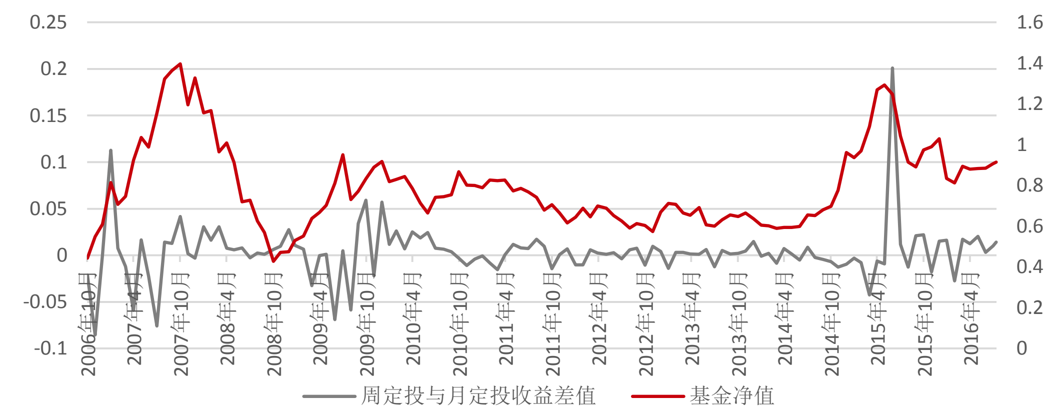
上式仍然是关于μT的增函数，函数在增减性上与连续时间的情形是一致的。在“定投期望收益解析解用于定投收益测算”中我们采用实证的方法证明了解析解的有效性。本节，我们要进一步证明实际定投过程中，对于给定的 T，按周频定投和按月频定投的差异性不显著。

实际上按周频定投和按月频定投的区别只在于 N 的取值不同。若 T=1，那么周频 N 的取值为 52，而月频 N 的取值为 12。从上式来看，在$\mu > 0$的情况下，当 N 增大时，$E[V]$是关于 N 的减函数，并且能较快的收敛于$\frac{e^{\mu T}-1}{\mu T}$。根据实际数据测算，一般情况下，资产价格满足$|\mu| \leq 0.3$，$\mu T$足够小，我们将上式进行泰勒展开取第一项，得到

$$E[V] = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} e^{\mu T \times \frac{N-i}{N}} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(1 + \mu T \times \frac{N-i}{N}) = 1 + \mu T \times \frac{N+1}{2N} \qquad \text{等式（16）}$$

上式是关于 N 的减函数，那么年化收益约等于 $\mu \times \frac{N+1}{2N}$，给定$|\mu| \leq 0.3$，我们计算月频、周频定投的差异，二者差别约等于$0.3 \times (\frac{13}{24} - \frac{53}{104})$，小于 1%。所以这里我们认为，按周定投与按月定投在收益上并没有太多区别，下面我们给出实证检验如下：

图13: 周定投与月定投收益差值



资料来源：华泰证券研究所

我们选取了嘉实沪深 300ETF 联接基金（160706）作为我们的定投标的，时间区间为 2006 年到 2016 年，在每个月月末开始定投 1 年，分别计算按月定投和按周定投的收益，然后做差得到上图。我们可以看到，在大部分时候，周定投和月定投的收益差都在 3%以内，只有在市场波动非常剧烈的时候，由于某些定投时间点出现净值波动较大的情况，会导致二者差别较大。然而在不加入择时的条件下，我们发现按周定投和按月定投的 10 年来平均收益差为 0.3%，几乎可以忽略不计。因此我们认为，按周定投和按月定投平均上来看收益上没有显著差别。

附录

连续时间模型下定投与一次性投资对比相关图表

表格7: 一年定投与一次性投资收益比（定投 20 次）

μ \ σ	0	0.2	0.4	0.6
-0.6	1.372	1.403	1.501	1.686
-0.4	1.230	1.257	1.342	1.501
-0.2	1.107	1.130	1.204	1.342
0	1.000	1.020	1.085	1.204
0.2	0.907	0.924	0.980	1.085
0.4	0.825	0.840	0.889	0.980
0.6	0.753	0.767	0.810	0.889

资料来源：华泰证券研究所

表格8: 三年定投与一次性投资收益比（定投 20 次）

μ \ σ	0	0.2	0.4	0.6
-0.6	1.417	1.455	1.578	1.820
-0.4	1.248	1.279	1.380	1.578
-0.2	1.111	1.136	1.219	1.380
0	1.000	1.020	1.087	1.219
0.2	0.910	0.926	0.980	1.087
0.4	0.837	0.850	0.894	0.980
0.6	0.777	0.788	0.824	0.894

资料来源：华泰证券研究所

表格9: 五年定投与一次性投资收益比（定投 20 次）

μ \ σ	0	0.2	0.4	0.6
-0.6	1.458	1.502	1.647	1.934
-0.4	1.266	1.300	1.416	1.647
-0.2	1.115	1.142	1.232	1.416
0	1.000	1.021	1.090	1.232
0.2	0.913	0.929	0.981	1.090
0.4	0.848	0.860	0.899	0.981
0.6	0.800	0.809	0.838	0.899

资料来源：华泰证券研究所

表格10: 一年定投与一次性投资收益比（定投 50 次）

μ \ σ	0	0.2	0.4	0.6
-0.6	1.371	1.402	1.499	1.681
-0.4	1.230	1.257	1.341	1.499
-0.2	1.107	1.130	1.204	1.341
0	1.000	1.020	1.084	1.204
0.2	0.906	0.924	0.980	1.084
0.4	0.824	0.840	0.889	0.980
0.6	0.752	0.766	0.809	0.889

资料来源：华泰证券研究所

表格11: 三年定投与一次性投资收益比（定投 50 次）

μ \ σ	0	0.2	0.4	0.6
-0.6	1.413	1.450	1.571	1.808
-0.4	1.247	1.277	1.377	1.571
-0.2	1.111	1.136	1.217	1.377
0	1.000	1.020	1.087	1.217
0.2	0.910	0.926	0.980	1.087
0.4	0.836	0.849	0.894	0.980
0.6	0.775	0.787	0.823	0.894

资料来源：华泰证券研究所

表格12: 五年定投与一次性投资收益比（定投 50 次）

μ \ σ	0	0.2	0.4	0.6
-0.6	1.452	1.495	1.636	1.916
-0.4	1.263	1.297	1.410	1.636
-0.2	1.115	1.141	1.230	1.410
0	1.000	1.021	1.089	1.230
0.2	0.913	0.928	0.981	1.089
0.4	0.847	0.858	0.898	0.981
0.6	0.797	0.806	0.836	0.898

资料来源：华泰证券研究所

表格13: 一年定投与一次性投资收益比（定投 100 次）

μ \ σ	0	0.2	0.4	0.6
-0.6	1.371	1.401	1.498	1.680
-0.4	1.230	1.256	1.341	1.498
-0.2	1.107	1.130	1.204	1.341
0	1.000	1.020	1.084	1.204
0.2	0.906	0.924	0.980	1.084
0.4	0.824	0.840	0.889	0.980
0.6	0.752	0.766	0.809	0.889

资料来源：华泰证券研究所

表格14: 三年定投与一次性投资收益比（定投 100 次）

σ / μ	0	0.2	0.4	0.6
-0.6	1.412	1.449	1.569	1.804
-0.4	1.246	1.277	1.376	1.569
-0.2	1.111	1.136	1.217	1.376
0	1.000	1.020	1.087	1.217
0.2	0.909	0.926	0.980	1.087
0.4	0.835	0.849	0.893	0.980
0.6	0.775	0.786	0.822	0.893

资料来源：华泰证券研究所

表格15: 五年定投与一次性投资收益比（定投 100 次）

σ / μ	0	0.2	0.4	0.6
-0.6	1.450	1.493	1.633	1.911
-0.4	1.262	1.296	1.409	1.633
-0.2	1.115	1.141	1.230	1.409
0	1.000	1.021	1.089	1.230
0.2	0.912	0.928	0.981	1.089
0.4	0.846	0.858	0.898	0.981
0.6	0.796	0.805	0.835	0.898

资料来源：华泰证券研究所

表格16: 一年定投与一次性投资收益比（定投 1,000 次）

σ / μ	0	0.2	0.4	0.6
-0.6	1.370	1.400	1.497	1.679
-0.4	1.229	1.256	1.341	1.496
-0.2	1.107	1.130	1.204	1.339
0	1.000	1.020	1.085	1.204
0.2	0.906	0.924	0.980	1.085
0.4	0.824	0.840	0.889	0.980
0.6	0.752	0.766	0.809	0.889

资料来源：华泰证券研究所

表格17: 三年定投与一次性投资收益比（定投 1,000 次）

σ / μ	0	0.2	0.4	0.6
-0.6	1.410	1.447	1.566	1.799
-0.4	1.246	1.276	1.374	1.567
-0.2	1.111	1.135	1.217	1.375
0	1.000	1.020	1.087	1.216
0.2	0.909	0.926	0.980	1.087
0.4	0.835	0.849	0.893	0.981
0.6	0.774	0.786	0.822	0.893

资料来源：华泰证券研究所

表格18: 五年定投与一次性投资收益比（定投 1,000 次）

μ \ σ	0	0.2	0.4	0.6
-0.6	1.447	1.490	1.630	1.904
-0.4	1.261	1.295	1.407	1.628
-0.2	1.114	1.141	1.229	1.406
0	1.000	1.020	1.089	1.228
0.2	0.912	0.928	0.981	1.089
0.4	0.846	0.858	0.898	0.981
0.6	0.795	0.804	0.834	0.897

资料来源：华泰证券研究所

定投期望波动的蒙特卡洛模拟相关图表

表格19: 不同参数下波动率模拟（定投 20 次）

μ \ σ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
-0.6	0.002	0.083	0.165	0.251	0.330	0.413	0.496
-0.4	0.001	0.083	0.167	0.251	0.336	0.416	0.494
-0.2	0.000	0.084	0.166	0.251	0.332	0.418	0.497
0	0.000	0.083	0.168	0.250	0.337	0.420	0.504
0.2	0.000	0.084	0.169	0.253	0.340	0.420	0.505
0.4	0.001	0.085	0.168	0.253	0.336	0.425	0.506
0.6	0.002	0.085	0.170	0.252	0.339	0.419	0.506

资料来源：华泰证券研究所

表格20: 不同参数下波动率模拟（定投 50 次）

μ \ σ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
-0.6	0.001	0.092	0.184	0.277	0.368	0.458	0.550
-0.4	0.001	0.092	0.185	0.276	0.367	0.458	0.549
-0.2	0.000	0.092	0.183	0.277	0.368	0.462	0.552
0	0.000	0.092	0.184	0.276	0.368	0.462	0.553
0.2	0.000	0.092	0.185	0.276	0.368	0.462	0.554
0.4	0.001	0.093	0.184	0.277	0.369	0.462	0.551
0.6	0.001	0.093	0.185	0.277	0.370	0.463	0.554

资料来源：华泰证券研究所

表格21: 不同参数下波动率模拟（定投 100 次）

μ \ σ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
-0.6	0.001	0.095	0.192	0.287	0.381	0.475	0.571
-0.4	0.000	0.095	0.191	0.287	0.382	0.477	0.572
-0.2	0.000	0.096	0.191	0.287	0.382	0.478	0.574
0	0.000	0.096	0.191	0.288	0.381	0.480	0.572
0.2	0.000	0.096	0.191	0.286	0.382	0.477	0.575
0.4	0.000	0.096	0.191	0.288	0.383	0.478	0.572
0.6	0.001	0.096	0.191	0.287	0.382	0.479	0.575

资料来源：华泰证券研究所

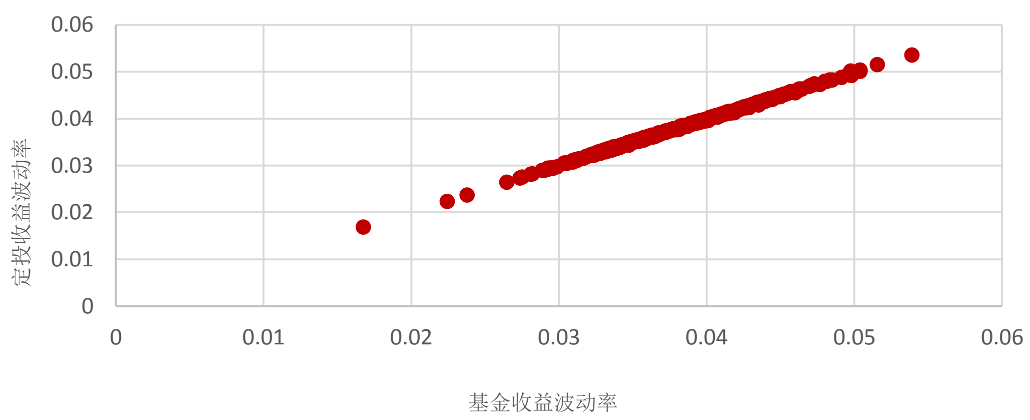
表格22: 不同参数下波动率模拟（定投 1,000 次）

μ \ σ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
-0.6	0.000	0.099	0.198	0.298	0.397	0.496	0.596
-0.4	0.000	0.099	0.199	0.298	0.397	0.497	0.596
-0.2	0.000	0.099	0.199	0.298	0.397	0.497	0.596
0	0.000	0.099	0.199	0.298	0.397	0.497	0.596
0.2	0.000	0.099	0.199	0.298	0.398	0.497	0.596
0.4	0.000	0.099	0.199	0.298	0.398	0.497	0.596
0.6	0.000	0.099	0.199	0.298	0.397	0.497	0.596

资料来源：华泰证券研究所

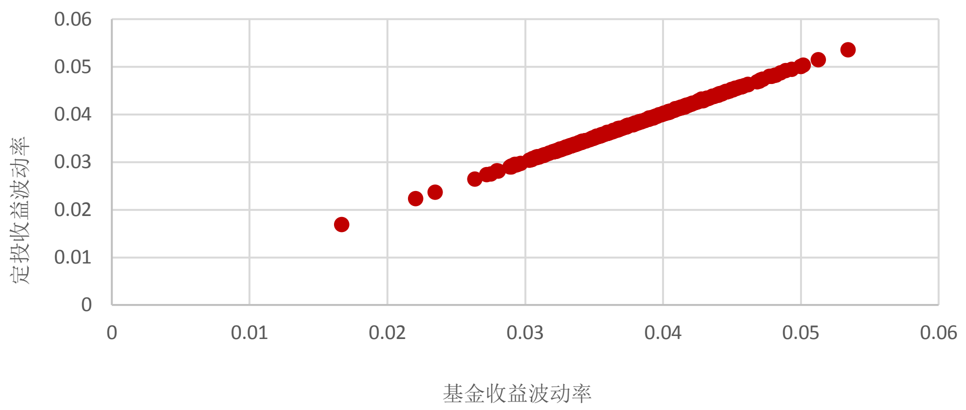
不同定投期数下定投与资产波动率关系的实证研究相关图表

图14: 定投波动率与基金波动率散点图（定投 50 次）



资料来源：华泰证券研究所

图15: 定投波动率与基金波动率散点图（定投 100 次）



资料来源：华泰证券研究所

免责申明

评级说明

行业评级体系
－报告发布日后的 6 个月内的行业涨跌幅相对同期的沪深 300 指数的涨跌幅为基准;
－投资建议的评级标准
增持行业股票指数超越基准
中性行业股票指数基本与基准持平
减持行业股票指数明显弱于基准

公司评级体系
－报告发布日后的 6 个月内的公司涨跌幅相对同期的沪深 300 指数的涨跌幅为基准;
－投资建议的评级标准
买入股价超越基准 20%以上
增持股价超越基准 5%-20%
中性股价相对基准波动在-5%~5%之间
减持股价弱于基准 5%-20%
卖出股价弱于基准 20%以上

华泰证券研究

南京
南京市建邺区江东中路 228 号华泰证券广场 1 号楼/邮政编码：210019
电话：86 25 83389999 /传真：86 25 83387521
电子邮件：ht-rd@htsc.com

北京
北京市西城区太平桥大街丰盛胡同 28 号太平洋保险大厦 A 座 18 层
邮政编码：100032
电话：86 10 63211166/传真：86 10 63211275
电子邮件：ht-rd@htsc.com

深圳
深圳市福田区深南大道 4011 号香港中旅大厦 24 层/邮政编码：518048
电话：86 755 82493932 /传真：86 755 82492062
电子邮件：ht-rd@htsc.com

上海
上海市浦东新区东方路 18 号保利广场 E 栋 23 楼/邮政编码：200120
电话：86 21 28972098 /传真：86 21 28972068
电子邮件：ht-rd@htsc.com