El teorema de de Rham

Jorge Luis Mayoral Pérez

Resumen

El presente trabajo pretende ser un texto introductorio a la teoría de haces, enfocado principalmente en la teoría cohomológica de haces. Como una de las fuertes aplicaciones de esta teoría, se presenta la demostración del conocido *teorema de de Rham*, que relaciona la cohomología de de Rham con la homología con coeficientes reales.

Índice

1. Haces y prehaces

Los haces pretenden generalizar las situaciones que se presentan cuando tenemos, por ejemplo, *el conjunto de funciones continuas de una variedad sobre* $\mathbb{R}$, o cuando se tienen las *p-formas diferenciales en una variedad*, *los grupos, módulos, etc.. de cohomología-homología*. Es decir, cuando tenemos una asignación de una estructura (grupo, anillo, álgebra, etc. . .) a cada uno de los abiertos de una variedad. Precisamente estas asociaciones son las que pretende generalizar la idea de haz. Comenzamos con las definiciones y ejemplos más básicos.

Definición 1. Sea X un espacio topológico. Un **prehaz**, $\mathcal{F}$, sobre X, consiste en asignar a cada abierto U, de X, un conjunto $\mathcal{F}(U)$ y una aplicación que, para cada par de abiertos $V \subset U$,

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{res_{U,V}} \mathcal{F}(V),$$

verifica que para cualesquiera $W \subset V \subset U$,

$$res_{U,W} = res_{V,W} \circ res_{U,V}.$$

Esta asignación de la que hablamos es, en realidad, una asignación functorial. Dado un espacio topológico X podemos considerar la categoría $\mathscr{C}_{open}(X)$ de los abiertos de X junto con los morfismos $Mor(U, V)$, $U \subset V$, dados por las inclusiones $U \hookrightarrow V$. Consideremos otra categoría $\mathscr{C} = (Sets, Group, etc)$. Un prehaz es un functor $\mathcal{F}$ tal que:

$$\begin{array}{ccc} Obj(\mathscr{C}_{open}(X)) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & Obj(\mathscr{C}) \\ U & \longmapsto & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Mor(V, U) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & Mor(\mathcal{F}(U), \mathcal{F}(V) \\ V \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{F}(U) & \longmapsto & \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\mathcal{F}(i)=res} \mathcal{F}(V)) \end{array}$$

donde la aplicación res debe cumplir las propiedades dadas por la definición.
La arbitrariedad de la categoría de llegada nos permite trabajar con categorías como anillos, grupos, espacios vectoriales, M-módulos, etc. . . . Dependiendo de la categoría en la que nos encontremos diremos que $\mathcal{F}$ es un prehaz (haz, respectivamente) de anillos, grupos, espacios vectoriales, etc. . .

Definición 2. Un **haz** es un prehaz que satisface dos condiciones adicionales, a saber, dado un recubrimiento por abiertos $U = \bigcup_i U_i$ de un abierto U, se tiene que:

C1: Si dos elementos $s, t \in \mathcal{F}(U)$ cumplen que $res_{U,U_i}(s) = res_{U,U_i}(t)$ para cada U_i, entonces $s = t$.

C2: Si $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ satisfacen que $res_{U_i,U_i \cap U_j} s_i = res_{U_j,U_j \cap U_i} s_j$ para todo i, j, entonces existe un elemento $s \in \mathcal{F}(U)$ que satisface que $res_{U,U_i} s = s_i$ para todo i.

Las condiciones de la definición anterior son naturales en el sentido de que lo que queremos pedir a los elementos de un haz, definidos en los abiertos de un espacio topológico, son condiciones de compatibilidad en las intersecciones. La manera más simple de entender estas condiciones es pensando en las variedades diferenciables, estas son, espacios topológicos $(M, (U_i, \varphi_i))$ dotados de un atlas en el que los cambios de cartas sean difeomorfismos. En este contexto, la condición de compatibilidad C2 es la de pedir la compatibilidad en los cambios de cartas, es decir, el haz va a ser el conjunto de funciones diferenciables en la variedad.

Veamos algunas construcciones de haces que permiten ver estas estructuras de una forma menos artificial que con su definición.

Ejemplo 1. Consideremos un espacio topológico X y otro espacio topológico K. Definimos el haz de constantes de X sobre K como la asignación a cada abierto U de X, el conjunto $\mathcal{F}(U)$ de funciones constantes en U sobre K. Lo que se hace no es más que poner en cada abierto una copia de K. Es fácil ver que esto es, efectivamente, un haz. Este ejemplo ilustra que la estructura de K determina la estructura del haz en el sentido que sigue. Si K tiene estructura de grupo, esta estructura se induce en el haz definiendo el producto del grupo como el producto de las evaluaciones punto a punto. Esto mismo ocurre para anillos, espacios vectoriales, etc....

Ejemplo 2. Sean ahora dos espacios topológicos Y y X y consideremos una función continua entre ellos, $\pi : Y \longrightarrow X$ y que sea sobreyectiva. Definimos el haz de secciones de π como el haz inducido por la asignación

$$\mathcal{F}(U) = \{\sigma : U \longrightarrow Y : \pi \circ \sigma \equiv Id_U\} := \Gamma(U, Y).$$

Veremos la mayor relevancia de este haz más adelante. Hasta ahora, simplemente quedarnos con que a cada espacio topológico le podemos dar un haz dándole una aplicación que sea continua y sobreyectiva sobre él.

Ejemplo 3. Otros haces que resultan más visuales son el haz de las funciones continuas y diferenciables de una variedad M en $\mathbb{R}$.

Un ejemplo más sofisticado es, por ejemplo, el haz de las p-formas diferenciales en una variedad. Además, este último, tiene estructuras muy ricas, por un lado, como las $0-formas$ son funciones $\mathcal{C}^\infty$ sobre la variedad, las $p-formas$ tienen estructura de $\mathcal{C}^\infty$-módulo. Por otro lado, el producto wedge nos da que, para las 0-formas, tenemos el producto $f \wedge \omega$, esdecir, el producto wedge induce una estructura de álgebra graduada.

1.1. Morfismos de haces

Una vez que se tiene definida una estructura, es importante ver los morfismos que preservan dicha estructura.

Definición 3. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos haces (o prehaces) sobre un espacio topológico X, un morfismo de haces (o de prehaces) es una aplicación $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ que asigna evaluaciones de $\mathcal{F}$ a evaluaciones de $\mathcal{G}$ de manera que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle res_{U,V}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle res_{U,V}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

conmute.

Dar a un espacio topológico un haz es darle una estructura a los elementos que se definen en cada abierto de manera que se tenga una coherencia en la estructura general sobre todo el espacio (esto nos lo garantizan las condiciones C1 y C2). La forma en la que se definen las variedades diferenciables, complejas, etc... no solo se nutren de la asignación de cada abierto un conjunto, esta asignación tiene una estructura mucho más rica. Por ejemplo, en el caso de las variedades diferenciables, en las que les asignamos a cada abierto el conjunto de funciones de dicho abierto sobre $\mathbb{R}$ que son diferenciables, tiene estructura de $\mathbb{R}$-álgebra. La siguiente definición trata de generalizar esta idea.

Definición 4. Sea $\mathcal{A}$ un haz de álgebras sobre un espacio topológico X y sea $\mathcal{M}$ un haz de grupos abelianos sobre X. Diremos que $\mathcal{M}$ es un haz de módulos sobre $\mathcal{A}$ o simplemente un $\mathcal{A}$-módulo si cada grupo $\mathcal{M}(U)$ tiene estructura de $\mathcal{A}(U)$-módulo y además, satisfacen que los morfismos de restricción cumplen que

$$res(fs) = res(s)res(f).$$

para todo $s \in \mathcal{M}(U)$ y todo $f \in \mathcal{A}(U)$.
Un morfismo φ de $\mathcal{A}$-módulos es un morfismo de haces entre dos $\mathcal{A}$-módulos $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, de manera que el morfismo φ cumple que

$$\varphi(U) : \mathcal{M}_1(U) \longrightarrow \mathcal{M}_2(U)$$

es $\mathcal{A}(U)$-lineal en cada abierto U de X.

Los haces y prehaces son estructuras diferentes, los haces son más complejos de construir y con propiedades más difíciles de verificar, por ello, lo que desarrollamos en la subsección siguiente es una forma de despreocuparnos a la hora de dar un prehaz y ver si realmente posee estructura de haz.

1.2. Haz de un prehaz

Ya hemos ilustrado que lo que a uno le interesa es trabajar con haces. Una pregunta que uno puede hacerse es si se puede dar estructura de haz a un prehaz de una forma *natural*. La respuesta es afirmativa y la ilustramos a continuación.

Definición 5. El espacio ***étalé*** sobre un espacio topológico X es, siguiendo el ejemplo visto anteriormente, un espacio topológico Y y una aplicación continua y sobreyectiva π de manera que π es un homeomorfismo local.

Llamaremos sección del espacio *étalé* en un abierto U de X a una aplicación continua $f : Y \longrightarrow X$ de manera que $\pi \circ f = Id_U$. Al conjunto de secciones sobre U lo denotaremos por $\Gamma(U, Y)$.

Es claro que el conjunto de secciones sobre X dados por π es realmete un haz. Con el espacio *étalé* podemos construir lo que llamaremos *haz asociado a un prehaz*, de manera que el haz que se le asigne a cada prehaz guarde toda la información.

Definición 6. Consideremos un prehaz $\mathcal{F}$ sobre X. Dado $x \in X$, tomamos los pares (U, s), donde U es un entrono abierto que contiene a x y $s \in \mathcal{F}(U)$. Consideremos la siguiente relación de equivalencia

$$(U_1, s_1) \sim (U_2, s_2) \Leftrightarrow res_{U_1,W}(s_1) = res_{U_2,W}(s_2),$$

donde $W \subset U_1 \cap U_2$ es un abierto que contiene a x.

Con esta relación de equivalencia, definimos el ***stalk*** del prehaz $\mathcal{F}$ en el punto x, $\mathcal{F}_x$, como el conjunto de clases dadas por la relación anterior para los entornos de x.

Observación 1. La relación de equivalencia de la definición anterior es precisamente la relación que se exige a la hora de dar los límites directos. Por este motivo, se puede definir, de la misma manera, el *stalk* de un prehaz $\mathcal{F}$ en el punto x como

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U),$$

esto es, el límite directo de los conjuntos $\mathcal{F}(U)$ respecto a sus morfismos restricción para los entornos que contienen a x.

Definir los *stalks* como límites directos nos permite asegurar que todas las propiedades que tenga el prehaz que se preserven bajo límites directos, las herede cada uno de los *stalks* $\mathcal{F}_x$. Este es el caso para haces de módulos, de grupos abelianos, de anillos, etc...

Hay una asignación natural que induce este límite directo a los morfismos restricción que nos identifica elementos del prehaz con secciones en los *stalks*, esto es:

$$\begin{aligned} res_{U,x} \colon \mathcal{F}(U) &\longrightarrow F_x \\ s &\longmapsto s_x \end{aligned}$$

siendo s_x la clase de s bajo la relación de equivalencia citada o, equivalentemente, la clase dada por el límite directo de s. A los elementos s_x lo llamamos germen de

s en el punto x.

Veamos como relacionar los *stalks* de un prehaz y los espacios *étalé*. Consideremos un espacio topológico X y sea la colección

$$\hat{\mathcal{F}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

junto con la aplicación natural

$$\begin{aligned} \hat{\pi}\colon \hat{\mathcal{F}} &\longrightarrow X \\ \mathcal{F}_x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Vamos a darle a este espacio estructura de espacio *étalé*, para ello, debemos de darle una topología compatible con la proyección que hemos definido, es decir, que $\hat{\pi}$ sea continua en esa topología. Para tal fin, vamos a considerar, para cada $s \in \mathcal{F}(U)$, la asignación

$$\begin{aligned} \hat{s}\colon U &\longrightarrow \hat{\mathcal{F}} \\ x &\longmapsto s_x. \end{aligned}$$

Es claro que $\pi \circ \hat{s} \equiv Id_U$, por tanto, si consideramos como base de la topología de $\hat{\mathcal{F}}$ la familia

$$\{\hat{s}(U) : U \subset X \text{ abierto, } s \in \mathcal{F}(U)\}$$

tendremos que cada $\hat{s}$ será continua en cada abierto, además, $\hat{\pi}$ no solo será continua, si no un homeomorfismo local, en efecto, π es abierta en esta topología puesto que, dado $s \in \mathcal{F}(U)$, se tiene que

$$\pi(\hat{s}(U)) = \pi\left(\bigcup_{x \in U} s_x\right) = U$$

y localmente, es una biyección.

La construcción anterior nos ha servido para poder dar a cada prehaz $\mathcal{F}$ un espacio *étalé* $\hat{\mathcal{F}}$. Las propiedades de dicho espacio las enunciamos en la proposición siguiente.

Proposición 1. *Sea $\mathcal{F}$ un prehaz sobre un espacio topológico X y sea $\hat{\mathcal{F}}$ su esapcio étalé asociado. Entonces*

i) Toda propiedad que se herede por límites directos y la posea $\mathcal{F}$ la tiene cada elemento de $\hat{\mathcal{F}}$. Concretamente, nos interesa centrarnos en la propiedad de ser grupo abeliano, es decir, si $\mathcal{F}$ es un prehaz de grupos abelianos, cada stalk $\mathcal{F}_x$ es un grupo abeliano.

ii) Consideremos el conjunto

$$Z = \{(s,t) \in \hat{\mathcal{F}} \times \hat{\mathcal{F}} : \pi(s) = \pi(t)\}.$$

La aplicación

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & Z & \longrightarrow & \hat{\mathcal{F}} \\ & (s_x, t_x) & \longmapsto & s_x - t_x \end{array}$$

es continua.

Demostración. *i)* es claro por la definición de cada *stalk* como límite directo. En el caso de tener un prehaz de grupos abelianos se tiene que $\mathcal{F}_x$ es un grupo abeliano para cada x.

Para ver *ii)* consideremos el abierto básico dado por $(s \hat{-} t)(U)$, es claro que la preimagen por γ de dicho abierto es precisamente el conjunto $\{(\cup_{x\in U} s_x, \cup_{x\in U} t_x)\}$ con la propiedad exigida en Z, por tanto es un abierto en la topología producto restringida a Z.

□

La construcción del espacio $\hat{\mathcal{F}}$ como espacio topológico, con una topología que hace continua la proyección π, nos permite construir el haz de secciones de $\hat{\pi}$ en $\hat{\mathcal{F}}$, es decir, $\Gamma(U, \hat{\mathcal{F}})$. Además, sobre este haz, tenemos un morfismo de prehaces o haces desde $\mathcal{F}$, dependiendo de si este último es un haz o un prehaz,

$$\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \hat{\mathcal{F}},$$

dado por las asignación

$$\begin{aligned} \varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \Gamma(U, \hat{\mathcal{F}}) := \hat{\mathcal{F}}(U) \\ s &\longmapsto \hat{s}. \end{aligned} \tag{1}$$

La relación esencial entre los haces de secciones del espacio *étalé* y la de su prehaz *base* nos la da el siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre un espacio topológico X, sea $\hat{\mathcal{F}}$ el haz de secciones del espacio étalé asociado a $\mathcal{F}$. En estas condiciones, el morfismo φ definido en* (1) *es un isomorfismo de haces.*

Demostración. El morfismo inverso no es más que dar a cada elemento $\hat{s}$ su elemento asociado s. Lo que debemos demostrar es que dicho morfismo es biyectivo.

Para ver que es inyectivo consideremos dos elementos $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(U)$ de manera $\varphi(U)(s_1) = \varphi(U)(s_2)$, entonces

$$res_{U,x}(s_1) = res_{U,x}(s_2) \quad \text{para cada } x \in U$$

que, por la relación de equivalencia, se tiene que existe un entorno *pequeño*, $V \subset U$, donde la restricción usual de $\mathcal{F}$ satisface que $res_{U,V}(s_1) = res_{U,V}(s_2)$. Haciendo esto

para cada $x \in U$, encontramos un familia $\{V_i, i \in I\}$ que recubre U y de manera que
$$res_{U,V_i}(s_1) = res_{U,V_1}(s_2) \quad \text{para cada } i \in I.$$
Usando que $\mathcal{F}$ es un haz, debe cumplir la condición C1, por tanto, $s_1 = s_2$.

Para el caso de la sobreyectividad, consideremos un elemento del haz de secciones, $\sigma \in \Gamma(U, \hat{\mathcal{F}})$. Por como está definido, para un entorno suficientemente pequeño $V \subset U$ se tendrá una $s \in \mathcal{F}(U)$ de manera que
$$\sigma(x) = s_x = [\varphi(s)](x)$$
donde [ ] representa la clase bajo el límite directo.y φ se sobreentiende como $\varphi(U)$. Por otro lado, dado que $\hat{\pi}$ es un homeomorfismo local, se tiene que si dos elementos coinciden en un punto, deben coincidir en un entorno abierto suficientemente pequeño W de tal punto, es decir, tenemos que
$$res_{U,W}(\sigma) = res_{U,W}(\varphi(s)) = \varphi(res_{U,W}(s)).$$
Donde, en la última igualdad hemos usado que φ es un morfismo de haces. Razonando de la misma manera que en la inyectividad, dado que esta útima afirmación es cierta para cada $x \in U$, encontramos una familia $\{W_i, i \in I\}$ de manera que, para cada uno de estos abiertos, hay un $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ satisfaciendo que
$$\varphi(V_i)(s_i) = res_{U,V_i}(\sigma).$$
Además, en las intersecciones $V_i \cap V_j$ tenemos que las imágenes por el morfismo φ coinciden, es decir,
$$\varphi(V_i)(s_i) = \varphi(V_j)(s_j).$$
Usando la inyectividad tenemos que
$$res_{V_i,V_i \cap V_j}(s_i) = res_{V_j,V_i \cap V_j}(s_j).$$
Dado que $\{V_i\}$ recubre U, usando la propiedad C2 sobre el haz $\mathcal{F}$ obtenemos que existe un $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $res_{U,V_i}(s) = s_i$ para cada $i \in I$. Por tanto, para esta s tenemos que
$$res_{U,V_i}(\varphi(s)) = \varphi(res_{U,V_i}(s)) = \varphi(V_i)(s_i) = res_{U,V_i}(\sigma).$$
dado que esto es para un recubrimiento de U, tenemos que $\varphi(U)(s) = \sigma$.

$\square$

Lo que acabamos de demostrar es que, para todo haz $\mathcal{F}$, podemos dar un espacio *étalé* de manera que su haz de secciones para la proyección es, precisamente, el mismo haz que el de partida. En el caso de que partamos de un prehaz, lo que hacemos es construir un haz que preserva sus estructuras. Para ver que quiere decir esto de *El haz asociado a un prehaz preserva toda su información*, lo ilustramos en el siguiente corolario que es directo mirando la demostración de la proposición anterior.

Corolario 1. *El morfismo* (1) *definido de la misma manera para un prehaz $\mathcal{F}$, sobre un espacio X, satisface que $\varphi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \hat{\mathcal{F}}_x$ es un isomorfismo para cada $x \in X$.*

Con todo esto, sabemos asignar a cada haz un espacio *étalé* que es isomorfo a su haz de secciones inducidas por la proyección y, si estamos en un haz, cada uno de sus *stalks* es isomorfo a los *stalks* de su haz de secciones, por tanto, *localmente*, este haz de secciones guarda todas las propiedades de los prehaces. Por esto, damos la siguiente definición.

Definición 7. Sea $\mathcal{F}$ un prehaz sobre un espacio topológico X. Decimos que $\hat{\mathcal{F}}$ es el **haz asociado** a $\mathcal{F}$ si $\hat{\mathcal{F}}$ es el haz de secciones del espacio *étalé* de $\mathcal{F}$.

Una vez nos hemos asegurado en cierto sentido que dar un prehaz nos permite dar un haz con la misma esencia que el prehaz original, podemos centrarnos en ver las nociones básicas que heredan los haces del álgebra homológica. Dado que las categorías que se sirven para este campo son las categorías abelianas, lo más sensato es mantenernos en dicha estructura, por tanto, la mayoría de los haces con los que vamos a trabajar tienen ese sabor. Más concretamente, vamos a trabajar generalmente en haces de A-módulos o de grupos abelianos.

2. Álgebra homológica básica sobre haces

Como ya hemos mencionado, vamos a dar las ideas principales para poder hablar de exactitud y sucesiones de haces. Los enunciados y definiciones se van a dar para grupos abelianos, de manera análoga se enuncian para haces de módulos.

Lo importante de trabajar en categorías abelianas es que tenemos las nociones de imágenes, núcleos y cocientes.

Definición 8. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos haces de grupos abelianos sobre un espacio topológico X. Supongamos además que $\mathcal{G}$ es subhaz de $\mathcal{F}$. Definimos el **haz cociente** $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ como el haz asociado al prehaz definido por la asignación

$$U \longmapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U).$$

La definición de haz cociente, por ser una definición a partir de un haz asociado, está bien definida en los *stalks*, es decir, la aplicación natural $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{G}$ donde realmente está bien definida es en los *stalks*. Como ya hemos visto, cuando $\mathcal{F}$ es un haz, dado que $\hat{\mathcal{F}} \simeq \mathcal{F}$, esta aplicación determina un auténtico morfismo de haces.

Observación 2. Notemos que en la definición construimos el haz cociente como el haz asociado al cociente de los haces. Para ver la necesidad de *hacificar* el cociente consideremos sobre un espacio hausdorff dos puntos a y b y consideremos el haz $\mathcal{Z}$

constante de enteros y el haz $\mathcal{J}$ que asigna a cada abierto que no contiene ni a a ni a b el grupo $\mathbb{Z}$ y si no le asigna el 0. Veamos que el pehaz $\mathcal{Q}$ dado por la asignación

$$\mathcal{Q}(U) = (\mathcal{Z}/\mathcal{J})(U)$$

no es un haz. Para ello, vamos a ver que no se cumple la condición C2 de los haces. Sea el recubrimiento $X = U_1 \cup U_2$ donde $U_1 = X \setminus \{a\}$ y $U_2 = X \setminus \{b\}$. Es claro que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(U_1) &= \mathbb{Z} \\ \mathcal{Q}(U_2) &= \mathbb{Z} \\ \mathcal{Q}(U_1 \cap U_2) &= 0 \end{aligned}$$

dado que $\mathcal{J}(U_i) = 0$ por contener cada U_i a b y a a respectivamente. Sean ahora dos elementos distintos p, q y no nulos de $\mathbb{Z}$, estas secciones verifican que coinciden en la intersección, pues son la sección 0, sin embargo, no hay un elemento en $\mathcal{Q}(X) = 0$ que al restringirlo nos den los elementos p y q en cada abierto dado.

Precisamente ver que los morfismos que traducen bien los cocientes son los que se dan entre los *satlks* nos asegura que, para definir de una manera adecuada la exactitud de sucesiones de haces, debamos trabajar en los *stalks*. Con todo esto, pasamos a dar el concepto de exactitud en sucesiones de haces.

Definición 9. Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}''$ haces de grupos abelianos sobre un mismo espacio X y sea

$$\mathcal{F}' \xrightarrow{\ g\ } \mathcal{F} \xrightarrow{\ f\ } \mathcal{F}''$$

una sucesión de morfismos de haces. Decimos que esta **sucesión** es **exacta** en $\mathcal{F}$ si para cada $x \in X$ la sucesión inducida en los *stalks*

$$\mathcal{F}'_x \xrightarrow{\ g_x\ } \mathcal{F}_x \xrightarrow{\ f_x\ } \mathcal{F}''_x$$

es exacta. de igual manera definimos una sucesión **exacta corta**,

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\ g\ } \mathcal{F} \xrightarrow{\ f\ } \mathcal{F}'' \longrightarrow 0,$$

si es exacta, para cada $x \in X$, en cada etapa, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \xrightarrow{\ g_x\ } \mathcal{F}_x \xrightarrow{\ f_x\ } \mathcal{F}''_x \longrightarrow 0.$$

En esta definición, 0 denota el haz constante nulo.

Ejemplo 4. Volviendo al caso de la observación 2, consideremos $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{J}$ definidos de la misma manera, sea $\mathcal{Q}$ el haz cociente asociado al cociente de los haces (no confundir con el definido en la observación, aquí estamos tomando su *hacificado*). Es fácil comprobar que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

es exacta. El cociente sobre los *stalks* viene dado por

$$\mathcal{Q}_x = \begin{cases} \mathcal{Z} & \text{si } x = a \text{ ó } x = b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Vamos a ilustrar un ejemplo de sucesión exacta que no es exacta, en general, su sucesión evaluada en alguno de los abiertos. Usaremos terminología que aclaramos en el apéndice [Complejos de cocadenas]. Este ejemplo es importante para destacar la diferencia entre la exactitud en haces y la exactitud de la evaluación de los mismos.

Ejemplo 5. Consideremos la cocadena de las p-formas diferenciales $\Omega^\bullet(M)$ sobre una variedad diferenciable M. Denotaremos por $\Omega^\bullet_M$ al haz de formas sobre M. La sucesión inducida en el complejo por la aplicación diferencial exterior d induce la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^0_M \xrightarrow{d} \Omega^1_M \xrightarrow{d} \cdots .$$

La exactitud de esta sucesión se debe a que M es una variedad diferenciable y, por tanto, para cada $x \in U$ hay un entrorno difeomorfo a algún espacio afín, y al lema de Ponincaré, que viene a decir que en los espacios afines toda forma cerrada es exacta. Con todo esto, lo que tenemos es que la sucesión en cada *stalk*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^0_{M,x} \xrightarrow{d} \Omega^1_{M,x} \xrightarrow{d} \cdots .$$

es exacta. Esto última afirmación dista mucho de poder decir que las evaluaciones del haz den sucesiones exactas, de hecho, esta afirmación es falsa. Es fácil construir contraejemplos en $\mathbb{S}^1$ de formas cerradas que no sean exactas [4]-página 104.

Este último ejemplo nos motiva a estudiar bajo que situaciones podemos extender las propiedades de exactitud que se dan en los *stalks* a las evaluaciones de los haces sobre abiertos determinados, de hecho, la cohomología de de Rham estudia la falta de exactitud del ejemplo anterior cuando evaluamos los haces en abiertos concretos como pueden ser toda la variedad, subvariedades, etc...

Manteniendo la motivación sobre el ejemplo anterior, continuamos traduciendo conceptos del álgebra homológica al contexto de haces. Las siguientes definiciones vienen a generalizar la representación de la cohomología de de Rham desde un punto de vista de haces.

Salvo mención expresa de lo contrario, los haces que se citan a partir de ahora se considerarán como haces de grupos abelianos o como haces de módulos.

Definición 10. Un **haz graduado** es una familia de haces $\{\mathcal{F}^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}}$ junto con una familia de morfismos $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}}$ que lo conecta,

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}^0 \xrightarrow{f_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{f_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{f_2} \cdots .$$

En general, un haz graduado lo denotaremos por $\mathcal{F}^*$ para ahorrarnos precisar los índices. Puede ser que nos refiramos a estos haces como sucesiones de haces, pues son la misma cosa.

De igual manera que la diferencial en las formas cumple que componerse con ella misma es nula, es decir, $d \circ d = 0$. La definición siguiente toma su nombre precisamente de esta situación.

Definición 11. Un haz diferencial es una sucesión de haces con morfismos $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}}$ que denotaremos, prescindiendo del índice cuando quede bien claro del morfismo del que hablamos, por d, satisfaciendo que $d \circ d = 0$. Otra forma de referirnos a estos haces es con el término **complejo de cocadenas** de haces.

Las sucesiones de haces con las que vamos a trabajar son lo que se llaman resoluciones.

Definición 12. Dado un haz $\mathcal{F}$, una **resolución** de $\mathcal{F}$ es un haz graduado $\mathcal{F}^*$ y un morfismo entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^0$ de manera que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^2 \longrightarrow \cdots$$

es exacta. En esta situación, denotaremos a la resolución por

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^*.$$

Ejemplo 6. Retomando el ejemplo 5, lo que precisamente comentamos ahí es que la sucesión de haces

$$\Omega^0_M \xrightarrow{d} \Omega^1_M \xrightarrow{d} \cdots$$

es una resulución,

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^*_M,$$

del haz constante $\mathbb{R}$.

Pasemos a ver otro ejemplo que permite ilustrar mejor la construcción de una resolución a partir de un haz.

Ejemplo 7. Usaremos las nociones dadas en el apéndice [Cohomología singular] para ilustrar este ejemplo.

Consideremos un espacio topológico X. S el k-módulo dado por $C^k(U, K)$ de complejos de cocadenas de U sobre k. Para facilitar la notación, denotaremos por $C^k(K)$ al haz asociad al prehaz $C^k(U, K)$.

Una forma de construir una sucesión exacta es tomando, por ejemplo, U como la bola unidad del espacio afín, esto es, la sucesión

$$0 \longrightarrow C^0(K) \xrightarrow{d} C^1(K) \xrightarrow{d} C^2(K) \xrightarrow{d} \cdots$$

es exacta (ver [1]-páginas 194-195). Como un caso particular, tomando $K = \mathbb{R}$, lo que tenemos es que esta sucesión exacta nos proporciona una resolución del haz constante $\mathbb{R}$,

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow C^0(\mathbb{R}) \xrightarrow{\ d\ } C^1(\mathbb{R}) \xrightarrow{\ d\ } \cdots .$$

Si estamos trabajando con una variedad diferenciable M, escribiremos esta resolución como

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow C^*_M(\mathbb{R}).$$

Observación 3. Tomando los ejemplos 5 y 6, en ambos casos hemos obtenido dos resoluciones del mismo haz $\mathbb{R}$. Además, usando la integración de formas sobre cocadenas, tenemos un homomorfismo entre estas resoluciones dado por

$$\int_U : \Omega^*_U \longrightarrow C^*_U(\mathbb{R})$$

dada por, dada ω, una p-forma diferencial, le asignamos el homomorfismo sobre $\mathbb{R}$ dado por

$$\begin{array}{rccc} \displaystyle\int \omega : & C_k(U) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & c & \longmapsto & \displaystyle\int_c (\omega). \end{array}$$

El presente trabajo pretende mostrar que este morfismo entre las resoluciones

$$\begin{tikzcd} & & \Omega^*_M \arrow[dd, "\int"] \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & C^*_M \end{tikzcd}$$

induce un isomorfismo entre las respectivas cohomologías.

Como ya hemos visto, la exactitud de una sucesión de haces no proporciona, en general, sucesiones exactas de haces evaluados, lo que vamos a hacer a continuación es dar condiciones para poder extender la exactitud de una sucesión de haces a exactitud en las evaluaciones.

3. Cohomología de haces

Como acabamos de enunciar al cierre de la sección anterior, lo que nos interesa es estudiar cuando de una sucesión exacta de haces podemos obtener una sucesión exacta en las evaluaciones de los haces, más concretamente, establecer condiciones de extensión de la exactitud a las evaluaciones de los haces.

Por comodidad y dado que nuestro objetivo es estudiar las variedades, supondremos a partir de este momentos que nuestro espacio X es hausdorff y paracompacto y los haces son de categorías abelianas, grupos abelianos, módulos, etc...

En el caso de las sucesiones exactas cortas de haces

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{g} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

sobre un espacio topológico X, la sucesión de secciones globales sobre X

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(X) \xrightarrow{g} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{f} \mathcal{F}''(X) \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$.

Proposición 2. *Sean $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}''$ haces sobre un espacio topológico X y supongamos que la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{g} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

es exacta. Entonces

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(X) \xrightarrow{g} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{f} \mathcal{F}''(X)$$

es exacta.

Demostración. Damos la demostración para cualquier abierto $U \subset X$.
$g(U)$ es inyectiva, en efecto, sea $s' \in \mathcal{F}'(U)$ y supongamos que $g(U)(s') = 0$. Bajamos a los *stalks* y tenemos que, por ser el morfismo inyectivo, para cada punto x de U, hay un abierto suficientemente pequeño U_x tal que $res_{U,U_x}(s') = 0$. Como los U_x recubren U, usando que $\mathcal{F}'$ es un haz tenemos $s' = 0$.

Veamos que $\text{Im}(g(U)) = \ker(f(U))$. Que $\text{Im}(g(U)) \subset \ker(f(U))$ es directo, mostremos el otro contenido. Sea $s \in \mathcal{F}(U)$ de manera que $f(U)(s) = 0$, razonando como hasta ahora, podemos encontrar entornos pequeños para todo x de manera que recubran el abierto U, para cada uno de estos abiertos U_i, existirá un $s'_i \in \mathcal{F}'(U_i)$ tal que $g(U_i)(s'_i) = res_{U,U_i}(s)$. Necesitamos *pegar* todos estos s'_i, para ello necesitamos estar en condiciones de usar C2, es decir, mostrar que coinciden en las intersecciones. Queremos ver que $\forall i,j$, $res_{U,U_i \cap U_j} s'_i = res_{U,U_i \cap U_j} s'_j$, como $g(U_i \cap u_j)$ es inyectivo se tiene que$g(U_i \cap u_j)(res_{U,U_i \cap U_j} s'_i) = g(U_i \cap u_j)(res_{U,U_i \cap U_j} s'_j)$. Como g es morfismo de haces, podemos permutar la restricción con el morfismo y obtener que $res_{U,U_i \cap U_j}(g(U_i)(s'_i) = res_{U,U_i \cap U_j}(g(U_j)(s'_j) = res_{U,U_i \cap U_j}(s)$. Por C2 obtenemos el resultado.

$\square$

Sin embargo, la exactitud en $\mathcal{F}''$ falla en general. La idea es que tener morfismos sobreyectivos en los stalks no nos permite dar morfismos sobreyectivos en las evaluaciones. Por tanto, lo que funciona bien en la exactitud es la inyectividad, no la sobreyectividad.

Vamos a adaptar la definición de haz para poder definirlo sobre subconjuntos cerrados.

Definición 13. Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre un espacio topológico X. Dado $S \subset X$ cerrado, definimos

$$\mathcal{F}(S) := \varinjlim_{S \subset U} \mathcal{F}(U).$$

A $\mathcal{F}(S)$ lo llamaremos secciones de $\mathcal{F}$ sorbe S y lo denotaremos por $\Gamma(S, \mathcal{F})$. Los morfismos restricción los definimos de manera análoga bajo el límite directo.

Como ya hemos dicho, lo problemático de los morfismos de haces, en cuanto a sucesiones exactas se refiere, es la sobreyectividad, esto debe resultar intuitivo, tener, por ejemplo, una función continua sobre un conjunto *pequeño* no nos garantiza que sea la restricción de alguna otra función continua sobre un abierto más grande. ver bajo que situaciones podemos garantizar que los elementos del haz sobre un conjunto son restricciones de elementos del haz sobre otro que lo contiene es lo que debemos estudiar en profundidad. Comenzamos dando la siguiente definición

Definición 14. Un haz $\mathcal{F}$ sorbe un espacio topológico X es ***soft*** si para cualquier subconjunto cerrado $S \subset X$, el morfismo restricción $\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(S)$ es sobreyectivo.

Que un haz sea *soft* no es más que decir que cualquier elemento de $\mathcal{F}(S)$ se puede extender a todo X. Veamos que podemos dar mucha información en cuanto a exactitud se refiere cuando trabajamos con haces *soft*.

Teorema 2. *Sean $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}''$ haces sobre un espacio topológico X. Supongamos que $\mathcal{F}'$ es soft y que la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{g} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

es exacta. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(X) \xrightarrow{g} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{f} \mathcal{F}''(X) \longrightarrow 0$$

es exacta

Demostración. Como ya hemos visto, independientemente de que $\mathcal{F}$ sea *soft*, tenemos exactitud en las evaluaciones tanto en $\mathcal{F}(X)$ como en $\mathcal{F}'(X)$. Donde necesitamos fuertemente las hipótesis del enunciado es para demostrar la exactitud en

$\mathcal{F}''(X)$, de hecho, necesitamos el axioma de elección.

Tenemos que ver que si tenemos $s \in \mathcal{F}''(U)$, podemos encontrar un elemento $s' \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f(U)(s') = s$. Podemos razonar como en el caso de la exactitud de las dos componentes anteriores y encontrar entornos pequeños de cada punto U_i, que recubran U y que, por exactitud en los *stalks*, existan s'_i de manera que $f(s'_i) = res_{U,U_i}(s)$. El problema, si intentamos razonar como antes, es que no tenemos inyectividad en la f y no podemos pegar sin problemas todos estos elementos.

Usando la paracompacidad de X, podemos encontrar un refinamiento localmente finito $\{S_i\}$ de $\{U_i\}$ de manera que cada S_i es un cerrado de X y sigue siendo recubrimiento. Construimos el conjunto de pares (s', S) donde S es unión de S_i verificando que $f(s') = res_{x,S}(s)$. Si tomamos una cadena ordenada de pares de esta familia, por estar trabajando con haces, la condición C2 nos garantiza la existencia de un elemento maximal. Estamos en condiciones de usar el lema de Zorn y obtener un cerrado S y un elemento s' maximales con la propiedad de que $s' \in \mathcal{F}(S)$ y $f(S)(s') = res_{U,S}s$. Veamos para terminar que $S = X$. Supongamos que no, entonces existirá un elemento $\hat{S}$ en la familia, con $\hat{S} \not\subseteq S$. Además, debe existir un elemento $\hat{s}$ de manera que $f(S \cap \hat{S})(s) = f(S \cap \hat{S})(\hat{s}) = s$, por tanto, $f(S \cap \hat{S})(s' - \hat{s}) = 0$. Usando que ya tenemos exactitud en $\mathcal{F}(X)$, podemos encontrar un $s'' \in \mathcal{F}'(S \cap \hat{S})$ tal que $g(S \cap \hat{S})(s'') = s - \hat{s}$. Usando que $\mathcal{F}'$ es un haz *soft*, extendemos s'' a todo X por $\hat{s}''$ y construimos $a \in \mathcal{F}(S \cup \hat{S})$ como

$$a = \begin{cases} s' & \text{en S} \\ \hat{s} + g(\hat{s}'') & \text{en } \hat{S}. \end{cases}$$

Dado que $S \subset S \cup \hat{S}$ y $f(a) = res_{X,S\cup\hat{S}}/s$, entramos en contradicción con la maximalidad de S. La contradicción viene de suponer que $S \neq X$, por tanto, concluimos el resultado.

$\square$

Ejemplo 8. En espacios paracompactos, el haz de funciones continuas y diferenciables sobre un espacio topológico son *soft*. Esto es debido a que si definimos una función en un cerrado, gracias a la existencia de particiones de la unidad, podemos extenderlas por cero sin dificultad.

Ejemplo 9. El ejemplo anterior refleja la relación entre la extensión de funciones y la existencia de particiones de la unidad, por tanto, en el caso complejo, donde no existe el concepto de *partición holomorfa de la unidad*, nos permite dar un ejemplo claro de haz que no es *soft*. En efecto, consideremos en el disco unidad el haz de funciones holomorfas sobre el disco, consideremos el disco de radio $1/2$ contenido en el disco unidad, una función de potencias definida, por ejemplo, por $f(z) = \sum z^{2^n}$ que diverge en el borde de la bola en todos sus puntos, pero que es holomorfa en el disco de radio $1/2$, nos da un ejemplo de elemento del haz que no puede extenderse.

En los ejemplos anteriores hemos hecho notar que la existencia de particiones de la unidad del mismo tipo que los elementos del haz nos permiten extender dichos elementos a las secciones globales. Esto debe motivar la definición de la siguiente familia de haces.

Definición 15. Un haz $\mathcal{F}$(de grupos abelianos) sobre un espacio hausdorff y paracompacto X decimos que es ***fine*** si para todo recubrimiento localmente finito $\bigcup_i U_i = X$, existe una familia de morfismos de haces $\{\theta_i : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}\}$ con las propiedades siguientes:

1 Para todo $\mathcal{F}_x$ se tiene que $\theta_i(\mathcal{F}_x) = 0$ par acierto entorno de x en el complemento del abierto U_i.

2 La suma $\sum_i \theta_i$ es finita en cada elemento $s \in \mathcal{F}(U)$ (gracias a la propiedad 1) y vale constantemente 1.

Por las motivaciones anteriores y por la similitud de la propia definición, a la familia $\{\theta_i\}$ se le denomina **partición de la unidad** del haz $\mathcal{F}$ subordinado al recubrimiento $\{U_i\}$.

Ejemplo 10. Por lo comentado anteriormente de existencia de particiones de la unidad, el ejemplo 8 nos da dos ejemplos de haces *fine* y el ejemplo 9 es un ejemplo de haz que no es *fine*.

La intuición que podemos tener es que la existencia de particiones de la unidad nos debe permite construir extensiones sobre los elementos de los haces (siempre y cuando sean sobre cerrados), es decir, ser *fine* debe implicar ser *soft*, en efecto, lo demostramos en la proposición siguiente.

Proposición 3. *Todo haz fine es soft.*

Demostración. Consideremos $\mathcal{F}$ un haz *fine* sobre X y sea S un cerrado de X. Consideremos $S \in \mathcal{F}(S)$ y sea $\bigcup_i U_i = S$ un recubrimientos por abiertos de S. Es claro que en cada $\mathcal{F}(U_i)$ hay elementos s_i satisfaciendo que

$$res_{S,U_i} s = s_i.$$

Vamos a extender el recubrimiento anterior tomando $U_0 = X \setminus S$ y $s_0 = 0$, es decir, tomamos el recubrimiento $X = \cup U_i \cup U_0$. Por la paracompacidad de X podemos suponer que este recubrimiento es localmente finito y, gracias a que $\mathcal{F}$ es *fine*, podemos tomar una partición de la unidad $\{\theta_i\}$. Para cada una de las s_i se cumple que $\theta_i(s_i)$ se anula fuera de cada U_i, para extender s a todo X es suficiente con considerar

$$\hat{s} = \sum_i \theta_i(s_i).$$

□

Ejemplo 11. Ya hemos visto algunos ejemplos de haces que son fine, por ser *soft*. Un ejemplo interesante de haz que es *soft* y no es *fine*, como ya hemos hecho notar, proviene de las funciones holomrofas. En concreto, un resultado *profundo* llamado *teorema de Hartogs* de prolongación holomorfa, afirma

Teorema 3 (Prolongación holomorfa de Hartogs)**.** *Sean $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto, $K \subset U$ compacto, $U \setminus K$ conexo, $n \geq 2$ y $f \in \mathcal{H}(U \setminus K)$. Entonces existe una única función $F \in \mathcal{H}(U)$ tal que $f \equiv F|_{U\setminus K}$*

Es decir, si considermos un abierto acotado $U \subset \mathbb{C}^n$ el haz de funciones holomorfas sobre cerrados de este abierto se puede extender. Por tanto, este haz es *soft*. Más aún, no solo se pueden extender funciones sobre cerrados, si no sobre cualquier abierto, es decir, el morfismo restricción es sobreyectivo para cualquier abierto. A los haces con esta última propiedad los denominamos haces ***flabby***.

Una vez introducida esta nueva familia de haces (*soft*), vamos a volver al estudio de la exactitud de sucesiones de haces. Podemos obtener algunos resultados más a partir del teorema 2.

Proposición 4. *Sean $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}''$ haecs sobre un espacio topológico X. Supongamos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son soft y que la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{g} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

es exacta. Entonces $\mathcal{F}''$ es soft.

Demostración. Tomemos un cerrado $S \subset X$. Por el teorema 2, tenemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(S) \xrightarrow{g} \mathcal{F}(S) \xrightarrow{f} \mathcal{F}''(S) \longrightarrow 0$$

es exacta sobre S. Para tener una extensión de $\mathcal{F}''(S)$ a todo $\mathcal{F}''(X)$, consideremos, dado que $\mathcal{F}$ es *soft*, una extensión de $\mathcal{F}(S)$ a todo X. Tomamos $\mathcal{F}''(X) = f(\mathcal{F}(X))$ para tener la extensión deseada de $\mathcal{F}(S)$. En efecto, dado $s \in \mathcal{F}''(S)$, por sobreyectividad, encontramos un $\hat{s} \in \mathcal{F}(S)$ que se extiende a un elemento $s' \in \mathcal{F}(X)$, además, por ser f morfismo de haces y permutar con la restricción tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{f} & f(\mathcal{F}''(X)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(S) & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}''(X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} s' & \longmapsto & f(s') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{s} & \longmapsto & s \end{array}$$

conmuta.

$\square$

Proposición 5. *Supongamos que la siguiente sucesión de haces soft es exacta*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \cdots.$$

Esta sucesión induce una sucesión exacta en las evaluaciones en X, es decir, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_0(X) \longrightarrow \mathcal{F}_1(X) \longrightarrow \mathcal{F}_2(X) \longrightarrow \cdots.$$

es exacta.

Demostración. Vamos a considerar, para cada i, el haz $\mathcal{K}_i = ker(\mathcal{F}_i \longrightarrow \mathcal{F}_{i+1})$. Con estos haces tenemos que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{K}_1$, las sucesiones

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_i \longrightarrow \mathcal{F}_i \longrightarrow \mathcal{K}_{i+1} \longrightarrow 0$$

son exactas, además, para $i = 1$, la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_1(X) \longrightarrow \mathcal{F}_1(X) \longrightarrow \mathcal{K}_2(X) \longrightarrow 0$$

es exacta. En efecto, no hay más que aplicar el teorema 2 y notar que $\mathcal{K}_1 = \mathcal{F}_0$, que es *soft*. Usando inducción en i, a partir de la proposición anterior, obtenemos que cada uno de los $\mathcal{K}_i$ es *soft*, por tanto, cada una de las sucesiones

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_i(X) \longrightarrow \mathcal{F}_i(X) \longrightarrow \mathcal{K}_{i+1}(X) \longrightarrow 0$$

es exacta. Uniendo todas estas sucesiones obtenemos que la sucesión del enunciado es exacta.

□

Lo que acabamos de ver es que la propiedad de ser exacto en haces se extiende bien a las evaluaciones siempre y cuando se trabaje con haces *soft*. En general, por lo que hemos comentado, tenemos la cadena de implicaciones

$$\begin{tikzcd}
\text{flabby} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
& \text{soft} \\
\text{fine} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Lo que vamos a hacer ahora es asignarle a cada haz definido sobre un espacio topológico una sucesión exacta que es una resolución del haz.

Definición 16. Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre un espacio X, sea $\hat{F}$ el espacio *étalé* asociado a $\mathcal{F}$, generalizando la noción de secciones continuas sobre el haz, definimos el haz de **secciones discontinuas** $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ sobre X como el haz (fácil de comprobar) dado por la asignación, para cada abierto $U \subset X$,

$$\mathcal{C}^0(\mathcal{F})(U) := \{f : U \longrightarrow \hat{F} : \pi \circ f = Id_U\}.$$

Donde π es la proyección de $\hat{F}$ en X.

Observación 4. Es fácil ver que el haz $\mathcal{C}^0(\mathcal{F})$ es un haz *soft*.

Claramente, los elementos de $\mathcal{F}$ son elementos de $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ dado que el haz de secciones continuas es un subhaz del de secciones discontinuas, por tanto, tenemos una inclusión natural

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{F}).$$

Tiene sentido considerar $\mathcal{F}^1(\mathcal{F}) := \mathcal{C}^0(\mathcal{F})/\mathcal{F}$ y tomar $\mathcal{C}^1(\mathcal{F}) := \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^1(\mathcal{F}))$. Describiendo estos haces para cada i definimos

$$\mathcal{F}^i(\mathcal{F}) := \mathcal{C}^{i-1}(\mathcal{F})/\mathcal{F}^{i-1}(\mathcal{F})$$

y

$$\mathcal{C}^i(\mathcal{F}) := \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^i(\mathcal{F})).$$

Tenemos, para $i = 0$, la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}^1(\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

y, para $i > 0$,

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^i(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^i(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}^{i+1}(\mathcal{F}) \longrightarrow 0.$$

Uniendo estas sucesiones exactas cortas construimos una sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^2(\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots . \tag{2}$$

Definición 17. Dado un haz $\mathcal{F}$ sobre un espacio X, definimos su **resolución canónica** como la resolución dada en (2). Escribiremos para abreviar

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{F}).$$

Consideremos ahora un haz $\mathcal{F}$ sobre X y consideremos su resolución canónica. Podemos tomar las secciones globales $\Gamma(X, \mathcal{C}^i(\mathcal{F}))$ en cada componente de la resolución. Obtenemos una sucesión de la forma

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{C}^0(\mathcal{F})) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{C}^1(\mathcal{F})) \longrightarrow \cdots \tag{3}$$

que es una sucesión de grupos abelianos. La sucesión es exacta en $\Gamma(X, \mathcal{C}^0(\mathcal{F}))$ por ser la inclusión $\Gamma(X, \mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{C}^0(\mathcal{F}))$ inyectiva. Por tanto, usando la proposición 4, tenemos que si el haz de partida es $\mathcal{F}$ es soft, la sucesión (3) es exacta en cada elemento de la sucesión. Más aun, esta sucesión satisface, por como se ha construido la resolución canónica del haz, que componer dos de los morfismos de manera consecutiva nos da el elemento nulo de la sección, es decir, la sucesión (3) define un complejo de cocadenas de grupos abelianos, con independencia de si el haz de partida es *soft*. Esta construcción nos va a permitir generalizar las construcciones de las cohomologías usuales citadas en el apéndice.

Para refinar la notación, escribiremos el complejo anterior como

$$C^*(X, \mathcal{F}) := \Gamma(X, \mathcal{C}^*(\mathcal{F}))$$

y la sucesión (3) como

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^*(X, \mathcal{F}).$$

Con todo esto, estamos en condiciones de definir la sucesión de grupos de cohomologia con coeficientes en un haz.

Definición 18. Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre un espacio topológico X, definimos el **q-ésimo grupo de cohomología de X con coeficientes en $\mathcal{F}$** y lo escribimos $H^q(X, \mathcal{F})$, como el q-ésimo grupo de cohomología inducido en (3), es decir,

$$H^q(X, \mathcal{F}) := H^q(C^*(X, \mathcal{F}))$$

siendo

$$H^q(C^*(X, \mathcal{F})) = \frac{\ker(C^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{q+1}(X, \mathcal{F}))}{\mathrm{Im}(C^{q-1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow C^q(X, \mathcal{F}))}$$

Esta construcción, a pesar de ser mucho más artificial y menos intuitiva que las dadas en las construcciones del apéndice, nos permite ver con mayor perspectiva el comportamiento de las cohomologías con independencia de su construcción. No es *a prori* evidente la relación entre la construcción que acabamos de dar de la cohomología de haces y las construcciones de cohomologías vistas en el apéndice. Damos la relación en la observación siguiente.

Observación 5. Consideremos las resoluciones de haces vistas en la observación 3. Fijémonos, más en concreto, en la resolución

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^*_M.$$

Realmente, la cohomología de de Rham descrita en la manera usual es, simplemente, bajar la sucesión dada en las formas sobre M a la sucesión en las cohomologías, es decir

Precisamente, visto como cohomología de haces, la construcción usual de la cohomología de de Rham coincide con la cohomología de haces sobre la secciones globales, es decir, es $H^\bullet(\Gamma(X, \Omega^*_M))$. De la misma manera se recuperan el resto de las cohomologías usuales (dadas en el apéndice) vistas como cohomologías de haces sobre secciones globales de una resolución concreta. Lo que vamos a ver es que las cohomologías de haces que inducen estas secciones globales no dependen de la resolución escogida (imponiendo ciertas condiciones) y que, por tanto, todas ellas son isomorfas.

4. Teoría axiomática de la cohomología de haces y teorema de de Rham

Lo que vamos a hacer ahora, una vez definida la cohomología de haces, es dar su *comportamiento.* Lo vamos a ver en el siguiente teorema .

Teorema 4. *Sea X un espacio topológico paracompacto. Entonces*

1 *Para todo haz $\mathcal{F}$ sobre X se tiene que:*

1 $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

2 *Si $\mathcal{F}$ es soft se tiene que, para cada $q > 0$, $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$*

2 *Todo morfismo de haces*

$$f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$$

induce un homomorfismo, para cada $q \geq 0$,

$$f_q : H^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}')$$

con las propiedades siguientes:

1 $f_0 \equiv f : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}'(X)$.

2 *Si f es la identidad, se tiene que f_q es la identidad para todo q.*

3 *Para todo otro morfismo de haces, $g : \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}''$, se tiene que $(g \circ f)_q \equiv g_q \circ f_q$.*

3 *Toda sucesión exacta corta de haces*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta larga en las cohomologías, es decir, existen homomorfismos δ_q para todo q, de manera que la sucesión

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(X, \mathcal{F}') \arrow[r] & H^0(X, \mathcal{F}) \arrow[r] & H^0(X, \mathcal{F}'') \arrow[dll, "\delta_0"] \\
& H^1(X, \mathcal{F}') \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{F}) \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{F}'') \arrow[dll, "\delta_1"] \\
& \dots & &
\end{tikzcd}$$

es exacta. Además, cada diagrama conmutativo en las sucesiones exactas cortas de haces

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'_0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_0 & \longrightarrow & \mathcal{F}''_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}''_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

induce un diagrama conmutativo en las respectivas sucesiones exactas largas en las cohomologías

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{F}'_0) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{F}_0) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{F}''_0) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{F}'_1) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{F}_1) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{F}''_1) & \longrightarrow & \cdots . \end{array}$$

Demostración. Ver ***1*** es fácil. *2* es consecuencia directa de la proposición 5. Veamos *1*. La resolución (3) es exacta en $C^0(X,\mathcal{F})$, por tanto,

$$\Gamma(X,\mathcal{F}) = \ker(C^0 \longrightarrow C^1)$$

y este núcleo es precisamente $H^0(X,\mathcal{F})$.

Para ver ***2*** vamos a ver en primer lugar que f induce un homomorfismo en las cocadenas

$$f^* : C^*(X,\mathcal{F}) \longrightarrow C^*(X,\mathcal{F}').$$

Lo definimos por inducción, para $i = 0$, definimos

$$f^0 : C^0(X,\mathcal{F}) \longrightarrow C^0(X,\mathcal{F}')$$

asignando, para cada sección discontinua s de $\mathcal{F}$, $f^*(s) = (f \circ s)$. Esta asignación está bien definida en los *stalks* por ser f morfismo de haces, por tanto, f^0 induce una aplicación cociente

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(\mathcal{F})/\mathcal{F} & \xrightarrow{\hat{f}^0} & \mathcal{C}^0(\mathcal{F}')/\mathcal{F}' \\ \| & & \| \\ \mathcal{F}^1(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{F}^1(\mathcal{F}') \end{array}$$

que, a su vez, induce otro morfismo, $\hat{f}^1$, en los cocientes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^1(\mathcal{F})) & \xrightarrow{\hat{f}^0} & \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^1(\mathcal{F}')) \\ \| & & \| \\ \mathcal{C}^1(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{F}'). \end{array}$$

Procediendo por inducción, obtenemos un morfismo en las cocadenas. Ver que este morfismo en las cocadenas desciende bien a la cohomología es fácil, es consecuencia misma de la propiedad de ser morfismo pues, para cada q, el morfismo f_q hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} C^q(X,\mathcal{F}) \arrow[r, "f^q"] \arrow[d] & C^q(X,\mathcal{F}') \arrow[d] \\ C^{q+1}(X,\mathcal{F}) \arrow[r, "f^{q+1}"] & C^{q+1}(X,\mathcal{F}') \end{tikzcd}$$

conmute, por tanto, y hablando en términos de la cohomología de de Rham, f^q manda q-cocilos de $C^q(X,\mathcal{F})$ a q-cociclos de $C^q(X,\mathcal{F}')$, por tanto, induce el morfismo deseado, f_q, en las respectivas cohomologías. Las propiedades del enunciado son fáciles de obtener.

Para ver ***3*** lo hacemos de la misma manera que cuando trabajamos con homología singular y demás. Lo primero que observamos es que de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

obtenemos, dado que las resoluciones canónicas son *soft*, una sucesión exacta corta en las resoluciones,

$$0 \longrightarrow C^*(X,\mathcal{F}) \longrightarrow C^*(X,\mathcal{F}') \longrightarrow C^*(X,\mathcal{F}'') \longrightarrow 0.$$

Para facilitar la notación, escribimos $C^*_{\mathcal{F}} = C^*(X,\mathcal{F})$. Tenemos que cada fila del diagrama

$$\begin{tikzcd} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 \arrow[r] & C^{q+2}_{\mathcal{F}'} \arrow[u] \arrow[r, "g_q"] & C^{q+2}_{\mathcal{F}} \arrow[u] \arrow[r] & C^{q+2}_{\mathcal{F}''} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C^{q+1}_{\mathcal{F}'} \arrow[u] \arrow[r, "g_{q+1}"] & C^{q+1}_{\mathcal{F}} \arrow[u] \arrow[r] & C^{q+1}_{\mathcal{F}''} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C^{q}_{\mathcal{F}'} \arrow[u] \arrow[r] & C^{q}_{\mathcal{F}} \arrow[u, "d^q"] \arrow[r, "f_{q+2}"] & C^{q}_{\mathcal{F}''} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\ & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \end{tikzcd} \tag{4}$$

es una sucesión exacta corta. Denotamos por $d^q : C^q \longrightarrow C^{q+1}$ al operador diferencial de las cocadenas. Sea $\sigma \in \ker(d^q)$. Por Exactitud, sabemos que f es sobreyectiva, por tanto, podemos encontar un $\hat{\sigma}$ de manera que $f_{q+2}(\hat{\sigma}) = \sigma$. Usando la conmutatividad y por ser σ un cociclo se tiene que $d^q(\hat{\sigma}) = 0 \in C^{q+1}_{\mathcal{F}}$. Usando de nuevo la exactitud, $d^q(\hat{\sigma}) \in \mathrm{Im}(g)$, es decir, podemos encontrar un elemento $\sigma' \in C^{q+1}_{\mathcal{F}}$ tal que $g(\sigma') = d^q(\hat{\sigma})$. Usando la inyectividad de g_q y dado que $d \circ d = 0$ tenemos que, por conmutatividad, $\sigma' \in Ker(d^{q+1})$. Esta asignación, $\sigma' \mapsto \sigma$ no está bien definido pues la sobreyectividad en f no es una biyectividad, sin embargo, para que la imagen por f nos resulte σ es necesario que sea de la forma $\hat{\sigma} + \gamma$, donde $\gamma \in \mathrm{Im}(g)$, es decir, de nuevo, por exactitud y conmutatividad tenemos que $d^q(\gamma) = 0$. Concluimos pues que la asignación $\sigma' \mapsto \sigma$ queda unívocamente definida en los cociclos, es decir, en el $\ker(d^q)$. Para concluir que es un homomorfismo, tomamos un elemento en la imagen de $a \in \mathrm{Im}(d^q)$, mirando el diagrama tenemos que hay un elemento $\hat{a}$, de manera que $d(d(\hat{a})) = 0$ y, por exactitud, $a \mapsto 0$. Denotamos esta asignación por δ_q.. Con todo esto hemos construido el morfismo en las cohomologías

$$\delta_q : H^q(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{F}').$$

Deberíamos ver que este homomorfismo nos da la exactitud en la sucesión dada en el enunciado. Ver esto es un procedimiento mecánico, análogo al caso de la homología singular, y no lo escribimos.

Veamos, para terminar, ***3***. Es claro, por lo visto en ***2***, que los homomorfismos inducen diagramas conmutativos de la forma

$$\begin{tikzcd}
H^q(X, \mathcal{F}'_0) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & H^{q+1}(X, \mathcal{F}_0) \arrow[d] \\
H^q(X, \mathcal{F}'_0) \arrow[r, "d"] & H^{q+1}(X, \mathcal{F}_0).
\end{tikzcd}$$

Lo que tenemos que ver es que, dado el diagrama conmutativo del enunciado, tenemos un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
H^q(X, \mathcal{F}''_0) \arrow[r, "\delta_p"] \arrow[d] & H^{q+1}(X, \mathcal{F}'_0) \arrow[d] \\
H^q(X, \mathcal{F}''_1) \arrow[r, "\delta_p"] & H^{q+1}(X, \mathcal{F}'_1)
\end{tikzcd}$$

para cada q. Consideremos $\sigma \in \ker(d^q : C^q_{\mathcal{F}''_0} \longrightarrow C^{q+1}_{\mathcal{F}''_0})$ y consideremos, por la exactitud de la sucesión, un $\hat{\sigma} \in C^q_{\mathcal{F}_0}$ que se transforma por d^q en $d^q(\hat{\sigma}) \in C^{q+1}_{\mathcal{F}_0}$. Acabamos de ver que debe haber un elemento $\sigma' \in C^{q+1}_{\mathcal{F}'_0}$ verificando que $g_{q+1}(\sigma') = d^q(\hat{\sigma})$. Tomemos la imagen, $\sigma'_1 \in C^{q+1}_{\mathcal{F}'_1}$, de σ' por el morfismo del diagrama del enunciado, este elemento es un cociclo y, por tanto, tiene su representante en las clases de cohomología $H^{q+1}(X, \mathcal{F}'_1)$. Este elemento, por como hemos construido δ_q no es más que tomar la imagen de σ por la composición

$$H^q(X, \mathcal{F}''_0) \xrightarrow{\delta_p} H^{q+1}(X, \mathcal{F}'_0) \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{F}'_1).$$

Para ver la conmutatividad del diagrama consideremos la imagen de σ por el morfismo $H^q(X, \mathcal{F}'_0) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}'_1)$, que denotaremos por σ''. Dado que $\sigma'' \in C^q_{\mathcal{F}''_1}$, razonando como hemos hecho hasta ahora, podemos tomar $a \in C^q_{\mathcal{F}_1}$ con $f_q(a) = \sigma''$ y un elemento $\sigma''_1 \in C^{q+1}_{\mathcal{F}'}$ tal que $g_{q+1}(\sigma''_1) = a$. de nuevo, tenemos que σ''_1 es un cociclo y que tiene su representante no nulo en las cohomologías y lo podemos transformar por *el otro camino* del diagrama, es decir, tomando las composiciones

$$H^q(X, \mathcal{F}''_0) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}''_1) \xrightarrow{\delta_p} H^{q+1}(X, \mathcal{F}'_1).$$

Para terminar el problema, lo único que debemos ver es que σ'_1 y σ''_1 inducen las mismas clases de cohomología, para ello, veamos que $\sigma'_1 - \sigma''_1$ es un elemento de la imagen de d^q, es decir, es un coborde. Pero esto es fácil, tomamos en primer lugar la imagen de $\hat{\sigma}$, este es un elemento $a \in C^q_{\mathcal{F}_1}$, además, tanto este como a tienen por imagen σ'', por tanto, hay un elemento $z \in C^q_{\mathcal{F}'}$ con la propiedad de que $dz = d(a - \sigma'') = \sigma''_1 - \sigma'_1$. Esto termina ***3*** y con ello la demostración del teorema.

□

Como ya hemos comentado a lo largo de la demostración, estos teoremas de ver como se inducen sucesiones en las homologías-cohomologías tienen razonamientos análogos, a pesar de ser sumamente tediosos. Si se ha dado la demostración de este teorema no es por la su utilidad ni por lo que pueda sacarse de ella (trabajar con sucesiones exactas), simplemente la hemos hecho para mostrar que puede hacerse. La siguiente observación ilustra la relevancia real de tener este teorema.

Observación 6. El teorema que acabamos de probar puede usarse como axiomas de la teoría cohomológica de haces. Si tomamos el teorema anterior como una definición universal de un objeto con las propiedades dadas en el enunciado lo que recuperamos es la cohomología de haces tal y como lo hemos definido antes. He considerado que ver este teorema como realmente un *teorema* facilita el trabajo a la hora de manejar la definición de la cohomología de haces. Si se ve el teorema anterior como propiedades de un objeto, habría que dar no sólo su existencia, la cual se ve en la demostración anterior, si no en su unicidad y eso tampoco resulta trivial. Ver la unicidad nos sirve prara ver que, en el caso de tener dos cohomologías con

Vamos a ver la unicidad, es decir, si denotamos por $\hat{\mathscr{H}}$ a otra estructura de la forma $H^q(X, \bullet)$ con las propiedades del teorema 4, entonces debe ser isomorfa (con la definición de homomorfismo que damos a continuación) a la cohomología de haces que hemos definido. A una tal estructura la llamaremos **teoría cohomológica de haces**. Ver esto es consecuencia de los dos teoremas siguientes.

Definición 19. Sean $\mathscr{H} := H^\bullet(X, \mathcal{F})$ la cohomología de haces que hemos definido y sea $\hat{\mathscr{H}} = \hat{H}^\bullet(X, \mathcal{F})$ otra teoría cohomológica que satisface las condiciones del teorema 4. Un homomorfismo entre $\mathscr{H}$ y $\hat{\mathscr{H}}$ es un homomorfismo

$$H^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \hat{H}^q(X, \mathcal{F})$$

cumpliendo las propiedades siguientes:

1 Para $q = 0$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^0(X,\mathcal{F}) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(X,\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{H}^0(X,\mathcal{F}) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(X,\mathcal{F}) \end{array}$$

es conmutativo.

2 Para cada morfismo de haces $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ y para cada q, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^q(X,\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^q(X,\mathcal{F}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{H}^q(X,\mathcal{F}) & \longrightarrow & \hat{H}^q(X,\mathcal{F}') \end{array}$$

es conmutativo.

3 Cada sucesión exacta corta de haces

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

induce un diagrama conmutativo en las sucesiones exactas largas de la forma

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^q(X,\mathcal{F}'') & \xrightarrow{\delta_q} & H^{q+1}(X,\mathcal{F}') & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^q(X,\mathcal{F}'') & \xrightarrow{\delta_q} & H^{q+1}(X,\mathcal{F}') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

es conmutativo.

Los isomorfismos se definen de la manera obvia en cada uno de los apartados anteriores.

Teorema 5. *Sea $\mathscr{H} := H^\bullet(X,\mathcal{F})$ la cohomología de haces que hemos definido y sea $\hat{\mathscr{H}}$ otra estructura que satisface las condiciones del teorema 4. Entonces, existe un único homomorfismo entre $\mathscr{H}$ y $\hat{\mathscr{H}}$.*

Demostración. Unicidad: Supongamos que hubiese dos homomorfismos, por como hemos definido el haz de secciones discontinuas $\mathcal{C}^0(\mathcal{F})$, que recordamos que es *soft*, y por el teorema 4, tenemos que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}^1(\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

induce el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
\Gamma(X,\mathcal{C}^0(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \Gamma(X,\mathcal{F}^1(\mathcal{F})) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \\
\big\downarrow{\scriptstyle Id} & & \big\downarrow{\scriptstyle Id} & & \big\downarrow & & \\
\Gamma(X,\mathcal{C}^0(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \Gamma(X,\mathcal{F}^1(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \hat{H}^1(X,\mathcal{F}) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Además, para $q \geq 2$, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^q(X,\mathcal{F}^1(\mathcal{F})) & \longrightarrow & H^{q+1}(X,\mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \hat{H}^q(X,\mathcal{F}^1(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \hat{H}^{q+1}(X,\mathcal{F}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

es conmutativo. La unicidad para $q = 0$ se sigue de la propiedad ***1*** de la definición anterior. En general, la unicidad se sigue, para $q \geq 1$, de los dos diagramas anteriores.

Existencia: La construcción de tal homomorfismo se construye exigiendo las porpiedades de la definición y construyendolo inductivamente a partir de la conmutatividad de los dos diagramas anteriores. Todo se hace usando las buenas porpiedades de los haces de secciones discontinuas. Dado que es tedioso de ilustrar y no sirve para grandes propósitos en el trabajo, no lo escribimos (ver [1]-páginas 183-184).

□

El corolario siguiente resulta de gran utilidad, pues nos da la unicidad de las estructuras con las propiedades del teorema 4.

Corolario 2. *Cualesquiera dos teorías cohomológicas de haces, $\mathscr{H}$ y $\hat{\mathscr{H}}$, son isomorfas.*

Demostración. Supongamos que tenemos el único homomorfismo $\mathscr{H} \longrightarrow \hat{\mathscr{H}}$ que nos proporciona el teorema anterior. Por la misma razón, habrá otro tal homomorfismo $\hat{\mathscr{H}} \longrightarrow \mathscr{H}$ que haga, por la unicidad, los diagramas siguientes

$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathscr{H}} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "Id"] & \mathscr{H} \arrow[r] & \hat{\mathscr{H}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "Id"] & \hat{\mathscr{H}} \arrow[r] & \mathscr{H}
\end{tikzcd}$$

sean conmutativos. Por tanto, necesariamente son isomorfos.

□

Observación 7. Con todo esto, tenemos que si definimos una cohomología y demostramos que satisface el teorema 4, sabremos que es necesariamente isomorfa a la de la definición que hemos dado de cohomología de haces. Un ejemplo se puede ver en el apéndice [cohomología de Čech].

En cualquiera de los casos, lo que podemos hacer ahora es olvidarnos de las construcciones dadas anteriormente de las resoluciones canónicas y demás. Lo que nos interesa es trabajar con las propiedades que nos da el teorema 4.

A partir de este punto, enfocados en el resultado que anuncia el título del trabajo, nos vamos a centrar en resoluciones de haces que permitan obtener las consecuencias del teorema anterior, esto motiva tanto el el teorema como la definición siguiente.

Definición 20. Sea

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^*$$

una resolución de un haz $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico paracompacto X. Decimos que esta resolución es **acíclica** si $H^q(X, \mathcal{F}^p) = 0$ para cada $q > 0$ y $p \geq 0$.

Como ya hemos dicho, nos interesan resoluciones en las condiciones del teorema anterior. Como consecuencia directa del teorema 4, ***1***.2, es claro que las resoluciones *soft* y, por tanto, las *fine* son resoluciones acíclicas. Tenemos, por tanto, la cadena de inclusiones

$$\begin{tikzcd}
\text{flabby} \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
& \text{soft} \arrow[r, Rightarrow] & \text{acíclico} \\
\text{fine} \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

El teorema siguiente nos relaciona las resoluciones acíclicas con los grupos de cohomología de un haz, este es el resultado principal sobre el que nos vamos a apoyar para enunciar y probar el teorema de de Rham.

Teorema 6. *Sean $\mathcal{F}$ un haz sobre un espacio X paracompacto y sea*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^*$$

una resolución de $\mathcal{F}$. En estas condiciones tenemos que existe un homomorfismo natural

$$\varphi^q : H^q(\Gamma(X, \mathcal{F}^*)) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}).$$

Si, además, la resolución es acíclica tenemos que esta aplicación φ es un isomorfismo.

La importancia de este teorema que demostramos a continuación es que, en el caso de resoluciones acíclicas, los grupos de cohomología del haz son independientes de la resolución, en el sentido de que son isomorfos por la aplicación del enunciado. Este hecho es el que nos va a permitir demostrar el teorema de de Rham.

Demostración. Consideremos $\mathcal{K}_i = \ker(\mathcal{F}^i \longrightarrow \mathcal{F}^{i+1})$. Por ser una resolución, $\mathcal{F}^*$, como sucesión, es exacta, es decir, para cada i, $\mathcal{K}_i = \operatorname{Im}(\mathcal{F}^{i-1} \longrightarrow \mathcal{F}^i)$, además, $\mathcal{K}_0 = \mathcal{F}$. Con esto, tenemos que la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{i-1} \longrightarrow \mathcal{F}^{i-1} \longrightarrow \mathcal{K}_i \longrightarrow 0$$

es exacta. Por el teorema 4, esta sucesión exacta corta induce una sucesión exacta larga,

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{K}_{i-1}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}^{i-1}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{K}_i) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{K}_{i-1}) \longrightarrow \cdots \tag{5}$$

en las cohomologías. Además, el mismo teorema nos dice que las 0 cohomologías de esta última sucesión son las secciones globales de los respectivos haces.

Por otro lado se tiene que $\mathcal{K}_p(X) = \Gamma(X, \mathcal{K}_p) = H^0(X, \mathcal{K}_p)$, más concretamente, tenemos que

$$\ker(\Gamma(X, \mathcal{F}^i) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^{i+1})) \simeq \Gamma(X, \mathcal{K}_i).$$

Haciendo el cociente por $\operatorname{Im}(\Gamma(X, \mathcal{F}^p) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^{p+1})$ tenemos que, por definición de grupo de cohomología

$$H^p(\Gamma(X, \mathcal{F}^*)) \simeq \frac{\Gamma(X, \mathcal{K}_p)}{\operatorname{Im}(\Gamma(X, \mathcal{F}^p) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^{p+1})}.$$

Además, el denominador coincide justo con la imagen $\operatorname{Im}((\Gamma(X, \mathcal{F}^{p-1}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^p))$. En efecto, basta mirar a la parte del complejo de cocadenas

$$\Gamma(X, \mathcal{F}^{p-1}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^p) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^{p+1})$$

y, como $\mathcal{K}_p = \ker(\Gamma(X, \mathcal{F}^p) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^{p+1}))$, obtenemos la igualdad deseada. Con esto, la última igualdad nos queda

$$H^p(\Gamma(X, \mathcal{F}^*)) \simeq \frac{\Gamma(X, \mathcal{K}_p)}{\operatorname{Im}((\Gamma(X, \mathcal{F}^{p-1}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^p))} \simeq \operatorname{Im}(\Gamma(X, \mathcal{K}_p) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{K}_{p-1}). \tag{6}$$

donde, el último isomorfismo de (6) se obtiene de la sucesión exacta larga (5). Lo que hemos obtenido es un homomorfismo

$$H^p(\Gamma(X, \mathcal{F}^*)) \xrightarrow{\varphi_1^p} H^1(X, \mathcal{K}_{p-1}).$$

Además, φ_1^p es inyectiva. En efecto, tomemos un elemento $s \in \Gamma(X, \mathcal{K}_p)$ que pase al cero por el homomorfismo, por ser exacta la sucesión 5 se tiene que $s \in \mathrm{Im}(\Gamma(X, \mathcal{F}^{p-1}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}_p)$, precisamente este elemento es el cero al pasar al cociente, es decir, $\ker(\varphi_1^p) = 0$. Si además se cumple que la resolución es acíclica tenemos un isomorfismo. En efecto, sólo tenemos que ver que φ_1^p es sobreyectivo, pero esto es evidente pues la condición de ser acíclico nos da que $H^1(X, \mathcal{F}^{p-1}) = 0$, es decir, que la sucesión exacta larga,

$$\cdots \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}_p) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{K}_{p-1}) \longrightarrow 0,$$

estaciona y obtenemos la sobreyectividad.
Repetimos lo que acabamos de hacer para $2 \leq r \leq p$ sobre las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{p-r} \longrightarrow \mathcal{F}^{p-r} \longrightarrow \mathcal{K}_{p-r+1} \longrightarrow 0$$

y obtenemos, razonando exactamente igual, homomorfismos

$$H^{r-1}(X, \mathcal{K}_{p-r+1}) \xrightarrow{\varphi_r^p} H^r(X, \mathcal{K}_{p-r}).$$

Igual que antes, inyectivos e isomorfismos en el caso de ser la resolución acíclica. Tenemos, por tanto, una sucesión

$$H^p(X, \mathcal{F}^*) \xrightarrow{\varphi_1^p} H^1(X, \mathcal{K}_{p-1}) \xrightarrow{\varphi_2^p} H^2(X, \mathcal{K}_{p-2}) \xrightarrow{\varphi_3^p} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_p^p} H^p(X, \mathcal{F}).$$

que nos conecta por homomorfismos las cohomologías en cuestión y que son todos isomorfismos en el caso de ser acíclica la resolución. Tomando como φ^p la composición de todos ellos obtenemos el resultado.

$\square$

Corolario 3. *Supongamos que tenemos el siguiente homomorfismo de resoluciones*

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}^* \\ & & \Big\downarrow f & & \Big\downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}^*. \end{array}$$

Entonces tenemos un homomorfismo entre los grupos de cohomología

$$H^p(\Gamma(X, \mathcal{F}^*)) \xrightarrow{g^p} H^q(\Gamma(X, \mathcal{G}^*))$$

que, en el caso particular de que las resoluciones sean acíclicas y f sea un isomorfismo de haces, es un isomorfismo para cada p.

Retomando la observación 3 junto con sus ejemplos precedentes, si demostramos que ambas resoluciones son acíclicas, en virtud de los últimos resulados, obtendremos que ambas *teorías cohomológicas* son isomorfas como cohomologías de haces. Precisamente ese es el resultado principal del trabajo. Antes de lanzarnos a su enunciado y demostración vamos a dar un lema técnico que nos facilitará en gran medida la prueba.

Lema 1. *Sea $\mathcal{M}$ un haz de módulos sobre un haz soft de anillos $\mathcal{R}$. Entonces $\mathcal{M}$ es soft.*

Demostración. Consideremos un cerrado S y una sección $s \in \Gamma(S, \mathcal{M})$. Podemos encontrar un entorno, U, abierto y suficientemente pequeño de S donde s se pueda extender. Consideremos el elemento $\theta \in \Gamma(S \cup (X \setminus U), \mathcal{R})$ dado por

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{en } S \\ 1 & \text{en } x \setminus U. \end{cases}$$

Usando que $\mathcal{R}$ es *soft* tenemos que θ se extiende a todo X, por tanto, si tomamos θs tenemos una extensión de s y concluimos el resultado.

□

Pasamos a enunciar y demostrar el teorema de de Rham.

Teorema 7 (de Rham)**.** *Sea M una variedad diferenciable. La aplicación natural*

$$\int : H^p(\Omega^*(M)) \longrightarrow H^p(C^*(M;\mathbb{R}))$$

dada por la integración de formas sobre cadenas singulares ($\mathcal{C}^\infty$) con coeficientes en $\mathbb{R}$ es un isomorfismo.

Demostración. Ya sabemos que para el caso de la homología de de Rham y para la homología singular, ambos complejos de concadenas inducen sucesiones de haces que son resoluciones de $\mathbb{R}$ (identificándolo como su haz constante). El complejo de cocadenas singulares con las que trabajamos son las $\mathcal{C}^\infty$. Reconstruimos el diagrama de la observación 3 para poder escribirlo como en el corolario 3,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & \Omega^*_M \arrow[d, "\int"] \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & C^*_M. \end{tikzcd}$$

Es claro que la identidad es un isomorfismo de haces, para tener el resultado, es decir, la integral es un isomorfísmo entre las cohomologías, nos es suficiente con ver que ambas resoluciones son acíclicas, en concreto, veamos que son *soft*.

En el caso de las p-formas, por la existencia de particiones de la unidad, tenemos que el haz Ω_M^0, que son precisamente las funciones $\mathcal{C}^\infty$, es *soft*, de hecho, es *fine*. Por el lema que acabamos de demostrar y dado que, para cada p, el haz Ω_M^p tiene estructura de Ω_M^0-módulo, tenemos que cada Ω_M^p es soft y, por tanto, la resolución es *soft*. De igual manera se demuestra que la resolución C_M^* es *soft*, pues tiene estructura de C_M^0-módulo y C_M^0 se vuelve a identificar con las funciones $\mathcal{C}^\infty$. Con todo esto, y en virtud del corolario citado, obtenemos la demostración del teorema.

□

5. Consecuencias del teorema

Recuperando lo visto anteriormente, lo que tenemos es que las cohomologías usuales, es decir, la de de Rham, la singular, etc…son todas isomorfas a la cohomología de la variedad con coeficientes en el haz constate $\mathbb{R}$. En general, cualquier resolución de acíclica de este haz induce una cohomología en la variedad isomorfa, por ejemplo, a la de de Rham. Esta información se recoge en el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0_{dr}(M) & \longrightarrow & H^1_{dr}(M) & \longrightarrow & \cdots \\
\big\downarrow{\simeq} & & \big\downarrow{\simeq} & & \big\downarrow{\simeq} & & \\
0 & \longrightarrow & H^0(M,\mathbb{R}) & \longrightarrow & H^1(M,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \cdots \\
\big\downarrow{\simeq} & & \big\downarrow{\simeq} & & \big\downarrow{\simeq} & & \\
0 & \longrightarrow & H^0_s(M;\mathbb{R}) & \longrightarrow & H^1_s(M;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

siendo H^q_{dr} y $H^q_s(M;\mathbb{R})$ las cohomologías de de Rham y la singular, respectivamente.

Por otro lado, la cohomología de Čech es una teoría cohomológica de haces [cohomología de Čech]. Por el corolario 3, tenemos que $H^q(M,\mathbb{R}) \simeq \check{H}^q(M,\mathbb{R})$ y, en virtud del diagrama anterior, tenemos que

$$\check{H}^q(M,\mathbb{R}) \simeq H^q_s(M;\mathbb{R}) \simeq H^q_{dr}(M)$$

para cada q.

Dado que las teorías cohomológicas que hemos citado son todas isomorfas, podemos dar la relación que guarda con la homología. Para ver esto, denotamos por $H_q(M)$ al q-ésimo grupo de homología singular inducido por los complejos de cadenas $C_q(M)$. Como estamos en $H^q_s(M;\mathbb{R})$, es decir, aplicaciones sobre $\mathbb{R}$, podemos identificar cada elemento de estos como una aplicación lienal del espacio vectorial $C_q(M)$ de cadenas diferenciables sobre M. Por tanto, podemos identificar sin problemas $H^q_s(M;\mathbb{R})$ con $H_q(M)^* := Hom(H_q(M,\mathbb{R}))$ (aclaramos brevemente esta igualdad en el apéndice [homología con coeficientes]). Tenemos que

$H_s^q(M;\mathbb{R}) = H_q(M)^* \simeq H_q(M)$.

Finalmente, tenemos la siguiente cadena de módulos isomorfos:

$$\check{H}^q(M,\mathbb{R}) \simeq H_s^q(M;\mathbb{R}) \simeq H_q(M) \simeq H_{dr}^q(M)$$

para cada q. Dado que tenemos isomorfismos, la consecuencia principal es que **todos los invariantes topológicos que podemos estudiar y que nos proporciona la homológia singular, nos las porporcionan, de igual manera, cada una de las cohomologías que hemos dado, a saber, la de Čech, la de de Rham y la singular.**

6. Apéndice

6.1. Complejos de Cocadenas

Recordamos brevemente los complejos de cocadenas y sus propiedades.

Definición 21. Un **complejo de cocadenas**, C^*, es una sucesión de K-módulos y una sucesión de morfismos que los conectan

$$\cdots \longrightarrow C^{q-1} \xrightarrow{d} C^q \xrightarrow{d} C^{q+1} \xrightarrow{d} \cdots$$

con la propiedad de que $d \circ d = 0$. Estos morfismos se denominan, en un C^q concreto, el $q-$ésimo morfismo coborde y cuando se necesite precisar donde está definido, escribiremos d_q.

Definición 22. Dados dos complejos de cocadenas C^* y D^*, definimos un **morfismo de cocadenas** $C^* \longrightarrow D^*$ como una familia de homomorfismos que conectan cada C^q con D^q y hacen cada diagrama

$$\begin{tikzcd} C^{q+1} \arrow[r] & D^{q+1} \\ C^q \arrow[u, "d"] \arrow[r] & D^q \arrow[u, "d"'] \end{tikzcd}$$

conmutativo.

Observación 8. Es consecuencia directa de la definición de cocadena que $\mathrm{Im}(d_q) \subset \ker(d_{q+1})$. Usualmente, los elementos del núcleo los denominamos q-cociclos y los de la imagen se denominan q-cobordes. Con lo que acabamos de decir se tiene que todo coborde es un cociclo.

Definición 23. Dado un complejo de cocadenas C^*, definimos su q-ésimo **módulo de cohomología** $H^q(C^*)$, como

$$H^q(C^*) := \frac{\ker(C^q \longrightarrow C^{q+1})}{\mathrm{Im}(C^{q-1} \longrightarrow C^q)}.$$

Observación 9. Como consecuencia de la definición de morfismos de complejos, se comprueba de manera directa que un morfismo de cocadenas $C^* \longrightarrow D^*$, trnasforma cociclos de C^* en cociclos de D^* y cobordes de C^* en cobordes de D^*. Por tanto, todos los morfismos de cocadenas descienden bien a las cohomologías, es decir, todo morfismo de cocadenas induce un morfismo en las cohomologías

$$H^q(C^*) \longrightarrow H^q(D^*).$$

Definición 24. Una sucesión de complejos de cocadenas

$$0 \longrightarrow C^* \longrightarrow D^* \longrightarrow E^* \longrightarrow 0$$

decimos que es una sucesión **exacta de complejos de cocadenas** si las sucesiones

$$0 \longrightarrow C^q \longrightarrow D^q \longrightarrow E^q \longrightarrow 0$$

son exactas para cada q.

La proposición que vamos a dar es una de las porpiedades usuales que se encuentran cuando se trabajan con cohomologías.

Proposición 6. *Toda sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow C^* \longrightarrow D^* \longrightarrow E^* \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta larga en las cohomologías

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(C^*) \arrow[r] & H^0(D^*) \arrow[r] & H^0(E^*) \arrow[dll, "\delta_0"] \\
& H^1(C^*) \arrow[r] & H^1(D^*) \arrow[r] & H^1(E^*) \arrow[dll, "\delta_1"] \\
& \cdots & & .
\end{tikzcd}$$

Además, para cada diagrama conmutativo en las sucesiones exactas cortas de la forma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_0^* \arrow[r] \arrow[d] & D_0^* \arrow[r] \arrow[d] & E_0^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1^* \arrow[r] & D_1^* \arrow[r] & E_1^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induce un diagrama conmutativo en las sucesiones exactas largas de la forma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(C_0^*) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(D_0^*) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(E_0^*) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & H^0(C_1^*) \arrow[r] & H^0(D_1^*) \arrow[r] & H^0(E_1^*) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Demostración. La demostración de esta proposición es exactamente igual que la demostración de la parte ***3*** del teorema 4.

□

6.2. Homología con coeficientes

las nociones relacionadas con el producto tensorial y sus propiedades las remitmos a [4]-página 96 y para estudiar las relaciones del producto tensorial con la teoría de haces remitimos a [1].

Definición 25. Consideremos un anillo R y un espacio topológico X. Definimos los complejos de cadenas $C_k(X,R) := C_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} R$ y la extensión del operador borde $\partial_k : C_k(X,R) \longrightarrow C_{k-1}(X,R)$. Definimos la **homología singular con coeficientes** sobre el R-módulo $C_k(X,R)$ como

$$H_q(X,R) := \frac{\ker(\partial_k : C_k(X,R) \longrightarrow C_{k-1}(X,R)}{\mathrm{Im}(\partial_{k+1} : C_{k+}(X,R) \longrightarrow C_k(X,R))}.$$

De la misma manera, $H_k(X,R)$ tiene estructura de R-módulo.

En el trabajo, denotamos por $H_q(X) := H_q(X,\mathbb{R})$ en vez de para denotar $H_q(X,\mathbb{Z})$, como suele ser usual. La relación principal es que, si tensorizamos por un cuerpo de carácteristica cero lo que tenemos es que sucesiones exactas de grupos abelianos pasan a sucesiones exactas de espacios vectoriales sobre el cuerpo.

6.3. Cohomología singular

Recordamos los complejos de cadenas de la homología singular como los complejos de k-cadenas $c \in C_k(X)$ como los k-cubos no degenarados dados por aplicaciones $\sigma : I^k \longrightarrow X$ que consideraremos diferenciables. Sobre estos complejos definíamos las aplicaciones F y B sobre los $(k-1)$-cubos dadas por

$$F_i\sigma = \sigma(t_1, \ldots, t_{i-1}, 1, t_i, \ldots, t_{k-1}) \in C_k(X)$$
$$B_i\sigma = \sigma(t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{k-1}) \in C_k(X).$$

Definimos la aplicación borde $\partial : C_k \longrightarrow C_{k-1}$ como la aplicación dada por

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i (F_i\sigma - B_i\sigma).$$

A partir de este punto se estudian los morfismos en estas cadenas y su invarianza homotópica etc. . . Lo que vamos a estudiar nosotros es su *dual*, es decir, vamos a estudiar estos complejos bajo la perspectiva de la cohomología.

Dado $C_k(X)$, construimos el K-módulo dado por los homomorfismos del grupo $C_k(X)$ sobre K y lo denotamos por $C^k(X,K)$. Los elementos de este k-módulo son aplicaciones que transforman k-cubos en elementos de K, la estructura de K-módulo viene dada por

$$kf(\sigma) = k(f(\sigma))$$
$$(f+g)(\sigma) = f(\sigma) + g(\sigma)$$

Es claro que la restricción de los homomorfismos a los abietos $U \subset X$ induce el morfismo restricción

$$res_{V,U} : C^k(U, K) \longrightarrow C^k(V, K)$$

que asigna a cada homomorfismo $f \in C^k(U, K)$ su restricción a los k-cubos que toman imagen en V. Por tanto, tenemos que, para cada abierto $U \subset X$, el par $(C^k(U, K), res_{U,\bullet})$ es un prehaz, denominado el prehaz de k-cocadenas singulares. En general, la condición C1 de haz no se cumple para este prehaz.

Podemos darle un morfismo coborde d que denotaremos *diferencial*

$$d : C^k(U, K) \longrightarrow C^{k+1}(U, K)$$

definida como $df(\sigma) = f(\partial\sigma)$. Esta aplicación coborde cumple que $d \circ d = 0$, además, esta aplicación conmuta con la restricción, por tanto, tenemos que

$$d : C^k(U, K) \longrightarrow C^{k+1}(U, K)$$

es un morfismo de prehaces. Usaremos la misma notación $C^k(U, K)$ para los respectivos haces asociados a estos prehaces.

Con todo esto, tenemos que $(C^\bullet(U, K), d)$ es un complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow C^0(U, K) \xrightarrow{\ d\ } C^1(U, K) \xrightarrow{\ d\ } \cdots .$$

que llamamos complejo de cocadenas singulares.
Dado que no estamos trabajando con haces, definimos $C^k(M; K)$ como el haz asociado a cada $C^k(M, K)$. A partir de esta definición, construimos la cohomología singular tomando en cada elemento de la cadena

$$H^k(M; K) := \frac{ker(d : C^k \longrightarrow C^{k+1})}{Im(d : C^{k-1} \longrightarrow C^k)}.$$

6.4. Cohomología de Čech

De igual manera que con las cohomologías de de Rham y singular, comenzamos definiendo los complejos de cocadenas y la aplicación coborde.

Consideremos un espacio topológico X y sea $\mathcal{U}_\alpha$ un recubrimiento por abiertos de X. Un p-símplice será una colección de p abiertos de $\mathcal{U}_\alpha$, $\sigma = (U_1, \ldots, U_p)$, y su soporte, $|\sigma| = U_1 \cap \cdots \cap U_p$. Definimos la aplicación F_i que asigna a cada p-símplice $\sigma = (U_1, \ldots, U_p)$, el $p - 1$-símplice

$$F_i\sigma = (U_1, \ldots, U_{i-1}, U_{i+1}, \ldots, U_p).$$

Dado un haz $\mathcal{F}$ sobre X, consideramos $\check{C}^p(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{F})$, $p \geq 0$, el K-módulo definido por las aplicaciones que asignan a cada p-símplice σ un elemento de la sección $\Gamma(|\sigma|, \mathcal{F})$. El morfismo coborde

$$d : \check{C}^p(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{F})$$

dado por

$$df(\sigma) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i res_{|\sigma|,|F_i\sigma|} f(F_i\sigma).$$

Esta definiciión se construye así precisamente para que $d \circ D = 0$. Con todo esto, obtenemos un complejo de cocadenas $(\check{C}^*(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{F}), d)$. Este complejo induce loa móduloa de cohomología $\check{H}^q(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{F})$, que denotamos por q-ésimo módulo de cohomología de Čech subordinado al recubrimiento $\mathcal{U}$ y con coeficientes en el haz $\mathcal{F}$. Dado un morfismo de haces $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}'$, podemos inducir un morfismos entre las cocadenas

$$C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}')$$

dada por la asignación $f \mapsto f \circ \varphi$. Esta asignación desciende a un homomorfismo en las cohomologías

$$\check{H}^q(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{F}').$$

Veamos ahora como descienden a las cohomologías los refinamientos de la partición. Consideremos $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ un refinamiento de un recubrimiento $\mathcal{U}$, de X. Consideremos la aplicación $\mu\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ que asigna a cada abierto $V \in \mathcal{V}$, un abierto $\mu(V) \in \mathcal{U}$ con la propiedad de que $V \subset \mu(V)$. Si consideramos $\sigma = (V_0, \ldots, V_q)$ un q-símplice en $\mathcal{V}$, definimos $\mu(\sigma) = (\mu(V_0), \ldots \mu(V_q))$. Podemos hacer que esta aplicación induzca un morfismo en las cocadenas

$$C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\mu} C^*(\mathcal{V}, \mathcal{F}),$$

dado por $\mu_q(f)(\sigma) = res_{|\sigma|,|\mu(\sigma)|} f(\mu(\sigma))$. De nuevo, este morfismo desciende a un morfismo

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\mu^q} \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

entre las cohomologías.

Proposición 7. *Sean* $\mu^q, \gamma^q : \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ *morfismos entre los módulos de cohomologías subordinadas a los recubrimientos* $\mathcal{U}$ *y* $\mathcal{V}$*. Entonces, si* $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ *(*$\mathcal{V}$ *es un refinamiento de* $\mathcal{U}$*), se tiene que* $\mu^q = \gamma^q$*.*

Demostración. Consideremos el $q-1$-símplice $\sigma = (V_0, \ldots, V_{q-1})$ y sean μ_q y γ_q los morfismos de cocadenas asociados a μ^q y γ^q respectivamente. Definimos

$$G_j(\sigma) = (\mu(V_0), \ldots, \mu(V_j), \gamma(V_j), \ldots, \gamma(V_q))$$

y definimos el homomorfismo $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{h_q} C^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, dado por

$$h_q(f)(\sigma) = \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j res_{|\sigma|,|G_j(\sigma)|} f(G_j(\sigma)).$$

Para ver su comportamiento, lo ilustramos en el caso $q = 2$. Tomemos $\sigma = (V_0, V_1)$, con esto, tenemos que

$$G_0(\sigma) = (\mu(v_0), \gamma(V_0), \gamma(V_1))$$
$$G_1(\sigma) = (\mu(V_0), \mu(V_1), \gamma(V_1)).$$

Tomamos la aplicación f y, bajo las restricciones obvias tenemos la suma alterna $f(G_0(\sigma)) - f(G_1(\sigma))$. Supongamos que ahora aplicamos el opeador d, lo que tenemos que calcular es como actúa F_i en la suma anterior. Observamos que

$$F_0G_0(\sigma) = (\gamma(V_0), \gamma(V_1))$$
$$F_0G_1(\sigma) = (\mu(V_1), \gamma(V_1))$$
$$F_1G_0(\sigma) = (\mu(V_0), \gamma(V_1))$$
$$F_1G_1(\sigma) = (\mu(V_0), \mu(V_1))$$

por tanto, si calculamos las sumas alternas por f y tomamos sus restricciones, vamos a obtener $(\mu_1 - \gamma_q)(f)$. Generalizando esto último obtenemos que $h_{q+1} \circ d + d \circ h_q = \mu_q - \gamma_q$. Es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{h_q} & C^{q-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \\ {\scriptstyle d}\uparrow & & {\scriptstyle d}\uparrow \\ C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{h_{q-1}} & C^{q-2}(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \end{array}$$

dista de ser conmutativo una diferencia que está en la imagen por d, por tanto, obtenemos que $\mu^q = \gamma^q$ al pasar a la cohomología.

□

Lo que acabamos de hacer es que, dado un refinamiento $\mathcal{V} < \mathcal{U}$, hay un único morfismo natural $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Con todo esto, definimos de manera general la cohomología de Čech sobre X con coeficientes en el haz $\mathcal{F}$ como

$$\check{H}^q(X, \mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{V} < X} \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}).$$

Este límite directo está bien definido por refinamientos por la proposición anterior.

Observación 10. Consideremos un recubrimiento $\mathcal{U}$ de X, $f \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es un 0-ciclo si $df = 0$, es decir, si

$$0 = df(U, V) = res_{U,U\cap V} f(U) - res_{V,U\cap v} f(V)$$

para cada para (U, V), por tanto, por la propiedad de ser haz, tenemos que debe existir un $f(X)$ con la propiedad de que coincide con cada $f(U)$ en las restricciones, $U \in \mathcal{U}$. Es decir, f define un elemento $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$. Con esto

$$\check{H}^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}).$$

Una vez definida la cohomología de Čech con coeficientes en un haz y teniendo en cuenta la observación anterior, podemos preguntarnos que más propiedades cumple esta cohomología. El siguiente teorema responde esta cuestión.

Teorema 8. *La cohomología de Čech define una teoría cohomológica de haces.*

Prescindimos de dar la demostración de este teorema, habría que limitarse a ver que cumple las porpiedades del teorema 4. La propiedad ***1***,1 es la observación que hemos dado (ver [1]-páginas 202-204).