UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo de Fin de Grado

El Teorema de Hartogs de prolongación holomorfa

Jorge Luis Mayoral Pérez

Tutora académica:
Mª Socorro Ponte Miramontes

Febrero 2018

A mis perritos,
Bola y Lucy

Resumen

En este trabajo se da una visión general del análisis en varias variables complejas para, a continuación, demostrar el Teorema de prolongación holomorfa de Hartogs junto con algunas consecuencias suyas.

Abstract

This work introduces the theory of functions of several complex variables in order to prove Hartog's Theorem of holomorphic extension and several of its consequences.

Introducción

El teorema de Hartogs que se estudia en el trabajo asegura que podemos extender, conservando la holomorfía, cualquier función holomorfa definida en un dominio al que se le ha quitado un compacto, a todo el dominio. Este hecho es falso en una variable y es precisamente uno de los mayores atractivos del teorema, pues establece que el análisis en una o varias variables complejas es muy distinto.

El trabajo se divide en dos capítulos: el primero da una visión introductoria al análisis de varias variables complejas, tratando de ser lo más autocontenido posible y probando un gran abanico de resultados del cálculo integral y diferencial en el espacio $\mathbb{C}^n$.

El segundo capítulo está enfocado a mostrar el problema de la *extensión holomorfa*, partiendo de resultados más elementales hasta la presentación del resultado más general sobre extensión y su demostración, el *Teorema de prolongación holomorfa*, citado en algunos libros como el *fenómeno de Hartogs*. La demostración que se presenta trata de ser lo más completa y rigurosa posible, presentando en el mismo trabajo todos los resultados que puedan ser necesarios para su prueba. El trabajo se cierra relacionando este teorema con el concepto de *extensión holomorfa* dando una muestra de las diferencias existentes entre los abiertos y el espacio en el que se estudian.

El enfoque que se ha tomado de la demostración del resultado principal ha sido sacado de [1], así como la gran mayoría de resultados previos que se utilizan en su demostración. Los resultados más elementales de extensión y la generalización del teorema a espacios de Hilbert separables se han tomado de [2].

Índice general

Capítulo 1

El espacio $\mathbb{C}^n$, cálculo diferencial e integración

Consideramos el conjunto $\mathbb{C}^n$ como el conjunto de vectores n-dimensionales $(z_1, \ldots, z_n)$ tales que $z_j \in \mathbb{C}$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Es claro que $\mathbb{C}^n$ tiene estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial con la suma y producto por escalares definidas por:

i) $z + w = (z_1 + w_1, \ldots, z_n + w_n) \in \mathbb{C}^n$ para todo $z, w \in \mathbb{C}^n$.

ii) $\lambda z = (\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n) \in \mathbb{C}^n$ para todo $z \in \mathbb{C}^n$ y para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Observación 1.1. Por ser $\mathbb{C}^n$ un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas en él son equivalentes, es decir, dadas cualesquiera dos normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \beta\|\cdot\|_1$

Las normas principales con las que vamos a trabajar son las siguientes:

i) $\|z\|_2 = (\sum_{i=1}^n |z_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

ii) $\|z\|_\infty = \text{máx}\{|z_i| : j \in \{1, \ldots, n\}\}$

Observación 1.2. Es fácil ver que las aplicaciones anteriores son normas en $\mathbb{C}^n$. Podemos hablar, por tanto, de $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ como espacio métrico con la aplicación distancia inducida por la norma, es decir, $d(z, w) = \|z - w\|$ para cualquier norma sobre $\mathbb{C}^n$. Además, si no hay lugar a confusión, denotaremos la norma por $\|\cdot\|$ prescindiendo del subíndice.

Si consideramos en $\mathbb{R}^{2n}$ la norma euclídea, podemos dar una identificación entre $\mathbb{R}^{2n}$ y $\mathbb{C}^n$ mediante la correspondencia

$$\mathbb{C}^n \ni (z_1, \ldots, z_n) = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \longmapsto (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

De esta forma podemos identificar los abiertos y las funciones de $\mathbb{C}^n$ como abiertos y funciones de $\mathbb{R}^{2n}$.

Las nociones de convergencia, continuidad, continuidad uniforme, etc.. son las mismas que las dadas en $\mathbb{R}^n$.

1.1. Cálculo diferencial en $\mathbb{C}^n$

Definición 1.1. Sean $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^m$. Diremos que f es diferenciable en $z_0 \in U$ si existe una aplicación lineal $L \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ tal que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - L(z - z_0)}{\|z - z_0\|} = 0 \tag{1.1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - L(h)}{\|h\|} = 0. \tag{1.2}$$

Proposición 1.1. *Una aplicación $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$, U abierto, es diferenciable en un punto $z_0 \in U$ si, y sólo si, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ cumple que, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $f_j : U \longrightarrow \mathbb{C}$ son diferenciables en z_0. Además, si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ es la aplicación lineal que cumple la igualdad* (1.2)*, si escribimos $L = (L_1, \ldots, L_m)$, $L_j \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$, se cumple que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_j(z_0 + h) - f_j(z_0) - L_j(h)}{\|h\|} = 0 \tag{1.3}$$

para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$

Demostración. Se tiene que

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - L(h)}{\|h\|} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f_1(z_0 + h), \ldots, f_m(z_0 + h)) - (f_1(z_0), \ldots, f_m(z_0)) - (L_1(h), \ldots, L_m(h))}{\|h\|} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f_1(z_0 + h) - f_1(z_0) - L_1(h), \ldots, f_m(z_0 + h) - f_m(z_0) - L_m(h))}{\|h\|} = 0$$

y esta última igualdad se da si, y solamente si,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_j(z_0 + h) - f_j(z_0) - L_j(h)}{\|h\|} = 0$$

para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$.

□

Teorema 1.1 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann). *Sea $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, U abierto, una función, que escribimos como $f = u + iv$ donde $u, v : U \subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$. En estas condiciones, se tiene que f es diferenciable en un punto $z_0 \in U$ si, y solo si, u y v son diferenciables en $z_0 = (x_{01}, y_{01}, \ldots, x_{0n}, y_{0n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ y cumplen que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_{01}, y_{01}, \ldots, x_{0n}, y_{0n}) &= \frac{\partial v}{\partial y_j}(x_{01}, y_{01}, \ldots, x_{0n}, y_{0n}) \\ \frac{\partial u}{\partial y_j}(x_{01}, y_{01}, \ldots, x_{0n}, y_{0n}) &= -\frac{\partial v}{\partial x_j}(x_{01}, y_{01}, \ldots, x_{0n}, y_{0n}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Estas ecuaciones son conocidas como Ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Demostración. Supongamos que f es diferenciable en un punto $z_0 \in U$, usando la definición se tiene que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - L(z - z_0)}{\|z - z_0\|} = 0$$

donde la aplicación $L \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ es la diferencial de f en el punto z_0 que denotaremos por $Df(z_0)$.
En las condiciones anteriores y usando que $f = u + iv$ se tiene que, suponiendo que $z = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ y que $z_0 = (x_{01}, y_{01}, \ldots, x_{0n}, y_{0n}) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_{01} \\ \cdots \\ y_n \to y_{0n}}} \frac{(u + iv)(x_1, y_1, \ldots, y_n) - (u + iv)(x_{01}, y_{01}, \ldots, y_{0n}) - Df(z_0)(x_1 - x_{01}, \ldots, y_n - y_{0n})}{\|(x_1 - x_{01}, \ldots, y_n - y_{0n})\|} = 0.$$

Dado que la aplicación $Df(z_0)$ es lineal, se tiene que, suponiendo que $z = (z_1, \ldots, z_n)$,

$$\begin{aligned} Df(z_0)(z) &= Df(z_0)(z_1 e_1 + \cdots + z_n e_n) = \\ &= z_1 Df(z_0)(e_1) + \cdots + z_n Df(z_0)(e_n) = \\ &= \langle (a_1 + ib_1, \ldots, a_n + ib_n), (z_1, \ldots, z_n) \rangle. \end{aligned}$$

Donde, en la última igualdad, hemos supuesto que $Df(z_0)(e_j) = a_j + ib_j \in \mathbb{C}$ y la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar. De esta manera podemos identificar $Df(z_0)$ con $(a_1 + ib_1, \ldots, a_n + ib_n)$.

Usando esto último y separando parte real y parte imaginaria del límite anterior obtenemos que

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_{01} \\ \dots \\ y_n \to y_{0n}}} \frac{u(x_1, y_1, \dots, y_n) - u(x_{01}, y_{01}, \dots, y_{0n}) - \sum_{j=1}^n a_j(x_j - x_{0j}) - b_j(y_j - y_{0j})}{\|(x_1 - x_{01}, \dots, y_n - y_{0n})\|} +$$

$$+i \left(\frac{v(x_1, y_1, \dots, y_n) - v(x_{01}, y_{01}, \dots, y_{0n}) - \sum_{j=1}^n b_j(x_j - x_{0j}) + a_j(y_j - y_{0j})}{\|(x_1 - x_{01}, \dots, y_n - y_{0n})\|} \right) = 0.$$

Por tanto, tenemos que

$$a_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_{01}, y_{01}, \dots, x_{0n}, y_{0n}) = \frac{\partial v}{\partial y_j}(x_{01}, y_{01}, \dots, x_{0n}, y_{0n})$$
$$-b_j = \frac{\partial u}{\partial y_j}(x_{01}, y_{01}, \dots, x_{0n}, y_{0n}) = -\frac{\partial v}{\partial x_j}(x_{01}, y_{01}, \dots, x_{0n}, y_{0n}).$$

para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, es decir, se cumplen las ecuaciones (1.4).

Finalmente, dado que cada uno de los razonamientos anteriores se pueden invertir, obtenemos la equivalencia buscada.

□

Vamos a introducir ahora una notación que utilizaremos a lo largo de todo el trabajo.

i) Dados $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ con $f = u + iv$,
$z_0 = (x_{01} + iy_{01}, \dots, x_{0n} + iy_{0n}) \in U$ y supuesto que existen $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y_j}$,
$j \in \{1, \dots, n\}$ en $(x_{01}, y_{01}, \dots, x_{0n}, y_{0n})$, definimos

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + i\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)(x_{01}, y_{01}, \dots, x_{0n}, y_{0n})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} + i\frac{\partial v}{\partial y_j} \right)(x_{01}, y_{01}, \dots, x_{0n}, y_{0n})$$

Donde, por definición, $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $\frac{\partial v}{\partial x_j}$, $\frac{\partial u}{\partial y_j}$ y $\frac{\partial v}{\partial y_j}$ son las derivadas parciales definidas en el punto $z_0 = (x_{01}, y_{01}, \dots, x_{0n}, y_{0n})$ por

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_{01}, y_{01}, .., y_{0n}) = \lim_{t \to 0} \frac{u(x_{01}, y_{01}, .., x_{0j} + t, .., x_{0n}, y_{0n}) - u(x_{01}, y_{01}, .., x_{0n}, y_{0n})}{t}$$

para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ y de manera análoga para $\frac{\partial v}{\partial x_j}$, $\frac{\partial u}{\partial y_j}$ y $\frac{\partial v}{\partial y_j}$.

ii) Dado $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ y $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, escribiremos

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)(z)$$

y las llamaremos parcial y parcial conjugada respecto de z_j respectivamente.

Pronto veremos que la definición de parcial respecto de una coordenada compleja z_j es consistente con la notación que acabamos de dar, es decir, que $D_j f(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z_j}(z)$ cuando estas existan.

Observación 1.3. La existencia de $\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)$ en un punto $z \in \mathbb{C}^n$ $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ no garantiza la diferenciabilidad de f en dicho punto. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo 1.1. Consideremos la función $f = u + iv$ dada por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z} \end{aligned}$$

donde $u(x, y) = x$ y $v(x, y) = -y$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Es claro que existe $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ y, además, $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 0$ para cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$, sin embargo, la función f que acabamos de definir no es derivable en ningún punto de $\mathbb{C}$ ya que no cumplen *Cauchy-Riemann* en ningún punto.

Veamos ahora un resultado sumamente útil en el análisis complejo en varias variables.

Proposición 1.2. *Una función $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, U abierto, $f = u + iv$ es diferenciable en un punto $z_0 \in U$ si, y solamente si, u y v son diferenciables en z_0 y, además, $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(z_0) = 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.*

Demostración. Sea $j \in \{1, \dots, n\}$, tenemos lo siguiente:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)(z_0)$$

si, y solamente si,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}(z_0)$$

por lo que
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + i\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)(x_{01}, \ldots, y_{0n}) =$$

$$= \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y_j} + i\frac{\partial v}{\partial y_j}\right)(x_{01}, \ldots, y_{0n})$$
e igualando parte real y parte imaginaria encontramos que esta última igualdad es cierta si, y solo si,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_{01}, \ldots, y_{0n}) &= \frac{\partial v}{\partial y_j}(x_{01}, \ldots, y_{0n}) \\ -\frac{\partial v}{\partial x_j}(x_{01}, \ldots, y_{0n}) &= \frac{\partial u}{\partial y_j}(x_{01}, \ldots, y_{0n}) \end{aligned} \tag{1.5}$$

y las igualdades en (1.5) son las ecuaciones de *Cauchy-Riemann*, por tanto, tenemos la equivalencia.

□

Observación 1.4. Si $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, U abierto, es diferenciable en $z_0 \in U$ entonces se tiene que existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ de manera que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(z_{01}, \ldots, z_{0j} + h, \ldots, z_{0n}) - f(z_0) - hL(e_j)}{|h|} = 0$$

por lo que se tiene que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(z_{01}, \ldots, z_{0j} + h, \ldots, z_{0n}) - f(z_0)}{h} = L(e_j) = D_j f(z_0). \tag{1.6}$$

Veamos ahora que la definición de $\frac{\partial f}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)$ es consistente con la de $D_j f$. En efecto, por (1.6) tenemos que

$$D_j f(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_{01}, \ldots, z_{0j} + h, \ldots, z_{0n}) - f(z_0)}{h}.$$

Si este límite existe con $h \in \mathbb{C}$ también existirá dicho límite para $h = h_1 + i0 = Re(h) \in \mathbb{R}$, por lo que se tiene que

$$\begin{aligned} &\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(z_{01}, \ldots, z_{0j} + h_1, \ldots, z_{0n}) - f(z_0)}{h} = \\ &= \lim_{h_1 \to 0} \frac{(u + iv)(x_{01}, \ldots, x_{0j} + h_1, \ldots, y_{0n}) - (u + iv)(x_{01}, \ldots, y_{0n})}{h_1} \end{aligned} \tag{1.7}$$

y separando parte real y parte imaginaria tenemos que (1.7) es igual a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}+i\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)(x_{01},\ldots,y_{0n}). \tag{1.8}$$

Procedemos de la misma manera con $h=0+ih_2=iIm(h)$ y tenemos que

$$\lim_{h_2\longrightarrow 0}\frac{(u+iv)(x_{01},\ldots,y_{0j}+h_2,\ldots,y_{0n})-(u+iv)(x_{01},\ldots,x_{0n},y_{0n})}{ih_2}=$$

$$=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y_j}+i\frac{\partial v}{\partial y_j}\right)(x_{01},\ldots,y_{0n}). \tag{1.9}$$

Además, tanto (1.8) como (1.9) son $D_jf(z_0)$ por lo que si las sumamos tenemos que

$$2D_jf(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_{01},\ldots,y_{0n})+i\frac{\partial v}{\partial x_j}(x_{01},\ldots,y_{0n})+\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y_j}+i\frac{\partial v}{\partial y_j}\right)(x_{01},\ldots,y_{0n})$$

y agrupando obtenemos que

$$2D_jf(z_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)(z_0)=2\frac{\partial f}{\partial z_j}(z_0)$$

lo que nos da la definición que hemos dado.

Definición 1.2. Dada $f:U\subset\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}$, U un abierto, decimos que f es separadamente holomorfa en U si, fijado $z_0\in U$, las aplicaciones

$$\begin{array}{rcll} f_j:\Omega_j\subset\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \\ \lambda & \longmapsto & f_j(\lambda)= & f(z_{01},\ldots,z_{0j-1},\lambda,z_{0j+1}\ldots,z_{0n}) \end{array}$$

son holomorfas en $\Omega_j=\{\lambda\in\mathbb{C}:(z_{01},\ldots,z_{0j-1},\lambda,z_{0j+1}\ldots,z_{0n})\in U\}$ para todo $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Observación 1.5. Los conjuntos Ω_j de la definición anterior son abiertos en $\mathbb{C}$, en efecto, son la preimagen del abierto U por la aplicación continua
$\lambda\in\mathbb{C}\longmapsto(z_{01},\ldots,z_{0j-1},\lambda,z_{0j+1}\ldots,z_{0n})\in\mathbb{C}^n$.

Proposición 1.3. *Si $f:U\subset\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}$ es holomorfa en U, entonces, es separadamente holomorfa en U.*

Demostración. Dado un punto $z_0=(z_{01},\ldots,z_{0n})\in U$ y fijando un $j\in\{1,\ldots,n\}$, se cumple que

$$f(z_0)=\underbrace{Re(f)}_{u}(z_0)+i\underbrace{Im(f)}_{v}(z_0)=\underbrace{Re(f_j)}_{u_j}(z_{0j})+i\underbrace{Im(f_j)}_{v_j}(z_{0j}).$$

Por tanto, es claro que, suponiendo que $z_0 = (x_{01} + iy_{01}, \ldots, x_{0n} + iy_{0n})$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(z_0) = \lim_{t\to 0} \frac{u(x_{01}, \ldots, x_{0j} + t, y_{0j}, \ldots, y_{0n}) - u(x_{01}, \ldots, y_{0n})}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{u_j(x_{0j} + t, y_{0j}) - u(x_{0j}, y_{0j})}{t} = \frac{\partial u_j}{\partial x}(x_{0j}, y_{0j}).$$

Y lo mismo para v_j y las parciales respecto y_j. Usando esto y el hecho de que $f \in \mathcal{H}(U)$ se tiene que

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(z_0) = \frac{\partial f_j}{\partial \bar{\lambda}}(z_{0j})$$

por lo que f_j es holomorfa en Ω_j para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$.

□

Observación 1.6. El recíproco de la proposición anterior es cierto y es un teorema muy complejo conocido como *teorema de Hartogs de holomorfía separada.*

1.2. Series de potencias

Observación 1.7. A partir de este punto se considerará el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales como el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots\}$, con el fin de simplificar la notación.

Definición 1.3. Sea $z_0 \in \mathbb{C}^n$ con $z_0 = (z_{01}, \ldots, z_{0n})$. Una serie de potencias centrada en z_0 es una serie de funciones de la forma

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha (z - z_0)^\alpha = \sum_{\alpha_1=0,\ldots,\alpha_n=0}^{\infty} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} (z_1 - z_{01})^{\alpha_1} \cdots (z_n - z_{0n})^{\alpha_n}.$$

Donde cada $c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \in \mathbb{C}$ para todo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

Observación 1.8. Dado que las series con las que vamos a trabajar son absolutamente convergentes, no importa el orden en el que se sumen.

Definición 1.4. Sea $z_0 \in \mathbb{C}^n$ y sea $r = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, definimos el polidisco de centro z_0 y radio r como

$$\Delta^n(z_0, r) := D(z_{01}, r_1) \times \cdots \times D(z_{0n}, r_n).$$

En los casos en los que no haya lugar a confusión sobre la dimensión del producto de los discos, denotaremos a los polidiscos prescindiendo del superíndice.

Proposición 1.4 (Lema de Abel). *Sea $z_0 \in \mathbb{C}^n$, $z_0 = (z_{01}, \dots, z_{0n})$ y consideremos una serie de potencias centrada en z_0 dada por*

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha (z - z_0)^\alpha$$

y supongamos que existe un $\hat{z} = (\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n) \in \mathbb{C}^n$ y un $M > 0$ tales que $|\hat{z}_1 - z_{01}| = r_1 > 0, \dots, |\hat{z}_n - z_{0n}| = r_n > 0$ y

$$|c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} (\hat{z}_1 - z_{01})^{\alpha_1} \cdots (\hat{z}_n - z_{0n})^{\alpha_n}| \leq M$$

para todo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, entonces, la serie $\sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha (z - z_0)^\alpha$ converge absolutamente en cada $z \in \Delta(z_0, r)$ y de manera uniforme en sus compactos.

Demostración. Si $z \in \Delta^n(z_0, r)$ se cumple que

$$|c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} (z_1 - z_{01})^{\alpha_1} \cdots (z_n - z_{0n})^{\alpha_n}|$$

$$\leq |c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}| r_1 \cdots r_n \left(\frac{|z_1 - z_{01}|}{r_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{|z_n - z_{0n}|}{r_n}\right)^{\alpha_n} \leq$$

$$\leq M t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n}$$

donde cada $t_j = \dfrac{|z_j - z_{0j}|}{r_j} \in [0, 1)$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Tenemos que la serie

$$\sum_{\alpha_1=0,\dots,\alpha_n=0}^{\infty} M t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n} = M \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} t_1^{\alpha_1} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} t_n^{\alpha_n} = M \frac{1}{1 - t_1} \cdots \frac{1}{1 - t_n}$$

es convergente por lo que la serie $\sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha (z - z_0)^\alpha$ converge de manera absoluta.

Veamos la convergencia uniforme en los compactos, en efecto, dado $K = \bar{\Delta}^n(z_0, \rho) \subset \Delta(z_0, r)$ donde $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ con cada $\rho_i < r_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Por lo que, para cada $z \in K$ se tiene que

$$|c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} (z_1 - z_{01})^{\alpha_1} \cdots (z_n - z_{0n})^{\alpha_n}|$$

$$\leq |c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}| r_1 \cdots r_n \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\rho_n}{r_n}\right)^{\alpha_n} \leq$$

$$\leq M\left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\rho_n}{r_n}\right)^{\alpha_n}$$

y, utilizando el criterio *M de Weierstrass* tenemos que la serie $\sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha(z-z_0)^\alpha$ converge uniformemente en K.

□

1.3. Integración

Definición 1.5. Consideremos $\gamma_1:[a_1,b_1]\longrightarrow\mathbb{C},\ldots,\gamma_m:[a_m,b_m]\longrightarrow\mathbb{C}$ caminos de clase $\mathcal{C}^1([a_j,b_j])$, $j\in\{1,\ldots,m\}$ y sea
$f:\gamma_1([a_1,b_1])\times\cdots\times\gamma_m([a_m,b_m])\longrightarrow\mathbb{C}$ continua. Definimos

$$\int_{\gamma_1\times\cdots\times\gamma_m} f(\omega)d\omega := \int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_m,b_m]} f(\gamma_1(t_1),\ldots,\gamma_m(t_m))\prod_{j=1}^m|\gamma_j'(t_j)|dt_1\cdots dt_m.$$

Observación 1.9. En las condiciones anteriores tenemos que la parte derecha de la igualdad anterior es igual a

$$\int_{[a_1,b_1]}\left(\cdots\left(\int_{[a_m,b_m]} f(\gamma_1(t_1),\ldots,\gamma_m(t_m))|\gamma_m'(t_m)|dt_m\right)\cdots\right)|\gamma_1'(t_1)|dt_1.$$

En efecto, dado que f se escribe como $u+iv$, donde u y v representan la parte real y la parte imaginaria de f respectivamente, y definiendo $g:[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_m,b_m]\longrightarrow\mathbb{R}$ como $g(t_1,\ldots,t_m)=\prod_{i=1}^m|\gamma_i'(t_i)|$ podemos escribir lo anterior como

$$\int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_m,b_m]}(u(\gamma_1,\ldots,\gamma_m))+iv(\gamma_1,\ldots,\gamma_m))g=$$

$$=\int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_m,b_m]}u(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)g+i\int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_m,b_m]}v(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)g.$$

Dado que bajo los signos integrales de la última igualdad hay funciones reales de variable real podemos aplicar el teorema de Fubini y escribir integrales múltiples. Agrupando de nuevo los términos obtenemos la igualdad deseada.

Veamos ahora una forma de acotar las integrales definidas de la forma anterior.

Proposición 1.5. *Sean* $\gamma_1:[a_1,b_1]\longrightarrow\mathbb{C},\ldots,\gamma_m:[a_m,b_m]\longrightarrow\mathbb{C}$, *caminos en* $\mathbb{C}$ *de clase* $\mathcal{C}^1$ *y* $f:\gamma_1([a_1,b_1])\times\cdots\times\gamma_m([a_m,b_m])\longrightarrow\mathbb{C}$ *una función continua. Entonces*

$$\left|\int_{\gamma_1\times\cdots\times\gamma_m} f\right|\leq\sup\{|f(\omega)|:\omega\in\prod_{i=1}^m\gamma_i([a_i,b_i])\}\prod_{i=1}^m long(\gamma_i).$$

Demostración. Partimos de que

$$\int_{\gamma_1\times\cdots\times\gamma_m} f \overset{(*)}{=} \int_{a_1}^{b_1}\left(\cdots\left(\int_{a_m}^{b_m} f(\gamma_1(t_1),\ldots,\gamma_m(t_m))|\gamma_m'(t_m)|dt_m\right)\cdots\right)|\gamma_1'(t_1)|dt_1.$$

Por lo que

$$\left|\int_{\gamma_1\times\cdots\times\gamma_m} f\right| \leq \left|\int_{a_1}^{b_1}\left(\cdots\left(\int_{a_m}^{b_m} f(\gamma_1(t_1),\ldots,\gamma_m(t_m))|\gamma_m'(t_m)|dt_m\right)\cdots\right)|\gamma_1'(t_1)|dt_1\right|$$

$$\leq \int_{a_1}^{b_1}\left(\cdots\left(\int_{a_m}^{b_m}\sup\left\{|f(\omega)|:\omega\in\prod_{i=1}^m\gamma_i([a_i,b_i])\right\}|\gamma_m'(t_m)|dt_m\right)\cdots\right)|\gamma_1'(t_1)|dt_1 =$$

$$= \sup\left\{|f(\omega)|:\omega\in\prod_{i=1}^m\gamma_i([a_i,b_i])\right\}\int_{a_1}^{b_1}\left(\cdots\left(\int_{a_m}^{b_m}|\gamma_m'(t_m)|dt_m\right)\cdots\right)|\gamma_1'(t_1)|dt_1 =$$

$$= \sup\left\{|f(\omega)|:\omega\in\prod_{i=1}^m\gamma_i([a_i,b_i])\right\}\prod_{i=1}^m long(\gamma_i).$$

$(*)$: Estamos usando la observación 1.9

□

Teorema 1.2 (Regla de Leibniz)**.** *Sean $U\subset\mathbb{C}^n$ abierto, $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$ caminos de clase $\mathcal{C}^1$ con valores en $\mathbb{C}$ y sea $\varphi: U\times\gamma_1([a_1,b_1])\times\cdots\times\gamma_m([a_m,b_m])\subset\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m\longrightarrow\mathbb{C}$ una función continua. En estas condiciones se tiene que*

i) Si definimos la función $f:U\longrightarrow\mathbb{C}$ como

$$f(z_1,\ldots,z_n)=\int_{\gamma_1\times\cdots\times\gamma_m}\varphi(z_1,\ldots,z_n,\omega_1,\ldots,\omega_m)d\omega_1\cdots d\omega_m$$

es una función continua para todo $z=(z_1,\ldots,z_n)\in U$.

ii) Además, si existe $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_j}$ y es continua en U para un $j\in\{1,\ldots,n\}$,se tiene que existe $\dfrac{\partial f}{\partial z_j}$ y, además,

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(z_1,\ldots,z_n)=\int_{\gamma_1\times\cdots\times\gamma_m}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(z_1,\ldots,z_n,\omega_1,\ldots,\omega_m)d\omega_1\cdots d\omega_m$$

es una función continua para todo $z\in U$.

Demostración.

i) Sean $z_0 \in U$ y $r > 0$ tal que $\bar{B}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}^n : d(z_0, z) \leq r\} \subset U$ y tomemos $\{z_k\}$ una sucesión en U tal que $z_k \longrightarrow z_0$. Veamos que $|f(z_k) - f(z_0)| \longrightarrow 0$.

$$|f(z_k) - f(z_0)| = \left| \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m} (\varphi(z_k, \omega) - \varphi(z_0, \omega)) d\omega \right| \leq$$

$$\leq \sup \left\{ |\varphi(z_k, \omega) - \varphi(z_0, \omega)| : \omega \in \prod_{i=1}^{m} \gamma_i([a_i, b_i]) \right\} \prod_{i=1}^{m} long(\gamma_i).$$

Usando que φ es continua en $U \times \gamma_1([a_1, b_1]) \times \cdots \times \gamma_m([a_m, b_m])$ tenemos que φ es uniformemente continua en el compacto $\bar{B}(z_0, r) \times \gamma_1([a_1, b_1]) \times \cdots \times \gamma_m([a_m, b_m])$ por lo que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ verificando que para todo $(z, \omega), (z', \omega') \in \bar{B}(z_0, r) \times \gamma_1([a_1, b_1]) \times \cdots \times \gamma_m([a_m, b_m])$ tales que $d((z, \omega), (z', \omega')) < \delta$ se tiene que

$$|\varphi(z, \omega) - \varphi(z', \omega')| < \frac{\varepsilon}{\prod_{i=1}^{m} long(\gamma_i) + 1}.$$

Por tanto, podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > N$ se tenga que $\|z_k - z_0\| < \delta$ y, por tanto, se tiene que $d((z_k, \omega), (z_0, \omega)) < \delta$ para todo $\omega \in \prod_{j=1}^{m} \gamma_j([a_j, b_j])$, por lo que

$$|f(z_k) - f(z_0)| < \varepsilon$$

lo que nos da la continuidad de f.

ii) Sean $z_0 \in U$ y $r > 0$ tal que $\bar{B}(z_0, r) \subset U$, sea $j \in \{1, \ldots, n\}$ y sea $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$, tal que $z_0 + he_j \in U$. Se tiene que

$$\frac{f(z_0 + he_j) - f(z_0)}{h} - \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m} \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z_0, \omega) d\omega =$$

$$\overset{(\text{def de } f)}{=} \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m} \frac{\varphi(z_0 + he_j, \omega) - \varphi(z_0, \omega)}{h} d\omega - \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m} \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z_0, \omega) d\omega \overset{(Barrow)}{=}$$

$$= \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m} \frac{1}{h} \left[\int_{[z_{0j}, z_{0j}+h]} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z_{01}, \ldots, \overset{(j)}{v}, \ldots, z_{0n}, \omega) - \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z_{01}, \ldots, z_{0j}, \ldots, z_{0n}, \omega) \right) dv \right] d\omega. \tag{1.10}$$

Vamos a utilizar la continuidad de $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z_j}$ y, por tanto, su continuidad uniforme en el compacto $\bar{B}(z_0, r) \times \gamma_1([a_1, b_1]) \times \cdots \times \gamma_m([a_m, b_m]) \subset U$ por lo que, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que para todo (z, ω),(z', ω') pertenecientes a $\bar{B}(z_0, r) \times \gamma_1([a_1, b_1]) \times \ldots \times \gamma_m([a_m, b_m])$ tales que $d((z, \omega), (z', \omega')) < \delta$ se tiene que

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z, \omega) - \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z', \omega') \right| < \frac{\varepsilon}{\prod_{i=1}^{m} long(\gamma_i) + 1}$$

por lo que, tomando $0 < |h| < \delta$ se cumple que
$d((z_{01}, \ldots, \overset{(j)}{v}, \ldots, z_{0n}, \omega)(z_{01}, \ldots, z_{0n}, \omega)) = |v - z_{0j}| \leq |h| < \delta$ para todo $v \in [z_{0j}, z_{0j} + h]$, por lo que

$$\left| \frac{f(z_0 + he_j) - f(z_0)}{h} - \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m} \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z_0, \omega) d\omega \right| \leq$$

$$\leq \sup \left\{ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z, \omega) - \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z_0, \omega) \right| : z \in B(z_0, \delta), \omega \in \prod_{i=1}^{m} \gamma_i([a_i, b_i]) \right\} \prod_{i=1}^{m} long(\gamma_i) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\prod_{i=1}^{m} long(\gamma_i) + 1} \prod_{i=1}^{m} long(\gamma_i) < \varepsilon$$

lo que nos muestra el resultado.

□

Con este último resultado estamos en condiciones de demostrar una *condición suficiente de diferenciabilidad* en el caso complejo.

Teorema 1.3. *Sean U un abierto de $\mathbb{C}^n$, $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ y supongamos que para todo $z \in U$ existen $\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)$ con $j \in \{1, \ldots, n\}$ y son continuas en U. Entonces f es diferenciable en U.*

Demostración. Sea $z_0 = (z_{01}, \ldots, z_{0n}) \in U$ y sea $\varepsilon > 0$, tenemos que encontrar un $\delta > 0$ de manera que si $0 < \|z - z_0\| < \delta$ se cumpla que

$$\left| f(z) - f(z_0) - (z_1 - z_{01}) \frac{\partial f}{\partial z_1}(z_0) - \cdots - (z_n - z_{0n}) \frac{\partial f}{\partial z_n}(z_0) \right| < \varepsilon \|z - z_0\|. \quad (1.11)$$

Tomemos $\frac{\varepsilon}{2n}$, sabemos que existe un $\delta^* > 0$ tal que si $\|v - z_0\| < \delta^*$ entonces

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z_j}(v) - \frac{\partial f}{\partial z_j}(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2n}$$

para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

Veamos que tomando $\delta = \delta^*$ funciona. Por un lado tenemos que

$$f(z) - f(z_0) = f(z) - f(z_{01}, z_2, \dots, z_n) + f(z_{01}, z_2, \dots, z_n) - f(z_{01}, z_{02}, z_3, .., z_n) +$$

$$+ f(z_{01}, z_{02}, z_3, .., z_n) - \cdots - f(z_{01}, \dots, z_{0n-1}, z_n) + f(z_{01}, \dots, z_{0n-1}, z_n) - f(z_0) =$$

$$= \int_{[z_{01}, z_1]} \frac{\partial f}{\partial z_1}(\omega_1, z_2, \dots, z_n) d\omega_1 + \int_{[z_{02}, z_2]} \frac{\partial f}{\partial z_2}(z_{01}, \omega_2, z_3, \dots, z_n) + \cdots$$

$$\cdots + \int_{[z_{0n}, z_n]} \frac{\partial f}{\partial z_n}(z_{01}, \dots, z_{0n-1}, \omega_n) d\omega_n.$$

Por otro lado, es claro que

$$(z_j - z_{0j}) \frac{\partial f}{\partial z_j}(z_0) = \int_{[z_{0j}, z_j]} \frac{\partial f}{\partial z_j}(z_0) d\omega_j$$

para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Por tanto, la izquierda de la desigualdad en (1.11) se puede escribir como

$$\left| \int_{[z_{01}, z_1]} \left[\frac{\partial f}{\partial z_1}(\omega_1, z_2, \dots, z_n) - \frac{\partial f}{\partial z_1}(z_0) \right] d\omega_1 + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \int_{[z_{0n}, z_n]} \left[\frac{\partial f}{\partial z_n}(z_{01}, \dots, z_{0n-1}, \omega_n) - \frac{\partial f}{\partial z_n}(z_0) \right] d\omega_n \right| \leq$$

$$\leq |z_1 - z_{01}| \sup \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial z_1}(\omega_1, \dots, z_n) - \frac{\partial f}{\partial z_1}(z_0) \right| : \omega_1 \in [z_{01}, z_1] \right\} + \cdots$$

$$\cdots + |z_n - z_{0n}| \sup \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial z_n}(z_{01}, \dots, \omega_n) - \frac{\partial f}{\partial z_n}(z_0) \right| : \omega_n \in [z_{0n}, z_n] \right\} \leq$$

$$\leq \|z - z_0\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2n} = \|z - z_0\| \frac{\varepsilon}{2} < \|z - z_0\| \varepsilon.$$

Lo que nos da el resultado.

□

Proposición 1.6. *Sea $\gamma = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m] \subset \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}$ el producto de m caminos de clase $\mathcal{C}^1$ con valores en $\mathbb{C}$ y sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones continuas en $\gamma_1([a_1, b_1]) \times \cdots \times \gamma_m([a_m, b_m])$ para todo $k \in \mathbb{N}$ que converge de manera uniforme a una función f continua en $\gamma_1([a_1, b_1]) \times \cdots \times \gamma_m([a_m, b_m])$. Entonces existe el límite $\lim_{k\to\infty} \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m} f_k$ y, además,*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m} f_k = \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m} f.$$

Demostración. Vamos a ver que dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ de manera que para todo $k > N$ se cumpla que

$$\left| \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m} f_k - \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m} f \right| < \varepsilon$$

lo que nos dará el resultado.

Sea $\varepsilon > 0$, como $f_k \longrightarrow f$ de manera uniforme en $\gamma_1([0, 2\pi]) \times \cdots \times \gamma_m([0, 2\pi])$, dado $\dfrac{\varepsilon}{\prod_{j=1}^{m} long(\gamma_j) + 1} > 0$, existe $\hat{N} \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $k > \hat{N}$ y $(\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \gamma_1([0, 2\pi]) \times \cdots \times \gamma_m([0, 2\pi])$ tenemos que

$$\sup\{|f_k - f|(\omega) : \omega \in \prod_{j=1}^{m} \gamma_j([a_j, b_j])\} < \frac{\varepsilon}{\prod_{j=1}^{m} long(\gamma_j) + 1}$$

y, tomando $\hat{N} = N$, por la proposición 1.5,

$$\left| \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m} (f_k - f)(\omega) d\omega \right| \leq \sup \left\{ |f_k - f|(\omega) : \omega \in \prod_{i=1}^{m} \gamma_i([a_j, b_j]) \right\} \prod_{j=1}^{m} long(\gamma_j) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\prod_{j=1}^{m} long(\gamma_j) + 1} \prod_{j=1}^{m} long(\gamma_j) < \varepsilon.$$

□

Corolario 1.1. *Sea* $\gamma = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m : [[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m] \subset \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}$ *el producto de* m *caminos de clase* $\mathcal{C}^1$ *con valores en* $\mathbb{C}$ *y sea* $\{f_k\}$ *una sucesión de funciones continuas en* $\gamma_1([a_1, b_1]) \times \cdots \times \gamma_m([a_m, b_m])$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *tal que la serie de funciones* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *converge de manera uniforme a una función* f *continua en* $\gamma_1([a_1, b_1]) \times \cdots \times \gamma_m([a_m, b_m])$*, en estas condiciones se tiene que existe* $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m} f_k$ *y, además,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m} f_k = \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m} f.$$

Demostración. Es suficiente con aplicar la proposición anterior a la sucesión de sumas parciales $\{s_n\} = f_1 + \cdots + f_n$ que converge uniformemente a f.

□

Teorema 1.4 (Fórmula integral de Cauchy para polidiscos)**.** *Sean* $U \subset \mathbb{C}^n$ *abierto,* $f \in \mathcal{H}(U)$*,* $\bar{\Delta}(z_0, r) = \bar{D}(z_{01}, r_1) \times \cdots \times \bar{D}(z_{0n}, r_n) \subset U$ *y sean* $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$ *el producto de circunferencias* $\mathcal{C}(z_{01}, r_1) \times \cdots \times \mathcal{C}(z_{0n}, r_n)$*, entonces,*

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n} \frac{f(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{(\omega_1 - z_1) \cdots (\omega_n - z_n)} d\omega_1 \cdots d\omega_n$$

para todo $z \in \Delta(z_0, r)$*.*

Demostración. Vamos a fijar un $z' = (z'_1, \ldots, z'_n) \in \Delta(z_0, r)$ y vamos a definir las siguientes funciones

$$\begin{array}{rcccl} f_j: & U_j & \longrightarrow & \mathbb{C} & \\ & \lambda & \longmapsto & f_j(\lambda) = & f(z'_1, \ldots, z'_{j-1}, \lambda, z'_{j+1} \ldots, z'_n) \end{array}$$

donde $j \in \{1, \ldots, n\}$ y $U_j = \{\lambda \in \mathbb{C} : (z'_1, \ldots, z'_{j-1}, \lambda, z'_{j+1}, \ldots, z'_n) \in U\}$

Por hipótesis tenemos que $f \in \mathcal{H}(U)$ por lo que, en virtud de la proposición 1.3, f es separadamente holomorfa en U , esto es, cada $f_j \in \mathcal{H}(U_j)$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ y, además, el disco $\bar{D}(z_{01}, r_1) \subset U_1$ por lo que estamos en las condiciones de aplicar *Fórmula integral de Cauchy para circunferencias* lo que nos da que

$$f_1(z'_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_{01}, r_1)} \frac{f_1(\omega_1)}{\omega_1 - z'_1} d\omega_1$$

para $z'_1 \in D(z_{z_{01}}, r_1)$. Usando la definición de f_1 tenemos que

$$f_1(z'_1) = f(z'_1, \ldots, z'_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_{01}, r_1)} \frac{f(w_1, z'_2, \ldots, z'_n)}{\omega_1 - z'_1} d\omega_1. \qquad (1.12)$$

Por otro lado, podemos definir para cada $\omega_1 \in \mathcal{C}(z_{01}, r_1)$

$$\begin{array}{rcll} f_{\omega_1} & : U_{\omega_1} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \lambda & \longmapsto & f_{\omega_1}(\lambda) = \; f(\omega_1, \lambda, z'_3, \ldots, z'_n) \end{array}$$

que vuelve a ser una aplicación holomorfa en el abierto $U_{\omega_1} = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\omega_1, \lambda, z'_3, \ldots, z'_n) \in U\}$. Volviendo a aplicar la *fórmula integral de Cauchy* a esta función llegamos a que

$$f_{\omega_1}(z'_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_{02}, r_2)} \frac{f_{\omega_1}(\omega_2)}{\omega_2 - z'_2} d\omega_2$$

para $z'_2 \in D(z_{02}, r_2)$, dado que $\bar{D}(z_{02}, r_2) \subset U_{\omega_1}$. Usando la definición de f_{ω_1} tenemos que la igualdad anterior es igual a

$$f(\omega_1, z'_2, \ldots, z'_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_{02}, r_2)} \frac{f(\omega_1, \omega_2, z'_3 \ldots, z'_n)}{\omega_2 - z'_2} d\omega_2.$$

Si usamos lo anterior y lo sustituimos en (1.12) obtenemos que

$$f(z'_1, \ldots, z'_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_{01}, r_1)} \frac{f(\omega_1, z'_2, \ldots, z'_n)}{\omega_1 - z'_1} d\omega_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_{01}, r_1)} \frac{f_{\omega_1}(z'_2)}{\omega_1 - z'_1} d\omega_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_{01}, r_1)} \frac{\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_{02}, r_2)} \frac{f(\omega_1, \omega_2, z'_3, \ldots, z'_n)}{\omega_2 - z'_2} d\omega_2}{\omega_1 - z'_1} d\omega_1 =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\mathcal{C}(z_{01}, r_1) \times \mathcal{C}(z_{02}, r_2)} \frac{f(\omega_1, \omega_2, z'_3, \ldots, z'_n)}{(\omega_1 - z'_1)(\omega_2 - z'_2)} d\omega_1 d\omega_2.$$

Si seguimos razonando análogamente, ahora sobre las funciones f_{ω_j} definidas por $f_{\omega_j}(\lambda) = f(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \lambda, z'_{j+1}, \ldots, z'_n)$ con $j \in \{3, \ldots, n\}$, de la misma manera que con f_{ω_2}, llegamos a que

$$f(z'_1, \ldots, z'_n) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\mathcal{C}(z_{01}, r_1) \times \cdots \times \mathcal{C}(z_{0n}, r_n)} \frac{f(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{(\omega_1 - z'_1) \cdots (\omega_n - z'_n)} d\omega_1 \cdots d\omega_n =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n} \frac{f(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{(\omega_1 - z'_1) \cdots (\omega_n - z'_n)} d\omega_1 \cdots d\omega_n$$

lo que nos da el resultado.

$\square$

Una consecuencia muy útil de este último teorema y de la *regla de Leibniz* es la *fórmula integral de Cauchy para las parciales*, que afirma lo siguiente

Teorema 1.5 (Fórmula integral de Cauchy para las parciales)**.** *Sean $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto, $f \in \mathcal{H}(U)$ y sea $\bar{\Delta}(z_0, r) = \bar{D}(z_{01}, r_1) \times \cdots \times \bar{D}(z_{0n} r_n) \subset U$. Entonces, para cada $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Delta(z_0, r)$, se satisface que existen $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}(z)$ para todo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y, además,*

$$\frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n} \frac{f(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{(\omega_1 - z_1)^{\alpha_1+1} \cdots (\omega_n - z_n)^{\alpha_{n+1}}} d\omega.$$

Donde $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ representan las circunferencias $\mathcal{C}(z_{01}, r_1), \ldots, \mathcal{C}(z_{0n}, r_n)$.

Demostración. Vamos a comenzar definiendo la siguiente función

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \Delta(z_0, r) \times \gamma_1([a_1, b_1]) \times \cdots \times \gamma_n([a_n, b_n]) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (z_1, \ldots, z_n, \omega_1, \ldots \omega_n) & \longmapsto & \dfrac{f(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{(\omega_1 - z_1) \cdots (\omega_n - z_n)}. \end{array}$$

Dado que el denominador nunca se anula en los puntos del dominio de φ y por ser f una función continua es claro que φ es continua en todo su dominio. Además, por el mismo razonamiento se tiene que existe cada $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z_j}$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, son continuas y vienen dadas por la expresión

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z_1, \ldots, z_n, \omega_1, \ldots, \omega_n) = \frac{f(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{(\omega_1 - z_1) \cdots (\omega_j - z_j)^2 \cdots (\omega_n - z_n)}$$

para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Usando el teorema 2.2 tenemos la igualdad siguiente

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n} \frac{f(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{(\omega_1 - z_1) \cdots (\omega_n - z_n)} d\omega_1 \cdots d\omega_n$$

y aplicando a esta última igualdad el teorema 1.2 tenemos que, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n} \frac{f(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{(\omega_1 - z_1) \cdots (\omega_j - z_j)^2 \cdots (\omega_n - z_n)} d\omega_1 \cdots d\omega_n.$$

Si volvemos a derivar respecto de z_j tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)(z)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{\gamma_1\times\cdots\times\gamma_n}\frac{f(\omega_1,\ldots,\omega_n)}{(\omega_1-z_1)\cdots(\omega_j-z_j)^3\cdots(\omega_n-z_n)}d\omega_1\cdots d\omega_n.$$

Si repetimos este proceso α_j veces obtenemos que

$$\frac{1}{\alpha_j!}\frac{\partial^{\alpha_j}f}{\partial z_j^{\alpha_j}}(z)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{\gamma_1\times\cdots\times\gamma_n}\frac{f(\omega_1,\ldots,\omega_n)}{(\omega_1-z_1)\cdots(\omega_j-z_j)^{\alpha_j+1}\cdots(\omega_n-z_n)}d\omega_1\cdots d\omega_n.$$

Si aplicamos todo lo anterior y derivamos respecto al resto de variables z_l con $l\in\{1,\ldots,n\}$, $l\neq j$, una cantidad α_k, $k\neq j$ de veces, respectivamente, obtenemos el resultado del enunciado del teorema, es decir,

$$\frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}f}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{\gamma_1\times\cdots\times\gamma_n}\frac{f(\omega_1,\ldots,\omega_n)}{(\omega_1-z_1)^{\alpha_1+1}\cdots(\omega_n-z_n)^{\alpha_{n+1}}}d\omega.$$

□

Teorema 1.6 (Analiticidad de las funciones holomorfas). *Sea $f:U\subset\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}$ holomorfa en un abierto U,entonces, f es analítica en él, es decir, para todo punto $z_0\in U$, existe un radio $r=(r_1,\ldots,r_n)$ y una serie de funciones de potencias $\sum_{\alpha=0}^{\infty}c_\alpha(z-z_0)^\alpha$ centrada en z_0 de manera que, para todo $z\in\Delta(z_0,r)$ se tiene que*

$$f(z)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}c_\alpha(z-z_0)^\alpha.$$

Demostración. Sea $z_0=(z_{01},\ldots,z_{0n})\in U$ y sea $r=(r_1,\ldots,r_n)$ satisfaciendo que $\bar\Delta(z_0,r)\subset U$, estamos en condiciones de aplicar el teorema 2.2 a la función f en el abierto U por lo que

$$f(z_1,\ldots,z_n)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{\mathcal{C}(z_{01},r_1)\times\cdots\times\mathcal{C}(z_{0n},r_n)}\frac{f(\omega_1,\ldots,\omega_n)}{(\omega_1-z_1)\cdots(\omega_n-z_n)}d\omega_1\cdots d\omega_n \tag{1.13}$$

para todo $(z_1,\ldots,z_n)\in D(z_{01},r_1)\times\cdots\times D(z_{0n},r_n)$ y $w=(\omega_1,\ldots,\omega_n)$.

Por otro lado se tiene que dado un punto $z=(z_1,\ldots,z_n)\in D(z_{01},r_1)\times\cdots\times D(z_{0n},r_n)$ y si $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\mathcal{C}(z_{01},r_1)\times\cdots\times\mathcal{C}(z_{0n},r_n)$ se cumple que

$$\frac{f(\omega)}{(\omega_1-z_1)\cdots(\omega_n-z_n)}=\frac{f(\omega)}{(\omega_1-z_{01})\cdots(\omega_n-z_{0n})}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=0}^{\infty}\left(\frac{z_1-z_{01}}{\omega_1-z_{01}}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{z_n-z_{0n}}{\omega_n-z_{0n}}\right)^{\alpha_n} \tag{1.14}$$

ya que

$$\frac{1}{\omega_j - z_j} = \frac{1}{\omega_j + z_{0j} - (z_{0j} + z_j)} = \frac{\dfrac{1}{\omega_j - z_{0j}}}{1 + \dfrac{z_{0j} - z_j}{\omega_j - z_{0j}}} =$$

$$= \frac{1}{\omega_j - z_{0j}} \left(\frac{1}{1 - \dfrac{z_j - z_{0j}}{\omega_j - z_{0j}}} \right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{\omega_j - z_{0j}} \sum_{\alpha_j=0}^{\infty} \left(\frac{z_j - z_{0j}}{\omega_j - z_{0j}} \right)^{\alpha_j}$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

$(*)$: Podemos escribir esta igualdad ya que $0 < \left| \dfrac{z_j - z_{0j}}{\omega_j - z_{0j}} \right| = \dfrac{|z_j - z_{0j}|}{r_j} < 1$

Si sustituimos la igualdad (1.14) en la igualdad (1.13) obtenemos que

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n} \frac{f(\omega)}{\prod_{j=1}^n (\omega_j - z_{0j})} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0}^{\infty} \left(\frac{z_1 - z_{01}}{\omega_1 - z_{01}} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{z_n - z_{0n}}{\omega_n - z_{0n}} \right)^{\alpha_n} d\omega$$

donde $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$ representa el producto de circunferencias $\mathcal{C}(z_{01}, r_1) \times \cdots \times \mathcal{C}(z_{0n}, r_n)$.

Dado que la función f está acotada en el compacto $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$ podemos encontrar un $M > 0$ de manera que, dado cualquier ω del compacto, se tiene que

$$\left| \frac{f(\omega)}{\prod_{i=1}^n (\omega_i - z_{0i})} \left(\frac{z_1 - z_{01}}{\omega_1 - z_{01}} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{z_n - z_{0n}}{\omega_n - z_{0n}} \right)^{\alpha_n} \right| \leq$$

$$\leq \frac{M}{r_1 \cdots r_n} \left(\frac{|z_1 - z_{01}|}{r_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{|z_n - z_{0n}|}{r_n} \right)^{\alpha_n}$$

para todo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Por tanto, aplicando el criterio M de Weierstrass se tiene que la serie

$$\frac{f(\omega)}{\prod_{i=1}^n (\omega_i - z_{0i})} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0}^{\infty} \left(\frac{z_1 - z_{01}}{\omega_1 - z_{01}} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{z_n - z_{0n}}{\omega_n - z_{0n}} \right)^{\alpha_n}$$

converge de manera uniforme en $\gamma_1([a_1, b_1]) \times \cdots \times \gamma_n([a_n, b_n])$ por lo que podemos aplicar el corolario 1.1 para permutar la integral y la suma y obtener el resultado, es decir, obtenemos la expresión

$$f(z) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n} \frac{f(\omega)}{(\omega_1 - z_{01})^{\alpha_1 + 1} \cdots (\omega_n - z_{0n})^{\alpha_n + 1}} d\omega \right) (z_1 - z_{01})^{\alpha_1} \cdots (z_n - z_{0n})^{\alpha_n}$$

o lo que es lo mismo, simplificando la notación,

$$f(z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{\alpha+1}} d\omega \right) (z - z_0)^\alpha =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha (z - z_0)^\alpha$$

que es una serie de potencias centrada en z_0. Además, usando el teorema 1.5 tenemos que los valores c_α de dicha serie coinciden con

$$\frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}} (z_0)$$

para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

□

El análogo al *primer teorema de identidad* en el caso de varias variables complejas se enuncia a continuación.

Teorema 1.7 (teorema de identidad). *Sea $f \in \mathcal{H}(U)$, $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto y conexo, entonces equivalen:*

i) $f \equiv 0$ *en* U.

ii) *Existe* $V \subset U$ *abierto,* $V \neq \emptyset$ *tal que* $f|_V \equiv 0$.

iii) *Existe* $z_0 \in U$ *de manera que* $\frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}} (z_0) = 0$ *para cada* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

Demostración.

i) $\Longrightarrow$ *ii)* Es evidente dado que $V \subset U$.

ii) $\Longrightarrow$ *iii)* Consideremos un $z_0 \in V$, por ser f holomorfa en V, f es analítica en V, por tanto, podemos encontrar un polidisco $\bar{\Delta}(z_0, r) \subset V$ de manera que

$$f(z) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}} (z_0)(z_1 - z_{01})^{\alpha_1} \cdots (z_n - z_{0n})^{\alpha_n}$$

para cada $z \in \Delta(z_0, r)$. Además se tiene que

$$\frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}(z_0) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n} \frac{f(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{(\omega_1 - z_{01})^{\alpha_1 + 1} \cdots (\omega_n - z_{0n})^{\alpha_{n+1}}} d\omega.$$

Dado que f es nula en V se tiene que $\frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}(z_0) = 0$ para todo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

$iii) \Longrightarrow i)$ Consideremos el siguiente conjunto

$$S = \left\{ z \in U : \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}(z) = 0 \text{ para cada } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

Es claro que este conjunto es no vacío, digamos que $z_0 \in S$, por hipótesis, además, es fácil ver que es abierto, en efecto, sea $z_0^* \in S$, dado que f es analítica en U podemos encontrar un polidisco $\Delta(z_0^*, r^*) \subset U$ de manera que se tenga la igualdad

$$f(z) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}(z_0^*)(z_1 - z_{01}^*)^{\alpha_1} \cdots (z_n - z_{0n}^*)^{\alpha_n}$$

para cada $z \in \Delta(z_0^*, r^*)$, por tanto, $f(z) = 0$ para todo $z \in \Delta(z_0^*, r^*)$, es decir, cada uno de estos z del polidisco pertenecen a S, por tanto, S es abierto.

Por otro lado podemos tomar, para cada elemento $z' \in \bar{S} \cap U$, una sucesión de elementos de S que converja a z', es decir, una sucesión $S \cap U \supset \{z_k\} \longrightarrow z' \in \bar{S} \cap U$ para cada $z' \in \bar{S} \cap U$, usando la continuidad de cada una de las aplicaciones $\frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}$, es claro que $z' \in S$ lo que nos da que el conjunto S es cerrado en U. Por ser S abierto y cerrado en U y ser no vacío concluimos que $U = S$.

$\square$

Vamos a continuar ahora con un análogo al teorema de Green en $\mathbb{C}$.

Teorema 1.8 (Fórmula de Green para funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$)**.** *Sean U abierto de $\mathbb{C}$, $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$ donde $u, v : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables y $\Omega = \bar{D}(z_0, r) \setminus D(z_0^*, \rho) \subset U$. Entonces*

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 2i \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)dxdy$$

donde $\partial\Omega = \mathcal{C}^+(z_0, r) \cup \mathcal{C}^-(z_0^*, \rho)$. $\mathcal{C}^+(z_0, r)$ denota la circunferencia orientada en sentido inverso a las agujas del reloj, centrada en z_0 y de radio r , por el contrario, $\mathcal{C}^-(z_0^*, \rho)$ denota la circunferencia orientada en sentido horario, centrada en z_0^* y de radio ρ.

Demostración. Recordamos que, por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x + iy) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) - \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x, y)\right)\right]$$

Donde $u(x, y) = Re(f)(x + iy)$ y $v(x, y) = Im(f)(x + iy)$. Por hipótesis se tiene que $u, v \in \mathcal{C}^1(U)$ por lo que podemos aplicar el teorema de *Green* para los pares de funciones $(P, Q) = (u, -v)$ y $(P^*, Q^*) = (v, u)$, lo que nos da que

$$\int_{\partial\Omega} udx - vdy = -\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy \tag{1.15}$$

$$\int_{\partial\Omega} vdx + udy = -\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy \tag{1.16}$$

y si hacemos (1.15)+i(1.16) y miramos a la izquierda de la igualdad obtenemos que

$$\int_{\partial\Omega} udx - vdy + i\left(\int_{\partial\Omega} vdx + udy\right) = \int_{\partial\Omega} (u + iv)dx + i\int_{\partial\Omega} (u + iv)dy =$$

$$= \int_{\partial\Omega} fdx + i\int_{\partial\Omega} fdy = \int_{\partial\Omega} fd(x + iy) = \int_{\partial\Omega} fdz$$

Y mirando ahora a la derecha de la igualdad tenemos que

$$-\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= \int_{\Omega} -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y}dxdy$$

y multiplicando y dividiendo esta última igualdad por $2i$ obtenemos que

$$2i\int_{\Omega}\frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}}_{\frac{\partial f}{\partial x}}+i\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial y}}\right]dxdy=$$

$$=2i\int_{\Omega}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right]dxdy=2i\int_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}dxdy$$

Por lo que, uniendo ambas igualdades, se obtiene la igualdad del enunciado, es decir,

$$\int_{\partial\Omega}fdz=2i\int_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}dxdy.$$

□

Teorema 1.9 (Forma general de la integral de Cauchy)**.** *Sean* $\Omega_1\subset\mathbb{C}$ *abierto,* $f:\Omega_1\longrightarrow\mathbb{C}$, $f\in\mathcal{C}^1(\Omega_1)$ *y* $\bar{D}(z_0,r)\subset\Omega_1$. *En estas condiciones se tiene que*

$$f(z_0^*)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}(z_0,r)}\frac{f(\lambda)}{\lambda-z_0^*}d\lambda-\frac{1}{\pi}\int_{D(z_0,r)\setminus\{z_0^*\}}\frac{\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z)}{z-z_0^*}dxdy$$

para cualquier $z_0^*\in D(z_0,r)$.

Demostración. Primero vamos a ver que la integral

$$\frac{1}{\pi}\int_{D(z_0,r)\setminus\{z_0^*\}}\frac{\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z)}{z-z_0^*}dxdy$$

está bien definida en sentido impropio. En efecto, vamos a fijar un $z_0^*\in D(z_0,r)$ y un $\rho>0$ de manera que $\bar{D}(z_0^*,\rho)\subset D(z_0,r)$. De esta manera, podemos dividir el conjunto $\bar{D}(z_0,r)\setminus\{z_0^*\}$ como la unión $(\bar{D}(z_0,r)\setminus\bar{D}(z_0^*,\rho))\cup(\bar{D}(z_0^*,\rho)\setminus\{z_0^*\})$ y definir la integral anterior como la suma de las integrales

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{D(z_0,r)\setminus\bar{D}(z_0^*,\rho)}\frac{\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z)}{z-z_0^*}dxdy+\underbrace{\int_{\bar{D}(z_0^*,\rho)\setminus\{z_0^*\}}\frac{\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z)}{z-z_0^*}dxdy}_{(A)}\right)$$

por tanto, todo se reduce a ver la integrabilidad del segundo sumando (A) sobre el disco $\bar{D}(z_0^*,\rho)\setminus\{z_0^*\}$ ya que el primer sumando es claramente integrable. Para ver esto vamos a tomar la sucesión de compactos con volumen $K_m=\bar{D}(z_0^*,\rho)\setminus D\left(z_0^*,\dfrac{\rho}{m+1}\right)$ que satisfacen que $K_m\subset K_{m+1}$ y $\cup_{m=0}^{\infty}K_m=$

$\bar{D}(z_0^*,\rho)\setminus\{z_0^*\}$. Por tanto, (A) existirá en sentido impropio si existe el límite

$$\lim_{m\to\infty}\int_{K_m}\left|\frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)}{z-z_0^*}\right|dxdy$$

y es un número finito. Haciendo el cambio $z=z_0^*+re^{i\theta}$ con $\theta\in[0,2\pi]$ y $r\in\left[\frac{\rho}{m+1},\rho\right]$, este último límite se escribe como

$$\lim_{m\to\infty}\int_{[0,2\pi]\times\left[\frac{\rho}{m+1},\rho\right]}\left|e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0^*+re^{i\theta})\right|d\theta dr$$

y además, se tiene que

$$\int_{[0,2\pi]\times\left[\frac{\rho}{m+1},\rho\right]}\left|e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0^*+re^{i\theta})\right|d\theta dr\leq$$

$$\sup\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0^*+re^{i\theta})\right|:r\in\left[\frac{\rho}{m+1},\rho\right],\theta\in[0,2\pi]\right\}2\pi\rho<\infty$$

para todo $m\in\mathbb{N}$. Por tanto, la integral

$$\frac{1}{\pi}\int_{D(z_0,r)\setminus\{z_0^*\}}\frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)}{z-z_0^*}dxdy$$

está bien definida y es integrable en sentido impropio.

Aplicando ahora el teorema 1.8 a la función $\dfrac{f(z)}{z-z_0^*}$, dado que $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\dfrac{f(z)}{z-z_0^*}\right)=\dfrac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)}{z-z_0^*}$, se obtiene que

$$\int_{\mathcal{C}(z_0,r)}\frac{f(z)}{z-z_0^*}dz-\int_{\mathcal{C}(z_0^*,\rho)}\frac{f(z)}{z-z_0^*}dz=2i\int_{D(z_0,r)\setminus\bar{D}(z_0^*,\rho)}\frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)}{z-z_0^*}dxdy$$

Para concluir el resultado tenemos que ver que

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\mathcal{C}(z_0^*,\rho)}\frac{f(z)}{z-z_0^*}dz=2\pi i f(z_0^*).$$

Lo que debemos encontrar es, dado un $\varepsilon>0$, un $\delta>0$ que satisfaga que si $\rho\in(0,\delta)$ entonces

$$\left|\int_{\mathcal{C}(z_0^*,\rho)}\frac{f(z)}{z-z_0^*}dz-2\pi i f(z_0^*)\right|\leq\varepsilon.$$

Dado un $\varepsilon > 0$, usando la continuidad de la f en z_0^*, podemos encontrar un $\delta > 0$, de manera que para todo z, $|z - z_0^*| < \delta$ se tenga que

$$|f(z) - f(z_0^*)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Tomando ese mismo δ encontramos que, para todo $\rho \in (0, \delta)$, dado que

$$\int_{\mathcal{C}(z_0^*,\rho)} \frac{f(z_0^*)}{z - z_0^*} dz = 2\pi i f(z_0^*),$$

se cumple que

$$\left| \int_{\mathcal{C}(z_0^*,\rho)} \frac{f(z)}{z - z_0^*} dz - 2\pi i f(z_0^*) \right| = \left| \int_{\mathcal{C}(z_0^*,\rho)} \frac{f(z) - f(z_0^*)}{z - z_0^*} dz \right| \leq$$

$$\leq 2\pi\rho \frac{\sup\{|f(z) - f(z_0^*) : |z - z_0^*| = \rho < \delta\}}{\rho} < \varepsilon$$

lo que nos permite concluir el resultado.

□

Teorema 1.10. *Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{C}^1$ como función de $\mathbb{R}^2$ y supongamos que el soporte de f es compacto. Entonces, la función definida por*

$$\begin{array}{rrcll} F: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \\ & z' & \longmapsto & F(z') & = -\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{C}\setminus\{z'\}} \frac{f(z)}{z - z'} dxdy \end{array}$$

está bien definida y cumple que $\dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}'} \equiv f$ *en* $\mathbb{C}$.

Demostración. Vamos a ver en primer lugar que la función F está bien definida. Por tener f soporte compacto sabemos que existe un R cumpliendo que $Sop(f) = \overline{\{z \in \mathbb{C} : f(z) \neq 0\}} \subset D(0, R)$. Fijamos un $z_0^* \in \mathbb{C}$ y vamos a tomar $R' = |z_0^*| + R$. Lo primero que vamos a ver es que

$$\int_{\bar{D}(z_0^*,R')\setminus\{z_0^*\}} \frac{f(z)}{z - z_0^*} dxdy \tag{1.17}$$

es integrable en sentido impropio. Para ello, usamos un argumento análogo al utilizado en la demostración anterior nos permite concluir que (1.17) es integrable en sentido impropio. Para concluir que la F del enunciado está bien definida nos será suficiente con probar que

$$\frac{-1}{\pi}\int_{\mathbb{C}\setminus\{z_0^*\}}\frac{f(z)}{z-z_0^*}dxdy=\frac{-1}{\pi}\int_{\bar{D}(z_0^*,R')\setminus\{z_0^*\}}\frac{f(z)}{z-z_0^*}dxdy.$$

Sea $z\in\mathbb{C}\setminus\bar{D}(z_0^*,R')$, entonces $|z-z_0^*|>R'$, es decir, $|z'|+|z_0^*|\geq|z'-z_0^*|>R'$, por lo que, $|z'|>R$, es decir, $z'\notin D(0,R)$ y por como hemos definido R se tiene que $f(z)=0$. Esto nos da que la igualdad anterior es cierta y nos permite concluir que la función F del enunciado está bien definida.

Nos falta ver que $\dfrac{\partial F}{\partial\bar{z}'}(z')=f(z')$ para todo $z'\in\mathbb{C}$. Para ver esto vamos a aplicar el teorema 1.9 sobre el disco $\bar{D}(z_0^*,\underbrace{|z_0^*|+2R}_{R''})\subset\mathbb{C}$ lo que nos da que

$$f(z')=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}(z_0^*,R'')}\frac{f(\lambda)}{\lambda-z'}d\lambda-\frac{1}{\pi}\int_{D(z_0^*,R'')\setminus\{z'\}}\frac{\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z)}{z-z'}dxdy \tag{1.18}$$

para todo $z'\in D(z_0^*,R'')$. Veremos que el primer sumando de esta última igualdad es nulo y que $\dfrac{\partial F}{\partial\bar{z}'}$ coincide con el segundo sumando. Para ver que el primer sumando es nulo en (1.18) es suficiente con ver que si $\lambda\in\mathcal{C}(z_0^*,R'')$ se cumple que $|\lambda|+|z_0^*|\geq|\lambda-z_0^*|=R''=|z_0^*|+2R$ por lo que $|\lambda|>R$, por tanto, usando el soporte de la f obtenemos que este sumando es nulo.

Para ver que el segundo sumando en (1.18) coincide con la parcial conjugada de la F vamos a derivar bajo el signo integral

$$F(z')=-\frac{1}{\pi}\int_{D(z_0^*,R'')\setminus\{z_0^*\}}\frac{f(z)}{z-z'}dxdy=-\frac{1}{\pi}\int_{D(0,2R)\setminus\{0\}}\frac{f(z+z')}{z}dxdy.$$

Por tanto, tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial\bar{z}'}(z')=-\frac{1}{\pi}\int_{D(0,2R)\setminus\{0\}}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}'}(z+z')}{z}dxdy$$

y, deshaciendo el cambio, esto último es igual a

$$-\frac{1}{\pi}\int_{D(z_0^*,R'')\setminus\{z'\}}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z)}{z-z'}dxdy=f(z')$$

lo que nos permite concluir el resultado.

□

Capítulo 2

El teorema de Hartogs de prolongación holomorfa

El *teorema de Hartogs de prolongación holomorfa* es uno de los teoremas que más marca la diferencia entre el desarrollo de la teoría de la variable compleja en una variable o en varias.

Vamos a empezar dando algunas definiciones y resultados más básicos antes de pasar al resultado general.

2.1. Algunos resutados de extensión holomorfa

Proposición 2.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto, $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$. Si $n \geq 2$, entonces, para cualquier $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$, existe una única función $F \in \mathcal{H}(U)$ cumpliendo que $F|_{U\setminus\{a\}} \equiv f$.*

Demostración. Consideremos un $\rho > 0$ de manera que $\bar{\Delta}(a, \rho) = \bar{D}(a_1, \rho) \times \cdots \times \bar{D}(a_n, \rho) \subset U$. Definimos la función

$$g(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(a_1,\rho)} \frac{f(\lambda, z_2, \dots, z_n)}{\lambda - z_1} d\lambda \tag{2.1}$$

con $z = (z_1, \dots, z_n) \in \Delta(a, \rho)$. Lo que vamos a ver es que esta función es holomorfa en el polidisco $\Delta(a, \rho)$ y que coincide con f en el abierto $\Delta(a, \rho) \setminus \{a\}$.

Para ver que la función definida en (2.1) es holomorfa, nos es suficiente con ver que posee todas sus derivadas parciales y que estas son continuas. Es claro que la función

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \Delta(a,\rho) \times \mathcal{C}(a_1,\rho) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (z,\lambda) & \longmapsto & \varphi(z,\lambda) = \dfrac{f(\lambda, z_2, \dots, z_n)}{\lambda - z_1} \end{array}$$

es una función continua en todo su dominio . Además, las parciales

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z_1, \dots, z_n, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{f(\lambda, z_2, \dots, z_n)}{(\lambda - z_1)^2} & \text{si } j = 1 \\ \\ \dfrac{\frac{\partial f}{\partial z_j}(\lambda, \dots, z_n)}{\lambda - z_1} & \text{si } j > 1 \end{cases}$$

existen y son continuas para cada $j \in \{1, \dots, n\}$. Por tanto, usando el teorema 1.2 tenemos que

$$\frac{\partial g}{\partial z_j}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(a_1,\rho)} \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(\lambda, z_1, \dots, z_n) d\lambda$$

y son continuas para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Aplicando el teorema 1.3 se obtiene que la función g es holomorfa en el polidisco $\Delta(a, \rho)$.

Para terminar tenemos que ver que f y g coinciden en $\Delta(a, \rho) \setminus \{a\}$. Sea $z_0 = (z_{01}, \dots, z_{0n}) \in \Delta(a, \rho)$, $(z_{02}, \dots, z_{0n}) \neq (a_2, \dots, a_n)$ y vamos a tomar un $\varepsilon > 0$ de manera que $\bar{D}(a_1, \rho+\varepsilon) \times \bar{D}(a_2, \rho+\varepsilon) \times \cdots \times \bar{D}(a_n, \rho+\varepsilon) \subset U$. Definimos la función

$$\begin{array}{rccl} f^* & : D(a_1, \rho + \varepsilon) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z_1 & \longmapsto & f^*(z_1) = \ f(z_1, z_{02}, \dots, z_{0n}), \end{array}$$

que es holomorfa en $D(a_1, \rho + \varepsilon)$. Dado que $\bar{D}(a_1, \rho) \subset D(a_1, \rho + \varepsilon)$, aplicamos el teorema integral de Cauchy para la circunferencia a $z_{01} \in D(a_1, \rho)$,

$$f^*(z_{01}) = f(z_{01}, \dots, z_{0n}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(a_1,\rho)} \frac{f^*(\lambda)}{\lambda - z_{01}} d\lambda = g(z_0).$$

Por tanto, ambas funciones coinciden en $D(a_1, \rho) \times D(a_2, \rho) \setminus \{a_2\} \times \cdots \times D(a_n, \rho) \setminus \{a_n\} \subset \Delta(a, \rho) \setminus \{a\}$. Dado que el conjunto $D(a_1, \rho) \times D(a_2, \rho) \setminus \{a_2\} \times \cdots \times D(a_n, \rho) \setminus \{a_n\}$ es denso en $\Delta(a, \rho) \setminus \{a\}$ se tiene que ambas funciones deben coincidir en $\Delta(a, \rho) \setminus \{a\}$.

Definiendo $F = g$ en $D(a, \rho)$ y $F = f$ en $U \setminus \{a\}$ obtenemos la extensión que buscamos. Además, esta extensión es única.

□

Observación 2.1. Este resultado es evidentemente falso en el caso $n = 1$. Dado cualquier abierto U de $\mathbb{C}$ y cualquier punto $a \in U$, se puede encontrar una función holomorfa en $U \setminus \{a\}$ que no se pueda extender a todo U de manera holomorfa, en efecto, es suficiente con considerar la función $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ que tiene un polo de orden 1 en a.

Esta última proposición, junto con la observación anterior, pone de manifiesto una de las diferencias más notables entre el análisis complejo en una y varias variables.

Podemos destacar otro resultado del mismo tipo sobre conjuntos más generales antes de pasar a dar el teorema de extensión en el caso general, conocido como *teorema de Hartogs*.

Definición 2.1. Consideremos $R = (R_1, R_2) \in \mathbb{R}^2$ y tomemos $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$, con $0 < r_j < R_j < \infty$ para todo $j \in \{1, 2\}$, $D = \Delta(0, R)$ y el conjunto

$$H = \{z \in D : |z_1| > r_1 \text{ ó } |z_2| < r_2\}$$

Al par (H, D) se le conoce como figura de Hartogs en $\mathbb{C}^2$.

Proposición 2.2. *Sea (H, D) una figura de Hartogs en $\mathbb{C}^2$, entonces cualquier función $f \in \mathcal{H}(H)$ tiene una única extensión holomorfa $F \in \mathcal{H}(D)$.*

Demostración. Vamos a considerar un $\rho_1 > 0$ de manera que $r_1 < \rho_1 < R_1$. Dada $f \in \mathcal{H}(H)$ consideramos, de manera análoga a la proposición anterior, la función

$$g(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(0,\rho_1)} \frac{f(\lambda, z_2)}{\lambda - z_1} d\lambda$$

para cada $z \in \Delta(0, R')$ con $R' = (\rho_1, R_2)$. Para cada $z_2 \in D(0, r_2)$ definimos

$$\begin{array}{rccl} f_{z_2}: & D(0,\rho_1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \lambda & \longmapsto & f_{z_2}(\lambda) = \quad f(\lambda, z_2) \end{array}$$

Dado que $\bar{D}(0, \rho_1) \subset D(0, R_1)$ podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy y, razonando de manera exactamente análoga a la proposición 2.1, llegamos a que $g \in \mathcal{H}(\Delta(0, R'))$ y, además, g y f coinciden para todo $z \in \mathbb{C}^2$ tal que $|z_1| < \rho_1$ y $|z_2| < r_2$ por lo que coinciden para cualquier $z \in \Delta(0, R') \cap H$, que es abierto, definiendo $F = f$ en H y $F = g$ en $\Delta(0, R')$ tenemos la extensión holomorfa a $\Delta(0, R)$ que buscábamos.

□

Observación 2.2. La proposición anterior se generaliza sin dificultad a figuras de Hartogs de dimensión arbitraria, es decir, a conjuntos definidos por (D, H) donde $D = \Delta^n(0, R)$ y

$$H = \{z \in D : |z_1| > r_1 \text{ ó } |z_j| < r_j \text{ para cada } j \in \{2, \ldots, n\}\}$$

donde $n \geq 2$ y $0 < r_j < R_j < \infty$.

2.2. Teoremas previos

Para poder demostrar el caso general de las dos proposiciones anteriores necesitamos herramientas mucho más sofisticadas. Una de estas herramientas es el uso de funciones separantes, es decir, una función que valga constantemente 1 en un compacto y que sea nula fuera de un abierto que contiene al compacto y, además, siendo de clase $\mathcal{C}^\infty$. EL caso general de existencia de estas funciones no es trivial y hacen un gran uso de *particiones diferenciables de la unidad*, sin embargo, dado que estamos trabajando en $\mathbb{C}^n$, podemos demostrarlo directamente.

Teorema 2.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$, U abierto y $K \subset U$ compacto, identificando $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ se tiene que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ cumpliendo que $Sop(\varphi)$ es compacto contenido en U y, además, $\varphi \equiv 1$ en K.*

Demostración. Consideremos la función $\varphi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ definida por

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La gráfica de la función anterior se muestra en la figura 2.1.

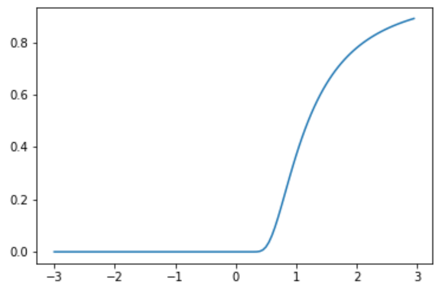

Figura 2.1

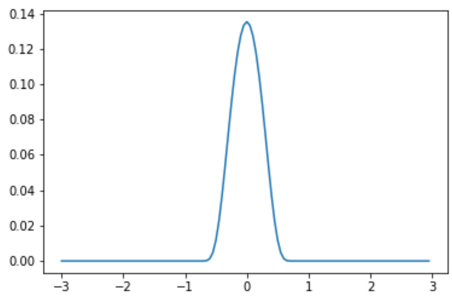

Figura 2.2

Definiendo ahora la función, también de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin (-1,1) \\ \varphi_1(1-x)\varphi_1(1+x) & \text{si } x \in (-1,1) \end{cases}$$

cuya gráfica se presenta en la figura 2.2.

Partiendo de aquí, vamos a ir construyendo la función que nos interesa:

1) Dado $\varepsilon > 0$, veamos que existe una función $f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, positiva en $(0, \varepsilon)$ y nula en el resto. En efecto, consideremos $f_1(x) := f(-1+x)$, esta función es nula en $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$, por tanto, es suficiente con tomar $f_2(x) := f_1\left(\dfrac{2x}{\varepsilon}\right)$ para tener la función con las condiciones deseadas.

2) Dado $\varepsilon > 0$, la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ definida por $g_\varepsilon(x) = \dfrac{\int_0^x f_2}{\int_0^\varepsilon f_2}$ cumple que es de clase $\mathcal{C}^\infty$, es nula en $(-\infty, 0]$ y vale constantemente 1 en $[\varepsilon, \infty)$.

3) Consideremos ahora $a \in \mathbb{R}^{2n}$, $a = (a_1, \dots, a_{2n})$, $\varepsilon > 0$ y definamos la función

$$\begin{array}{rccl} g^* : & \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g^*(x) = f\left(\dfrac{x_1 - a_1}{\varepsilon}\right) \cdots f\left(\dfrac{x_{2n} - a_{2n}}{\varepsilon}\right) \end{array}$$

Esta función g^* es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ y, además, considerando $I(a, \varepsilon) = (a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) \times \cdots \times (a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon)$, es positiva en $I(a, \varepsilon)$ y es nula en su complementario. Esta función g^* depende del punto a y de ε, para resaltar la dependencia del punto la denotaremos por $g^*_{a,\varepsilon}$.

4) Si U es un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$ y $K \subset U$ es un compacto, veamos que existe una función $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, no negativa y que es $F > 0$ en K y nula en el exterior de un conjunto cerrado contenido en U. En efecto, dado que K es compacto, existe $\alpha > 0$ de manera que podemos recubrirlo por una cantidad finita de conjuntos $I(a^1, \alpha), \dots, I(a^{n_0}, \alpha)$, con α tal que $K \subset \bigcup_{j=1}^{n_0} I(a^j, \alpha) \subset \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{I}(a^j, \alpha) \subset U$ y, definiendo
$F(x) := g^*_{a^1,\alpha}(x) + \cdots + g^*_{a^{n_0},\alpha}(x)$. Tal y como hemos construido la función F es claro que cumple lo deseado.

5) Para terminar, debemos encontrar una función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $\varphi : U \longrightarrow [0,1]$ que cumpla que $\varphi(x) = 1$, $\forall x \in K$. Por estar definida en un compacto, la función F del apartado anterior alcanzará un mínimo, digamos, por ejemplo, en $x_0 \in K$ y supongamos que $F(x_0) = \varepsilon$. Tomando la composición $\varphi := F \circ g_\varepsilon$, donde g_ε es la función definida en el apartado 2) se tiene que

$$\begin{array}{lcccccc} \varphi : & U \subset \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g_\varepsilon} & [0,1] \\ & x \in K & \longmapsto & F(x) \in [\varepsilon, \infty) & \longmapsto & 1 \\ & x \in U \setminus \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{A}(a^j, \varepsilon) & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Por lo que cumple todas las condiciones del enunciado.

$\square$

Pasemos a ver otro resultado que nos será de vital utilidad a la hora de demostrar el teorema de prolongación de Hartogs.

Teorema 2.2. *Sean $g_1 \dots, g_n : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$ tales que g_j tiene soporte compacto $\forall j \in \{1, \dots, n\}$. Supongamos que*

$$\frac{\partial g_j}{\partial \bar{z}_l} = \frac{\partial g_l}{\partial \bar{z}_j}$$

para todo $l, j \in \{1, \dots, n\}$. Entonces existe un única función $g : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$, con soporte compacto y satisfaciendo que $\dfrac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} = g_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración.
Sea $z' = (z'_1, \dots, z'_n) \in \mathbb{C}^n$. Vamos a comenzar definiendo la función

$$\begin{array}{cccl} g: & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z' & \longmapsto & g(z') = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{C}\setminus\{z'_1\}} \frac{g_1(\lambda_1, z'_2, \dots, z'_n)}{\lambda_1 - z'_1} dx_1 dy_1. \end{array}$$

Razonando como en teoremas anteriores, concluimos que esta función está bien definida para todo $z' \in \mathbb{C}^n$. Considerando el cambio $\lambda_1 = \lambda_1 + z'_1$ tenemos que

$$g(z') = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda_1} g_1(\lambda_1 + z'_1, \dots, z'_n) dx_1 dy_1$$

de donde, usando un argumento similar al del teorema 1.10, mediente derivación bajo el signo integral, concluimos que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$. Fijando $(z'_2, \dots, z'_n)$ y aplicando el teorema 1.10 tenemos que $\dfrac{\partial g}{\partial \bar{z}_1} \equiv g_1$.

Sea ahora $j \geq 2$, se tiene que, usando la hipótesis,

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j}(z') = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}\setminus\{z'_1\}} \frac{\dfrac{\partial g_1}{\partial \bar{z}_j}(\lambda_1, z'_2, \dots, z'_n)}{\lambda_1 - z'_1} dx_1 dy_1 =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}\setminus\{z'_1\}} \frac{\dfrac{\partial g_j}{\partial \bar{z}_1}(\lambda_1, z'_2, \dots, z'_n)}{\lambda_1 - z'_1} dx_1 dy_1 = g_j(z'_1, \dots, z'_n),$$

donde la última igualdad es consecuencia de aplicar el teorema 1.9. Así que, por lo que acabamos de probar, se tiene que

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j}(z_1, \dots, z_n) = g_j(z_1, \dots, z_n). \tag{2.2}$$

Nos queda por probar que la función g tiene soporte compacto y habremos terminado. Por tener cada g_j soporte compacto, existe un $R > 0$ de manera que

$\bigcup_{i=1}^{n} Sop(g_j) \subset \Delta(0,R)$ y, usando la igualdad (2.2) tenemos que

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} = 0$$

para cada $j \in \{1,\ldots,n\}$, por tanto, la función g es holomorfa en $\mathbb{C}^n \setminus \bar{\Delta}(0,R)$, que es un abierto de $\mathbb{C}^n$. Vamos a tomar ahora el abierto

$$U = \mathbb{C}^n \setminus \bar{\Delta}(0,R) \cap \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \setminus (\bar{D}(0,R) \times \overset{n-1}{\cdots} \times \bar{D}(0,R)) \neq \emptyset.$$

Dado un $z \in U$ es claro que

$$g(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}\setminus\{z_1\}} \frac{g_1(\lambda_1, z_2, \ldots, z_n)}{\lambda_1 - z_1} dx_1 dy_1 = 0$$

dado que $z \notin Sop(g_1)$, es decir, $g|_U \equiv 0$. Usando el *teorema de identidad* se concluye que $g \equiv 0$ en $\mathbb{C}^n \setminus \bar{\Delta}(0,R)$ y, por tanto, g tiene soporte compacto.

□

2.3. El teorema de prolongación holomorfa de Hartogs

Pasamos a dar la demostración del resultado más general sobre extensión holomorfa.

Teorema 2.3 (Prolongación holomorfa de Hartogs)**.** *Sean $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto, $K \subset U$ compacto, $U \setminus K$ conexo, $n \geq 2$ y $f \in \mathcal{H}(U \setminus K)$. Entonces existe una única función $F \in \mathcal{H}(U)$ tal que $f \equiv F|_{U\setminus K}$*

Demostración. Usando el teorema 2.1 podemos encontrar una función φ con soporte compacto contenido en U, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y que valga $\varphi \equiv 1$ en un entorno de K.

Definamos la función $f_0 : U \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f_0 = \begin{cases} (1-\varphi)f & \text{en } U \setminus K \\ \\ 0 & \text{en } K. \end{cases}$$

Por como hemos definido la f_0 y dado que $f \in \mathcal{C}^\infty(U \setminus K)$ y que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ se tiene que, dado que $f_0 \equiv 0$ en un abierto que contiene a K, $f_0 \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Además $f_0 = f$ en $U \setminus Sop(\varphi)$.

Lo que estamos buscando es una función $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ satisfaciendo que $f_0 - g \in \mathcal{H}(U)$ y $f_0 - g \equiv f$ en $U \setminus K$, esto nos dará que $f_0 - g$ es la función que buscamos. Veamos primero que esta g existe y después que se cumple que $f_0 - g \equiv f$ en $U \setminus K$.

Supongamos que $f_0 - g \in \mathcal{H}(U)$, entonces se tiene que $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(f_0 - g) = 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ por lo que la función g que buscamos cumplirá que $\dfrac{\partial f_0}{\partial \bar{z}_j} = \dfrac{\partial g}{\partial \bar{z}_j}$ $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Por otro lado

$$\frac{\partial f_0}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}((1-\varphi)f) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}}_{=0} - \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_j} f - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}}_{=0} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_j} f$$

en $U \setminus K$ y vale 0 en un entorno abierto que contiene a K por lo que, definiendo

$$\psi_j := \frac{\partial f_0}{\partial \bar{z}_j} = \begin{cases} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_j} f & \text{en } U \setminus K \\ \\ 0 & \text{en } K \end{cases}$$

para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que cada $\psi_j \in \mathcal{C}^\infty(U)$, tienen soporte compacto (ya que φ lo tiene) y se tiene que

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{z}_l} = \frac{\partial \psi_l}{\partial \bar{z}_j} \tag{2.3}$$

para todo $l, j \in \{1, \dots, n\}$, en efecto, fijados l y j se tiene que

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{z}_i} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_j}\right) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j} \qquad \text{en } U \setminus K \tag{2.4}$$

y desarrollamos esto último como parciales en $\mathbb{R}^{2n}$ y aplicamos Schwarz.

Lo que nos interesa hacer ahora es poder aplicar el teorema 2.2 a las funciones ψ_j por lo que definimos

$$\hat{\psi}_j = \begin{cases} \psi_j & \text{en } U \\ \\ 0 & \text{en } \mathbb{C}^n \setminus U. \end{cases}$$

Cada una de estas funciones cumple que $\hat{\psi}_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$ y tienen soporte compacto. Aplicando el mismo razonamiento que hemos usado en 2.4 encontramos que

$\dfrac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \bar{z}_l} = \dfrac{\partial \hat{\psi}_l}{\partial \bar{z}_j}$ en $\mathbb{C}^n$. Aplicamos el teorema 2.2 a $\hat{\psi}_1, \ldots, \hat{\psi}_n$ y obtenemos que existe una única función $\hat{g} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ con soporte compacto, $\hat{g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$ y satisfaciendo que $\dfrac{\partial \hat{g}}{\partial \bar{z}_j} = \hat{\psi}_j$ en $\mathbb{C}^n$. En particular tenemos que $\dfrac{\partial \hat{g}}{\partial \bar{z}_j} = \psi_j$ en U para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ lo que nos permite afirmar la existencia de la $g := \hat{g}|_U$ que buscábamos.
Sea ahora $\tilde{f} := f_0 - g$. La función $\tilde{f}$ es $\mathbb{R}-$diferenciable en U y, además, satisface las condiciones de *Cauchy-Riemann* en U. En efecto,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial f_0}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial f_0}{\partial \bar{z}_j} - \psi_j = 0$$

en U, por tanto, $\tilde{f} \in \mathcal{H}(U)$. Nos falta ver que $\tilde{f} := f_0 - g \equiv f$ en $U \setminus K$.

Las funciones $\hat{\psi}_j$ tienen soporte compacto contenido en el soporte de φ por lo que $\dfrac{\partial \hat{g}}{\partial \bar{z}_j} = 0$ en $\mathbb{C}^n \setminus Sop(\varphi)$, dado que $\mathbb{C}^n \setminus Sop(\varphi) \subset \mathbb{C}^n \setminus Sop(\hat{\psi}_j)$, luego $\hat{g} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n \setminus Sop(\varphi))$. Sabemos que la función $\hat{g}$ tiene soporte compacto, luego $\hat{g} = 0$ en $\mathbb{C}^n \setminus Sop(\hat{g})$ y, por tanto, en el abierto $W = (\mathbb{C}^n \setminus Sop(\hat{g})) \cap (\mathbb{C}^n \setminus Sop(\varphi)) \subset (\mathbb{C}^n \setminus Sop(\varphi))$.

Además, podemos encontrar un $s > 0$ de manera que $Sop(\varphi) \cup Sop(\hat{g}) \subset \bar{\Delta}(0, s)$, por tanto, $\mathbb{C}^n \setminus \bar{\Delta}(0, s)$ es subconjunto tanto de $\mathbb{C}^n \setminus Sop(\varphi)$ como de $\mathbb{C}^n \setminus Sop(\hat{g})$, esto decir, $\mathbb{C}^n \setminus \bar{\Delta}(0, s) \subset W \subset \mathbb{C}^n \setminus Sop(\varphi)$.

La componente conexa no acotada Γ de $\mathbb{C}^n \setminus Sop(\varphi)$ es un conjunto abierto que contiene a $\mathbb{C}^n \setminus \bar{\Delta}(0, s)$, que es abierto. Como $\mathbb{C}^n \setminus \bar{\Delta}(0, s)$ está contenido en $\mathbb{C}^n \setminus Sop(\hat{g})$, $\hat{g}$ se anula en $\mathbb{C}^n \setminus \bar{\Delta}(0, s) \subset \Gamma \subset \mathbb{C}^n \setminus Sop(\varphi)$ y, dado que $\hat{g} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n \setminus Sop(\varphi))$, $\hat{g}$ se anula en el abierto conexo Γ de $\mathbb{C}^n \setminus Sop(\varphi)$. Además, $\partial\Gamma \subset \partial(\mathbb{C}^n \setminus Sop(\varphi)) = \partial Sop(\varphi) \subset U$.

Finalmente, $\Gamma \cap U \neq \emptyset$, en efecto, sea $z_0 \in \partial\Gamma \subset U$, existe $r > 0$ tal que $\Delta(z_0, r) \subset U$, además, para este mismo disco se tiene que $\bar{\Delta}(z_0, r) \cap \Gamma \neq \emptyset$ y es abierto, por tanto, $\emptyset \neq \bar{\Delta}(z_0, r) \cap \Gamma \subset U$. Además, $\Gamma \subset \mathbb{C}^n \setminus Sop(\varphi)$, entonces $\Gamma \cap U \subset (\mathbb{C}^n \setminus Sop(\varphi)) \cap U = U \setminus Sop(\varphi) \subset U \setminus K$. Con este último razonamiento podemos afirmar que $\tilde{f} := f_0 - g = f$ en el abierto y no vacío $\Gamma \cap U$, usando el *teorema de identidad*, pues $U \setminus K$ es abierto y conexo, encontramos que $\tilde{f} = f$ en $U \setminus K$.

$\square$

Observación 2.3. El teorema anterior es falso sin la hipótesis de conexión del conjunto $U \setminus K$. En efecto, cosideremos el compacto $K = \{z : \|z\|_2 = 1\}$ y el abierto $U = \mathbb{C}^n$. $U \setminus K$ no es conexo y definiendo $f = 0$ para $\|z\|_2 < 1$ y $f = 1$ para

$\|z\|_2 > 1$ tenemos que f no se puede extender a U con continuidad, mucho menos con holomorfía.

Observación 2.4. El teorema de Hartogs no solo se puede demostrar para espacios de dimensión finita, el resultado sigue siendo cierto para espacios de Hilbert separables cambiando levemente las hipótesis. Recordemos brevemente las nociones de espacio de Hilbert y espacio de Hilbert separable para poder dar el análogo del teorema de Hartogs en estos espacios

Definición 2.2. Decimos que un espacio normado E es un espacio de Hilbert si es un espacio de Banach, es decir, un espacio normado, cerrado y completo en el sentido de Cauchy, cuya norma proviene de un producto escalar.

Definición 2.3. Diremos que un espacio topológico es separable si contiene un subconjunto denso y numerable.

Dado que un espacio de Hilbert es un espacio topológico por ser un espacio métrico, tiene sentido hablar de un espacio de Hilbert separable.

En espacios normados de dimensión infinita no se tiene la equivalencia entre compacidad y cerrado y acotado, es decir, es cierto que todo compacto en un espacio normado de dimensión infinita es cerrado y acotado, sin embargo, no todo cerrado y acotado es compacto, por ejemplo la bola unidad cerrada no es compacta en l_2 .

Veamos el enunciado del teorema de Hartogs para epacios de Hilbert separables. Muchos de los resultados previos que hemos visto no se pueden traducir con las mismas demostraciones a los casos de dimensión infinita, por ello, prescindiremos de la demostración.

Teorema 2.4 (Teorema de Hartogs para espacios de Hilbert separables)**.** *Sea E un espacio de Hilbert separable con $dimE > 2$. Sea U un subconjunto abierto de E y A un conjunto cerrado y acotado de E, contenido en U y tal que $U \setminus A$ es conexo. Entonces, para cada $f \in \mathcal{H}(U \setminus A)$, existe una finción $F \in \mathcal{H}(U)$ de tal manera que $f = F$ en $U \setminus A$.*

2.4. Algunas consecuencias del teorema de Hartogs

La diferencia que marca el *teorema de Hartogs* entre los resultados sobre extensión en $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^n$ con $n > 1$ tiene otra importante consecuencia que da origen a la noción de *extensión hlomorfa*. Vamos a dar la definición de este concepto y algunas de las diferencias entre los abiertos en $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^n(n > 1)$ desde el punto de vista de la extensión holomorfa.

Definición 2.4 (Extensión holomorfa)**.** Sea $U \subset \mathbb{C}^n$,$U \neq \mathbb{C}$, abierto, conexo y no vacío, sea $V \subset \mathbb{C}^n$ otro abierto y conexo que contiene extrictamente a U. Decimos que V es una extensión holomorfa de U si cada función $f \in \mathcal{H}(U)$ posee una única prolongación holomorfa $\hat{f} \in \mathcal{H}(V)$.

Un resultado enormemente fuerte del analisis complejo de una variable es el hecho de que ningún abierto de $\mathbb{C}$ posee una extensión holomorfa a otro abierto conexo. Dado que no es el propósito de este trabajo prescindimos de dar mayores resultados ni demostraciones. Sin embargo, es interesante el hecho de ver el caso del disco unidad en $\mathbb{C}$.

Proposición 2.3. *El disco unidad $D \subset \mathbb{C}$ no posee ninguna extensión holomorfa.*

Demostración. Para ver este resultado vamos a encontrar una función holomorfa en el interior del disco y no se puede extender de manera holomorfa a ningún abierto que contenga elementos de su frontera, lo que nos dará el resultado.

En primer lugar vamos a ver que el conjunto $\mathcal{U} = \{e^{i\frac{2m\pi}{2^k}}\}_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ m\leq 2^k}}$ es denso en la frontera del disco unidad. En efecto, para demostrarlo es suficiente con demostrar que el conjunto $\left\{\dfrac{m}{2^k}\right\}_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ m\leq 2^k}}$ es denso en el intervalo $[0, 1]$.

Para terminar, vamos a demostrar que la función, holomorfa en el disco,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$$

no se puede extender, de manera holomorfa, en efecto, dados k y $m \leq 2^k$, sea $\omega = e^{2\pi i \frac{m}{2^k}}$ y supongamos que existe una función $\hat{f}$, holomorfa, que extiende a f en un abierto que contiene a ω. Entonces existe el límite $\lim_{r\to 1^-} f(r\omega)$ y, además, coincide con $\hat{f}(\omega)$. Pero esto no es posible, en efecto, es claro que

$$f(z) = \sum_{j=0}^{k-1} z^{2^j} + f(z^{2^k})$$

por tanto,

$$f(r\omega) = re^{2\pi i \frac{m}{2^k}} + \left(re^{2\pi i \frac{m}{2^k}}\right)^2 + \cdots + \left(re^{2\pi i \frac{m}{2^k}}\right)^{2^{k-1}} + f(r^{2^k}).$$

Dado que para cualquier N se tiene que $\lim\limits_{r\to 1^-} f(r^{2^k}) \geq N+1$ dicho límite no es finito, por tanto, no puede existir una función $\hat{f}$ que extienda a f.

$\square$

Observación 2.5. Por un razonamiento completamente análogo podemos demostrar que $D(0,r)$ tampoco posee ninguna extensión holomorfa. Es suficiente con considerar el conjunto $\left\{re^{i\frac{2m\pi}{2^k}}\right\}$ en la demostración anterior.

Vamos a ver el análogo de la proposición anterior para el polidisco $\Delta^n(0,1) \subset \mathbb{C}^n$

Proposición 2.4. *El polidisco $\Delta^n(0,1) \subset \mathbb{C}^n$ no posee ninguna extensión holomorfa.*

Demostración. Consideremos f la función definida en la demostración del teorema anterior y tomemos la función

$$F(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)$$

Razonando de la misma manera que en la proposición anterior sobre el conjunto $V = \{\mathcal{U}\times D(0,1)\times \overset{n-1}{\cdots} \times D(0,1), D(0,1)\times\mathcal{U}\times D(0,1)\times \overset{n-2}{\cdots} \times D(0,1),\ldots, D(0,1)\times \overset{n-1}{\cdots} \times D(0,1)\times\mathcal{U}, \mathcal{U}\times \overset{n}{\cdots} \times\mathcal{U}\}$, donde $\mathcal{U}$ es el conjunto de la proposición anterior, dado que V es denso en la frontera de $\Delta^n(0,1)$ obtenemos el resultado deseado.

$\square$

Una de las grandes consecuencias del teorema de Hartogs es el hecho de que, en $\mathbb{C}^n$, $n>1$, existen abiertos que tienen extensiones holomorfas, en efecto, es suficiente con considerar cualquier abierto conexo $U\setminus K$, K compacto y como consecuencia directa del teorema, toda función holomorfa puede prolongarse con esta misma propiedad a un abierto que lo contiene, en este caso U.

Bibliografía

[1] Leopoldo Nachbin. *Holomorphic functions, domains of holomorphy and local properties*, volume 1. Elsevier, 1972.

[2] Jorge Mujica. *Complex analysis in Banach spaces.* Dover Publications. INC, 2010.

[3] José María Martínez Ansemil and Socorro Ponte Miramontes. *Manual de análisis de funciones de variable compleja.* 2015.

[4] Steven George Krantz. *Function theory of several complex variables.* Wiley Interscience, 1982.

[5] Michael Spivak. *Cálculo en variedades.* Reverté, 1988.