MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Las diversas concepciones de la variable algebraica en la enseñanza de ecuaciones

Different conceptions of the algebraic variable in teaching equations

Jorge Luis Mayoral

Tutora académica:
Raquel Díaz Sánchez

Especialidad: Matemáticas
DNI: 05952482J
Convocatoria: Junio 2020

V.º B.º DEL TUTOR/A PARA PRESENTAR EL TFM A DEFENSA

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
AUTORIZACIÓN DE PRESENTACIÓN DE TRABAJOS FIN DE MÁSTER

CURSO: 2019-20

TRABAJO:

Apellidos y nombre del autor/a: Mayoral Pérez, Jorge Luis.

Título del trabajo: Las distintas concepciones de la variable algebraica en la enseñanza de ecuaciones.

Título en inglés: Different conceptions of the algebraic variable in teaching equations.

Especialidad cursada: Matemáticas.

Convocatoria: x Junio Septiembre Febrero.

TUTOR/A

Apellidos y nombre: Díaz Sánchez, Raquel.

E-mail: radiaz@ucm.es Teléfono: 913944465.

Facultad: CC. Matemáticas.

Departamento: Álgebra, Geometría y Topología.

VISTO BUENO

Porcentaje de coincidencia del trabajo con trabajos anteriores (utilizando el programa UNICHECK): 1'52 %

Observaciones ___

El trabajo indicado reúne las condiciones necesarias para proceder a su presentación ante la Comisión Evaluadora.

En Madrid a 8 de Junio de 2020

Raquel Díaz

Firma del tutor/a y sello del Departamento,

La autorización original firmada y sellada por el tutor/a se incluirá en la segunda página del documento de TFM

A esos nombres que, como diría Marcel Proust, son como globitos llenados de aire u otro gas que, al agujerearlos y hacer salir lo que contienen, respiramos el ambiente y las sensaciones que encierran. Y, en especial, a ese globito que me hace respirar el aire de este año de máster, el aire de aquellos días de celebración de las amistades encontradas de manera fortuita y, desde luego, el aire del amor.

A ese globito, el de "La Comisión"

Resumen

El presente trabajo trata de ser, esencialmente, una propuesta didáctica que facilite y profundice el desarrollo del pensamiento algebraico, enmarcándolo en el tema de ecuaciones en el curso de segundo de E.S.O. Para tal fin, ponemos el acento en las diferentes concepciones que pueden darse del álgebra escolar, dando una estrecha relación con las distintas concepciones que ha habido del álgebra en la historia. Más concretamente, desarrollamos cada una de estas concepciones valiéndonos de algunos marcos teóricos, como el modelo 3UV (del inglés, *three uses of variable*), que analiza los diversos usos de la variable algebraica, permitiendo la organización de los contenidos de una manera precisa, facilitando los diversos grados de abstracción en cada una de las concepciones y flexibilizando el manejo de la variable según el contexto de las cuestiones planteadas. Además, damos una secuenciación para la presentación de los contenidos en diversas sesiones, que estructuramos haciendo uso de la Teoría de los momentos didácticos, que presenta las fases que experimenta, o debe experimentar un alumno en el proceso de aprendizaje. La forma en la que se vertebra la propuesta es, principalmente, mediante la exposición y análisis de problemas, algunos de ellos históricos, que ilustran y motivan la introducción de las diversas concepciones del álgebra así como los distintos usos de la variable algebraica.

Abstract

This piece of work intends to be a didactic proposal to succeed in the development of algebraic thinking of students in 2nd year Compulsory Secondary Education during the equations unit. For this purpose, several conceptions of school algebra are presented. All of them are presented with a close relation to the different meanings of algebra throughout history. In this whole context, we make use of some theoretical frameworks, like the 3UV (*three uses of variable*) model. This model allows us to develop some problems and exercises in order to structure the several transition stages between the conceptions of algebra and the uses of the variable. Some lessons are presented as well in order to provide a concrete sequence of the contents. In this lessons we have used the theoretical framework called *Teoría de los momentos didacticos*. This framework makes special emphasis on the different and necessary scenarios of the student learning process.

Índice general

Capítulo 1

Planteamiento del problema y justificación

Durante mi periodo de prácticas en el Hospital Universitario Niño Jesús, en el que he atendido a alumnos de diversos niveles de una manera más particular que como suele ser habitual en el ámbito de la secundaria, he tenido la oportunidad de presentar las primeras nociones de álgebra a distintos alumnos. A lo largo de esta presentación, he podido ver y observar un gran número de dificultades que se les presentan a la hora de, por un lado, entender los conceptos fundamentales con los que se trabajan (incógnita, variable algebraica, expresión algebraica, etc.) y, por otro, entender la necesidad de su uso, es decir, no solo los conceptos, sino la razón por las que son concebidos (resolver problemas que, de otra manera, son más complicados o, incluso, irresolubles).

En primer lugar, a la hora de desarrollarse el contenido teórico de la unidad de ecuaciones en segundo de E.S.O., los alumnos no presentan muchas complicaciones con relación a la estructura aritmetizada de las expresiones algebraicas. Sin embargo, la escasa motivación y la falta de comprensión de la necesidad de los contenidos hacen que se perciba una falta de interés por el pensamiento algebraico, dejando este como un mero programa de cálculo en el que aparecen símbolos. Esta falta de motivación, en muchos casos, es una falta de fundamentación de los contenidos que se exponen, haciendo que resulten artificiales, sin relación a nada más que a ellos mismos. Hay una predisposición constante en el ámbito educativo, tanto en la secundaria como en el terreno universitario, de hacer de los contenidos un dogma, líneas de pensamiento que son las que son, auto-fundamentadas en sí mismas. Y, concretamente, esta forma de ver las cosas, en lo que a álgebra se refiere, es origen de fuertes complicaciones a la hora de trabajar problemas, pues, en el terreno escolar, el álgebra no es una rama más, como puede ser la geometría o la aritmética, es un instrumento, igual que lo fue en sus orígenes, de modelización y resolución de cuestiones y problemas concretos.

En segundo lugar, y con relación a lo primero, existen una gran cantidad de problemas por parte de los alumnos a la hora de entender conceptos fundamentales en el terreno del álgebra, como son los de variable algebraica o ecuación equivalente. Esto, en muchos casos, está motivado por la falta de interpretación de los símbolos con los que se trabajan, como puede ser el “=” en una ecuación, o con el uso que se está dando a los símbolos, los cuales tienen usos diferentes en contextos diferentes.

Tras estas consideraciones, resulta interesante plantearse las siguientes cuestiones:

¿Es posible hacer patente la necesidad de las distintas formas de pensamiento algebraico a los alumnos que se encuentran por primera vez, o se están iniciando, en este terreno? ¿Puede mejorarse la compresión de conceptos algebraicos, en secundaria, si se tratan y evidencian las distintas formas de concebirse el álgebra, atendiendo a los distintos grados de abstracción y a las visiones que ha habido en la historia?

El presente trabajo se centrará en dar diversos enfoques a las preguntas anteriores y dar una propuesta didáctica sobre el tema de ecuaciones en alumnos de segundo de la E.S.O.

Capítulo 2

Fundamentación teórica y estado de la cuestión

Atendiendo a los problemas que hemos comentado en el punto anterior, y que son presentes en la mayor parte de la etapa de la secundaria obligatoria, vamos a presentar un marco teórico en el que se puedan desarrollar objetivos y metodologías que, en cierta manera, los subsanen.

Los marcos teóricos sobre los que nos vamos a apoyar a lo largo de todo el trabajo son, por un lado, el modelo 3UV [Álvarez et al., 2015], que nos permitirá desarrollar metodologías para que el alumno sea capaz de comprender de una manera concreta, y desde diferentes puntos de vista, el *pensamiento algebraico*, trabajando desde los diferentes usos de la *variable algebraica*. Además, y paralelamente a lo anterior, trataremos de enmarcar cada uno de estos usos con las distintas concepciones del álgebra que pueden darse [Usiskin, 1988], así como el papel que han jugado en la historia cada una de ellas. En segundo lugar, y con el fin de modelar la forma en la que los alumnos pueden enfrentar diversas cuestiones de carácter algebraico, usaremos la Teoría de los momentos didáctico, englobada por la Teoría antropológica de lo didáctico [Baeza Alba and Sordo Juanena,], [Chevallard, 1999].

Uno de los postulados básicos que vamos a considerar es que: *las distintas concepciones del álgebra determinan de manera sustancial la manera en la que esta se explica y enseña*. Es claro que la definición de álgebra, en el marco escolar, es diversa, por lo que vale la pena detenerse a estudiar cada una de sus perspectivas. Además, estas concepciones no son arbitrarias en absoluto. Quiero decir, no son concepciones que se han ido construyendo y fabricando con el fin de enseñarse de una u otra; son concepciones que, en última instancia, atienden a una necesidad histórica de dar puntos de apoyo a determinadas cuestiones y preguntas. Atendiendo a esa necesidad histórica ya comentada, vamos a asumir, como diría Brousseau, una directa relación entre el aprendizaje del alumno y el propio desarrollo de la sociedad humana.

A partir de las dos posiciones anteriores, llegamos a que el alumno va a sufrir, o más bien, va a relacionarse con todas y cada una de las concepciones que ha habido en el álgebra de la misma manera que se ha dado a lo largo de la historia, haciendo patente el carácter instrumental y modelizador que tuvo en su día para tratar cuestiones geométricas, funcionales y de generalización de patrones recurrentes. La maduración de estas concepciones permite una potenciación del desarrollo del pensamiento algebraico.

Comenzaremos dando de manera esquemática las diferentes concepciones del álgebra que pueden verse en distintos contextos del marco escolar, siguiendo la presentación de [Usiskin, 1988]. Además de presentarlas, vamos a tratar de justificarlas no solo como *formas naturales* de entender el álgebra, sino como concepciones históricas [Van der Waerden, 2013] que fueron necesarias para desarrollar, en última instancia, el pensamiento algebraico moderno, presentado en el marco universitario. Posteriormente, presentaremos el modelo 3UV, que nos servirá de guía para estructurar los problemas a los que los alumnos deben enfrentarse con la intención de que transpongan cada una de las concepciones y generen flexibilidad a la hora de adecuar cada una de ellas a los contextos de los problemas que se traten. Finalmente, y de manera esquemática, presentaremos los *momentos* que experimenta un alumno al hacer frente a un problema o tarea, con el fin de desarrollar de manera adecuada la forma en la que presentar y motivar al alumno las diferentes técnicas y contenidos.

2.1. Concepciones del álgebra escolar

Como ya hemos dicho, vamos a presentar distintas concepciones dadas en el marco del álgebra escolar, tratando dicha concepción tanto a nivel teórico como histórico, con el fin de justificar la necesidad de su existencia. Desde luego, la historia del álgebra no puede categorizarse de una manera separada y clara, pues las distintas formas del pensamiento algebraico se han ido dando de una manera entrelazada.

Las concepciones, siguiendo la categorización dada por Ursiskin[Usiskin, 1988], se dividen en: el álgebra como una aritmética generalizada; el álgebra como el estudio de los procesos para resolver un determinado problema o cuestión; el álgebra como el estudio de las relaciones entre cantidades; y el álgebra como el estudio de estructuras matemáticas.

A) Álgebra como aritmética generalizada. Esta concepción consiste simplemente en dar una generalización de patrones. Esta generalización puede pensarse de dos maneras que conducen a una misma estructura. En primer lugar, podemos imaginar las cantidades numéricas a, b y c. Estas magnitudes cumplen las propiedades: $a + b = b + a$, $ab = ba$, $a(b + c) = ab + ac$, etc. Es decir, cuando escribimos esas propiedades, pensamos en números que se están operando. Esta forma es la expresión escrita de las propiedades numéricas, y da lugar a la expresión escrita del álgebra. Pero también podemos pensar que las letras son meros símbolos, y lo que estamos dando es una relación abstracta entre estos símbolos. Estas ideas recuerdan a una estructura axiomática como puede ser la de grupo o cuerpo en matemáticas. Estas definiciones axiomáticas tuvieron varias fases, desde la aparición de estructuras algebraicas como la de cuerpo o la de grupo, que fue un desarrollo largo desde Bombelli (1560) con las estructuras de los números complejos hasta las nociones de grupo abstracto que llegaría de la mano de Weber y Camille Jordan, en torno a 1870.

Hay que destacar, dentro de esta concepción, que la forma de entender la *variable algebraica* es crucial. En primer lugar, se piensa en la *variable algebraica* como un *número*, con sus mismas propiedades con relación a las operaciones. Este aspecto, el pensar las *indeterminadas* como números, no nace hasta que Renè Descartes, al comienzo de La Géométrie, en 1637, construye la aritmética de los números reales tal y como se conoce hoy en día. En este mismo tratado, da a luz, paralelamente con Pierre de Fermat, a lo que se consolidará como la geometría analítica. Antes de esta aritmética, la notación algebraica y el uso de sus variables tenían una interpretación muy concreta, heredada directamente del mundo clásico, simbolizaban longitudes, el producto de dos longitudes, áreas y de tres, volúmenes. Trabajar con ecuaciones de grado mayor que tres suponía un verdadero quebradero de cabeza, ante la imposibilidad de construir geométricamente el problema en términos de *áreas*, etc. Así pues, autores anteriores como François Viète, posiblemente el padre de la notación algebraica actual y uno de los principales representantes de la resolución de ecuaciones por radicales, expresaba ecuaciones cuadráticas como $x^2 + bx + c^2 = 0$. Es decir, requería que las operaciones fueran sumas de áreas y, por tanto, la cantidad, c, debía aparecer elevada al cuadrado. Un ejemplo más concreto aún, en su obra *Isagoge* (1591) escribe la ecuación (en notación actual) $BA^2 + DA = Z$ como: *"B in A Quadratum plùs D plano in A aequari Z solido"*. Es decir, su ley de homogeneidad se expresa haciendo referencia a A y B como segmentos, D como un área (plano) y Z un volumen (solido), lejos de la interpretación en términos puramente numéricos que existirá desde Desacartes. Vemos, en todo este contexto, la relación entre la *sintaxis* y la semántica de la variable que trataremos, con más detalle, en II, página 13.

En segundo lugar, la *variable algebraica*, pensada como ese *símbolo al que le damos unas reglas de juego* es, en muchos casos, la percepción más consolidada en la actualidad dentro del mundo académico y, en muchos casos, se trata de dar esa misma percepción en el marco escolar. Esta se deriva, como ya he dicho, de esas primeras formalizaciones de las nociones de grupo y cuerpo en términos axiomáticos expresadas a finales del siglo XIX y que terminan de asentarse en la matemática *moderna*, en los tiempos de Cantor, Frege, Zermelo, etc, durante los intentos de la fundamentación del cálculo y de la matemática misma. En este aspecto, las variables son pensadas como símbolos con estructuras análogas a la que tienen los números, por lo que la *sustitución* de una variable por un número queda legitimada desde la lógica, no por el supuesto previo de que es un *número*. Comentamos más en detalle estas estructuras en la última de las concepciones que damos.

B) Álgebra como el estudio de los procesos para resolver un determinado problema. Esta concepción atiende principalmente a la traducción del lenguaje natural al algebraico y a usar este para resolver los problemas que se plantean. En última instancia, atiende a los métodos de resolución de las indeterminadas de una ecuación. Por ejemplo:

"Pedro tiene tres años más que María, que tiene 3. ¿Qué años tiene Pedro?"

En este caso, si forzamos la aplicación del lenguaje algebraico (innecesario en este caso, pues este problema es resoluble por aritmética elemental), el problema responde a la resolución de la ecuación $x - 3 = 3$. Con lo que respecta a esta concepción, en la mayoría de los casos entendemos que, necesariamente, la variable o la letra debe ser un número concreto que hay que determinar, de ahí el nombre *indeterminada.*

Desde luego, y a nivel histórico, habría que matizar mucho la noción de *indeterminada.* En el caso de Viète, por ejemplo, ya distinguía con claridad los *parámetros* de las *variables*, es decir, distinguía con claridad cantidades fijadas de antemano que podían considerarse *conocidas* (que ya él dentaba por consonantes B,C, D,...) y aquellas *incógnitas* (*variables*), a determinar (que denotaba por vocales A,E,...). Sin embargo, el presupuesto de que cada variable era una cantidad o unas cantidades aún no determinadas es una cuestión delicada. Muchos matemáticos como Euler, D'Alambert o Lagrange, a la hora de tratar la resolución y factorización de polinomios, presuponían la existencia de las raíces, es decir, tenían esa noción de variable como *cantidad o cantidades a determinar.* Sin embargo, dado que no es hasta la disertación de 1799 de Gauss, en la que demuestra su Teorema Fundamental (actualmente, Teorema Fundamental del Álgebra), no se podía o no debería haberse podido suponer que las ecuaciones siempre tienen soluciones, es decir, que las letras realmente pueden ser entendidas como cantidades por determinar. De hecho, en las primeras líneas de su primera demostración (dio cuatro en total), Gauss criticó a los matemáticos anteriormente citados que en sus demostraciones presupusieran la existencia de las raíces. Gauss fue el primero que realmente demostró que las raíces debían ser números complejos y, por tanto, podían entenderse como cantidades desconocidas dentro de un conjunto numérico concreto. Después, y con la misma esencia, se pasó al estudio de *bajo qué conjuntos numéricos* las variables son realmente cantidades indeterminadas que, además, pueden determinarse mediante un método (resolución de ecuaciones por radicales, etc.) y no meros símbolos. Estas ideas determinaron lo que sería la teoría de extensión de cuerpos y la teoría de Galois que conocemos hoy en día.

C) Álgebra como estudio de la relación entre cantidades. Esta concepción se basa en entender las expresiones algebraicas como relaciones entre las variables. Por ejemplo, las fórmulas de áreas o las funciones lineales representan una relación entre magnitudes o variables que siempre se preserva. Este aspecto es fundamental a la hora de, no solo entender el álgebra, sino la relación que tiene el álgebra con las demás disciplinas como el análisis o la geometría. Por ejemplificar de una manera clara esta situación, imaginemos la expresión $x - 1$, y preguntamos:

"¿Qué ocurre cuando acercamos el valor de x a 1?"

En este caso, estamos preguntando por el comportamiento de una expresión. Es decir, no se están pensando las variables como números genéricos ni como indeterminadas, pues no podemos pensar: *" ¿qué le pasa a $x - 1$ cuando $x = 2$ se acerca a 1?".* Lo que se está expresando es una relación, una relación funcional. Esta concepción, desde el punto de vista de las relaciones funcionales, es de vital utilidad a la hora de entender, por ejemplo, el uso del álgebra para resolver cuestiones de funciones polinómicas o para el estudio de rectas y planos en geometría analítica.

En lo concerniente a la historia, esta concepción se ha ido entrelazando con las concepciones anteriores desde antes incluso del *Ars Magna*, de Cardano, de 1545, en el que el estudio y resolución radical de las ecuaciones de tercer y cuarto grado se ven como los ceros de ciertas relaciones polinómicas. Incluso en las demostraciones de Gauss de su teorema fundamental, la interpretación de las expresiones algebraicas como relaciones funcionales ha sido clave para todas ellas. En fin, esta visión ha estado siempre presente, pues el análisis y la interpretación matemática en términos de funciones ha sido siempre una potente arma a la hora de desarrollar cualquier rama y teoría. Tal ha sido la influencia del álgebra en cuestiones de análisis que, en tiempos de Leonard Euler (1707-1783), el concepto de *función* era entendido como una *extensión de una expresión algebraica*, bajo la idea, que actualmente sabemos que es falsa, de que *toda función es expresable como una serie de potencias, es decir, como un polinomio de longitud "finita" o "infinita".*

Por ejemplificar de manera más concreta el carácter del álgebra respecto a esta concepción en el marco de la historia, puede decirse que, ya en el primer tercio del siglo XVII, el álgebra era un instrumento por el cual se podían responder cuestiones de diversa índole matemática. El nacimiento del álgebra como instrumento independiente (más ligado a la lógica que a la matemática) al servicio de toda la matemática fue una de las grandes aportaciones de Descartes en su *Geometría analítica*[1]. Es decir, el álgebra era un sistema de modelización funcional de la geometría, con sus propias reglas, vagamente esclarecidas desde lo formal, pero increíblemente útiles para resolver todo tipo de cuestiones en el campo de la geometría. De hecho, esa concepción como *mero instrumento de la lógica*, sin un lugar donde fundamentarse como tenía la geometría, supuso una ventaja más que un inconveniente, pues, en palabras de Morris Kline,

"Y es una suerte que los matemáticos fuesen crédulos y hasta ingenuos, y no lógicamente escrupulosos (refiriéndose a la fundamentación de los sistemas de números y del álgebra); pues la creación debe preceder a la formalización y la fundamentación lógica, y el más grande periodo de creación matemática acababa de comenzar (referido a los siglos XVIII y XIX)".

D) El álgebra como el estudio de estructuras. Esta concepción del álgebra es, por así decirlo, la más común dentro de la perspectiva universitaria. La concepción del álgebra no solo como una mera generalización, como se ha visto en la primera de nuestras concepciones, sino como unas *ligaduras* entre diferentes estructuras. Por ejemplificar esto, imaginemos que se nos pide factorizar el polinomio $x^2 - 1$. En este caso, al factorizarlo, obtenemos la expresión $(x+1)(x-1)$. Cuando realizamos esta factorización, no pensamos, o no debemos pensar, que la variable es

[1] Este término, *"analítica"*, que señala a *"análisis"*, no debe interpretarse como tal, usando nuestros ojos modernos. La palabra *"análisis"* a la que Descartes, y otros muchos, hacen referencia, tiene un origen clásico, desde Platón (387 a.C-347 a.C). En este marco clásico, este término se interpreta como: *tomar lo buscado como admitido para que, de este modo, llegar a lo admitido como algo verdadero*. Es decir, este término es el contrapuesto al de *"síntesis"*, que se entiende como: *partir de algo admitido como verdadero para llegar a consecuencias que pueden admitirse como verdaderas*. Desde este punto de vista, el uso del término está enteramente dedicado al de *"álgebra"*, lo que llama Descartes *"análisis de los geómetras"* y matiza en su *Discurso del método* diciendo: *"análisis de los antiguos y álgebra de los modernos"* (en el contexto del siglo XVII). De hecho, hacia 1590, Vietè había rechazado el término *"álgebra"*, sin raíz *clásica*, y había propuesto en su lugar el de *"análisis"*, de origen griego. Es por esto quizá, que el nombre apropiado, mirando con la perspectiva de la actualidad, fuese *"Geometría algebraica"*, que posee un significado muy diferente hoy en día. Para mayores apreciaciones puede consultarse [Kline et al., 1999], [Mora and Terricabras, 1994].

un número o una indeterminada, sino que son *símbolos* y *entidades* con unas reglas concretas que nos permiten hacer factorizaciones igual que las podemos hacer en anillos de números. Es decir, si bien tiene relación con la estructura de la generalización de la aritmética, esta concepción llega mucho más lejos, pues las estructuras de números difieren mucho unas de otras y, precisamente, es el álgebra la que relaciona el comportamiento de dos estructuras distintas como pueden ser el anillo de números enteros, racionales, etc. o el de polinomios. Sin duda, puede decirse que esta percepción entraña un aspecto más teórico, dejando de lado la manipulación y las capacidades para trabajar expresiones. Sin embargo, es curioso que tanto la perspectiva práctica como la teórica tratan de dar el mismo sabor a la variable algebraica, esa percepción abstracta con unas reglas predefinidas.

Mucho puede decirse de la historia de esta concepción, pero me gustaría centrarme en un periodo concreto, pues me parece ilustrativo para lo que pretende mostrarse de la evolución de las concepciones del álgebra, y de la necesidad de cada una de estas concepciones para entender la que sigue.

Hemos hablado de que, en el año 1545, Cardano trata la resolución (actualmente: resolución por radicales) de las ecuaciones de grado tres y de grado cuatro y Viéte las expresa en una notación que podría decirse actual, haciendo comprensibles estos resultados. Estos tratados resultaron ser el *leit motiv* de lo que sería el nacimiento de la concepción del álgebra que estamos tratando, pues se pusieron en el punto de mira las resoluciones de las ecuaciones de grado cinco y superiores, concebibles gracias a que Descartes había desvinculado número de longitud. Matemáticos de toda Europa se destinaron a atacar estas cuestiones desde muy distintas perspectivas. Gauss, Lagrange, Abel, Ruffini, Vandermonde, etc. se centraron, con importantes resultados, en la solución de ecuaciones algebraicas de grados arbitrarios. Podemos decir que todos ellos son predecesores de Galois, pues es este quién da un giro radical a la concepción del álgebra y siembra la semilla del álgebra moderna, del álgebra como el estudio de estructuras. En su tratado de 1830 (un año antes de su muerte), *Sur la théorie des nombres*, da origen a una percepción moderna del álgebra, en el sentido de que desarrolla las nociones de extensiones de cuerpos y los teoremas fundamentales que relacionan la resolución de ecuaciones con las estructuras de ciertos grupos, los actuales grupos de Galois. Desde este punto, el estudio de la teoría abstracta de grupos supone el nacimiento de una forma muy distinta de hacer el álgebra. Desde Camille Jordan, Otto Hölder, Sophus Lie y Felix Klein hasta Emmy Noether, todos han revestido la concepción del álgebra como el estudio y las relaciones de las estructuras algebraicas que conocemos hoy en día.

Por enfatizar la revolución de la perspectiva y la concepción que supuso la obra de Galois, que no hubiese sido posible sin las concepciones del álgebra previamente dadas, quisiera citar el acta que dieron Poisson y Lacroix sobre la legitimidad de su manuscrito. Al final del reporte, se afirmó:

"Sus razonamientos no son suficientemente claros y no podemos dar con claridad un reporte de la idea de su argumentación. El teorema fundamental del trabajo del autor parece ser parte de una teoría mucho más general, susceptible de numerosas aplicaciones. . . "

La concepción moderna y legítima de su obra tuvo que esperar hasta la explicación rigurosa y completa por parte de Camille Jordan en su monumental trabajo, de 1870, *Traité des substitutions et des équations algébriques*.

Es cierto que, en el contexto escolar, esta última concepción es prácticamente inexistente en el sentido de dar relaciones a distintas estructuras; sin embargo, la matemática escolar tiene en común con esta concepción el ver el álgebra como una rama más de las organizaciones matemáticas escolares. Esto puede ser motivo de contradicción y de problemas a la hora de comprender el álgebra escolar, pues las primeras concepciones expuestas, que son las que priman en la matemática escolar, no consideran el álgebra como una rama independiente, se considera el álgebra como un instrumento para atajar y modelizar problemas de cualquier índole.

Como resumen, quisiera decir que las concepciones que encontramos en el álgebra escolar, algunas con mayor necesidad de abstracción que otras, son las mismas con la que se han encontrado los matemáticos de la historia a la hora de hacer frente a diversas cuestiones. Estas cuestiones y problemas nacen, principalmente, de la geometría y el estudio de sistemas numéricos. A partir de esto, el álgebra se yergue como un instrumento independiente que hace frente a todas estas cuestiones y a muchas otras. El estudio de sus soluciones culmina con una independización del álgebra como una nueva rama de la matemática.

En los puntos posteriores trataremos métodos, dependiendo de la forma de entender la variable algebraica, de cómo los alumnos pueden usar las diferentes concepciones del álgebra para atacar problemas de muy diversa índole, de una manera similar a como se ha hecho históricamente.

2.2. El modelo 3UV

Ya hemos comentado en el punto anterior las distintas concepciones del álgebra que se presentan en el contexto escolar. Cada una de las concepciones trae consigo una visión concreta de *variable*. El modelo 3UV se basa en el análisis de la comprensión del álgebra, atendiendo a tres formas de ver la variable algebraica y a los aspectos que caracterizan cada una de estas visiones. Este modelo acepta la relación entre la definición de la variable y la concepción que se da del álgebra, pero, además, también relaciona las distintas formas de ver las variables con diversos grados de abstracción. El modelo 3UV ofrece una forma apropiada de responder a problemas de naturaleza algebraica a partir de los tres usos y concepciones de la variable algebraica. La referencia guía para este modelo la podemos encontrar, de manera esquemática, en [Álvarez et al., 2015].

El modelo 3UV, del inglés, *three uses of variables*, surgió, en primera instancia, como un análisis sobre los contenidos necesarios para comprender y realizar de una manera correcta los problemas concernientes al álgebra escolar. Una de las conclusiones claves fue que, los diversos problemas, requerían diferentes grados de abstracción, que se trataron de sistematizar. Uno de los principios básicos de este modelo es asumir que:

" la capacidad de resolver de una manera adecuada los problemas concernientes al álgebra escolar precisa de un manejo adecuado de tres formas de pensar las variables y de los aspectos que las caracterizan"[Álvarez et al., 2015].

Las tres formas de pensar en la variable algebraica, dependiendo del contexto del problema, según el modelo 3UV son: pensar la variable como un valor concreto desconocido; como un número general; como una forma de presentar relaciones funcionales. Cabe destacar que cada una de estas formas se encuentra íntimamente relacionada con las tres primeras concepciones, A), B) y C), expuestas en el punto anterior. Por tanto, dependiendo del contexto concreto del problema y del grado de abstracción necesario para su realización, resultará más útil un uso de la variable que otro. Un esquema útil que refleja lo que acabamos de comentar es dado en [Juárez, 2011]:

Concepciones del álgebra	**Uso de la variable**
B) Resolución de problemas	I) Incógnita
A) Aritmética generalizada	II) Generalización de patrones
C) Relaciones entre cantidades	III) Constantes, parámetros y argumentos

Paso a exponer cada uno de los aspectos claves para la resolución de los problemas dependiendo del uso de la variable que se esté utilizando. Estos aspectos se han tomado de [Álvarez et al., 2015].

I) Variable como indeterminada o valor desconocido: Ya hemos comentado en B), que el valor de esta concepción atiende al supuesto de que la variable es una magnitud concreta, aunque desconocida. El fin principal de este uso es la resolución de ecuaciones. Dentro de este uso, vamos a dividir los tipos de ecuaciones que pueden aparecer en dos, atendiendo a dos grados diferentes de abstracción [Filloy and Rojano, 1989].

El primer tipo son las ecuaciones en las que el uso de la incógnita es prescindible, pues, mediante el uso de *la inversión de operaciones*, se puede llegar a la solución. En resumidas cuentas, puede darse una resolución puramente aritmética. A este tipo de ecuaciones las llamaremos **ecuaciones aritméticas**. La forma general de estas ecuaciones son $ax + b = c,\ ax = b,\ x/a = b$, con $a,\ b,\ c$ valores concretos. En estos casos, sin el uso del manejo algebraico, y partiendo del lado derecho de la igualdad, se puede llegar al valor de x concatenando las operaciones inversas. Vale la pena destacar que, en este caso, el símbolo "=" sigue teniendo esa idea escolar pre-algebraica de *operador* o *concatenador* de operaciones [Kieran, 1981] y no como una *relación de equivalencia* entre los dos lados de la igualdad.

El segundo tipo, en el que la artillería algebraica se hace necesaria, son aquellas en las que, para su resolución, se requiere trabajar y operar sobre la variable (*"operating the unkowns"*[Filloy and Rojano, 1989]). Estas ecuaciones tienen, en su estructura más elemental, la forma $ax+b = cx+d$, con $a,\ b,\ c,\ d$, valores concretos. Este paso supone un grado de abstracción mayor, pues precisa, por un lado, usar las operaciones propiamente del álgebra y, además, aquí el uso del "=" aritmético es inviable, se precisa de la sofisticación del símbolo y usarlo en términos de *equivalencia entre los dos lados del "="* [Kieran, 1981]. A este tipo de ecuaciones las llamaremos, simplemente, **ecuaciones**. En mi opinión, uno de los errores de los libros de texto es no tener a bien distinguir los dos grados de abstracción que existen entre las ecuaciones aritméticas y las demás.

En ambos casos, aunque la abstracción sea cada vez mayor, podemos esquematizar el grado de éxito en la resolución de problemas de esta índole atendiendo a los siguientes parámetros:

- Se encuentre dentro del problema algo desconocido y que puede determinarse por las restricciones del problema.

- Entender las variables del problema como valores concretos que deben ser determinados por el resto de las condiciones dadas en el problema.

- Ser capaz de sustituir en la ecuación los valores que hacen de ella una sentencia (igualdad) verdadera.

- Saber determinar esas cantidades desconocidas haciendo uso del manejo adecuado de las operaciones algebraicas y aritméticas.

- Saber simbolizar las cantidades desconocidas para su posterior uso dentro de las ecuaciones que puedan plantearse.

II) Variable como un número general: De nuevo, esta concepción tiene lugar cuando tratan de generalizarse patrones, como hemos comentado antes, por ejemplo, al tratar de generalizar las propiedades aritméticas o patrones concernientes a sucesiones, etc. En este caso, dado que ahora se necesita pensar en la variable no como algo concreto, sino como algo general, el grado de abstracción es mayor. Vale la pena destacar que, dado que la concepción del álgebra que más prima es la *aritmética generalizada*, suele presentarse este uso mucho antes que los demás, pues se prima el manejo y las habilidades para trabajar y operar expresiones algebraicas. En este caso, como se expresa en [Filloy], se prima la *sintaxis* (operar con símbolos) que la *semántica* (interpretar los símbolos). Esto, en un principio, no supone ningún problema, pero al tratar de relacionar el uso de la variable como una incógnita a la vez que se trata la variable como un número general, se producen bloqueos, pues se hace patente la abstracción requerida para tratar la variable en su mayor generalidad.

Para que se puedan ejecutar de una manera adecuada problemas en los que esta concepción es la que subyace tras las variables con las que se juega es necesario:

- Reconocer patrones y reglas de interacción en patrones numéricos o en familias de problemas.

- Entender la variable con una cantidad genérica que puede ser cualquier valor.

- Deducir métodos y patrones generales a partir de la observación de los comportamientos invariantes de la variable ante ciertos procesos.

- Manipular y simplificar expresiones generales.

- Simbolizar y enunciar los patrones generales observables en el problema.

El desarrollo de estas capacidades, claramente, suponen un grado de abstracción mayor que el punto anterior.

III) Variable como parámetro de relaciones funcionales: Como ya hemos comentado anteriormente, la interpretación de una inmensidad de problemas en matemáticas en términos de funciones supone un medio increíblemente útil para su resolución. Un trabajo adecuado en estos términos requiere:

- Reconocer las relaciones existentes entre distintas variables a partir de los datos del problema.
- Identificar la variable dependiente y saber obtener valores partiendo tanto de valores de la variable dependiente como de la independiente.
- Razonar los ritmos de cambio y las estructuras variacionales que se suceden entre las variables cuando se les hacen recorrer una franja de valores.
- Identificar el dominio y la imagen en las que se mueven las variables dependientes y la independientes.
- Construir simbólicamente las relaciones funcionales pertinentes a partir de los datos del problema.

Claramente, el paso de un uso de la variable al siguiente requiere de un grado de abstracción cada vez mayor. Por ejemplo, el uso de la variable en términos de funciones usa, al menos, dos variables y, a la hora de dar valores, se precisa de despejar una incógnita desconocida, siendo necesario el primer uso de la variable que hemos expuesto.

2.3. Teoría de los momentos o dimesiones didácticas

Hasta ahora hemos presentado tanto las concepciones como los enfoques concretos (los distintos usos de la variable algebraica) que pretendemos que los alumnos desarrollen, con el fin de potenciar, desde sus inicios, el pensamiento algebraico. Pasamos a exponer el marco teórico que atañe a la construcción de los conocimientos por parte de los alumnos y que nos será de gran utilidad a la hora de desarrollar las metodologías.

La teoría de los momentos o de dimensiones didácticas [**?**] hace referencia a las distintas situaciones, formuladas en términos de *praxeologías*, a las que debe enfrentarse un alumno a la hora de construir un conocimiento concreto. Estas praxeologías, matemáticas o didácticas, engloban las diferentes tareas, técnicas y teorías necesarias para la construcción de un conocimiento matemático concreto. Estos momentos no se ciñen a un orden cronológico, sino a una dimensión por la que el alumno debe pasar. Siguiendo la presentación esquemática dada en [Baeza Alba and Sordo Juanena,] podemos distinguir los siguientes momentos:

- **Momento de primer encuentro**: situación en la que el alumno se enfrenta por primera vez con una tarea, que forma parte de una determinada praxeología matemática.

- **Momento de exploración**: que puede, a su vez, dividirse en dos. Por un lado, el alumno busca técnicas para hacer frente a la tarea presentada y, por otro, el alumno trata de aplicar las técnicas con el fin de dar lugar a respuestas satisfactorias para la tarea en cuestión.
- **Momento del trabajo de la técnica**: momento en el que el alumno debe dominar las técnicas encontradas y poder aplicarlas con soltura. Además, debe poder relacionar estas técnicas con otras ya conocidas e, incluso, desarrollar otras nuevas a partir de la relación de la nueva técnica con las anteriores.
- **Momento tecnológico-teórico**: este es el momento en el que se debe justificar la técnica y determinar su validez.
- **Momento de institucionalización**: momento en el que se da un carácter legítimo de los técnicas y teorías extraídas en otros momentos.
- **Momento de evaluación**: momento de reflexión sobre todos los procesos técnicos y teóricos realizados con el fin de entender, bajo una perspectiva global, todos los engranajes del constructo que se ha llevado a cabo.

Como hemos dicho, estos momentos los experimentará el alumno, pero según la tarea que se desea realizar, los momentos pueden ver alterados su orden. Desde este marco, plantearemos la metodología por la cual los alumnos experimentarán estos momentos y el orden en el que lo harán en el contexto concreto del trabajo con ecuaciones y expresiones algebraicas.

Capítulo 3

Objetivos

Como ya hemos dicho, este trabajo es una propuesta didáctica para el trabajo de alumnos de segundo de E.S.O. en el tema de ecuaciones y, de manera parcial, expresiones algebraicas. Dentro de estos temas, los libros tienden a tener una estructura y una naturaleza *aritmetizada* del álgebra, que es una de las concepciones vistas, pero el resto de las concepciones apenas son visibles en estos marcos, aunque siguen estando presentes y siendo necesarias a la hora de reflexionar en los diferentes problemas y ejercicios. Con todo esto presente, pasamos a presentar los objetivos principales que se pretenden alcanzar con este trabajo.

1. Que los alumnos tomen conciencia de la necesidad del pensamiento algebraico para la resolución y la modelización de problemas. Es decir, que se entienda que el pensamiento algebraico surge de manera natural a la hora de plantear tareas y al tratar de resolverlas. Para tal fin, podemos subdividir este objetivo en los siguientes objetivos parciales:

    a) Que los alumnos vean que hay muchas cuestiones que el campo de la aritmética no puede responder.

    b) Que los alumnos experimenten y sean conscientes de que, según el contexto del problema, el uso que se hace del álgebra, de las variables y de la simbología algebraica es diferente, y que unas concepciones son más adecuadas que otras dependiendo de los problemas. Además, tener cierta intuición de que, con cada una de estas concepciones, se encierra un desarrollo que se ha experimentado en la historia misma de las matemáticas.

    c) Que los alumnos aprendan los diferentes usos de la variable algebraica, planteados en el modelo 3UV, llegando a ser capaces de entender la variable algebraica como una manera de expresar relaciones funcionales que, en última instancia, dan la concepción de *instrumento* de *modelización funcional* al álgebra.

2. Que los alumnos, según van cumpliendo los objetivos parciales anteriores, construyan concepciones rigurosas de las estructuras con las que están trabajando, no solo el de variable algebraica, sino símbolos o conceptos como el de igualdad y equivalencia de expresiones algebraicas que, en muchos casos, pierden su rigurosidad en pos de una intuición que, en la mayor parte de los casos, es motivo de complicaciones y contradicciones en el desarrollo del pensamiento algebraico.

Capítulo 4

Metodología

Como ya hemos dicho anteriormente, se pretende dar una propuesta didáctica que cumpla los objetivos presentados y que, en última instancia, construya una respuesta satisfactoria a la cuestión inicial, a saber:

"¿Es posible hacer patente la necesidad de las distintas formas de pensamiento algebraico a los alumnos que se encuentran por primera vez, o se están iniciando, en este terreno? ¿Puede mejorarse la comprensión de conceptos algebraicos, en secundaria, si se tratan y evidencian las distintas formas de concebirse el álgebra, atendiendo a los distintos grados de abstracción y a las visiones que ha habido en la historia?"

Para tal fin, vamos a distinguir varias partes que consideramos relevantes. En primer lugar, vamos a presentar los contenidos dados en el currículo de segundo de la E.S.O. (4.1), que engloban los temas de expresiones algebraicas y de ecuaciones, con el fin de, por un lado, no perder de vista los contenidos del decreto y, por otro, añadir algunos comentarios y reflexiones que pueden resultar interesantes.

En segundo lugar (4.2), vamos a analizar y comentar la disposición en la que, en general, aparecen los contenidos y los problemas de los temas de álgebra y ecuaciones de los libros de segundo de E.S.O. Partiendo de dicho análisis, trataremos de sustraer las perspectivas esenciales que se hacen del álgebra, de los usos que se les dan a las variables y de los distintos usos de los símbolos. A partir de este punto, podremos ver qué concepciones priman dentro de la concepción del álgebra escolar y cuáles, aunque presentes y necesarias, quedan discriminadas.

Seguidamente (4.3.1, 4.3.2), y sin perder de vista lo anterior, plantearemos, de manera estructurada, distintos tipos de problemas que, de una manera gradual, van necesitando de una abstracción cada vez mayor, permitiendo el paso por las distintas concepciones del álgebra y de los distintos usos de la variable algebraica. Es importante destacar que las concepciones y los usos de una manera flexible precisan de años de práctica, por lo que se pretende que, dentro de esos grados, aunque se conozcan todos, se desarrollen principalmente los que atañen al currículo de segundo de E.S.O.

Finalmente (4.3.3), expondremos una secuenciación de las sesiones en las que se pueden ir presentando y trabajando, siguiendo el modelo de los *momentos didácticos*, los contenidos y trabajos previamente expuestos.

4.1. Currículo de 2º de E.S.O.

Pasamos a exponer los contenidos de los apartados de expresiones algebraicas y ecuaciones que aparecen en el *DECRETO 48/2015 de 14 de mayo*[de Madrid, 2015]. Estos temas, corresponden al bloque 2, de *números* y *álgebra*.

Álgebra

1. Expresiones algebraicas

    a) Valor numérico de una expresión algebraica.

    b) Operaciones con expresiones algebraicas sencillas.

    c) Transformación y equivalencias.

    d) Identidades algebraicas. Identidades notables.

    e) Polinomios.

    f) Operaciones con polinomios en casos sencillos.

2. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

    a) Método algebraico y gráfico de resolución.

    b) Interpretación de la solución.

    c) Ecuaciones sin solución.

    d) Comprobación e interpretación de la solución.

    e) Utilización de ecuaciones para la resolución de problemas.

3. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

    a) Método algebraico de resolución.

    b) Comprobación e interpretación de las soluciones.

    c) Ecuaciones sin solución.

    d) Resolución de problemas.

Aunque la exposición de los contenidos no presupone un orden concreto, sí que es verdad que puede servirse de guión más o menos ordenado de los contenidos. A la vista de los contenidos, podemos dar algunos comentarios al respecto que reflejan en cierto sentido el enfoque que hemos tomado en el trabajo.

En primer lugar, si miramos los puntos 1-b y 1-c vemos que, primeramente, se tratan las expresiones algebraicas con esa idea de desarrollar su manejo en las operaciones y, dentro de estos manejos, se incluyen las equivalencias de expresiones. Esto da lugar a que se desarrollen primeramente la manipulación de las expresiones desde una perspectiva propia de *aritmética generalizada*, sin dar mayor relevancia al resto de concepciones.

En segundo lugar, en los puntos 2 y 3, que atienden a las ecuaciones, se impone de una manera determinante el uso del término *incógnita*, es decir, haciendo referencia a ese uso de *valor desconocido* (I) y nada más.

Es decir, por un lado, se supone una concepción del *aritmética generalizada* en relación a las expresiones algebraicas, en el que el uso principal, en este marco, es el de *número general* (II) y, por otro, se da el uso de *valor desconocido* a las variables dentro de las ecuaciones. Estos dos usos, que, como hemos dicho, atañen a grados de abstracción distintos, pueden llevar a bloqueos cuando se precise, principalmente en los problemas, un uso u otro. Además, el uso como *relación funcional* no se ve más que en el punto 2-a, en el uso del método gráfico, lo que da una estructura artificial al uso de funciones para resolver ecuaciones, pues no se muestra la motivación que lleva a considerar la variable como una variable dentro de una función.

A la vista de estos comentarios, vamos a tratar de hacer patentes los usos de la variable, que ya aparecen en el currículo, pero de una forma más escalonado y distinguiendo detenidamente los distintos usos y comentando el grado de abstracción requerido para cada uno de ellos.

En el punto que sigue vamos a dar una muestra significativa de lo que acabamos de comentar, mediante un ejemplo concreto sobre la distribución y disposición de los ejercicios y problemas en un libro de texto de secundaria.

4.2. Análisis de los contenidos

Vamos a pasar a comentar los contenidos de los ejercicios y problemas en términos de los usos que se hace de la variable en los temas de álgebra y ecuaciones. Hemos tomado como referente los ejercicios de 2º de E.S.O. de Anaya, que están disponibles online. Pretendemos mostrar, a la vista de la clasificación que exponemos, que, si bien en el tema de álgebra se manifiestan los diferentes usos de la variable, en el tema de ecuaciones, en el que se podría profundizar de una manera sumamente enriquecedora en todos los usos, se dejan de lado la mayoría de ellos, reduciéndose al uso de la variable como una mera incógnita. Además, dentro de este uso concreto, se da un trato indistinto a aquellos problemas que pueden ser respondidos desde el uso de la aritmética y en las que no.

Concepciones y uso de la variable en el Tema de álgebra:

	Ejercicios	
Uso como cantidad desconocida	Página 115:	1
	Página 117:	8 y 9
	Página 127:	4 y 11
Uso como número general	Página 115:	3 y 4
	Página 117:	1,2,3,4 y 6
	Página 119:	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 13
	Página 120:	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 13 14, 15, 16, 17 y 18
	Página 121:	1, 2, 3 y 4
	Página 122:	5, 6, 7, 8, 9 y 10
	Página 125:	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9
	Página 127:	1, 3, 6, 7, 8, 9 y 10
Uso como relación funcional	Página 115:	2
	Página 117:	5
	Página 127:	2 y 5

En el caso del uso de la variable como número general de la tabla anterior, hemos mezclado el uso de la variable como un número general y en su uso a la hora de generalizar patrones. En cualquier caso, estos últimos aparecen de una forma poco significativa dentro del abanico de ejercicios.

Creo que, al ver la distribución de los ejercicios y problemas, se observa, en primer lugar, esa concepción del álgebra como aritmética generalizada, en el que el manejo de las habilidades en las operaciones es el principal protagonista. En segundo lugar, y como comenté en la presentación de los usos de la variable como número general, no se atiende a la abstracción que supone esta consideración. Se realiza al margen de su posible interpretación, es decir, se presupone que el alumno es capaz de construir la independencia de la *sintaxis* y la *semántica*[1] en los símbolos algebraicos. Dado que en este tema primero no se trata la resolución de ecuaciones, no queda tan patente las relaciones entre los usos de la variable, pues el enfoque aritmético eclipsa el resto de ellos, dando una concepción que, a la hora de trabajar las ecuaciones, puede producir distintos bloqueos a la hora de pasar de un uso concreto de la variable a otro que precisa de un mayor, o distinto, grado de abstracción.

Otro punto que vale la pena destacar es que, al primarse el uso de la variable como un mero símbolo de representación de un número general, apenas se da un sustento fuerte a la potencia del álgebra dentro de los muchos aspectos de la matemática y

[1]Asociamos cada uno de estos términos directamente con el valor que se les da dentro del lenguaje. Es decir, por *sintaxis* de una variable entendemos su relación y uso en términos simbólicos y, en última instancia, a su uso como *incógnita*, *número general*, etc. Al hablar de *semántica* de una variable, nos referimos al objeto que representa dentro de un problema o cuestión, es decir, *longitud, dinero, edad, etc.*

de la vida. Esto hace que adquiera un sabor artificial, meramente operativo.

Concepciones y uso de la variable en el tema de ecuaciones: en este caso, no vale la pena separar los usos de las variables, pues resaltan de una manera absoluta el uso de la variable como un valor desconocido. En prácticamente todos los ejercicios se atiende a la variable como un valor a determinar, lo cual es claro en el uso de ecuaciones; sin embargo, se nota una fuerte ausencia de una profundización mayor en el trabajo de ecuaciones para, por ejemplo, encontrar patrones o dar relaciones funcionales. La perspectiva que resulta del uso de ecuaciones es el de *encontrar valores* y se pierde ese gran potencial de *instrumento modelizador* que los alumnos pueden usar y comprender a niveles elementales.

Por otro lado, en relación a lo que ya hemos comentado, el uso tanto de las *ecuaciones aritméticas* como del *resto de ecuaciones* (pág-12), se hace de una manera indistinguida. Además, a la hora de trabajar con el uso de la equivalencia de ecuaciones o las igualdades entre expresiones algebraicas, el símbolo "=" se atiende de una manera descuidada, presuponiendo la generalización de este símbolo desde la aritmética al álgebra, como si fuese evidente. Esto puede ser a causa de considerar el álgebra de una manera más estructural y académica, en el que estas consideraciones se subsanan de una manera rigurosa y en la que la perspectiva de *aritmética generalizada* (II)) tiene una fundamentación sólida, propia del siglo XX. Sin embargo, como hemos comentado en el marco teórico, no atender cuidadosamente a los usos de la variable y a las concepciones del álgebra es origen de dificultades en los grados de abstracción y en las motivaciones del uso del álgebra, por lo que, en nuestros problemas y sesiones, trataremos de tenerlos en cuenta en todo momento.

Con todo lo anterior en mente, vamos a pasar a dar la propuesta didáctica.

4.3. Propuesta didáctica

La propuesta didáctica que vamos a hacer la vamos a partir en tres partes principales. Por un lado (4.3.1), y a raíz del análisis y del marco teórico, vamos a reestructurar la organización de los contenidos del tema de ecuaciones, sin perder de vista el tema de álgebra, que consideraremos sus contenidos por dados, pero sobre el que no dejaremos de reflexionar a lo largo del trabajo con ecuaciones. En segundo lugar (4.3.2), vamos a presentar problemas que consideramos de interés, que sacan a relucir tanto el importante uso del álgebra, como los grados de abstracción, cada vez mayores de la variable algebraica. Finalmente (4.3.3), usando los dos apartados comentados, desarrollaremos una secuenciación en sesiones sobre la forma en la que podrían exponerse los contenidos y problemas al alumnado.

4.3.1. Desarrollo de los contenidos

Vamos a separar los desarrollos de los contenidos en tres partes, atendiendo a los distintos usos de las variables. El marco principal va a ser la resolución de ecuaciones, por lo que el primero de los usos será de gran importancia, y servirá para cimentar los demás usos de la variable dentro de las ecuaciones.

i) Uso de la variable como un valor desconocido: En este caso, partiremos de los aspectos más básicos que permite formular el álgebra en términos de ecuaciones, las que hemos llamado *ecuaciones aritméticas* (pág-12), es decir, aquellas que podemos resolver mediante la inversión de las operaciones aritméticas, sin entrar en juego en la manipulación de la variable. Desde estas ecuaciones y los problemas que resuelven (los mismos que los aritméticos), introduciremos, de una forma más o menos natural, aquellas ecuaciones que requieren del siguiente grado de abstracción, entrando de manera propiamente dicha en la terminología del álgebra, desde el uso del "=" hasta el manejo de las ecuaciones equivalentes. Todo esto se hará desde un punto de vista *semántico*, siguiendo el trabajo desarrollado en [Filloy and Rojano, 1989], con el fin de ver que ese *manejo aritmético* de las ecuaciones puede sustentarse en el manejo de símbolos que se refieren a *objetos*. Tras estos desarrollos, se verá que las ecuaciones equivalentes son aquellas que entendemos todos, las que preservan las soluciones de la ecuación original, haciendo que su manejo deje de ser semántico y empiece a ser simbólico. Todo este tratado puede contextualizarse en un modelo geométrico [Filloy and Rojano, 1989], que usaremos para construir estas nociones. Vale la pena comenzar por aquí, aunque ralentice el desarrollo de las habilidades operativas de las expresiones algebraicas, pues, a cambio, tendremos que el alumno va a tener más asentados las nociones con las que está trabajando y que, poco a poco, va abstrayendo.

ii) Uso de la variable como número general: Partiendo de lo desarrollado en el punto anterior, en este grado de abstracción vamos a consolidar el uso de la variable como número general. En este paso, se van a introducir tanto la equivalencia formal de ecuaciones como la generalización de procedimientos desarrollados en el punto anterior. Se consolidará el uso tanto de la variable como de los *parámetros*, es decir, variables que, aunque desconocidas, se presuponen dadas y son fijas. El manejo de la variable culminará, de una manera razonable y con ayuda del profesor, con formas de generalización de patrones a partir de ecuaciones o de soluciones generales a determinados problemas, algunos de carácter histórico.

iii) Uso de la variable como relaciones funcionales: Para terminar con la abstracción de la variable, partiendo de su uso como un valor general, trataremos de construir relaciones funcionales entre las variables, es decir, introducir las nociones de variable dependiente e independiente. Se comentarán técnicas de resolución de ecuaciones mediante la resolución gráfica y se harán uso de ecuaciones no solo para encontrar valores concretos, sino para expresar relaciones más sofisticadas, como relaciones entre perímetros y áreas, entre otros.

Todo esto constituye el cuerpo general de lo que se desea trabajar y la forma en la que se irá procediendo. Es de vital importancia no perder de vista el currículo, con sus contenidos y sus estándares evaluables, por lo que debemos tener cuidado de que nuestra propuesta no deje de lado ninguno de los apartados que deben ser atendidos.

4.3.2. Problemas propuestos y análisis de los mismos

Expondremos una serie de problemas, de diversa índole pero que servirán para motivar los distintos usos de la variable, desde el marco más elemental hasta el que precisa de mayor abstracción. Dividiremos la exposición acorde con los usos de la variable que se va a utilizar y, dentro de cada uno de ellos, analizaremos los puntos esenciales en los que se produce la necesidad de dar otro uso tanto a las variables como a los demás conceptos relacionados, como pueden ser el uso de "=" y el de equivalencia de ecuaciones.

Los problemas que se plantean pretenden tener una estructura más o menos análoga. Se quiere, por un lado, plantear problemas que precisen, en cierto grado, el uso del álgebra. Además, para evitar la estructura artificial, estos problemas pretenden responder a preguntas relacionadas con otras ramas, como pueden ser casos de la vida real o cuestiones de temática geométrica. Finalmente, se desea que, en todos ellos, se tome en consideración el significado y uso que se está haciendo de la variable, con el fin de desarrollar la flexibilidad de su manejo en cada uno de sus usos.

I) Problemas relacionados con el uso de la variable como valor desconocido

Desde luego, y como hemos visto en el análisis de los problemas del libro de texto, este uso de la variable es prácticamente el único que tiene aparición en el trabajo con ecuaciones. Esto es, en cierta manera, comprensible, pues ya vimos que, en las primeras concepciones, el álgebra surgió como instrumento para encontrar valores que respondían a cuestiones de carácter principalmente geométrico. Sin embargo, los problemas relacionados con ecuaciones del libro muestran ese constante enfoque aritmético, dando esa estructura artificial a la forma de encontrar las incógnitas de los problemas. Trataremos, en los problemas que siguen, de llegar a esas mismas formas de razonar desde las operaciones algebraicas, pero respondiendo a diversos grados de abstracción, intentando dilucidar, en cierta manera, que los procedimientos no son artificiales en absoluto.

Comenzaremos tratando los problemas que responden a ecuaciones aritméticas y después pasaremos a las ecuaciones en general, en el que el uso de la variable es el de *incógnita*.

I.a) Problemas de ecuaciones aritméticas: Recordamos que estos problemas responden a ecuaciones del tipo $ax+b=c$ y a variantes de la misma. Estos problemas se pueden resolver desde la pura aritmética, por lo que no están estrictamente dentro del álgebra, pero son un interesante punto de partida.

Problema 1. Si a la edad de Marta le sumamos 4 años obtenemos la mitad de la edad de su padre, que tiene 50 años. ¿Cuál es la edad de Marta? ¿Puedes escribir una ecuación que represente la cuestión del problema? ¿Qué significa la variable que has usado en la expresión algebraica que representa el problema? Resuelve la ecuación que has formulado.

Análisis 1. Este problema responde claramente a una ecuación aritmética de las que hemos hablado. Por esto, se piden dos resoluciones. La primera, al principio, con el fin de dar una resolución aritmética del problema, es decir, invirtiendo el orden de la cadena de operaciones que se piden para encontrar la respuesta. En el caso de la segunda, se pide resolver una ecuación previamente formulada. Se pide, de manera obligada, el uso del álgebra. El fin de este problema no es mostrar el uso del álgebra, es mostrar que la inversión de operaciones aritméticas es análoga a la forma de despejar la variable.

Respecto a la expresión, se pide formular una ecuación que exprese el problema, es decir, algo de la forma $2(x+4) = 50$, o $x + 4 = 25$. La idea es que ambas expresiones se formulen y se comenten, pues van a ser la raíz de entender que más de una ecuación puede representar el mismo problema.

La identificación de la variable es clara, *la edad de Marta*. Es decir, algo desconocido que, con los datos del problema, podemos encontrar.

Problema 2. Dentro de ocho años, Pedro tendrá la mitad de la edad de su hermana, que actualmente tiene 4. ¿Cuál es la edad de Pedro? ¿Tiene sentido el problema? ¿Puedes expresar una ecuación que responda al problema? ¿Qué significa la variable de tu ecuación? ¿Puedes enunciar un problema que en el que tenga sentido la respuesta que se obtiene al resolver la ecuación planteada?

Análisis 2. Este caso parte de una situación similar a la anterior, es decir, el enunciado es exactamente análogo, pero se han cambiado los datos para suscitar nuevas cuestiones. Al resolver el problema, mediante el método aritmético, se encuentra que la edad de Pedro debe ser -2 años. Es decir, el problema está mal formulado o, simplemente, es un problema sin sentido. En este caso, la variable es una edad desconocida, pero al construir la ecuación que se formula, es decir, $2(x + 4) = 4$, la variable se trabaja como una mera magnitud, un número, y tras las operaciones, se obtiene que $x = -2$, es decir, esta magnitud, al interpretarla, no puede representar una edad. Esta es la primera idea sobre la separación entre la *semántica* de la variable y su uso *sintáctico* en las operaciones. En este caso, la justificación que se encuentra al resolver la ecuación no es una respuesta numérica, es un argumento sobre la imposibilidad de la situación planteada por el problema. Este ejemplo, aunque elemental, supuso una ruptura a la hora de entender el álgebra, pues podía usarse para responder a la realidad de algunas situaciones de una manera metódica. Este ejemplo fue dado por De Morgan, hacia 1835, para mostrar que las *respuestas absurdas* vienen de plantear situaciones absurdas que pueden tener una *aparente normalidad*.

Además de todo esto, el problema pide la formulación de otro que tenga por ecuación asociada la misma que en este. El fin de esta cuestión es mostrar que la formulación algebraica solo depende del problema en cuanto a la relación de las magnitudes se refiere, y que una misma ecuación puede estar asociada a dos problemas distintos. Por ejemplo:

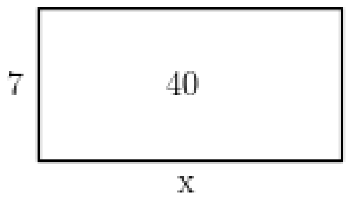
Si sumamos 4 grados a la temperatura de Madrid y la multiplicamos por dos, obtenemos la temperatura de Barcelona, que es 4 grados. ¿Qué temperatura hay en

Madrid?

En este caso, la temperatura da una estructura natural a la solución con un valor negativo. De hecho, vale la pena aclarar que el uso histórico de los números negativos ha sido muy controvertido, por la falta de referencias reales en las que tuviesen lugar. Incluso en los tiempos de Descartes, su uso fue más considerado como una mera herramienta *lógica* que como un objeto *matemático* (que se vincula más a la geometría). Hoy en día, dada la presentación *intuitiva*, y previa a todas las demás ramas, de la aritmética, estas controversias no tienen lugar, pues tan número es uno negativo como uno positivo; sin embargo, al reflexionar sobre las variables, en el marco de las ecuaciones, pueden darse bloqueos al dar una *interpretación* satisfactoria de los números negativos.

Los problemas que enunciamos a continuación rompen un poco la estructura de la vida social que tenían los dos anteriores, pero siguen una línea que va a dar lugar a cuestiones de interés sobre el uso de la variable.

Problema 3. Consideremos la siguiente situación geométrica:



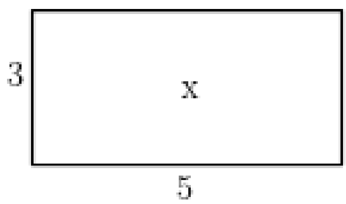
1. ¿Qué valor debe tener x?

2. ¿Puedes platear una ecuación que represente el problema?

3. ¿Qué representa la x?

Análisis 3. Volvemos a tener una situación aritmética en la que se pide, mediante el uso del área del rectángulo, encontrar el valor de uno de sus lados. En este caso, la variable representa una longitud a determinar. Iremos razonando sobre problemas similares para suscitar cuestiones de cada vez mayor interés.

Problema 4. Consideremos la siguiente situación geométrica:



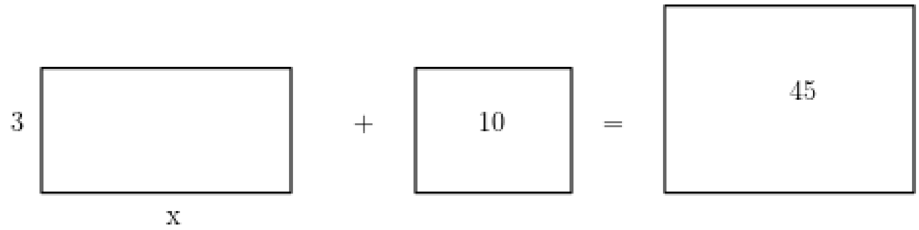
1. ¿Qué valor debe tener x?

2. ¿Puedes platear una ecuación que represente el problema?

3. ¿Qué representa la x?

Análisis 4. Estamos en una situación como el problema anterior, con la salvedad de que, frente al anterior, la variable de este problema es el área del rectángulo de lados conocidos.

Problema 5. Consideremos la siguiente situación geométrica:



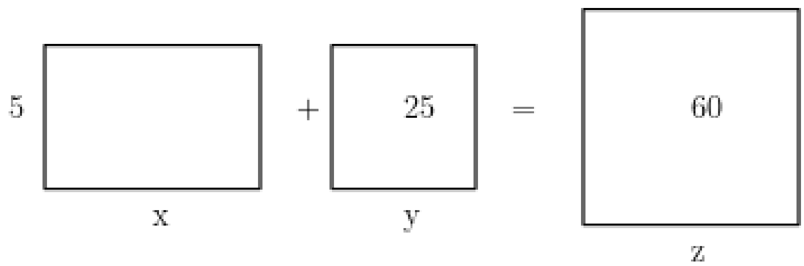
1. ¿Qué valor debe tener x?

2. ¿Puedes platear una ecuación que represente el problema?

3. ¿Qué representa la x?

Análisis 5. Este problema, sin habernos salido de las ecuaciones aritméticas, tiene asociada la ecuación $3x+10 = 45$. Puede darse la resolución aritmética, la algebraica o incluso un argumento geométrico. En este contexto, empieza a razonarse más sobre la construcción progresiva de ecuaciones equivalentes, aunque sin usar esta noción de una manera intencionada. En efecto, pueden darse argumentos geométricos en paralelo a los argumentos aritméticos y algebraicos para ver la relación entre los razonamientos. Por ejemplo, puede darse la analogía entre una situación geométrica resultante de construir un rectángulo cuya área sea la diferencia de las áreas 45 y 10 y la ecuación $3x = 35$ y, con esto, ver que ambas situaciones son *equivalentes* a las dadas en el problema original, tanto desde el punto de vista algebraico como geométrico.

Problema 6. Consideremos la siguiente situación geométrica:



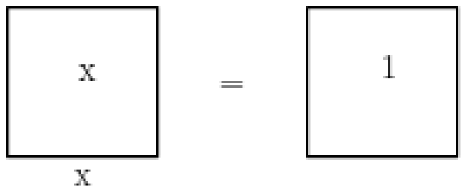
1. ¿Qué valor deben tener $x,\ y,\ z$?

2. ¿Puedes platear una ecuación que represente el problema de cada una de las variables?

3. ¿Qué representan la $x,\ y,\ z$?

Análisis 6. Este problema, es una mera concatenación de los problemas anteriores en uno solo. Se pretende mostrar que una misma construcción contiene varias cuestiones y, por tanto, permite la formulación de distintas ecuaciones, todas independientes las unas de las otras.

Problema 7. Consideremos la siguiente situación geométrica:



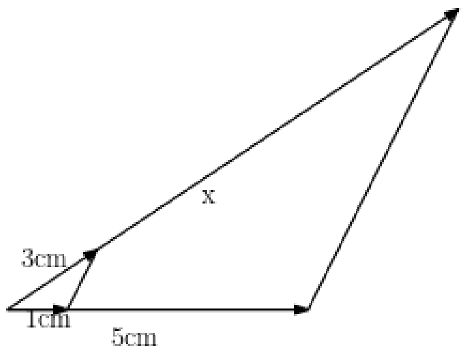
1. ¿Qué valor debe tener x?

2. ¿Puedes platear una ecuación que represente el problema?

3. ¿Qué representa la x? ¿Puede representar más de una cosa? ¿Pueden representar más de una magnitud?

Análisis 7. Este es uno de los primeros problemas que rompen la estructura seguida hasta ahora, aunque de manera sutil. Este problema, en relación con el anterior, tiene dos problemas asociados, el problema con ecuación $x^2 = 1$ y el dado por las áreas, que es, simplemente, $x = 1$. Este problema, más que su resolución, se centra plenamente en la cuestión por el significado de la variable. La variable, por un lado, representa una longitud, pero, *a la vez*, representa un área. Esto, como debe observar el alumno, no es así, pues lo que la variable representa es una magnitud, un número, y da la relación entre las expresiones cuantitativas de la longitud y el área. Es decir, que dan representaciones cuantitativas de significados distintos (longitud y área). Es importante resaltar este punto, pues permite ver la independencia, en cierta manera, de la geometría y el álgebra, pues representa las reglas cuantitativas, sin *preocuparse* de las geométricas. El siguiente problema, de carácter histórico, justifica este hecho de una manera más detallada, pero requiere del uso de herramientas más sofisticadas para su trabajo.

Problema 8. (Requiere del Teorema de Tales) Descartes, en 1628, se planteó lo siguiente: Si tengo dos segmentos de longitud 3cm y 5cm, es claro que, al multiplicarlos, obtengo un cuadrado de área 15cm^2. ¿Puedo multiplicar dos longitudes y obtener, a su vez, una longitud en vez de un área? Para responder a esta cuestión dio la siguiente construcción:



1. Usando el teorema de Tales: ¿cuánto vale la x?

2. ¿Qué significa la x?

3. ¿Respondió Descartes a su cuestión?

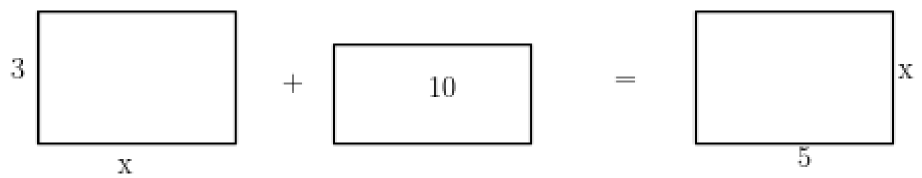
Análisis 8. Este problema, como se expresa en su enunciado, requiere del uso del teorema de Tales. Es una de las *construcciones más interesantes a nivel histórico*, pues, además de no requerir un uso fuerte de razonamientos ni aritméticos, ni algebraicos, ni geométricos, más que las proporcionalidades que da el teorema de Tales, *permite ver la independencia del álgebra respecto de la aritmética*, es decir, que la interpretación de las variables pueden ser vistas, no como *longitudes, áreas, edades, etc.* sino como cantidades, números desconocidos, con sus posibles interpretaciones en el problema. La resolución de este problema resulta que $x = 3 \times 5$, es decir que el producto de dos longitudes, o simplemente, dos números, puede verse como otra longitud, es decir, otro número. Cierto es que, en la actualidad, no hay una asociación directa de las expresiones algebraicas de la geometría, pero, en cualquier caso, este problema ilustra de una manera *elegante* la idea de que un mismo valor de una variable pueda ser vista de dos maneras distintas, como longitud o área.

Con todo esto, y habiendo visto primero que podemos separar la *semántica* (áreas, edades, longitudes, etc.) de la variable de la variable meramente sintáctica, para verla como un valor desconocido, vamos a seguir trabajando dentro de los problemas que el álgebra nos permite responder y que la aritmética no alcanza.

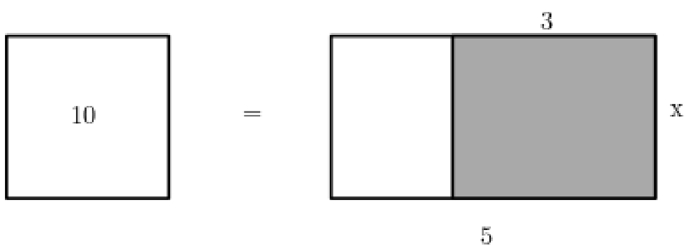
I.b) Problemas de ecuaciones no aritméticas: En este punto, entramos propiamente en el terreno del álgebra. Con la sección anterior hemos desarrollado, por analogía, los razonamientos aritméticos y algebraicos, además de geométricos, y hemos ido introduciendo la generalidad de la variable dentro del contexto algebraico, es decir, que debe representar una cantidad, por encima de longitudes, áreas, etc. Pasamos a desarrollar el uso del álgebra dentro de estas ecuaciones. Es importante destacar que es en este campo donde desarrollaremos de una manera propiamente dicha la equivalencia de ecuaciones y el uso de operaciones con incógnitas.

La estructura de las ecuaciones más elementales con las que vamos a comenzar son de la forma $ax + b = cx$ y, a partir de estas, iremos construyendo situaciones más complicadas.

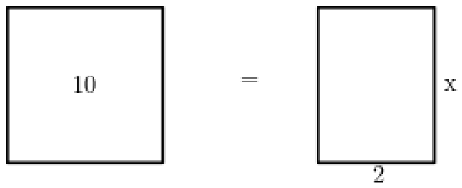
Problema 9. Consideremos la siguiente situación geométrica:



y sea el siguiente razonamiento geométrico:



En donde, la zona gris, se ha quitado, es decir, se tiene:



1. ¿Qué representa la x?
2. ¿Puedes platear una ecuación que represente cada uno de los pasos dados? ¿Puedes dar alguna relación entre ellos?
3. ¿Cuánto debe valer la x?

Análisis 9. Este, como hemos dicho, es el primero de los problemas en los que un razonamiento aritmético, es decir, por la formulación de una ecuación aritmética (pág-12), no es suficiente para resolverse. Se expresa, paso por paso, un razonamiento geométrico que reduce el problema original a uno expresable en una ecuación aritmética, fácil de resolver. El problema pretende que se realice la asociación entre las expresiones que representan el problema, que son de la forma $ax + b = cx$ y $(c - a)x = b$. Por primera vez, se están realizando operaciones que involucran a la variable, es decir, se está incrementando la abstracción de su uso, dotándola de una estructura aritmética análoga a la que posee un número, pero desde un contexto geométrico. De igual manera, en este caso, hay una ruptura con la utilización del símbolo "=", que admitía la interpretación aritmética, en las ecuaciones aritméticas de, *realiza esta operación* u *operador*, para darle una estructura de *símbolo de equivalencia*, es decir, que relaciona dos expresiones que han de ser iguales a pesar de haber un valor desconocido en ambas expresiones, la variable [Kieran, 1981].

Problema 10. Si, al dinero que tiene Pedro, le añadimos 5 euros y lo triplicamos obtenemos el doble del dinero de Pedro menos 6 euros. ¿Qué dinero tiene Pedro? ¿Cómo puedes interpretar el resultado?

Análisis 10. Este problema es un mero análogo del anterior, con las estructura de los primero problemas que hemos escrito, para ejemplificar, en contextos reales, problemas de carácter puramente algebraico. Además, al resolverse, vemos que tiene por solución un valor negativo, $x = -21$. En este caso, se propone dar una interpretación del resultado en el contexto del problema, pues, desde luego, Pedro, en esta situación, no tiene dinero, pero puede interpretarse como que tiene una *deuda.*

Problema 11. Tenemos dos tipos de frutas, naranjas y peras. El peso de las peras es desconocido, y sabemos que cada naranja pesa 100g. Si pesan lo mismo 3 naranjas junto con 4 peras que 1 pera y 5 naranjas, ¿cuánto pesan las peras?

Análisis 11. En este caso, la ecuación es de la forma $ax + b = cx + d$. Esta formulación tiene una cierta mejora respecto al caso geométrico, pues facilita la manipulación de las expresiones en un contexto menos visual y más operativo.

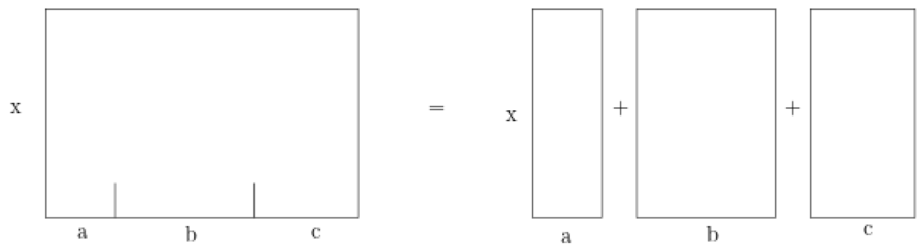
II) Problemas relacionados con el uso de la variable como número general

Este tipo de problemas ponen de manifiesto esa estrecha relación entre las expresiones algebraicas y los sistemas numéricos y su aritmética. Una vez que hemos desarrollado formas de abstraer la variable a un valor desconocido, que, en última instancia, es un número, vamos a desarrollar problemas que motiven la generalización de patrones, lo que permitirá dar un nuevo uso a la variable, como un número general.

Problema 12. Si sumamos el dinero que tiene Pedro y el que tiene Ramón y lo multiplicamos por 3, obtenemos tres veces el dinero que tiene Ramón menos el dinero de Pedro más 8. ¿Qué dinero tendrá Pedro si Ramón tiene 3 euros? ¿y si tiene 5? ¿observas algo raro? Si consideramos que Ramón tiene una cantidad de dinero cualquiera, digamos, a, ¿Qué dinero tendrá Pedro para este valor a de dinero de Ramón?

Análisis 12. En este caso, se nos presenta una situación en la que hay dos cantidades, en principio, desconocidas, y se nos da una de ellas, por lo que nos encontramos en un uso de la variable ya visto. Sin embargo, al resolver el problema, vemos que da igual el dinero que tenga Ramón, pues obtenemos siempre el mismo resultado para el dinero de Pedro. En efecto, esto es porque la ecuación que recrea el problema es $3(x + a) = 3a - x + 8 \Leftrightarrow x = 4$, independientemente del valor de a. En este caso, a debe ser un valor concreto, es decir, es un símbolo que representa un número concreto, pero cuyo valor nos es indiferente. En este problema, hemos introducido un nuevo grado de abstracción, pues, por un lado, tenemos un valor desconocido, el dinero de Pedro, pero, por el contrario, empezamos a trabajar con una cantidad genérica, a partir de generalizar el patrón *obtener siempre la misma cantidad.*

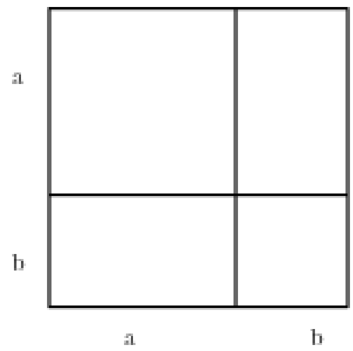
Problema 13. Consideremos la siguiente situación geométrica, en la que tenemos tres cantidades genéricas $a,\ b,\ c.$:



1. ¿Puedes escribir la situación anterior mediante una expresión algebraica?
2. ¿Puedes describir una situación análoga, mediante la igualdad de dos expresiones algebraicas, en el caso de dividir el rectángulo en dos partes $a,\ b$?
3. ¿Es relevante el valor que pueda tener x? Es decir, ¿depende la igualdad anterior de la longitud del lado x?
4. ¿Encuentras alguna relación entre las expresiones anteriores y la propiedad distributiva de los números? ¿Puedes construir una situación geométrica que represente la propiedad asociativa de la suma?
5. ¿Qué pasa si tratamos de resolver la ecuación inicial que hemos planteado?

Análisis 13. Este problema, partiendo de una situación similar a la que nos encontrábamos en los primero problemas que hemos escrito, buscamos mostrar que, en este caso, el valor de todas las variables es irrelevante. Además, la propiedad que se muestra es la distributiva, es decir, se da una representación simbólica de una propiedad general, en la que tanto la *semántica* de la variable como su *valor* son prescindibles, pues podemos entenderlas como cantidades arbitrarias. En el momento de su resolución, obtenemos algo de la forma $0 = 0$. Es interesante ver que este símbolo "=" representa una sentencia lógica de *verdadero* o *falso* frente a las concepciones que hemos ido viendo de *operación* en aritmética o de *equivalencia*, en los usos anteriores. Este *operador lógico* nos permite razonar que si partimos de algo cierto, todo lo que hemos ido haciendo es cierto, es decir, que la expresión original es independiente del valor de x, dando la concepción de un número general frente a uno concreto.

Problema 14. Considera la situación geométrica:



¿Puedes dar la relación entre el área total del cuadrado y la de los rectángulos en los que se subdivide? Expresa, detenidamente, las operaciones de las expresiones algebraicas $(a + b) \times (a + b)$ y comprueba que obtenemos la misma relación que en la figura.

Análisis 14. De nuevo, es una forma de deducir el cuadrado de la suma de una forma geométrica. Además, se pone de manifiesto que las operaciones algebraicas tienen una justificación concreta, la de extender las propiedades de los números (conmutativa, distributiva, etc). Este problema, al generalizar propiedades aritméticas, se centra principalmente en el uso de las expresiones simbólicas generales y su manipulación.

Problema 15 (Formas canónicas de Descartes)**.** Con el auge de la manipulación de símbolos a raíz de los avances de Descartes y otros matemáticos, surgió la pregunta que sigue:

Dado un número ¿podemos dividirlo en dos cantidades cuya diferencia es dada?

El número de partida, para Descartes, le era indiferente, por lo que lo llamó a. Las dos cantidades a determinar las denotó con las letras x e y, que debían cumplir que $x + y = a$ Además, la diferencia de estas cantidades era conocida, era un valor b, tal que $x - y = b$. Con todos estos ingredientes, Descartes realizó los pasos siguientes:

Paso 1: Si consideramos la ecuación $x + y = a$ y restamos la cantidad y en ambos lados de la igualdad, obtenemos la ecuación equivalente $x - y + y = a - y$, es decir, $b + y = a - y$ y concluimos que $y = \frac{a-b}{2}$.

Paso 2: Una vez conocida una de las cantidades, ya puedo determinar la otra, es suficiente con tomar $x = a - y$.

1. Dentro del razonamiento ¿qué variables son conocidas previamente y cuáles deben encontrarse?

2. ¿Puedes aplicar el razonamiento de Descartes para dividir el número 10 en dos cantidades cuya diferencia es 2?

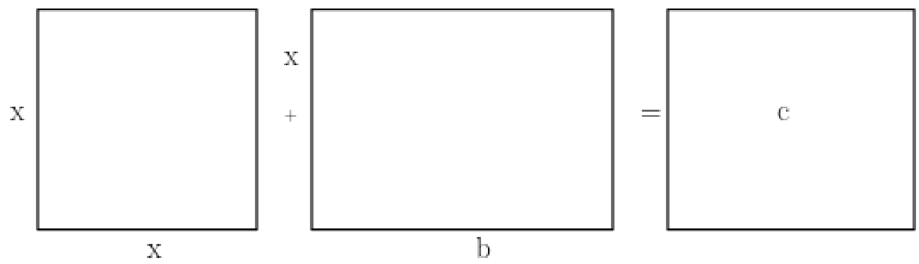
Análisis 15. Este problema es de gran interés, no solo para resolverse, sino para trabajar en clase algunas motivaciones sobre la generalización de patrones. Debe tenerse en cuneta que, en el momento de introducir estos problemas, los sistemas de ecuaciones no son conocidos, por lo que suponen, además de una forma de entender las variables y su uso, un interesante punto de partida a los sistemas de ecuaciones. En los temas de sistemas puede generalizarse el proceso a las auténticas formas canónicas de Descartes.

Los objetivos atendidos en este problema son: reconocer las reglas de interacción en el grupo de números presentado; entender estas relaciones como relaciones generales; manipulación de las expresiones generales para su posterior aplicación concreta.

Problema 16. (Uso de ecuaciones de segundo grado) Una forma particular de conocer una de las soluciones de la ecuación de segundo grado, es decir, de $ax^2 + bx + c = 0$ que ya sabemos que tiene por fórmula

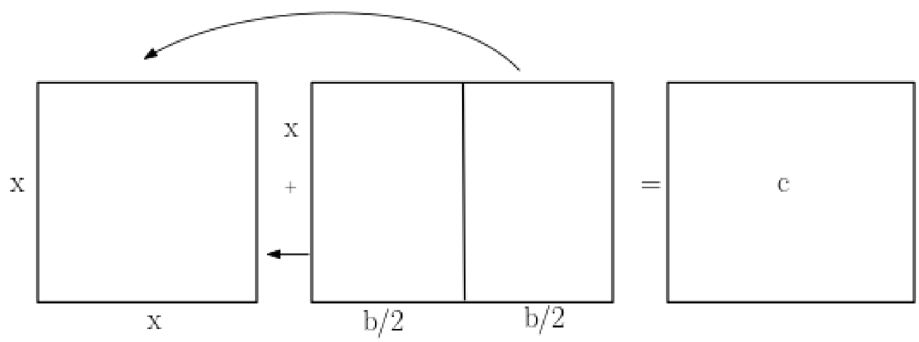
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

es tomando el siguiente caso geométrico particular:

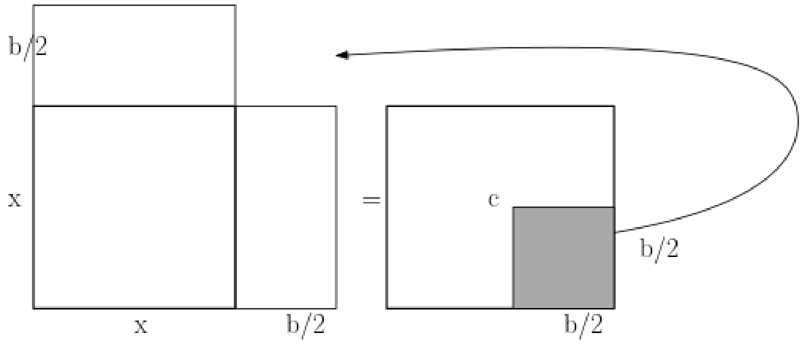


y tomamos las siguientes transformaciones:

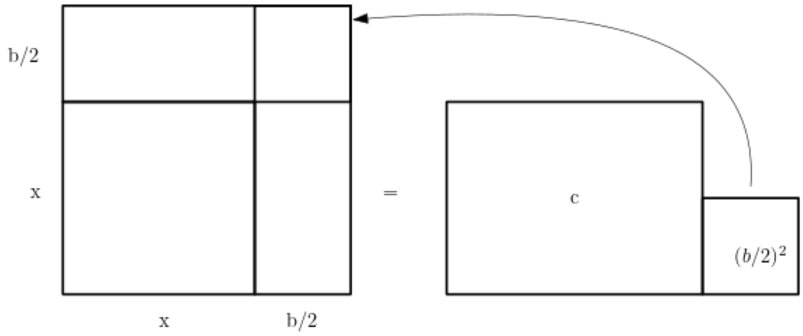
A)



B)



C)



Los valores b y c son conocidos y x es una longitud desconocida a determinar.

1. ¿Puedes expresar la situación inicial mediante una ecuación?
2. Expresa cada uno de los pasos seguidos en A), B) y C) mediante ecuaciones.
3. ¿Puedes resolver la ecuación resultante de C)? ¿Tienen los valores obtenidos sentido?
4. Relaciona las letras a, b, c y x de la fórmula de la ecuación de segundo grado con las usadas en los razonamientos geométricos

Análisis 16. Este problema justifica la fórmula de la ecuación de segundo grado, para las raíces reales, y positivas, de una ecuación de la forma $x^2 + bx - c = 0$. Además de verse la justificación de la fórmula en un caso elemental, se trabaja el uso de magnitudes constantes y variables de una manera fluida, siendo necesario, al final, la relación de estos razonamientos con la fórmula original.

Los objetivos que se pretende dar en este problema, en cuanto al uso de los símbolos se refiere, son: entender y distinguir variables que pueden ser cantidades genéricas de cantidades concretas; simbolizar los métodos realizados y encontrar las reglas de interacción de cada uno de los pasos en relación con las ecuaciones de segundo grado.

Problema 17. Hacia 1792, a la edad de 14 años, Gauss, uno de los matemáticos más brillantes de la historia, se encontraba en clase. Durante la clase de matemáticas, el profesor, sin ganas de trabajar, propuso un trabajo que, sin duda, les llevaría gran parte de la hora. La tarea fue *"sumar los primero 150 números"*. Curiosamente, apenas había pasado un minuto, cuando Gauss se pronuncia dando la respuesta correcta. El profesor, sorprendido, le preguntó cuál había sido su razonamiento. Gauss respondió con el siguiente ejemplo:

Imaginemos que queremos sumar los primeros 4 números, es decir, queremos realizar la operación

$$1 \qquad + \qquad 2 \qquad + \qquad 3 \qquad + \qquad 4.$$

Podemos tomar las agrupaciones de la siguiente manera concreta:

$$\begin{tikzcd}
1 & + & 2 & + & 3 \arrow[ll, bend left, "5"'] & + & 4. \arrow[llllll, bend right, "5"']
\end{tikzcd}$$

Gauss se dio cuneta de que, sumando el primer y el último número, obtiene el mismo que sumando el segundo y el penúltimo, el tercero y el antepenúltimo, etc. Además, como las sumas de esta manera son de dos en dos, el número de veces que realizas la operación es la mitad del total de números que se tiene. Es decir, con cuatro números, tenemos dos *paquetes* de valor $4 + 1$ que sumamos tantas veces como la mitad de la cantidad de números, $\frac{4}{2}$. En fin, el valor total de la suma es $\frac{4}{2} \times (4 + 1) = 10$.

1. ¿Puedes realizar el mismo argumento para la suma de los seis primeros números?¿Y para los 5 primeros?¿Notas alguna diferencia?

2. Si tomamos n como un número general, realiza el razonamiento análogo a los anteriores para la suma de los primeros n números. Es decir, toma las agrupaciones

$$\begin{tikzcd}
1 & + & 2 & \cdots & n-1 \arrow[ll, bend left, "n+1"'] & + & n. \arrow[llllll, bend right, "n+1"']
\end{tikzcd}$$

   y mira cuantos *paquetes* de valor $n + 1$ tenemos.

3. Aplicando el proceso anterior ¿Qué respuesta dio Gauss para la suma de los primeros 150 números?

4. Si la suma total que se ha obtenido es 28 ¿en qué número hemos empezado la suma?

5. ¿Puede ser 8 suma de números consecutivos comenzando en 1?

Análisis 17. Este problema supone la consagración de la generalización de patrones y el uso del lenguaje algebraico para su abordaje. En este caso, se trabaja, de una manera propiamente dicha, la variable como número general, casi dando lugar a una representación funcional. Además, se ve el uso concreto de las expresiones algebraicas para resolver problemas que ven incrementada su dificultad a medida que incrementamos los datos. Finalmente, en los dos últimos apartados, se ve que en la misma expresión, $\frac{n(n+1)}{2}$, la variable pasa de verse como un valor general a uno desconocido y se estudia la posibilidad de que dicho valor sea posible o no. En resumen, en este problema se concentran gran parte de los objetivos del uso de la variable como número general y, además, se necesita de los usos anteriores para tener un enfoque global del problema.

Con todo esto, y con el último problema en concreto, nos encontramos en el punto de partida para el último grado de abstracción, es decir, el uso de la variable en el contexto de funciones.

III) Problemas relacionados con el uso de la variable como representación de relaciones funcionales

Este manejo, que es más propio de la geometría analítica, tiene una interesante aproximación desde la perspectiva algebraica, pues permite reformular algunos de los problemas ya vistos en términos de relaciones de dependencia e independencia de las variables. Lo importante es plantear cuestiones en las que las formulaciones, partiendo de los usos ya trabajados, no sean *encontrar el valor* o *generalizar una estructura*, sino que la incógnita del problema sea la propia relación entre las variables. En este aspecto, vamos a focalizar el interés en el manejo de formulas para expresar relaciones funcionales, así como el uso de relaciones lineales entre las variables.

Problema 18. Pedro tiene 4 años más que su hermana.

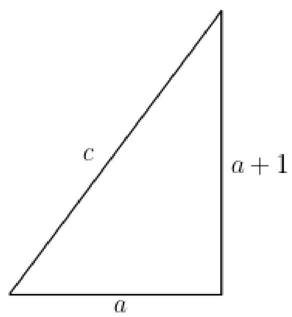
1. ¿Qué edad tiene Pedro si su hermana tiene 6 años?
2. ¿Qué edad tendrá su hermana si pedro tiene 5 años?
3. ¿Qué relación existe entre las edades de uno respecto de las del otro? ¿Esta relación se cumple cada año que pasa?
4. Ramón, un amigo de Pedro, tiene el doble de la edad de Pedro menos tres años. ¿Qué relación existe entre las edades de estos amigos?¿Esta relación seguirá dándose el año que viene?

Análisis 18. Vemos que, en este problema, comenzamos con meras cuestiones aritméticas, hasta que proponemos dar la relación, es decir, expresar una ecuación de la forma $x - 4 = y$. En este punto, puede parecer una mera ecuación, pero las cuestiones hacen que se tenga que ver la relación de las variaciones de una variable respecto de la otra. Esta forma de atacarlo supone el inicio del último grado de abstracción. En el caso de la última cuestión, dado que la relación no puede mantenerse con el paso del tiempo, nos encontramos con una ecuación en la que no tiene sentido preguntarse por la variación de una respecto de la otra. Los objetivos en relación al tercero de los usos que estamos dando de la variable son: identificar y construir las relaciones dadas por el problema; razonar sobre la variación de los datos; construir la dependencia de las variables, unas respecto de otras.

Problema 19. ¿Qué relación deben tener los lados de un rectángulo para que su perímetro iguale al área? Considerando los valores 3,4 y 5 ¿qué valores podemos asociar a cada uno de ellos para que sean los lados de un rectángulo con la propiedad anterior? ¿En qué caso se trata de un cuadrado? ¿Puede haber un rectángulo de lado 1 con esta propiedad?

Análisis 19. En este caso, nos encontramos en un problema en el que la incógnita de la cuestión es dar una relación entre los lados. Se pretende que sean capaces de construir esta relación y saber asignar el rango de valores que se les propone. Es interesante el contexto del problema, pues las variables a usar atienden a lados distintos, pero, a la hora de trabajar con los datos, el uso de los lados es indiferente, es decir, el uso de las variables es indistinto. Esto puede suponer un bloqueo al principio, porque en el contexto del problema, los lados solo son distinguibles por los nombres de las variables, es decir, la letra asignada, y nada más. Las última pregunta hace referencia a la evaluación de una de las variables y ver que, en dicho caso, la construcción resultaría con un valor negativo. El objetivo principal que se pretende trabajar en este ejercicio es la identificación y la construcción de las relaciones funcionales que intervienen en el problema.

Problema 20. Consideremos la siguiente situación geométrica:



1. Si el perímetro del triángulo es 12 cm y el lado c es 5 cm ¿qué valor debe tener el lado a?

2. Si el área del triángulo es 6 cm^2 ¿Qué valor tendrá el lado a?

3. Si sabemos que el área del triángulo anterior iguala a la mitad de su perímetro ¿qué relación existe entre los lados? Si el lado a mide 3 cm ¿qué medida tendrá el lado c? Si el lado c mide 5 cm ¿qué longitud tendrá el lado a?

Análisis 20. Este problema es similar al anterior, además, debe trabajarse la ecuación de segundo grado. El objetivo a trabajar es, como en el anterior, la construcción simbólica de las relaciones del problema.

Con todo lo anterior, concluimos la exposición de problemas que, en mayor o menor medida, atacan los usos de la variable y los objetivos para la flexibilización de su manejo. De nuevo, esta exposición no debe verse de una manera concreta, sino como una exposición general sobre el planteamiento de una secuencia sobre el afianzamiento del manejo del álgebra.

4.3.3. Sesiones de la propuesta didáctica

Hasta ahora, nos hemos centrado en proponer problemas en un orden concreto que atienden los distintos usos de la variable algebraica. Si bien este era uno de los puntos principales del trabajo, con el fin de que el alumno asimile de una manera más profunda el concepto y uso de la variable dentro del pensamiento algebraico, otro de los puntos es dar una estructura a la forma de presentar los contenidos. Es por esto que esta sección se destina a presentar, de una manera esquemática, el orden y la disposición en la que pueden darse los problemas anteriormente comentados, así como los contenidos requeridos para su resolución.

Vamos a presentar una secuenciación en ocho sesiones que involucra, si miramos las secciones del currículo, los temas de ecuaciones y de ecuaciones de segundo grado, sin dejar de lado, desde luego, el de expresiones algebraicas. Esta secuenciación no debe entenderse como una presentación en términos de *horas de clase*, es decir, no se atiende a la temporalidad de cada una de ellas, pues unas pueden ser de mayor duración que una clase usual y otras pueden ser de menor duración. Debe entenderse como una propuesta para llevar los problemas anteriores a su aplicación, dando una división en bloques con el fin de dar una estructura más cerrada y ordenada a todo lo que hemos desarrollado.

La estructura de cada una de las sesiones va a ser la siguiente: vamos a dar los contenidos a trabajar en la sesión; comentar el problema tipo que pretende resolverse, es decir, asociado a los problemas expuestos en la sección anterior; y expondremos la forma en la que el alumno puede llegar a los contenidos, es decir, vamos a hacer un fuerte uso de la división dada por los momentos didácticos que el alumno debe experimentar (pág-14).

Sesión 1 (Ecuaciones aritméticas)**.** Esta sesión debe servir a modo de introducción al trabajo con ecuaciones, por lo que se van a trabajar problemas cuya resolución pueda ser realizada dentro del marco de la aritmética.

- **Contenidos:** Trabajo y reflexión sobre el uso del álgebra y la aritmética en problemas; ecuaciones de primer grado con una incógnita del tipo $ax + b = c$.
- **Problemas tipo**: Problemas 1 y 2.
- **Momentos didácticos:** Dado que, en esta sesión, los alumnos ya han trabajado problemas de esta índole tanto dentro del álgebra como dentro de la aritmética, los momentos de *primer encuentro y exploración* no tendrán lugar como tal. Los momentos principales que se esperan son:
  1. **Momento de trabajo de la técnica.** Es decir, algunos alumnos atacarán el problema desde un punto de vista aritmético y otros desde el planteamiento de una ecuación. Tanto unos como otros deben llegar a que ambos métodos responden de manera satisfactoria a las cuestiones.
  2. **Momento tecnológico-teórico.** Los alumnos, quizá bajo ciertas indicaciones, pueden llegar a comprender que estos problemas, tanto con las técnicas aritméticas como los métodos de resolución de una ecuación aritmética, llegan al mismo resultado, es decir, que el álgebra, en estas situaciones, no es necesaria.

3. **Momento de institucionalización:** La idea es que lleguen a ver como una afirmación cierta que para estas cuestiones y, en general, para las ecuaciones aritméticas, el álgebra es un instrumento que, aunque útil, es prescindible a la hora de alcanzar las soluciones.
4. **Momento de evaluación:** En este caso, una vez institucionalizada la idea anterior, los alumnos pueden recorrer los problemas anteriores desde el punto de vista tanto aritmético como algebraico.

Sesión 2 (Uso de la variable en las ecuaciones aritméticas)**.** En este caso, el objetivo principal es trabajar, de una manera concreta, el uso de la variable como *valor desconocido* dentro de las ecuaciones aritméticas. El contenido de esta sección ocupa un gran número de problemas, por lo que su duración temporal puede ser más amplia que otras.

- **Contenidos:** Ecuaciones aritméticas y la relación de la variable como *valor desconocido* con la *semántica* de la variable.

- **Problemas tipo:** Problemas 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

- **Momentos didácticos:** Seguimos con contenidos similares a la primera sesión, pero, en este caso, no se enfoca en la técnica para resolver los problemas, pues ya se ha visto en la sesión anterior que es indiferente el método aritmético o el algebraico. En esta sesión, el enfoque principal es la *semántica* de la variable y su uso, lo cual es una cuestión ciertamente novedosa. Los momentos que se esperan encontrar en este contexto son:

  1. **Mometo de primer encuentro**. La cuestión que se espera que hagan frente, a la vista de los problemas tipo, es a la relación existente entre la variable como *cantidad*, aunque desconocida, y la varaible como referencia al *objeto* que representa, es decir, longitudes, áreas, etc.
  2. **Momento de exploración.** En algunos problemas podrán explorar que, realmente, una variable referencia tanto un *objeto*, por ejemplo, una longitud, y a la vez un *valor desconocido*, como en el problema 3. Sin embargo, en los problemas 7 y 8, pueden encontrarse que la variable, sin duda, se usa como un valor desconocido, pero que tiene una cierta *polisemia* respecto al objeto que representa, pues puede ser área o longitud independientemente.
  3. **Momento de trabajo de la técnica.** La *técnica,* como tal, no es más que abstraer la semántica de la variable, pero este proceso es lento, por lo que debe mantenerse su desarrollo en sesiones posteriores, por este motivo, no se esperan el resto de momentos en esta sesión.

Sesión 3 (Aritmética frente a álgebra)**.** Desde un punto de vista formal, aquí se introducen los problemas para los que la aritmética no es suficiente para dar respuesta.

- **Contenidos:** Ecuaciones con una incógnita; operaciones sobre la variable compaginadas con las operaciones aritméticas.

- **Problemas tipo:** problemas 9, 10, 11.

- **Momentos**: En este caso, pasamos a trabajar tanto el uso de la variable de la sesión anterior como aquellos problemas que, con un razonamiento que involucre únicamente operaciones aritmética, no pueden resolverse. Los momentos esperados en este caso son los que siguen:

  1. **Momento de primer encuentro.** Es de esperar que los alumnos, al enfrentarse a estos problemas, mantengan el pensamiento de indiferencia de los métodos aritméticos y los algebraicos. Es por eso que, en este primer encuentro con los problemas, traten de aventurarse a tratar de resolverlos por sus propios medios.
  2. **Momento de exploración.** Dado que las formas anteriores no responden de una manera satisfactoria a estos nuevos problemas, deben desarrollarse, por primera vez, el trabajo de operar sobre la variable. Esto puede realizarse de una manera independiente o con ciertas ayudas, pero no por una institucionalización directa.
  3. **Momento de trabajo de la técnica.** Puesto que muchos de los problemas contienen los argumentos geométricos para operar sobre la variable, estos argumentos pueden traducirse en términos del lenguaje algebraico.
  4. **Momento tecnológico-teórico.** Deben encontrarse las similitudes entre los razonamientos geométricos y los algebraicos, hasta ver que cada uno de los problemas puede reducirse a ecuaciones aritméticas, pero partiendo de algo que, esencialmente, no es aritmético.

Sesión 4 (El símbolo "=" en el caso de las ecuaciones)**.** Siguiendo con la línea de la sesión anterior, vamos a tratar de una manera cercana la equivalencia de ecuaciones y el significado del símbolo de igualdad en cuanto a problemas de tipo aritmético como a los que no lo son.

- **Contenidos:** Equivalencia de ecuaciones y resolución de ecuaciones con una incógnita.

- **Problemas tipo:** 1, 2, 8, 9, 10 y 11.

- **Momentos didácticos:** La cuestión planteada en este caso tiene una complicación sustancial, por lo que, aunque dejando reflexionar sobre la comparación de problemas en los que el "=" es puramente aritmético y en los que no es, es bueno dar la presentación rigurosa de los contenidos al empezar. Los momentos que se trabajarán son:

  1. **Momento de primer encuentro-Momento de exploración.** Es verdad que la equivalencia de expresiones algebraicas corresponde a otro tema y, muchas veces, el trabajo procedimental de reducir expresiones o construir otras equivalentes ya ha sido visto. Sin embargo, cuestionarse el significado y la interpretación de una ecuación y, más en concreto, de un símbolo, no suele ser algo usual. Es por esto que hemos puesto indistintamente estos dos momentos.
  2. **Momento de institucionalización:** Seguramente, y por parte del profesor, se presentará detenidamente, usando los problemas como ejemplos, los contenidos sobre la equivalencia de ecuaciones.

3. **Momento de trabajo de la técnica - tecnológico teórico:** A partir de los contenidos detenidamente presentados, debe reforzarse su correcto uso y manejo.

Sesión 5 (Uso de la variable como número general)**.** Este es uno de los puntos claves en los que se traspasa, sin salir del contexto de las ecuaciones, el umbral de ver las ecuaciones como objeto de *encontrar un valor concreto* a ver la variable como un *número general*. En este caso, el contenido de la sesión, es realmente amplio.

- **Contenidos:** generalización de las propiedades aritméticas (conmutatividad, asociatividad, etc.); identidades notables; razonamientos algebraicos con expresiones en la que los parámetros (o constantes) aparecen de manera simbólica.

- **Problemas tipo:** 12, 13 y 14.

- **Momentos didácticos:** muchos de los tópicos trabajados sobre estos problemas ya son conocidos por los alumnos desde el punto de vista práctico, por lo que se trata de desarrollar de una manera más concreta las relaciones entre *ecuaciones* e *identidades.*

    1. **Momento de trabajo de la técnica.** A partir de los conocimientos ya desarrollados, el trabajo sobre *ecuaciones* que son ciertas, tanto para los valores de la variable como para los valores de los *parámetros*, hacen que deje de verse la variable como un valor o cantidad concreta, sino como un *número general.*
    2. **Momento de evaluación.** En este caso, dar una vuelta atrás, para mirar el recorrido que se ha dado, desde las ecuaciones aritméticas hasta estas nuevas *identidades*. Con el fin de *observar* que, realmente, el trabajo con ecuaciones y con variables no es algo homogéneo, tiene muchos grados de profundidad y diversas formas de verse.

Sesión 6 (Ecuaciones de segundo grado completas)**.** Una de las consecuencias de hacer énfasis sobre las variables y el uso de *parámetros* (*constantes*) es que la traducción de los razonamientos geométricos en términos algebraicos se ve reforzado, por lo que se pueden dar ciertas justificaciones a, por ejemplo, la fórmula general de la ecuación de segundo grado.

- **Contenidos:** Ecuación de segundo grado con una incógnita y compleción de cuadrados.

- **Problemas tipo:** 16.

- **Momentos didácticos:** Se trata de *poner sobre la mesa* alguna justificación, no solo algebraica, sobre la fórmula de la ecuación de segundo grado. Los momentos que se cree que tendrán lugar en este caso son:

    1. **Momento de institucionalización.** Dado que las ecuaciones de segundo grado suelen traer consigo un gran número de complicaciones técnicas, es interesante plantear, en primer lugar, su forma de resolución, desarrollando los contenidos pertinentes.

2. **Momento del primer encuentro.** En el caso del problema 17, no se busca una aplicación directa de la fórmula, sino relacionar los contenidos desarrollados con un nuevo enfoque de un problema que, de primeras, no parece análogo a los anteriormente realizados.
3. **Momento de exploración.** Tratar de traducir los razonamientos al lenguaje algebraico y comprender los pasos, entre ellos, el completar cuadrados, que no se ha usado anteriormente de una manera tan directa o clara.
4. **Momento tecnológico-teórico**. Es decir, no solo ver que con las técnicas utilizadas se encuentra una forma de resolver el problema dado, sino que el razonamiento funciona de una manera general, pues tanto la variable como los parámetros pueden verse como valores genéricos (dentro de las pertinentes restricciones de la ecuación concreta que se está trabajando, es decir, la que recrea la situación geométrica del problema 17).
5. **Momento de evaluación.** A la vista del problema y de la fórmula para la solución de la ecuación de segundo grado, puede verse que la fórmula nace de algo concreto, no de una manera artificial o meramente operativa.

Sesión 7 (Generalización de patrones)**.** Rigurosamente, el segundo de los usos de la variable a desarrollar queda completamente expuesto en esta sesión, a partir de la generalización de patrones.

- **Contenidos:** Generalización de patrones y trabajo con identidades.
- **Problemas tipo:** 15 y 17.
- **Momentos didácticos:** Este tipo de problemas y de formas de trabajar la variable vuelve a tener un cierto carácter novedoso.

  1. **Momento de primer encuentro.** La generalización de patrones y sus razonamientos tiene, como ya hemos dicho, una estructura novedosa, apenas vista o ilustrada con anterioridad.
  2. **Momento de exploración.** Trabajando sobre igualdades y los usos de la variable, se pretende llegar a que encuentren identidades que recreen los patrones generales.
  3. **Momento de trabajo de la técnica/institucionalización.** Dado que el objetivo es profundizar en el uso de la variable, puede que se presenten obstáculos que no puedan ser superados sin fuertes aclaraciones, por lo que pueden darse estos dos momentos de un manera indistinguida.
  4. **Momento de evaluación.** Con otro de los usos cerrados, es interesante reflejar las diferencias que se han ido viendo, tanto en las variables como las ecuaciones, incluso comentando la asociación de las diferencias de perspectiva con las concepciones del álgebra que se pueden asociar a cada una de ellas.

Sesión 8 (Uso de la variable en relaciones funcionales)**.** Como última sesión, presentamos el último de los usos de la variable, que deja las puertas abiertas a la geometría analítica desde un punto de vista algebraico.

- **Contenidos:** Dependencia de las variables, representación de relaciones y variaciones.
- **Problemas tipo:** 18, 19 y 20.
- **Momentos didácticos.** Los momentos esperados en esta última forma de trabajar la variable son:
    1. **Momento de primer encuentro.** En este caso, la novedad no es el tipo de problema, pues tiene similaridad con los anteriores, sino con las cuestiones que se plantean sobre ellos, es decir, el expresar las relaciones entre las variables.
    2. **Momento de exploración.** Dado que lo que se pregunta coincide con la misma ecuación, pues lo que debe darse es una relación, deben verse las formas correctas de representar y simbolizar los contenidos que se presentan.
    3. **Momento de trabajo de la técnica/ tecnológico teórico/ institucionalización.** El trabajo indistinguido con variables, parámetros y relaciones supone un proceso de abstracción culminante en este aspecto, pues la forma de proceder depende mucho del manejo que se presente, sin ser fácil de precisar el orden en el que pueden aparecer los momentos anteriores.
    4. **Momento de evaluación:** en lo concerniente a las cuestiones de tipo *funcional*, vale la pena, de nuevo, comentar y dar transparencia tanto a su necesidad en problemas que, en otros contextos, no son recreables, como observar el recorrido que se ha experimentado respecto al uso de la variable.

Antes de concluir esta sección, daremos la siguiente aclaración sobre la temporalización de los contenidos. Dado que la estructura de estas sesiones se desliga, en ciertos momentos, como puede ser a la hora de trabajar la generalización de patrones o el uso de la variable como valor funcional, del contenido del currículo en el tema de ecuaciones, es posible que se precisase de una mayor extensión temporal de la que suele ocupar normalmente el tema de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado. En el caso de ser esta la situación, las sesiones que, en ningún caso, deben ser prescindibles, son las sesiones 1, 2, 3, 4 y 6, pues tiene los contenidos requeridos del currículo y, además, aborda de una manera precisa la relación entre aritmética y el primero de los usos de la variable algebraica. De todas formas, dado que en la secuenciación se hace un fuerte uso de las expresiones algebraicas, puede darse una compaginación, es decir, desarrollar de una manera entrelazada, tanto el tema de ecuaciones como el de expresiones algebraicas, permitiendo dar, en el orden expuesto, los usos de la variable, tanto en el marco de las ecuaciones como de las expresiones algebraicas. En este caso, creo que no habría problema en dar todos los contenidos expuestos en los tiempos esperados, además de aquellos que no ocupamos y que siguen presentes en el currículo.

Capítulo 5

Discusión

El presente capítulo atiende a diversas cuestiones. Por un lado, se expondrá mi experiencia personal y por tanto, subjetiva, sobre la motivación del tema del presente trabajo, así como de la aplicación de los contenidos desarrollados en contextos concretos y, por supuesto, sobre las limitaciones que he experimentado en su aplicación. Además, y salvaguardando cualquier desconocimiento que pueda tener sobre desarrollos al respecto, expondré algunas líneas generales sobre distintos enfoques por los que se podría continuar el trabajo expuesto.

5.1. Motivación del trabajo y experiencia personal

Como ha podido verse a lo largo del trabajo realizado, su contenido es puramente teórico, sin margen de presentación de *pruebas* de aplicación, más que las que ya están contenidas en las referencias que se han ido dando. Al margen de este hecho, y teniendo en cuenta los aspectos comentados en el primer capítulo, el germen principal del trabajo ha venido de la mano del intento de motivación del pensamiento algebraico. Esta motivación, o intento de motivación que, en muchos casos daba resultado, viene de plantear no solo cuestiones de *la vida real,* sino de meras cuestiones históricas, que permiten construir un cuerpo y un suelo a los conceptos que se trabajan, como si se les dotase de cierta *vida,* fuera, en parte, de la artificialidad que se percibe en las expuestas en el currículo.

Un ejemplo ciertamente interesante, que tuvo lugar durante mi periodo de prácticas, fue el uso de la historia para introducir las nociones de raíces y factores de polinomios a un alumno de cuarto de E.S.O. En especial, sobre la relación de los exponentes de la variable y las *dimensiones* (longitudes, áreas, volúmenes, etc.) que terminó con construcciones similares a los del problema 8, pero en un contexto más avanzado. A raíz de esta *introducción*, el alumno tomó un interés notable por los contenidos a desarrollar.

Otro ejemplo, esta vez, en un alumno de segundo de E.S.O., fue sobre el trabajo en la equivalencia de ecuaciones y el uso del símbolo “=”. El alumno presentaba problemas al pensar que dos *cosas distintas*, pudiesen estar unidas por un símbolo de igualdad. Esta cuestión, ciertamente inocente, presentaba una profundidad inmensa en cuanto a la ruptura que supone la aritmética del álgebra. La forma de dar una respuesta satisfactoria a su cuestión vino de la mano del trabajo sobre la *variable* y la forma en la que podía entenderse, trabajando problemas similares al 9, 10 y 11.

A raíz de estas motivaciones y bloqueos, además de otros encontrados, comentados en el primero de los capítulos, surgió la cuestión dada en (pág-4), cuya búsqueda de respuesta, ha dado lugar, por un lado, a los marcos teóricos desarrollados y, por otro, a la propuesta didáctica y los problemas expuestos.

En resumen, el germen del trabajo nace de la experiencia personal durante el desarrollo del periodo de prácticas y la observación de que muchos de los métodos expuestos, quizá en una forma menos sofisticada, daban verdaderos resultados tanto de motivación como de asimilación de conceptos.

5.2. Limitaciones

Como ya he comentado en el principio de la sección precedente, el desarrollo del trabajo ha sido puramente teórico. El motivo principal de este hecho es la falta de evaluaciones y experimentación sobre la metodología expuesta, por los motivos sanitarios que todos conocemos.

De haber sido posible, una forma adecuada de obtener resultados al respecto, hubiese sido la recreación real de las sesiones expuestas, con aclaraciones más detenidas sobre la evolución de los distintos alumnos, así como un análisis exhaustivo de los momentos didácticos.

5.3. Líneas de trabajo desarrolladas y posibles continuaciones

A lo largo del trabajo, hemos podido ver un gran número de referencias y de estructuras teóricas que, de una manera u otra, se centran en el estudio y desarrollo del pensamiento algebraico. Voy a centrarme en comentar por separado estas ramas de estudio y propondré, dentro del marco de mi trabajo, algunas posibles continuaciones o especificaciones que podrían hacerse y que pueden resultar interesantes.

En primer lugar, y lo que ha supuesto la columna vertebral del trabajo, ha sido el modelo 3UV, sobre los distintos usos de la variable. Este marco teórico, cuyas referencias principales han sido [Álvarez et al., 2015], [Ursini and Trigueros, 2004] y [Philipp, 1992], asientan una metodología con el fin de analizar el buen manejo que tienen los alumnos sobre la variable algebraica. Este marco es, por tanto, y en sus desarrollos teóricos, más de análisis de resultados que de aplicación didáctica. Aparte del presente trabajo, además de alguna otra tesis doctoral, no existe mucha literatura sobre la aplicación didáctica directa de este modelo, es decir, de dotar al modelo con una finalidad educativa, más que analítica.

Además del modelo anterior, se ha hecho un fuerte uso de las concepciones del álgebra, con el fin de justificar los enfoques que se tienen de la variable en el álgebra educativa. En este caso, las referencias claves han sido [Usiskin, 1988] y [Filloy and Rojano, 1989], que presentan los recorridos de la concepción del álgebra de una manera concreta, pero realmente útil a la hora de entender la forma en la que se concibe el álgebra en la educación secundaria. Además, ya en [Álvarez et al., 2015], se relacionan estas concepciones con el modelo 3UV. En el presente trabajo, se ha intentado matizar más aún las concepciones presentadas y el uso de la variable algebraica que puede vincularse a cada una.

En la misma línea de lo anterior, se ha intentado dotar, en todo momento, de un marco histórico en el que desarrollar los contenidos, con el fin de que no solo se justifiquen los diversos grados de abstracción que se experimentan en el desarrollo del pensamiento algebraico, sino que esos mismos procesos tienen una evolución más o menos cercanas a momentos de la historia que han sido fundamentales para el desarrollo del álgebra. En esta línea, apenas se encuentra literatura, más allá de [Freudenthal, 1981], que hace alusión a la necesidad de que el docente tenga conocimientos de historia para un mejor desarrollo de los contenidos a impartir. Creo que una muy interesante línea de trabajo puede nacer de la relación de la historia con los contenidos, no solo como sustento a la legitimidad de los conceptos enseñados, sino como otro instrumento motivador de la matemática.

Finalmente, un marco al que le hemos dado un uso parcial, para dar una secuenciacón de la aplicación de los contenidos desarrollados, ha sido la *Teoría antropológica de lo didáctico*, de la que hemos extraído algunos contenidos y usos de referencias como [Ruiz et al., 2010], [Chevallard, 1999] y [Baeza Alba and Sordo Juanena,]. Esta línea de desarrollo, tanto teórico, como de fuertes aplicaciones didácticas, tiene un importante auge en la actualidad y atiende a todo tipo de contenidos matemáticos dentro de la secundaria. Además, dentro de un desarrollo que culmina con un uso del álgebra en una terminología de funciones, como hace [Ruiz et al., 2010], puede darse una presentación de los contenidos de geometría analítica partiendo desde una perspectiva algebraica.

Atendiendo a las posibles continuaciones de este trabajo en concreto, creo que, por un lado, sería interesante llevarlo a un contexto práctico, en el que la teoría y la metodología presentadas tuviesen cabida en una aula, para obtener muestras fiables de su validez. Por otro lado, creo que valdría la pena concretar la amplitud del trabajo a algunos casos concretos, desarrollando de una manera más detallada las dificultades de los alumnos con los usos de la variable. Es decir, que si bien este trabajo marca unas líneas generales sobre la evolución del uso de la variable en el tema de ecuaciones, pueden desarrollarse trabajos análogos, pero concretando los usos de la variable, no solo para el tema de ecuaciones, sino para el de sistemas de ecuaciones, expresiones algebraicas y geometría analítica en cursos de de diversos nivel como pueden ser tercero y cuarto de E.S.O, o primero de bachillerato.

Capítulo 6

Conclusiones

Como capítulo final, vamos a desarrollar las conclusiones que he podido extraer del trabajo desarrollado. Estas conclusiones las voy a dividir en dos partes. La primera de ellas va a ser la relación de los contenidos presentados con los objetivos inicialmente expuestos. En la segunda parte, vamos a dar algunas críticas constructivas a ciertos puntos del trabajo.

6.1. Cumplimiento de los objetivos

Vamos a plantear cada uno de los objetivos propuestos en un principio e iremos desgranando, de manera somera, cada uno de ellos atendiendo a los contenidos desarrollados en el trabajo.

Vale la pena aclarar, como comentario general, que cada uno de los objetivos planteados (pág-17), tanto principales como parciales, tienen el acento en *los alumnos*, por lo que, dado que no se tienen unas aplicaciones de las metodologías en un caso práctico concreto, vamos a responder al cumplimiento de los objetivos poniendo el acento en si las cuestiones y contenidos desarrollados facilitarían o propiciarían un contexto en el que los objetivos se alcanzasen.

Atendamos, en primer lugar, al objetivo 1., que tiene una estructura general que subdividimos en objetivos parciales más concretos:

- Respecto al objetivo 1-a), podemos decir que gran parte de la propuesta didáctica dada atiende a este objetivo. Los problemas comprendidos entre el 1 y el 14 suponen cuestiones que pueden resolverse en el marco de la aritmética y otros que no. En este aspecto, creo que se ha realizado de una manera sofisticada un desarrollo detenido de este punto.

- El punto 1-b), podemos dividirlo, a su vez, en dos puntos. Uno de ellos, sobre la toma de conciencia de las diferentes concepciones que se tiene de la simbología y de que posee diferentes usos. Y otro, sobre el conocimiento de las concepciones del álgebra y su relación con la historia.

  El primero de estos puntos, podemos decir que ha sido desarrollado y trabajado, desde los ejercicios y las sesiones propuestas, tanto en las concepciones de la variable como en el manejo de los demás símbolos.

Respecto al segundo, en este caso, aunque es verdad que se ha usado la historia como un potente instrumento motivador de diversos problemas, puede decirse que no se ha mostrado, como tal, el uso de las concepciones del álgebra en la historia, fuera de los usos de la variable.

- El último de los objetivos del punto 1., el 1-c), podemos decir que es el que más se ha trabajado y tratado de desarrollar y hacer patente en cada momento.

Finalmente, atendiendo al objetivo 2., podemos decir que este objetivo tendría más claro su cumplimiento en el desarrollo de las sesiones, pues el lugar en el que se presenta el *momento de institucionalización* de los contenidos es clave para un desarrollo, no solo de reflexión, sino de definición rigurosa de los diversos aspectos. Con respecto a esto, creo que, aunque no se han desarrollado de una manera profunda la forma en la que presentar contenidos o dar lugar a los *momentos didácticos*, se han dado las suficientes directrices como para que aparezcan de manera rigurosa, y natural, los contenidos a aprender.

6.2. Comentarios adicionales al trabajo

Como algunos apuntes adicionales, que vale la pena hacerse a modo de auto-crítica del trabajo, podemos destacar:

1. La relación de la propuesta didáctica con los contenidos del currículo de secundaria. En efecto, la mayor parte de los contenidos los hemos abordado, mediante nuestra metodología, pero algunos, como puede ser un énfasis especial en las ecuaciones de segundo grado incompletas o los métodos de resolución geométrica de ecuaciones, se han dejado de lado.

2. Algunos problemas de nuestra propuesta, aunque tenían una guía de resolución indicando los pasos a seguir, pueden ser, en muchos casos, de una alta complejidad para alumnos de segundo de E.S.O.; es por eso que, en el caso de aplicación, habría que matizar o simplificar alguno de ellos.

3. El uso de la historia de las matemáticas para motivar, si bien, en mi experiencia he tenido buenos resultados, no se refleja más que en los problemas propuestos, cuando, realmente, este aspecto, donde más valor tendría, sería en el desarrollo de las sesiones o clases. En este caso, no he matizado todo lo que sería preciso el desarrollo de las sesiones.

4. El trabajo ha tratado de barrer demasiado terreno, lo que ha producido que, si bien presenta un marco general de interés y abre la puerta a una aplicación concreta con una metodología específica, deja muchos matices y detalles en el tintero, que sería de gran interés estudiar en casos prácticos. Algunos de estos pueden ser, por un lado, mayor énfasis en aspectos sobre las ecuaciones de segundo grado, desde un punto de vista tanto histórico como de trabajo y, por otro, puede desarrollarse, con mayor amplitud, temas relacionados con el uso y el significado de símbolos como “=” o el “-” a medida que recorres los diferentes usos de la variable.

Finalmente, y como conclusión final, el trabajo me ha parecido enriquecedor por el gran número de recursos de los que hace uso y de las muchas formulaciones que tiene respecto al pensamiento algebraico. Creo que este trabajo, a nivel de contenido, no solo puede resultar de interés para la aplicación al alumnado, sino también para que el docente se cercione de que el álgebra se dice de muchas formas, se puede ver y observar con muchos prismas y que, en ningún caso, en el álgebra escolar, hay un enfoque privilegiado, todos deben existir y estar presentes.

Capítulo 7

Bibliografía

[Álvarez et al., 2015] Álvarez, I., Gómez-Chacón, I. M., and Ursini, S. (2015). Understanding the algebraic variable: Comparative study of mexican and spanish students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(6).

[Baeza Alba and Sordo Juanena,] Baeza Alba, M. n. and Sordo Juanena, J. M. Teoría antropológica de lo didáctico (tad): El nuevo paradigma en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

[Chevallard, 1999] Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2):221–266.

[de Madrid, 2015] de Madrid, C. (2015). Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del consejo de gobierno, por el que se establece para la comunidad de madrid el currículo de la educación secundaria obligatoria. *Boletín oficial de la Comunidad de Madrid*, 20.

[Filloy and Rojano, 1989] Filloy, E. and Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, 9(2):19–25.

[Freudenthal, 1981] Freudenthal, H. (1981). Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics? *For the learning of mathematics*, 2(1):30–33.

[Juárez, 2011] Juárez, J. A. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3uv. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 76:83–103.

[Kieran, 1981] Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, 12(3):317–326.

[Kline et al., 1999] Kline, M., Martínez, M., et al. (1999). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.*

[Mora and Terricabras, 1994] Mora, J. F. and Terricabras, J.-M. (1994). *Diccionario de filosofía*, volume 3. Edições Loyola.

[Philipp, 1992] Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The Mathematics Teacher*, 85(7):557–561.

[Puig and Rojano, 2004] Puig, L. and Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12thICMI Study*, pages 187–223. Springer.

[Ruiz et al., 2010] Ruiz, N., Bosch, M., and Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álbebra en secundaria.

[Ursini and Trigueros, 2004] Ursini, S. and Trigueros, M. (2004). How do high school students interpret parameters in algebra?. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

[Usiskin, 1988] Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12*, 8:19.

[Van der Waerden, 2013] Van der Waerden, B. L. (2013). *A history of algebra: from al-Khwārizmī to Emmy Noether*. Springer Science & Business Media.