

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
GRADO EN MATEMÁTICAS



Trabajo de Fin de Máster

Una Introducción a los Grupos de Carnot

Jorge Luis Mayoral Pérez

Tutores académicos:

Jesús Ángel Jaramillo Aguado
María Isabel Garrido Carballo

Septiembre 2019

*A mis padres y amigos de toda una vida,
con todo el amor que me han enseñado.*

Resumen

El presente trabajo pretende ser una exposición detallada de las nociones básicas sobre Grupos de Carnot. Para tal fin se presentan las nociones básicas pertinentes sobre grupos de Lie y variedades diferenciables y se hace especial hincapié en la teoría de álgebras y grupos de Lie estratificados. De igual manera, con el fin de dar una justificación a toda la teoría expuesta sobre estos grupos, se presentan las variedades subriemannianas, las cuales tienen un especial interés en todo este contexto.

Abstract

This work intends to be a detailed exposition of the basic facts about Carnot Groups. For this purpose, the notions of Lie groups and differential manifolds are presented, with an special emphasis in the theory of stratified Lie groups. The sub-Riemannian manifolds are introduced as well, in order to show the relevance of this groups in this whole context.

Introducción

Lo Grupos de Carnot son grupos de Lie con unas propiedades adicionales que permiten dotarles de estructuras sumamente interesantes, entre ellas, una estructura de espacio métrico inducida por una distancia sobre las longitudes de ciertas curvas. El ejemplo prototípico, el cual sirve de guía y de referente en todo el trabajo, es el conocido grupo de Heisenberg. Uno de los atractivos de estos grupos es su gran relevancia en el contexto del estudio de variedades subriemannianas, que son una generalización de las estructuras riemannianas usuales.

El trabajo, tomando como meta principal presentar los grupos de Carnot y convencer de su gran riqueza e interés en teorías más generales, permite ver como se entrelazan, de una manera increíblemente sinérgica, tanto conceptos puramente geométricos (grupos de Lie estratificados, dimensión homogénea, etc...) como el de algunos que conciernen a la teoría de espacios métricos abstractos (dimensión de Hausdorff, distancia de Gromov-Hausdorff, etc...). La confluencia de estos desarrollos tan distintos dentro del marco común de los grupos de Carnot dota de una belleza adicional no solo a los resultados sobre los mismos, también al proceso mismo del estudio de su teoría.

El trabajo queda dividido en varios capítulos:

Los tres primeros capítulos son una introducción tanto de las herramientas como de la notación de las que se van a hacer uso. El capítulo 1 comenta las nociones básicas sobre variedades y campos diferenciables. El capítulo 2 trata las generalidades de los grupos de Lie, siguiendo la excelente presentación expuesta en [War13]. En el tercer capítulo se cambia un poco el enfoque para presentar las nociones básicas sobre la dimensión y la medida de Hausdorff, la cual se relaciona posteriormente de una manera directa con los temas de geometría expuestos en los dos primeros capítulos.

El capítulo 4 supone un punto inflexión en el trabajo pues sirve de transición entre los conceptos generales presentados en los tres primeros capítulos y el desarrollo concreto de la teoría de los grupos de Carnot presentado en los posteriores. En este punto se expone el que es el ejemplo más distinguido de grupo de Carnot, el grupo de Heisenberg. Se exponen y demuestran, de una manera concreta, los resultados y las propiedades que posee este grupo y que en el capítulo 5 se generalizan a los grupos que poseen la estructura prototípica de este, los grupos de Carnot.

Como se ha comentado, el grupo de Heisenberg es el grupo que mejor ejemplifica

lo que es un grupo de Carnot. En el capítulo 5 se define de una manera rigurosa este concepto, tratando las álgebras de Lie estratificadas y la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff en estas álgebras, así como la estructura métrica que es posible definir en estos grupos. El resultado principal que toca este capítulo es el Teorema de Chow, el cual establece que en estos grupos, con la métrica que poseen, la distancia entre cualesquiera dos puntos siempre es finita.

El último capítulo, tomando un punto de partida en un tono distinto a los anteriores, trata de justificar la increíble riqueza de los grupos de Carnot. Se introduce la distancia de Gromov Hausdorff y los conos tangentes métricos de Gromov-Hausdorff junto con una serie de resultados y ejemplos que permiten entender de una manera más próxima estas nociones. Posteriormente se generaliza el concepto de estructura riemanniana al de estructuras subriemannianas y se presenta, de manera escueta, que en el caso de estas variedades, los conos tangentes métricos, que son los usuales en el caso riemanniano, resultan ser los grupos de Carnot. Este resultado es el conocido Teorema de Mitchell, el cual da un papel protagonista a los grupos de Carnot dentro de toda esta teoría.

Índice general

1. Nociones Básicas	1
1.1. Variedades y campos diferenciables	1
1.2. Formas diferenciales	4
1.3. Campos involutivos y teorema de Frobenius.	5
1.4. Métricas riemannianas	6
2. Generalidades sobre grupos de Lie	9
2.1. Grupos y álgebras de Lie	9
2.2. La aplicación exponencial	12
2.3. Operador adjunto	17
3. Medida y dimensión de Hausdorff	19
4. El grupo de Heisenberg	25
5. Grupos de Carnot	33
5.1. Grupos de Lie nilpotentes y estratificados	33
5.2. Fórmula BCH en grupos estratificados	39
5.3. Grupos de Carnot	41
5.4. El teorema de Chow	43
6. Variedades subriemannianas y conos tangentes	53
6.1. Métrica de Gromov-Hausdorff	53
6.2. Variedades subriemannianas y nilpotenciación	60
6.2.1. Nilpotenciación	61
6.2.2. Teorema de Mitchell	66
6.3. Una presentación métrica y conclusiones	68
6.4. Conclusiones	68

Capítulo 1

Nociones Básicas

Este primer capítulo expone las nociones básicas previas con las que vamos a trabajar a lo largo de todo el memoria: variedades diferenciables, campos, formas diferenciales, etc. . . Las referencias principales que se han seguido para su exposición son [War13],[MGR] y [GR06].

1.1. Variedades y campos diferenciables

Definición 1.1. Por una **variedad diferenciable** de dimensión n , entenderemos un par (M, \mathcal{F}) , donde M es un espacio topológico, segundo axioma numerable y Hausdorff, y \mathcal{F} es su estructura diferenciable. Es decir, \mathcal{F} es una familia de abiertos de M , $\{(U_i, \varphi_i) | i \in I\}$, con las siguientes propiedades:

- i) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.
- ii) Cada una de las aplicaciones $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo de manera que, en el caso de que la composición esté bien definida, las aplicaciones de la forma $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son difeomorfismos. El valor n es la dimensión de la variedad.
- iii) \mathcal{F} es maximal respecto a la propiedad anterior, es decir, si un par de la forma (U, φ) cumple la propiedad anterior al componerse con las aplicaciones de la forma φ_i^{-1} , entonces $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$.

En lo sucesivo no haremos distinción entre variedad y variedad diferenciable pues siempre estaremos en el contexto de las variedades diferenciables.

Definición 1.2. Para cada punto, p , de una variedad de dimensión n , (M, \mathcal{F}) , denotaremos por $T_p M$ al espacio tangente de M en p . Definimos el **fibrado tangente** de M , TM , como la variedad diferenciable

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

La estructura diferenciable de esta variedad viene dada por

$$\{(\pi^{-1}(U), \bar{\varphi}): (U, \varphi) \in \mathcal{F}\},$$

con $\pi: TM \rightarrow M$ la proyección dada por $\pi(v) = p$ con $v \in T_p M$ y la aplicación

$$\bar{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n},$$

con las funciones coordenadas asociadas a (U, φ) , x_1, \dots, x_n , viene dada por

$$\bar{\varphi}(p, v) = (x_1(\pi(v)), \dots, x_n(\pi(v)), d_p x_1(v), \dots, d_p x_n(v)).$$

Es decir, el fibrado tangente tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$.

Definición 1.3. Diremos que una aplicación, $f: M \rightarrow N$, entre variedades es **diferenciable** si su localización, es decir, si $\varphi_i \circ f \circ \psi_j^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, siempre y cuando esta composición exista, es diferenciable para cada φ_i en la estructura diferenciable de M y para cada ψ_j en la estructura diferenciable de N .

Definición 1.4. Una **subvariedad** diferenciable de una variedad M es un par, (N, ψ) , donde N es una variedad diferenciable y $\psi: N \rightarrow M$ es una inmersión diferenciable, es decir, es inyectiva y la matriz $d_x \psi$ es no singular en cada punto $x \in M$.

Definición 1.5. Un **campo**, $X: M \rightarrow TM$, es una aplicación diferenciable entre una variedad y su fibrado tangente con la propiedad de que, siendo $\pi: TM \rightarrow M$ la proyección usual, se cumple que $\pi \circ X = \text{Id}_M$. A la familia de campos diferenciables sobre una variedad la denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$.

Observación 1.1. Lo que tenemos, dado un campo X y un punto $p \in M$, es una asignación $X_p := X(p) \in T_p M$ (usaremos los superíndices para indexar un conjunto de campos), es decir, un campo es, en cada punto de la variedad, un vector de su plano tangente. Pedir que sea diferenciable no es más que pedir que el campo varíe de manera diferenciable a lo largo de la variedad.

Observación 1.2. La expresión de un campo, en uno de los abiertos coordenados U de la estructura diferenciable de M es de la forma

$$X|_U = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi^{-1}.$$

Donde cada $X^i \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Con estas expresiones, se puede dar una interpretación natural de cómo un campo actúa sobre una aplicación $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Esta es

$$X|_U(f) := \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \varphi^{-1}).$$

CAPÍTULO 1. NOCIONES BÁSICAS

Para descargar la notación, dado que la estructura diferenciable se sobreentiende, escribiremos lo anterior como

$$X(f) = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

De esto último, dado que los *coeficientes* de cada campo son funciones diferenciables, podemos, de igual manera que lo hemos hecho para funciones, definir la acción de un campo sobre otro. Dados dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, localmente, tenemos la expresión

$$X(Y)|_U = \sum_{i,j=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Tras estas observaciones, podemos dar la definición del corchete de Lie de dos campos.

Definición 1.6. Dados dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, definimos el **corchete de Lie** como

$$[X, Y] := X(Y) - Y(X).$$

Localmente, el corchete se escribe como

$$[X, Y]|_U = \sum_{i,j=1}^n \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Las propiedades principales que tiene el corchete son

i) Anticonmutatividad, es decir,

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

ii) Identidad de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

iii) $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$

iv)

$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)(X).$$

v) Si bien la expresión de un campo depende de las coordenadas que se tomen, en el caso del corchete de Lie, la expresión del campo resultante de la operación del corchete es independiente de las coordenadas.

1.2. Formas diferenciales

La exposición tanto de los resultados como de sus demostraciones a lo largo de esta sección puede encontrarse en [GR06].

Definición 1.7. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Definimos las **formas** de grado r sobre M como el conjunto

$$\Lambda^r(M) := \bigcup_{x \in M} \{x\} \times \Lambda^r(T_x M).$$

Siendo $\Lambda^r(T_x M)$ el álgebra de formas multilineales alternas de grado r sobre $T_x M$.

Definición 1.8. Una **forma diferencial** de grado r sobre M es una aplicación

$$\begin{aligned} \alpha : M &\longrightarrow \Lambda^r(M) \\ x &\longmapsto (x, \alpha_x). \end{aligned}$$

Diremos que una de estas formas es diferenciable si la aplicación, dados r campos diferenciables X^1, \dots, X^r ,

$$\begin{aligned} \alpha(X^1, \dots, X^r) : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \alpha_x(X^1(x), \dots, X^r(x)) \end{aligned}$$

es diferenciable. El conjunto de formas diferenciales diferenciables (sobrentendéremos a partir de ahora que las formas diferenciales son diferenciables) lo denotaremos por $\Omega^r(M)$.

Una vez tenemos las formas, uno de los operadores más importantes es la diferencial de formas; este es de gran importancia, pues permite generalizar la diferencial usual a todo el espacio $\Omega^r(M)$.

Definición 1.9. Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, definimos la **diferencial** de f como la 1-forma dada por

$$\begin{aligned} df : M &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ x &\longmapsto (x, df_x) \end{aligned}$$

donde definimos df_x como $d_x f : T_x M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Uno de los resultados más relevantes en este contexto es aquel que extiende la noción de la diferencial de funciones a la de formas en general.

Teorema 1.1. *Existe, para todo $r \geq 0$, un único operador $d : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M)$, denominado **diferencial exterior**, con las propiedades siguientes:*

i) $d^2 = 0$.

ii) *Dados $\alpha \in \Omega^r(M)$ y $\beta \in \Omega^1(M)$ se tiene que $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta$.*

iii) Para el caso $r = 0$, d coincide con la diferencial de funciones que acabamos de definir.

A la $\mathcal{C}^\infty(M)$ -álgebra, $\bigoplus_{r \geq 0} \Omega^r(M)$, equipada con el operador d , la vamos a denotar por $\Omega^*(M)$.

Lo que se puede hacer ahora es, dado que punto a punto sobre la variedad tenemos el espacio de formas $\Lambda^r(T_x M)$, podemos ver cómo se construyen sus bases. Dado que la diferencial coincide con la diferenciación de funciones, tomando una base de $T_x M$, formada por los campos coordenados $\left\{ \partial_{x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i} : i = 1, \dots, n \right\}$, tenemos su base dual, $\{dx^i : i = 1, \dots, n\}$, con la propiedad de que $dx^i(\partial_{x_j}) = \delta_i^j$, donde $\delta_i^j = 1$ si y solo si $i = j$, y es nula en el resto de casos.

Si continuamos construyendo, por analogía, lo que tenemos del caso vectorial, podemos escribir localmente, cualquier forma, $\alpha \in \Omega^r(M)$, como

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \alpha_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

Donde, en la igualdad anterior, n es la dimensión de la variedad. De la misma manera, podemos escribir su diferencial como

$$d\alpha = \partial_{x^j} \alpha_{i_1 \dots i_r} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in \Omega^{r+1}(M).$$

Para terminar, de la misma manera que las aplicaciones lineales inducen aplicaciones entre los espacios de formas (revirtiendo las flechas), podemos hacer lo mismo con las aplicaciones diferenciables entre variedades.

Definición 1.10. Dada una aplicación diferenciable $f: M \rightarrow N$, f induce una aplicación, $f^*: \Omega^r(N) \rightarrow \Omega^r(M)$, entre los espacios de formas, llamada **pull-back** de la aplicación f , dada por

$$f^*(\alpha)_x(X^1, \dots, X^r) = \alpha_x(df_x(X^1), \dots, df_x(X^r)), \quad X^i \in \mathfrak{X}(M).$$

1.3. Campos involutivos y teorema de Frobenius.

Vamos a dar una visión esquemática de lo que son los campos involutivos. Dado que no es de gran importancia para lo que se va a estudiar posteriormente, prescindimos de dar las demostraciones. El interés de esta sección es dar la relación que hay entre una distribución de campos *cerrada para el corchete* y la existencia de variedades que posean esa distribución dentro de su fibrado tangente.

Definición 1.11. Sean M una variedad de dimensión n y d , $1 \leq d \leq n$, $d \in \mathbb{N}$. Una **distribución** d -dimensional, \mathcal{D}_d , sobre M es tomar, para cada $x \in M$, un subespacio lineal, D_x , de dimensión d en $T_x M$. Diremos que esta distribución es diferenciable si

localmente, en un entorno de cada punto, existen campos $\{X^1, \dots, X^d\} \subset \mathfrak{X}(M)$, de manera que $D_x = \langle X_x^1, \dots, X_x^d \rangle$. Diremos que un campo X pertenece a la distribución \mathcal{D}_d si, para cada $x \in M$, se tiene que $X_x \in D_x$. En este caso escribimos $X \in \mathcal{D}_d$.

Una distribución, \mathcal{D}_d , se dice **involutiva** si, para cualesquiera campos $X, Y \in \mathcal{D}_d$, se tiene que $[X, Y] \in \mathcal{D}_d$.

Definición 1.12. Una subvariedad de M , (N, ψ) , se dice **integral** respecto a una distribución \mathcal{D}_d , de M , si

$$d\psi(T_x N) = D_{\psi(x)}, \quad \forall x \in N.$$

Lo que pretende mostrar de forma general esta sección es la relación entre subvariedades y distribuciones. Esta relación viene dada por el teorema de Frobenius.

Teorema 1.2 (Frobenius). *Sea \mathcal{D}_d una distribución involutiva sobre una variedad, M . Entonces, para cada $x \in M$, existe una subvariedad de M , (N, ψ) , que es una subvariedad integral con respecto a \mathcal{D}_d en un entorno de x .*

Una rigurosa demostración de este resultado puede encontrarse en [War13].

Observación 1.3. Lo que nos dice este resultado es que, dada una distribución, la existencia de una variedad cuyo tangente contenga puntualmente a los campos de la distribución es lo mismo que pedir que la distribución sea cerrada respecto a la operación del corchete de Lie.

Observación 1.4. El recíproco del teorema de Frobenius es cierto, es decir, si una variedad (N, ψ) es integrable respecto a una distribución \mathcal{D}_d , entonces, si localmente en un abierto $U \subset M$, $\mathcal{D}_d = \langle X^1, \dots, X^d \rangle$, se tiene que

$$[X^i, X^j] = \sum_{l=1}^d f_{i,j}^l X^l$$

con $f_{i,j}^l \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Es decir, la distribución es involutiva.

En cierto sentido, como se verá a lo largo de todo el trabajo, las distribuciones involutivas van a jugar el papel *contrario* con aquellas con las que vamos a trabajar. Las distribuciones que nos van a interesar son aquellas que no son involutivas pero que tienen la suficiente riqueza como para poder jugar un papel relevante en la teoría de distribuciones.

1.4. Métricas riemannianas

Vamos a dar unas nociones muy elementales de lo que son las variedades riemannianas. Nos será de utilidad a lo largo de los capítulos finales del trabajo.

Definición 1.13. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Una **métrica riemanniana** en M es una aplicación $g: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ de manera que, para cada $p \in M$, la aplicación inducida $\langle \cdot, \cdot \rangle_p := g_p: T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$ es un producto escalar, es decir, una forma bilineal, simétrica y definida positiva. Además pedimos que esta aplicación sea diferenciable en el sentido que sigue: dados dos campos diferenciables, X, Y , en un entorno $U \subset M$, la aplicación inducida, $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$, es una aplicación diferenciable.

Una variedad diferenciable equipada con una métrica riemanniana es lo que entenderemos por una **variedad riemanniana**.

Observación 1.5. 1) Dada una variedad riemanniana, (M, g) , definimos la norma de un vector $v \in T_p M$, $p \in M$, como $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle_p}$.

2) Dado un camino $\gamma: [a, b] \longrightarrow M$, C^1 a trozos, definimos la longitud de este camino entre los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ como

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'\| dt.$$

3) Si la variedad riemanniana es conexa podemos definir una distancia asociada a esta norma de la manera siguiente. Dados dos puntos $p, q \in M$, definimos la distancia entre estos puntos como

$$d(p, q) := \inf \{l(\gamma) : \gamma \text{ un camino que une los puntos } p \text{ y } q\}.$$

4) La métrica euclídea de \mathbb{R}^n viene dada, en un sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) , por la aplicación $g = \sum_{i=1}^n (dx_i)^2$, que no es más que la forma cuadrática asociada al producto escalar de \mathbb{R}^n . De igual manera, tomando localmente estas métricas en una variedad y pegándolas después con una partición de la unidad, podemos dar una métrica riemanniana, que llamaremos euclídea, a cualquier variedad diferenciable.

Todas estas construcciones son independientes de las coordenadas y la distancia así definida hace del par (M, d) un espacio métrico con una topología métrica igual a la topología de la variedad. Una buena y detallada exposición de toda esta teoría puede encontrarse en [Car92].

Capítulo 2

Generalidades sobre grupos de Lie

En este capítulo se presenta el esquema general de la teoría de grupos de Lie que va a ser necesaria para posteriormente trabajar sobre los grupos de Carnot. Toda esta sección es una presentación de la sección 3 expuesta en [War13].

2.1. Grupos y álgebras de Lie

Vamos a comenzar dando algunas nociones sobre los grupos de Lie y ciertas propiedades que nos van a resultar útiles de cara a lo que vamos a desarrollar posteriormente.

Definición 2.1. Un **grupo de Lie**, G , es una variedad diferenciable con una estructura de grupo de manera que la asignación $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ es diferenciable.

Algunos ejemplos básicos de estos grupos son:

- i) $(\mathbb{R}^n, +)$
- ii) La circunferencia \mathbb{S}^1 con el producto inducido por \mathbb{C} .
- iii) El grupo general lineal de matrices, con entradas reales, no singulares, de orden $n \times n$, $Gl(n, \mathbb{R})$.

Otra estructura, directamente relacionada con los grupos de Lie, son las álgebras de Lie.

Definición 2.2. Un álgebra de Lie, \mathfrak{g} , sobre \mathbb{R} , es un espacio vectorial real con una operación bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ con las propiedades:

- 1) (Anticonmutatividad)
 $[X, Y] = -[Y, X] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$

2) (Identidad de Jacobi)

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

Observación 2.1. Claramente, dado que el corchete de Lie cumple las propiedades anteriores, tenemos que cualquier distribución involutiva sobre una variedad es un álgebra de Lie.

Vamos a precisar un poco la relación entre las álgebras y los grupos de Lie. Para tal fin vamos a definir las traslaciones a la izquierda y a la derecha.

Definición 2.3. Sea $x \in G$, siendo G un grupo de Lie. Definimos el difeomorfismo **traslación a la izquierda**, l_x , como $l_x(y) = xy$. De igual manera se define la traslación a la derecha como $r_x(y) = yx$.

Definición 2.4. Un campo diferenciable, X , sobre un grupo de Lie, G , se dice que es **invariante a la izquierda** (respectivamente a la derecha) si el campo está l_x -relacionado consigo mismo. Es decir,

$$(l_x)_*X := dl_x \circ X = X \circ l_x \quad \forall x \in G.$$

Esta noción de invarianza se extiende, usando el pull-back, a las formas, diciendo que una tal forma es invariante por la izquierda (respectivamente por la derecha) si para cualquier $x \in G$ se tiene que $l_x^*(\omega) := \omega(dl_x) = \omega$. Las 1-formas invariantes a la izquierda son conocidas como las formas de *Maurer-Cartan* y las denotaremos por $E_{l, \text{inv}}^1(G)$.

El siguiente teorema nos da la relación principal entre los grupos de Lie, las álgebras de Lie y el difeomorfismo l_x .

Teorema 2.1. Sea G un grupo de Lie, vamos a denotar por

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathfrak{X}(G) : X \text{ es invariante a la izquierda}\}$$

Sea $T_e G$ el espacio tangente al elemento neutro. En estas condiciones se tiene:

i) \mathfrak{g} es un espacio vectorial real, la aplicación

$$\begin{aligned} \alpha: \mathfrak{g} &\longrightarrow T_e G \\ X &\longmapsto X(e) \end{aligned}$$

es un isomorfismo, por tanto, $\dim G = \dim T_e G = \dim \mathfrak{g}$.

ii) El corchete de Lie, $[X, Y] := XY - YX$, de dos campos invariantes a la izquierda es un campo invariante a la izquierda.

iii) \mathfrak{g} es un álgebra de Lie con la operación dada por el corchete de Lie.

Por lo que acabamos de ver, tenemos que, para cualquier grupo de Lie, G , hay un álgebra de Lie asociada, que es $T_e G$. Una pregunta natural es: ¿Dada un álgebra de Lie, \mathfrak{g} , podemos encontrar un grupo que tenga a \mathfrak{g} como álgebra asociada? La respuesta es que sí, pero la unicidad, salvo condiciones adicionales, no se tiene en general. Veremos esta afirmación más adelante.

Podemos estudiar, de igual manera que el teorema anterior trata los campos invariantes a la izquierda, la relación entre el álgebra de Lie de un grupo y las formas $E_{l,\text{inv}}^1(G)$. Esto nos lo da la siguiente proposición.

Proposición 2.1. *Tenemos que:*

i) *La aplicación*

$$\begin{aligned}\alpha: E_{l,\text{inv}}^1(G) &\longrightarrow T_e G^* \\ \omega &\longmapsto \omega(e)\end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. En general esto es cierto para cualquier forma invariante de grado p . Por tanto, tomando la aplicación anterior en general, se tiene un isomorfismo de álgebras entre $E_{l,\text{inv}}^(G)$ y $\Omega(T_e G^*)$. Donde*

$$E_{l,\text{inv}}^*(G) := \bigoplus_{p=0}^{\dim G} E_{l,\text{inv}}^p(G)$$

ii) *Considerando $\{X_1, \dots, X_d\}$ una base de campos de \mathfrak{g} y sea $\{\omega_1, \dots, \omega_d\}$ su base dual asociada (por i), esta es una base de \mathfrak{g}^*). Existen constantes c_{ijk} satisfaciendo que*

$$\begin{aligned}[X_i, X_j] &= \sum_{k=0}^d c_{ijk} X_k \\ d\omega_i &= \sum_{k=0}^d c_{ijk} \omega_k \wedge \omega_j\end{aligned}$$

A las constantes c_{ijk} se las conoce como constantes de estructura de G .

Pasamos a dar las nociones de subgrupo y de homomorfismo entre grupos de Lie.

Definición 2.5. Un **homomorfismo** entre grupos de Lie, $\phi: H \longrightarrow G$, es una aplicación diferenciable que es un homomorfismo de grupos. Un **isomorfismo** de grupos de Lie es un homomorfismo que es un difeomorfismo. Un homomorfismo de la forma $\phi: H \longrightarrow \text{Gl}(n, \mathbb{K})$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} y siendo H un grupo de Lie es lo que se entiende por una **representación** del grupo H .

Definición 2.6. Un **subgrupo** de Lie de un grupo, G , es una subvariedad, (H, ψ) , de G con la propiedad de que H tiene estructura de grupo de Lie y la aplicación ψ es un homomorfismo de grupos. Diremos que un subgrupo de Lie es **cerrado** si la imagen por ψ es cerrada en G .

Definición 2.7. Un **subgrupo uniparamétrico** de un grupo de Lie, G , es un homomorfismo $\phi: \mathbb{R} \rightarrow G$.

Definición 2.8. Un **homomorfismo de álgebras de Lie** es una aplicación lineal que respeta el corchete, es decir, $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie si es lineal y $\phi[X, Y]_{\mathfrak{g}} = [\phi X, \phi Y]_{\mathfrak{h}}$.

Observación 2.2. Sea $\phi: H \rightarrow G$ un homomorfismo de grupos de Lie. Dado que el homomorfismo deja fijo el elemento neutro, $\phi(e_H) = e_G$, es inmediato comprobar que la diferencial en la identidad $d\phi_e: T_e H = \mathfrak{h} \rightarrow T_e G = \mathfrak{g}$ es un homomorfismo entre las álgebras de Lie correspondientes. Por tanto tenemos que para cada homomorfismo de grupos hay un homomorfismo entre las álgebras asociadas.

A la vista de esta observación, una pregunta natural es si el recíproco es cierto, es decir, si hay alguna manera de asociar a cada homomorfismo entre álgebras de Lie un homomorfismo entre los grupos correspondientes. El resultado siguiente responde a esta pregunta.

Teorema 2.2. Sean H y G grupos de Lie con álgebras de Lie asociadas \mathfrak{h} y \mathfrak{g} , respectivamente. Supongamos que el grupo H es conexo y simplemente conexo y que $\phi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ es un homomorfismo de álgebras. Entonces existe un único homomorfismo de grupos, $\varphi: H \rightarrow G$, de manera que $d\varphi_e = \phi$.

Observación 2.3. Como una consecuencia directa de este resultado tenemos que si dos álgebras de Lie, asociadas a dos grupos de Lie simplemente conexos, son isomorfas, entonces sus grupos también son isomorfos. Es decir, hay una correspondencia biyectiva entre clases de isomorfismo entre álgebras de Lie y clases de isomorfismo entre grupos de Lie.

Teorema 2.3 (Tercer teorema de Lie). Para toda álgebra de Lie, \mathfrak{g} , existe un único grupo de Lie, conexo y simplemente conexo, que tiene a \mathfrak{g} por álgebra de Lie asociada.

2.2. La aplicación exponencial

Pasamos a introducir la aplicación exponencial, esta nos va a ser de vital utilidad para conectar un grupo de Lie con su álgebra. La definición expuesta es la presentada en [War13].

Definición 2.9. Sean G un grupo de Lie, \mathfrak{g} su álgebra de Lie asociada y $X \in \mathfrak{g}$. Consideremos el homomorfismo de álgebras de Lie

$$\lambda \partial_r \mapsto \lambda X,$$

de \mathbb{R} en \mathfrak{g} . Dado que \mathbb{R} es simplemente conexo, por el teorema 2.2, existe un único homomorfismo de grupos de Lie,

$$\exp_X: \mathbb{R} \rightarrow G,$$

con la propiedad de que

$$d\exp_X(\lambda\partial_r) = \lambda X.$$

Definimos la **aplicación exponencial** como la aplicación

$$\begin{aligned}\exp: \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \exp_X(1).\end{aligned}$$

Vamos a dar una compilación de las principales propiedades de esta aplicación.

Proposición 2.2 ([War13]). *Sean G un grupo de Lie, \mathfrak{g} su álgebra de Lie asociada y $X \in \mathfrak{g}$. Entonces:*

- i) $\exp((s+t)X) = \exp(sX)\exp(tX)$.
- ii) $\exp(-X) = \exp(X)^{-1}$.
- iii) *La aplicación exponencial es diferenciable y su diferencial en el 0 es la identidad. Es decir, la aplicación exponencial es un difeomorfismo local entre \mathfrak{g} y G .*
- iv) *La curva $\gamma(t) = \exp(tX)$ verifica que $g \cdot \exp(tX) = l_g(\gamma(t))$. Por tanto, los campos invariantes a la izquierda son completos, es decir, la aplicación exponencial está definida en todo \mathbb{R} .*
- v) *Dado un homomorfismo de grupos de Lie, $\phi: H \longrightarrow G$, se tiene que*

$$\phi \circ \exp = \exp \circ d\phi$$

Observación 2.4. El nombre *exponencial* viene del hecho de que, en el caso de los grupos de Lie que son de matrices, esta aplicación coincide con la aplicación exponencial de matrices. Ilustramos este hecho en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.1. Recordamos que

$$gl(n, \mathbb{K}) := \{A \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{K})\}.$$

Veamos cómo es la aplicación

$$\exp: gl(n, \mathbb{C}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C}).$$

Consideremos la exponencial de matrices dada por

$$e^A := I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots,$$

con $A \in gl(n, \mathbb{C})$ e I la matriz identidad. Lo primero de lo que debemos asegurarnos es que esta serie es convergente para cada una de las matrices de $gl(n, \mathbb{C})$. Para ver esto es suficiente con ver que converge en los dominios acotados de $gl(n, \mathbb{C})$. Es fácil

ver que las entradas, $a_{i,j}$, para cualquier matriz, A , están acotadas en esta región, es decir, $a_{i,j} \leq \alpha$. Se prueba por inducción que las entradas de la k -ésima potencia de A están acotados por $n^{k-1}\alpha$. Por tanto, y a partir del criterio M de Weierstrass, se obtiene que la exponencial de matrices converge uniformemente para todo A en una región acotada.

Es claro que, para cada $B \in gl(n, \mathbb{C})$, la aplicación $C \mapsto BC$ es continua. Tenemos que si $B \in GL(n, \mathbb{C})$, entonces

$$e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}.$$

Dado que, para cualquier $A \in gl(n, \mathbb{C})$, podemos conseguir un $B \in GL(n, \mathbb{C})$ con la propiedad de que $BAB^{-1} = D$, siendo D la matriz de Jordan, es decir, es una matriz con ceros bajo la diagonal. Sean $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ las entradas de la diagonal de la matriz D , los autovalores de la misma. Entonces

$$\det(Be^AB^{-1}) = \det(e^{BAB^{-1}}) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} \neq 0.$$

Es decir, $A \in GL(n, \mathbb{C})$. Por tanto, la exponencial de matrices está bien definida. Además, se observa que, dado que la suma de los autovalores determinan la traza de la matriz, se deduce que

$$\det(e^A) = e^{Tr(A)}.$$

Para concluir, es claro que la asignación $t \mapsto e^{tA}$ es una aplicación diferenciable, pues las entradas de la matriz son series de potencias con infinito radio de convergencia, por tanto, es un grupo uniparamétrico de \mathbb{R} en $GL(n, \mathbb{C})$ (esta aplicación es un homomorfismo pues $e^{A+B} = e^Ae^B$ si $AB = BA$) cuyo tangente en el 0 es la propia matriz A . Por tanto, dado que la aplicación exponencial es única, tenemos que esta debe coincidir necesariamente con la exponencial de matrices.

Observación 2.5. A partir del ejemplo anterior se deduce, de manera análoga, que la aplicación exponencial

$$\exp: \text{End}(V) \longrightarrow \text{Aut}(V),$$

V espacio vectorial, coincide, de igual manera, con la exponencial de matrices.

A partir del ejemplo anterior y del resultado que citamos a continuación podemos calcular de una manera directa las subálgebras asociadas a los subgrupos de $GL(n, \mathbb{C})$.

Proposición 2.3. Sean $A < G$ y $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ un subgrupo de un grupo de Lie y un subespacio vectorial del álgebra de Lie asociada, respectivamente. Sea $U \subset \mathfrak{g}$ un entorno abierto del 0 que es difeomorfo por la aplicación exponencial a un abierto $V \subset G$. Supongamos que

$$\exp(U \cap \mathfrak{a}) = A \cap V,$$

entonces A , con la topología relativa a G , es un subgrupo de Lie, \mathfrak{a} es una subálgebra de \mathfrak{g} y \mathfrak{a} es la subálgebra de Lie asociada a A .

Pasamos a dar algunos ejemplos de grupos de Lie junto con sus álgebras asociadas.

Ejemplo 2.2. 1) Consideremos el grupo general lineal de matrices no singulares $GL(n, \mathbb{C})$. Como consecuencia directa del ejemplo 2.1 tenemos que

$$T_e GL(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

2) Consideremos el grupo

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}.$$

Claramente es un grupo con el producto de matrices, además, se ve trivialmente que tiene estructura de grupo de Lie. Veamos que forma tiene su álgebra de Lie asociada. Para calcularla es suficiente con ver qué la diferencial del determinante, con coeficientes reales, es la traza, tal y como hemos visto en el ejemplo 2.1. Con esto se observa directamente que

$$T_e SL(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \text{Tr}(A) = 0\}.$$

Ejemplo 2.3. Uno de los grupos que más nos va a interesar, por sus propiedades métricas, es el grupo de Heisenberg. Damos su expresión matricial de la siguiente forma:

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Podemos considerar, a partir de la proposición anterior, la aplicación exponencial entre su álgebra, \mathfrak{h} , y H . Es decir

$$\exp : \mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \longrightarrow H < GL(3, \mathbb{R}).$$

Sabemos que la derivada de la aplicación $X \mapsto \exp(tX)$ en el 0 es la aplicación identidad entre las álgebras, es decir, tenemos que $\frac{d}{dt} \exp(tX)|_{t=0} = X$. Por tanto un elemento genérico del grupo que sea imagen por la aplicación exponencial,

$$\exp(tX) = \begin{pmatrix} 1 & x(t) & y(t) \\ 0 & 1 & z(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

debe satisfacer que

$$\frac{d}{dt} \exp|_{t=0} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 & x(t) & y(t) \\ 0 & 1 & z(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & x'(0) & y'(0) \\ 0 & 0 & z'(0) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el álgebra de Lie del grupo de Heisenberg puede escribirse como

$$\mathfrak{h} = \left\langle s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Si estudiamos como es el corchete de estos campos obtenemos que

$$[s, f] = h$$

y 0 para el resto. Estudiaremos más detenidamente este hecho en secciones posteriores.

Para terminar esta sección, vamos a dar un ejemplo de cómo las representaciones juegan un papel esencial en el estudio de los grupos de Lie.

Ejemplo 2.4. Consideremos en \mathbb{R}^3 la operación

$$(s, t, u) \cdot (x, y, z) = (s + x, t + y, u + z + \frac{1}{2}(sy - tx)).$$

Es directo comprobar que (\mathbb{R}^3, \cdot) es un grupo de Lie. Veamos cómo es su álgebra asociada. Consideremos los campos

$$\begin{aligned} X^1 &= \partial_x - \frac{1}{2}y\partial_z \\ X^2 &= \partial_y + \frac{1}{2}x\partial_z \\ X^3 &= \partial_z. \end{aligned}$$

Es claro que estos campos satisfacen que $dl_{(s,t,u)} \circ X^i = X^i \circ l_{(s,t,u)}$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ y para todo $(s, t, u) \in \mathbb{R}^3$. Por tanto, estos campos, dado que son independientes, forman una base del álgebra de Lie asociada al grupo (\mathbb{R}^3, \cdot) . Si estudiamos su corchete de Lie, que esta vez se corresponde con el corchete de Lie sobre campos, tenemos que

$$[X^1, X^2] = X^3$$

y el resto de relaciones nulas. No es casualidad que se tenga la misma relación que en el ejemplo 2.3. Detengámonos un momento a estudiar este hecho. Consideremos un elemento del álgebra de Heisenberg,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}.$$

Sabemos que por la aplicación exponencial podemos trasladar los elementos del álgebra a elementos del grupo, en este caso, tenemos que

$$\begin{aligned}\exp(X) &= I + \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a & c + \frac{1}{2}ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Consideremos, a la vista de lo anterior, la aplicación

$$\begin{aligned}F: (\mathbb{R}^3, \cdot) &\longrightarrow H < GL(3, \mathbb{R}) \\ (x, y, z) &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Esta aplicación es un homomorfismo de grupos de Lie, en efecto, es claro que como aplicación entre variedades, es diferenciable, veamos que es un homomorfismo de grupos. Sean $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2)$ elementos de (\mathbb{R}^3, \cdot) , se tiene que

$$\begin{aligned}F(u \cdot v) &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - y_1x_2)) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_2 & z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + x_1y_2 \\ 0 & 1 & y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = F(x_1, y_1, z_1)F(x_2, y_2, z_2).\end{aligned}$$

Por tanto, es una representación. Pero podemos decir más, es fácil de comprobar que esta aplicación es, en realidad, un isomorfismo de grupos de Lie. Por tanto, el grupo (\mathbb{R}^3, \cdot) no es más que la estructura del grupo de Heisenberg en el espacio \mathbb{R}^3 .

Este último ejemplo pone de manifiesto un hecho que es, con carácter general, falso salvo en el caso de que el grupo tenga una propiedad adicional, como veremos más adelante, que sea *nilpotente*: se pondrá de manifiesto que la representación que se ha dado, partiendo de la aplicación exponencial, es un isomorfismo.

2.3. Operador adjunto

Una operación natural que se tiene en el contexto de grupos es la conjugación.

Definición 2.10. Sean un grupo de Lie, G , y un elemento, $g \in G$. Se tiene la conjugación

$$\begin{aligned}C_g: G \times G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto ghg^{-1}.\end{aligned}$$

Se define el **operador adjunto** como la diferencial en la identidad del operador conjugación, es decir,

$$\text{Ad}_g := d(C_g)_e: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}.$$

Este operador induce una acción de G en \mathfrak{g} ;

$$\begin{aligned} G \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (g, X) &\longmapsto \text{Ad}_g X. \end{aligned}$$

Es decir, tenemos una aplicación bien definida del grupo G en los automorfismos del álgebra, $\text{Aut}(\mathfrak{g})$, dada por

$$\text{Ad}: G \longrightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}).$$

Esta aplicación se conoce como la **representación adjunta** de G . Su diferencial, $\text{ad} := d(\text{Ad})$, se conoce como la **aplicación adjunta** en \mathfrak{g} .

Observación 2.6. Por cómo se define la aplicación adjunta, se comprueba directamente que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{ad}} & \text{End}(\mathfrak{g}) \\ \downarrow \text{exp} & & \downarrow \text{exp} \\ G & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

conmuta, es decir, $\text{exp} \circ \text{ad} = \text{Ad} \circ \text{exp}$.

A la vista de este hecho, se concluye que el operador adjunto se puede escribir como $\text{ad}_X Y = [X, Y]$.

Ejemplo 2.5. Consideremos en $sl(2, \mathbb{R})$, los generadores

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo que acabamos de decir, el operador adjunto, fijada una de las entradas, no es más que la acción del corchete. Tenemos las relaciones

$$[e, f] = 2f, \quad [e, h] = -2h, \quad [f, h] = e.$$

Tenemos definidas las aplicaciones

$$\begin{array}{lll} \text{ad}_e: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} & \text{ad}_f: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} & \text{ad}_h: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ e \longmapsto 0 & e \longmapsto -2f & e \longmapsto 2h \\ f \longmapsto 2f & f \longmapsto 0 & f \longmapsto -e \\ h \longmapsto -2h & h \longmapsto e & h \longmapsto 0 \end{array}$$

Más adelante veremos que gracias a este operador es posible dar la relación de conmutación de la operación del grupo con la aplicación exponencial.

Capítulo 3

Medida y dimensión de Hausdorff

En los capítulos anteriores hemos presentado las herramientas básicas sobre grupos de Lie que vamos a usar a lo largo de todo el trabajo, de igual manera vamos a necesitar algunas nociones de teoría de la medida. Concretamente vamos a necesitar la noción de medida y dimensión de Hausdorff. Las referencias más usadas para desarrollar la exposición de este capítulo han sido tomadas de [EG15] y [LD17a].

Definición 3.1. Sea M un conjunto no vacío. Una **distancia** es una función $d: M \times M \longrightarrow [0, +\infty]$ con las propiedades siguientes:

- i) $d(x, y) = 0 \iff x = y, \forall x, y \in M$.
- ii) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M$.
- iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in M$.

Al par (M, d) es lo que se conoce como espacio métrico. Prescindiremos de dar la métrica y nos referiremos al espacio métrico como M .

Definición 3.2. Una σ -álgebra sobre un conjunto no vacío, X , es una familia de subconjuntos de X , \mathfrak{F} , con las propiedades siguientes:

- i) $X, \emptyset \in \mathfrak{F}$.
- ii) Si $A, B \in \mathfrak{F}$, entonces $A \setminus B \in \mathfrak{F}$.
- iii) Para toda colección $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, disjunta de \mathfrak{F} se tiene que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}$.

Sea X es un espacio topológico, a la menor σ -álgebra que contiene a los abiertos de X la denominamos σ -álgebra de Borel de X .

Definición 3.3. Sea X un conjunto no vacío y sea \mathfrak{F} una σ -álgebra sobre X . Una **medida** sobre el par (X, \mathfrak{F}) es una función $\mu: \mathfrak{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ satisfaciendo que:

- i) $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{F}$ es una colección disjunta, entonces $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

A la terna (X, \mathfrak{F}, μ) se la denomina espacio de medida.

Con carácter general, para una colección $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se tiene que $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$. Si X es un espacio topológico decimos que μ es una medida de Borel si está definida sobre la σ -álgebra de Borel de X .

Definición 3.4. Sea X un conjunto. Una **medida exterior** sobre X es una aplicación $\mu^*: P(X) \rightarrow [0, +\infty]$, siendo $P(X)$ el conjunto de partes de X , con las propiedades:

- i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- ii) Si $A \subset B \subset X$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
- iii) Para toda sucesión de elementos de $P(X)$, $\{A_n\}$, se tiene que $\mu^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$.

Observación 3.1. Es claro que no toda medida es una medida exterior, pues debemos exigir que la σ -álgebra con la que estemos trabajando sea la del conjunto de partes del conjunto de partida. Igualmente, no toda medida exterior es una medida, pues no exigimos que cumpla la propiedad de ser numerablemente aditiva.

Definición 3.5. Sea X un conjunto y μ^* una medida exterior sobre X . Decimos que un conjunto $B \in P(X)$ es μ^* -medible si satisface que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap (X \setminus B)), \quad \forall A \in P(X).$$

La relación que existe entre una medida y una medida exterior la da el resultado siguiente.

Teorema 3.1 (Carathéodory). *Sea X un conjunto y sea μ^* una medida exterior definida sobre X . Consideremos la familia de conjuntos μ^* -medibles de X , \mathcal{M} . Entonces se tiene que \mathcal{M} es una σ -álgebra y que (X, \mathcal{M}, μ^*) es un espacio de medida.*

Una demostración de este resultado puede encontrarse en [Fol13].

Un vez vistas las definiciones de espacio métrico y de medida, pasamos a dar la definición de medida de Hausdorff.

Definición 3.6. Sean M un espacio métrico, $S \subset M$, $Q \geq 0$, $\delta > 0$. Definimos

$$\mathcal{H}_\delta^Q(S) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \text{diám}(E_i)^Q : S \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i, \quad \text{diám}(E_i) < \delta \quad \forall i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Donde $E_i \subset M$ y $\text{diám}(E_i) := \sup\{d(x, y) : x, y \in E_i\}$.

Se define la **Q-medida de Hausdorff** como

$$\mathcal{H}^Q(S) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^Q(S) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^Q.$$

Observación 3.2. Es fácil darse cuenta de que realmente la Q -medida de Hausdorff no define una medida sobre el conjunto de partes del espacio métrico. Sin embargo, la medida de Hausdorff define una medida exterior y lo que consideramos como σ -álgebra, aplicando el teorema de Caratheodory, es el espacio de conjuntos que son medibles para esta medida exterior.

Vamos a pasar a dar una proposición que nos va permitir dar la definición de dimensión de Hausdorff.

Proposición 3.1. *Sea M un espacio métrico. Existe un valor $Q_0 \in [0, +\infty]$ de tal manera que*

$$\mathcal{H}^Q(M) = 0 \quad \forall Q > Q_0 \quad y \quad \mathcal{H}^Q(M) = \infty \quad \forall Q < Q_0$$

Demostración. Consideremos el conjunto

$$Q_0 := \inf\{Q \geq 0: \mathcal{H}^Q(M) \neq \infty\}.$$

Claramente $\mathcal{H}^Q(M) = \infty$ si $Q < Q_0$. Además, si $Q_0 = \infty$, ya hemos terminado.

Supongamos, por tanto, que $Q_0 < \infty$. Sea $Q > Q_0$ y sea $Q' \in [Q_0, Q)$. Por cómo se ha definido Q_0 es claro que $\mathcal{H}^{Q'}(M) = K < \infty$, además, por la definición de la medida de Hausdorff, se tiene que, para todo $\delta \in (0, 1)$, $\mathcal{H}_\delta^{Q'}(M) \leq K$. Por tanto, debe existir una colección $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$, $\text{diám}(E_i) < \delta$ y $\sum_{i=0}^{\infty} \text{diám}(E_i)^{Q'} < K + 1$. Además, dado que para cada E_i se tiene que $\text{diám}(E_i)^Q < \delta^Q$ y $\text{diám}(E_i)^{Q'} < \delta^{Q'}$, tenemos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \text{diám}(E_i)^Q \leq \delta^{Q-Q'} \sum_{i=0}^{\infty} \text{diám}(E_i)^{Q'} < (K + 1)\delta^{Q-Q'}.$$

Finalmente, haciendo $\delta \rightarrow 0$, obtenemos el resultado. □

A partir de este resultado lo que concluimos es que, de existir, la medida de Hausdorff es finita y no nula para un único Q . Este hecho motiva la siguiente definición.

Definición 3.7. Sea M un espacio métrico. Definimos la **dimensión de Hausdorff** como

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{H}} M &:= \inf\{Q \geq 0: \mathcal{H}^Q(M) = 0\} = \\ &= \inf\{Q \geq 0: \mathcal{H}^Q(M) \neq \infty\} = \\ &= \sup\{Q \geq 0: \mathcal{H}^Q(M) = \infty\} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Una vez tenemos esta definición, nos puede interesar calcular la dimensión de Hausdorff de espacios métricos. La siguiente proposición nos es de gran utilidad para tal fin.

Proposición 3.2. Sean M un espacio métrico y μ una medida de Borel sobre M . Supongamos que existen constantes $Q > 0$, $C > 1$ y $R > 0$ de manera que, para todo $p \in M$ y para todo $r \in (0, R]$,

$$\frac{1}{C}r^Q \leq \mu(B(p, r)) \leq Cr^Q.$$

Donde $B(p, r)$ denota la bola de centro p y radio r en la métrica definida en M . Entonces se cumple que

$$i) \mathcal{H}^Q(B(p, r)) \in (0, \infty).$$

$$ii) \dim_{\mathcal{H}}(B(p, r)) = Q.$$

Demostración. Veamos primero que $\mathcal{H}^Q(B(p, r)) < \infty$. Sean $r \in (0, R)$ y $\delta \in (0, R - r)$. Consideremos una colección finita de puntos $\{p_i\}_{i=1}^N \subset B(p, r)$, con la propiedad de que $d(p_i, p_j) > \delta$ para todo $i \neq j$ y maximal en el sentido de que si se considera otro punto p_0 , que no está en la colección anterior, hay un p_i dentro de la colección anterior con la propiedad de que $d(p_0, p_i) < \delta$. Esta colección finita existe. En efecto, consideremos una colección de puntos $\{p_i\}_{i=1}^k \subset B(p, r)$ con la propiedad deseada, es claro que las bolas $B(p_i, \delta/2)$ son todas disjuntas, por tanto, por hipótesis, tenemos que

$$\begin{aligned} k \frac{\delta^Q}{2^Q C} &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{\delta}{2}\right)^Q \frac{2}{C} \leq \sum_{i=1}^k \mu(B(p_i, \delta/2)) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^k B(p_i, \delta/2)\right) \leq \mu(B(p, R)) \leq CR^Q. \end{aligned}$$

Es decir, el valor k , que es entero, está acotado, por tanto, existe un entero N , maximal con la propiedad que buscamos.

A partir de la maximalidad de la colección anterior tenemos que $B(p, r) \subset \bigcup_{i=1}^N B(p_i, \delta)$, por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{2\delta}^Q(B(p, r)) &\leq \sum_{i=1}^N \text{diám}(B(p_i, \delta))^Q \leq N(2\delta)^Q = \\ &= 4^Q C N \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{2}\right)^Q \leq 4^Q C \sum_{i=1}^N \mu(B(p_i, \delta/2)) \leq \\ &\leq 4^Q C \mu(B(p, R)) < \infty. \end{aligned}$$

Veamos ahora que la medida es no nula, es decir, que $\mathcal{H}^Q(B(p, R)) > 0$. Sean $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ y $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset M$ de manera que $\text{diam}(E_i) < \delta$ para cada i , $B(p, R) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ y satisfaciendo que

$$\mathcal{H}_{\delta}^Q(B(p, R)) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(E_i)^Q - \varepsilon.$$

Podemos encontrar esta colección por la definición de la medida de Hausdorff y porque ya sabemos que la medida necesariamente tiene que ser finita. Sean $p_i \in E_i$, claramente, $E_i \subset \bar{B}(p_i, \text{diám}(E_i))$ y, por hipótesis,

$$\mu(B(p_i, \text{diám}(E_i))) \leq C \text{diám}(E_i)^Q.$$

Por tanto, dado que

$$B(p, R) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{B}(p_i, \text{diám}(E_i)),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^Q(B(p, R)) &\leq \frac{1}{C} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B(p_i, \text{diám}(E_i))) - \varepsilon \geq \\ &\geq \frac{1}{C} \mu(B(p, R)) - \varepsilon \geq \frac{1}{C^2} R^Q - \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Es decir, $\mathcal{H}^Q(B(p, R)) > \frac{1}{C^2} R^Q - \varepsilon > 0$.

Una vez hemos demostrado *i)* dado que la medida es no nula, ni infinita, por la proposición 3.1, necesariamente, dicha Q es la que nos da la dimensión de Hausdorff.

□

Observación 3.3. Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es que, si el espacio M admite un recubrimiento numerable por bolas de radio R , se tiene que $\dim_{\mathcal{H}}(M) = Q$.

Antes de terminar este capítulo vamos a ver un resultado simple pero que nos será de utilidad para calcular la dimensión de Hausdorff de variedades riemannianas.

Definición 3.8. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Decimos que una aplicación continua, $f: X \rightarrow Y$, es **Lipschitz**, con constante $C > 0$, si para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y).$$

Decimos que dos espacios métricos son localmente **bi-Lipschitz** si, para cada $x \in X$, existen entornos abiertos, $U \subset X$ y $V \subset Y$, de x y $f(x)$, respectivamente, y una aplicación $f: U \rightarrow V$ que es inyectiva, un homeomorfismo sobre su imagen y cuya inversa también es Lipschitz. Diremos que los espacios son bi-Lipschitz si existe un aplicación $f: X \rightarrow Y$ que es un homeomorfismo, es Lipschitz y de inversa Lipschitz.

Observación 3.4. Las variedades riemannianas son espacios localmente bi-Lipschitz a sus espacios tangentes. Esto es a causa de la aplicación exponencial en el contexto de las variedades riemannianas, pues esta aplicación da una isometría local entre una variedad riemanniana y su espacio tangente en cada punto. Para una presentación detallada puede consultarse [Car92].

El siguiente resultado relaciona la dimensión de Hausdorff con la propiedad de ser bi-Lipschitz

Proposición 3.3. *La dimensión de Hausdorff es bi-Lipschitz invariante.*

Demostración. Supongamos que es $f: X \rightarrow Y$ la aplicación que nos da la propiedad de ser bi-Lipschitz, vamos a fijar un $\delta > 0$ y vamos a considerar un recubrimiento de X por abiertos $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tales que $\text{diám}(U_i) \leq \delta$. Es claro que $\text{diám}(U_i) \leq C \text{diám}(f(U_i))$, para cada $i \in \mathbb{N}$ y siendo C la constante de Lipschitz asociada a la aplicación f . Supongamos que el espacio X tiene dimensión de Hausdorff Q , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^Q(Y) = \mathcal{H}_\delta^Q(f(X)) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(f(U_i))^Q \leq \\ &\leq C^Q \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^Q. \end{aligned}$$

Tomando ínfimos sobre δ encontramos que la dimensión de Hausdorff de Y es menor que la de X , razonando de manera análoga con la inversa de f encontramos que ambas dimensiones deben coincidir.

□

Capítulo 4

El grupo de Heisenberg

Lo que se pretende en este capítulo es presentar las buenas propiedades métricas que posee el grupo de Heisenberg. Se muestran de manera detallada sus propiedades principales y se calculan sus geodésicas. En capítulos posteriores se generalizarán los resultados vistos en este a unos grupos que tienen estas mismas buenas propiedades, los grupos de Carnot. Las líneas que se han seguido para su exposición son las dadas en [LD17a] y [Mon02].

Ya vimos en los ejemplos 2.3 y 2.4 tanto la presentación de este grupo como que un espacio isomorfo al grupo de Heisenberg era el espacio (\mathbb{R}^3, \cdot) . Vamos a trabajar sobre este espacio y vamos a definir en él una métrica particular.

Consideremos en (\mathbb{R}^3, \cdot) los campos

$$\begin{aligned} X &= \partial_x - \frac{1}{2}y\partial_z \\ Y &= \partial_y + \frac{1}{2}x\partial_z. \end{aligned}$$

Ya vimos que estos campos, bajo la acción del corchete de Lie, conforman una base del espacio tangente a \mathbb{R}^3 , que es isomorfo a él mismo. Recordemos que $[X, Y] = \partial_z$. A partir de estos dos campos definimos la noción de curva horizontal y métrica de Carnot-Caratheodory.

Definición 4.1. Diremos que una curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es **horizontal** si existen funciones $u_1, u_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que

$$\gamma'(t) = u_1(t)X_{\gamma(t)} + u_2(t)Y_{\gamma(t)},$$

es decir, si para cada $t \in I$, $\gamma'(t) \in \langle X_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)} \rangle$. Definimos la **longitud horizontal** como

$$L(\gamma) = \int_I \sqrt{u_1(t)^2 + u_2(t)^2} dt.$$

Definimos la distancia de **Carnot-Carathéodory** como

$$d_{cc}(p, q) := \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ horizontal que conecta } p \text{ y } q\}.$$

y $d_{cc}(p, q) = \infty$ en el caso de no existir tal curva.

A partir de esta definición podemos considerar el espacio métrico $(\mathbb{R}^3, \cdot, d_{cc})$, que es lo que se conoce como el grupo de Heisenberg como variedad subriemanniana. Veamos como son las curvas que minimizan la longitud, es decir, las geodésicas en este espacio, para ello vamos a caracterizar las curvas horizontales en el espacio como un problema de maximizar el área que encierra una curva dada.

Proposición 4.1. *Una curva, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) : I \rightarrow (\mathbb{R}^3, d_{cc})$, definida sobre el grupo de Heisenberg con la métrica d_{cc} es horizontal si, y solo si,*

$$z'(t) = \frac{1}{2}(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)).$$

Demostración. Partimos de que la curva dada es horizontal, esto es, $\gamma'(t) \in \langle X_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)} \rangle$, es decir, que existen funciones u_1, u_2 de manera que

$$\gamma'(t) = u_1(t)(\partial_x - \frac{1}{2}y\partial_z) + u_2(t)(\partial_y + \frac{1}{2}x\partial_z).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} x'(t) &= u_1(t) \\ y'(t) &= u_2(t) \\ z'(t) &= \frac{1}{2}(x(t)u_2(t) - y(t)u_1(t)). \end{aligned}$$

El recíproco es directo, partimos de que

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), \frac{1}{2}(x(t)y'(t) - y(t)x'(t))),$$

es decir, tomando $u_1(t) = x'(t)$ y $u_2(t) = y'(t)$ obtenemos el resultado deseado. \square

Observación 4.1. A partir del resultado anterior se puede concluir que las curvas que son horizontales en el grupo de Heisenberg son precisamente aquellas curvas, $(x(t), y(t), z(t))$, que toman en la coordenada $z(t)$ el área que encierra la curva plana $(x(t), y(t))$. En efecto, consideremos la forma de área de \mathbb{R}^2 , $dx \wedge dy$, esta forma es la diferencial de la 1-forma $\alpha = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$. Aplicando el teorema de Stokes, dada una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ obtenemos que el área que encierra la curva γ es

$$\text{área}(\gamma) = \int_{\gamma} \alpha = \int_0^t \alpha \circ \gamma ds.$$

Esto es, si definimos

$$z(t) := \int_0^t \alpha \circ \gamma ds \tag{4.1}$$

obtenemos que, diferenciando en t ,

$$z'(t) = \frac{1}{2}(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)).$$

Por la proposición anterior, la curva dada por $(\gamma(t), z(t))$ va a ser horizontal y va a medir el área de la curva dada por la proyección sobre las dos primeras coordenadas. Cuando hablamos de área, dado que no se ha impuesto que la curva γ sea cerrada, lo que estamos tratando es el área que encierra los extremos de la curva unidos por el segmento que los conecta. El problema de minimizar la longitud de la curva que encierra un área fijada de antemano es un problema clásico, el problema de *Dido* y, en la métrica euclídea plana, la solución son fragmentos de circunferencia.

Como consecuencia directa de la observación anterior tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 4.1. *Sea $\gamma = (x(t), y(t), z(t)): I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva horizontal, es decir, por la proposición 4.1, cumple que $x'(t) = u_1(t)$ e $y'(t) = u_2(t)$ y sea $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación proyección canónica. Entonces*

$$\pi(\gamma'(t)) = (u_1(t), u_2(t))$$

y

$$L(\gamma) = \int_I \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = L_{Euclídea}(\pi \circ \gamma).$$

Corolario 4.2. *Cualesquiera dos puntos de \mathbb{R}^3 pueden ser conectados por una curva horizontal.*

Observación 4.2. El corolario anterior contiene la esencia de lo que pretende estudiar el trabajo, a saber, aquellos grupos de Lie que permiten definir una métrica basada en las curvas horizontales del grupo que es finita.

Corolario 4.3. *Consideremos un punto de \mathbb{R}^3 , $(x(1), y(1), z(1))$. La curva plana $(x(t), y(t))$ que encierra área $z(1)$ y que minimiza $L_{Euclídea}(x(t), y(t))$ es un trozo de circunferencia. Por tanto, las curvas que minimizan la longitud en el grupo de Heisenberg, que parten del origen, son la elevación de un fragmento de circunferencia si $z \neq 0$ y una recta si $z = 0$.*

A partir de este punto podemos centrarnos en parametrizar las geodésicas de este espacio. Necesitamos *eleva*r circunferencias en el plano. Consideremos una circunferencia de longitud $\frac{2\pi}{|k|}$, $k \neq 0$. Parametrizamos la circunferencia considerando que pasa por el origen en $t = 0$, es decir, toma una expresión de la forma

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{\cos(kt) - 1}{k}, \frac{\sin(kt)}{k} \right), \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{|k|}.$$

A partir de este círculo podemos construir cualquier otro considerando una rotación de ángulo $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, es decir, tomando una transformación de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cos(kt) - 1}{k} \\ \frac{\sin(kt)}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \frac{\cos(kt) - 1}{k} - \sin(\theta) \frac{\sin(kt)}{k} \\ \sin(\theta) \frac{\cos(kt) - 1}{k} + \cos(\theta) \frac{\sin(kt)}{k} \end{pmatrix}$$

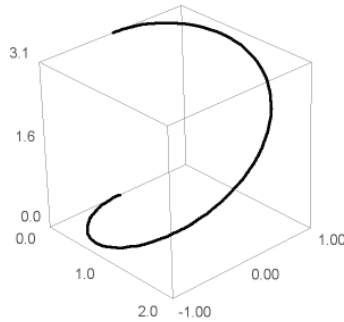
Ahora podemos calcular la tercera coordenada a partir de la expresión (4.1), es decir, como la integral

$$z(T) = \int_0^T \frac{1}{2} (x dy - y dx) = \dots = \frac{1}{2k^2} (Tk - \sin(kT)).$$

Es decir, las geodésicas que toman valor en el origen en $t = 0$ son curvas $\gamma: [0, 2\pi/k] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la forma

$$\begin{cases} x(t) &= \cos(\theta) \frac{\cos(kt) - 1}{k} - \sin(\theta) \frac{\sin(kt)}{k} \\ y(t) &= \sin(\theta) \frac{\cos(kt) - 1}{k} + \cos(\theta) \frac{\sin(kt)}{k} \\ z(t) &= \frac{1}{2k^2} (tk - \sin(kt)). \end{cases}$$

La siguiente figura muestra la forma que tienen las geodésicas en el grupo de Heisenberg con la métrica de Carnot-Carathéodory para los valores $k = 1$, $\theta = \pi$.



Finalmente, si consideramos el caso límite, en el que $k = 0$, lo que obtenemos es una curva de la forma

$$\begin{cases} x(t) &= -t \sin(\theta) \\ y(t) &= t \cos(\theta) \\ z(t) &= 0. \end{cases}$$

CAPÍTULO 4. EL GRUPO DE HEISENBERG

Es decir, cualquier recta que pasa por el origen y está en el plano $\{z = 0\}$ es una geodésica.

Ahora, para pasar a ver qué dimensión de Hausdorff tiene este espacio, vamos a estudiar como se comportan las dilataciones en el grupo de Heisenberg. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned}\delta_\lambda: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z).\end{aligned}$$

Siendo $\lambda > 0$.

Proposición 4.2. *Para todo $\lambda > 0$ y $p, q \in \mathbb{R}^3$ se tiene que*

- i) $\delta_\lambda(p \cdot q) = \delta_\lambda(p) \cdot \delta_\lambda(q)$.
- ii) δ_λ es un isomorfismo de grupos de Lie.
- iii) $d_{cc}(\delta_\lambda(p), \delta_\lambda(q)) = \lambda d_{cc}(p, q)$.

Demostración. Probar i) es directo, en efecto,

$$\begin{aligned}\delta_\lambda(p \cdot q) &= \delta_\lambda \left(p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3 + \frac{1}{2}(p_1 q_2 - p_2 q_1) \right) = \\ &= \left(\lambda p_1 + \lambda q_1, \lambda p_2 + \lambda q_2, \lambda^2 p_3 + \lambda^2 q_3 + \frac{\lambda}{2}(p_1 q_2 - p_2 q_1) \right) = \\ &= (\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda^2 p_3) \cdot (\lambda q_1, \lambda q_2, \lambda^2 q_3) = \delta_\lambda(p) \cdot \delta_\lambda(q).\end{aligned}$$

Para ver ii) es suficiente con encontrar el homomorfismo inverso, pero es evidente que es $\delta_{\frac{1}{\lambda}}$.

Pasamos a iii). Es claro ver que $(\delta_\lambda)_* X = \lambda X$ y $(\delta_\lambda)_* Y = \lambda Y$, siendo X e Y cualesquiera campos que, bajo la acción del corchete, generan una base del fibrado tangente a \mathbb{R}^3 . En efecto, fijada una base de campos $\{X, Y\}$ y un vector $v \in \mathbb{R}^3$ tenemos que

$$v = v_1 X + v_2 Y + v_3 [X, Y]$$

y la acción de la diferencial de la dilatación toma la forma

$$\delta_* v = \lambda v_1 X + \lambda v_2 Y + \lambda^2 v_3 [X, Y].$$

Es decir, que para los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ tenemos las igualdades deseadas.

Una vez visto esto, es claro que las distancias, bajo la imagen por δ , quedan multiplicadas por λ .

□

Como corolario directo de esto último, obtenemos que

Corolario 4.4. *En el grupo de Heisenberg se tiene que*

- i) $B_{dcc}(e, r) = \delta_r(B_{dcc}(e, 1))$.
- ii) $B_{dcc}(p, r) = l_p(\delta_r(B_{dcc}(e, 1)))$.
- iii) *Si vol representa la forma de volumen asociado a la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R}^3 , entonces se tiene que*

$$\text{vol}(B_{dcc}(p, r)) = r^4 \text{vol}(B_{dcc}(e, 1)).$$

- iv) $(x, y, z) \in B_{dcc}(0, 1) \iff (rx, ry, r^2z) \in B_{dcc}(0, r)$ para todo $r > 0$.

A partir de este corolario podemos ver cómo se comporta la forma de volumen en este espacio.

Proposición 4.3. *Sea Vol la forma de volumen de \mathbb{R}^3 . Entonces*

$$\text{vol}(B_{dcc}(p, r)) = r^4 \text{Vol}(B_{dcc}(e, 1))$$

para todo $r > 0$ y todo $p \in \mathbb{R}^3$.

Demostración. Partimos de la forma de volumen de \mathbb{R}^3 dada por la 3-forma $dx \wedge dy \wedge dz$. El volumen de la bola unidad viene determinado por el valor de esta forma sobre la bola unidad, es claro que $\text{Vol}(B_{dcc}(0, r)) = r^4 \text{Vol}(B_{dcc}(0, 1))$. Para concluir necesitamos poder trasladar este resultado a cualquier punto. En primer lugar, la aplicación trasladar a la izquierda, $l_p(q) = p \cdot q$, es una isometría, además preserva el volumen. En efecto, si vemos la aplicación dentro del grupo de Heisenberg como el producto de matrices, el jacobiano de esta aplicación siempre tiene determinante 1, pues se corresponde con una matriz triangular superior con unos en la diagonal. Por otro lado, la aplicación dilatación, δ_λ , satisface que

$$J(\delta_\lambda) = \det(d\delta_\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda^4,$$

siendo J el Jacobiano. A la vista de esto, tenemos la siguiente cadena de igualdades

$$\text{Vol}(B_{dcc}(p, r)) = \text{Vol}(l_p B_{dcc}(e, r)) = \text{Vol}(\delta_r(B_{dcc}(e, 1))) = r^4 (\text{Vol}(B_{dcc}(e, 1))).$$

□

A partir de aquí ya podemos calcular la dimensión de Hausdorff del grupo de Heisenberg con la métrica d_{cc} .

Proposición 4.4. *El espacio $(\mathbb{R}^3, \cdot, d_{cc})$ tiene dimensión de Hausdorff 4.*

Demostración. Debemos encontrar las constantes adecuadas para estar en condiciones de aplicar la proposición 3.2. Debemos encontrar una constante $C > 0$ de manera que

$$\frac{1}{C}r^4 \leq \text{Vol}(B_{dcc}(p, r)) \leq Cr^4.$$

Dado que el volumen de la bola unidad es finito en esta métrica, se puede tomar $C = \text{Vol}(B_{dcc}(0, 1))$ y, por la proposición inmediatamente anterior se tendrían las cotas deseadas.

□

Uno de los contrapuntos al que llegamos con este último resultado es que la dimensión de Hausdorff en esta variedad y su dimensión topológica no coinciden. Uno de los estudios que haremos será caracterizar la dimensión de Hausdorff en términos geométricos de aquellas variedades con una estructura similar a la del grupo de Heisenberg.

Capítulo 5

Grupos de Carnot

Ya hemos visto en el capítulo anterior que el grupo de Heisenberg tiene una estructura lo suficientemente rica como para permitir que cualesquiera dos puntos puedan unirse por una curva horizontal, es decir, que la métrica d_{cc} es finita en este grupo. Este capítulo lo vamos a dedicar a generalizar la situación que se tiene en este grupo, es decir, aquellos grupos que permiten definir una métrica de *Carnot-Carathéodory* finita. Estos grupos son los que se conocen como grupos de Carnot.

Ya hemos introducido a lo largo del capítulo 2 las nociones generales sobre los grupos de Lie. Vamos a centrarnos ahora en los grupos de Lie nilpotentes y estratificados.

5.1. Grupos de Lie nilpotentes y estratificados

Una excelente exposición y desarrollo de los resultados y nociones expuestas en esta sección se puede encontrar en [BLU07].

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Se construye la **serie central descendiente** como:

$$\begin{aligned}c^1\mathfrak{g} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ c^{k+1}\mathfrak{g} &= [\mathfrak{g}, c^k\mathfrak{g}]\end{aligned}$$

Definición 5.1. Un álgebra de Lie, \mathfrak{g} , se dice **nilpotente** si existe un $p \in \mathbb{N}$ de manera que $c^{p-1}\mathfrak{g} \neq 0$ y $c^p\mathfrak{g} = 0$. En este caso se dice que el álgebra de Lie es nilpotente de orden p .

Definición 5.2. Decimos que un subespacio I es un **ideal** de un álgebra de Lie, \mathfrak{g} , si se cumple que

$$[I, X] \subset I \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Definición 5.3. Una **estratificación** de un álgebra de Lie, \mathfrak{g} , es una descomposición, como espacio vectorial, de la forma

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r,$$

de manera que

$$\begin{cases} [V_1, V_{i-1}] = V_i & \text{para todo } 1 < i < r \\ [V_1, V_r] = \{0\}. \end{cases}$$

Siendo

$$[V_i, V_j] := \text{span}\{[X, Y] : X \in V_i, Y \in V_j\}.$$

A los elementos V_i se les denomina estratos y el valor r es el orden de la estratificación. Un álgebra se dirá **estratificada** si admite y tiene una estratificación asociada.

Definición 5.4. Un grupo de Lie se dice **estratificado** si es simplemente conexo y posee un álgebra de Lie estratificada.

Observación 5.1. Una estratificación queda totalmente determinada por el primer estrato. En efecto, directamente por la definición tenemos que, para un estrato cualquiera, se tiene que

$$V_k = [V_1, V_{k-1}] = [V_1, [V_1, V_{k-2}]] = \cdots = [V_1, [V_1[\cdots [V_1, V_1]\cdots]].$$

Ejemplo 5.1. El grupo de Heisenberg, con álgebra \mathfrak{h} , es un grupo estratificado de orden 2. En efecto, si consideramos la base del álgebra, dada por los campos $\{X, Y, Z\}$, ya vimos que $[X, Y] = Z$ y que el resto de corchetes son nulos, por tanto, es suficiente con considerar

$$\mathfrak{h} = V_1 \oplus V_2,$$

con $V_1 = \langle X, Y \rangle$ y $V_2 = \langle Z \rangle$.

Observación 5.2. Es claro, de nuevo por la definición, que toda álgebra de Lie estratificada es nilpotente del mismo orden que la estratificación. Sin embargo, el recíproco es, en general, falso, existen álgebras nilpotentes que no admiten una estratificación. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo 5.2. Consideremos el álgebra de Lie

$$\mathfrak{g} = \langle X^1, \dots, X^7 \rangle$$

con relaciones no triviales en los corchetes

$$\begin{cases} [X^1, X^j] = X^{j+1} & \text{para todo } 1 < j < 7 \\ [X^2, X^3] = X^6 \\ [X^2, X^4] = -[X^2, X^5] = [X^3, X^4] = X^7. \end{cases}$$

Es claro que este grupo es nilpotente de orden 7 pues la relación más larga del corchete que puede darse es de la forma

$$[X^1[X^1, \overset{5)}{\cdots}[X^1, X^2]\cdots]] = X^7.$$

Tenemos que ver que esta álgebra no se puede estratificar. Supongamos que el álgebra se pudiera estratificar, en este caso, dado que el álgebra estratifica, podemos construir la estratificación tomando, para cada estrato, el estrato anterior y cocientarlo con las relaciones del corchete dentro de ese espacio. Es decir, en el caso de poderse estratificar, necesariamente la estructura de la estratificación viene dada por

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

con $V_k = c^k \mathfrak{g} / c^{k+1} \mathfrak{g}$, donde $c^0 \mathfrak{g} := \mathfrak{g}$. Si volvemos a nuestro ejemplo e intentamos aplicar este proceso obtenemos que, en el caso de poderse estratificar, los estratos quedarían de la forma

$$\begin{aligned} V_1 &= \langle X^1, X^2 \rangle \\ V_2 &= \langle X^3 \rangle \\ V_3 &= \langle X^4 \rangle \\ V_4 &= \langle X^5 \rangle \\ V_5 &= \langle X^6 \rangle \\ V_6 &= \langle X^7 \rangle. \end{aligned}$$

Es decir, obtenemos una partición en suma directa de espacios, sin embargo, por cómo se ha definido el corchete, esta partición no puede ser una estratificación del álgebra pues, si tal fuese el caso, se debería cumplir que $[V_1, V_3] = V_4$, pero $[V_1, V_3] \ni [X^2, X^4] = X^7 \notin V_4 = \langle X^5 \rangle$.

Observación 5.3. En el caso de las álgebras nilpotentes de orden 2 se cumple que son todas estratificadas. En efecto, supongamos que \mathfrak{g} es un álgebra nilpotente de orden 2, tomemos $V_2 = c^1 \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Tomemos V_1 de manera que $\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2$, es decir, tomamos $V_1 = \mathfrak{g} / c^1 \mathfrak{g}$. Es claro que para esta construcción se tiene que $[V_1, V_1] = V_2$ y que $[V_1, V_2] = 0$.

Vamos a pasar a estudiar más detenidamente las estratificaciones y las bases *adecuadas* para las álgebras estratificadas.

Definición 5.5. Sea G un grupo estratificado y

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

una estratificación de su álgebra asociada. Decimos que \mathfrak{B} es una base **adaptada** a la estratificación si

$$\mathfrak{B} = \{E_1^1, \dots, E_{n_1}^1, \dots, E_1^r, \dots, E_{n_r}^r\},$$

siendo $n_i = \dim(V_i)$ y tal que $\{E_1^i, \dots, E_{n_i}^i\}$ es una base de V_i .

Es claro que toda álgebra estratificada admite una base adaptada a la estratificación. Para que la estructura de las bases adaptadas sean consistentes necesitamos probar primero que toda álgebra estratificada admite, salvo isomorfismo, una única estratificación.

Proposición 5.1. *Sea G un grupo estratificado y sea \mathfrak{g} su álgebra asociada. Sean $\mathfrak{V} = \{V_1, \dots, V_r\}$ y $\mathfrak{W} = \{W_1, \dots, W_{r'}\}$ dos estratificaciones de \mathfrak{g} . Entonces $r = r'$ y $n_i = \dim(V_i) = m_i = \dim(W_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.*

Demostración. Consideremos la misma notación que en el enunciado del teorema. Dado que el álgebra es estratificada y de orden r , es nilpotente de mismo orden, por tanto la igualdad $r = r'$ es clara. Por ser las dos estratificaciones tenemos que

$$V_1 \subset W_1 \oplus \dots \oplus W_r$$

y

$$\begin{aligned} V_i &= [V_1, [V_1, [\dots [V_1, V_1] \dots]] \subset \\ &\subset [\{W_1 \oplus \dots \oplus W_r\}, \dots [\{W_1 \oplus \dots \oplus W_r\}, \{W_1 \oplus \dots \oplus W_r\}] \dots]. \end{aligned}$$

Separando en esta última inclusión cada una de las sumas directas, dado que el corchete está iterado i -veces, se tiene que

$$V_i \subset W_i \oplus \dots \oplus W_r.$$

Razonando de manera análoga e iterándolo para cada i obtenemos las inclusiones

$$\begin{aligned} V_1 &\subset W_1 \oplus \dots \oplus W_r, & W_1 &\subset V_1 \oplus \dots \oplus V_r \\ &\vdots & & \\ V_{r-1} &\subset W_{r-1} \oplus W_r, & W_{r-1} &\subset V_{r-1} \oplus V_r \\ &V_r &\subset W_r, & W_r &\subset V_r \end{aligned}$$

Leyendo de abajo arriba esto último, dado que tenemos ambas inclusiones, obtenemos que

$$\begin{aligned} V_1 \oplus \dots \oplus V_r &= W_1 \oplus \dots \oplus W_r \\ &\vdots \\ V_{r-1} \oplus V_r &= W_{r-1} \oplus W_r \\ V_r &= W_r. \end{aligned}$$

Calculando la dimensión de estos espacios tenemos que

$$\begin{aligned} n_1 + \dots + n_r &= m_1 + \dots + m_r \\ &\vdots \\ n_{r-1} + n_r &= m_{r-1} + m_r \\ n_r &= m_r. \end{aligned}$$

Es decir, que $n_i = m_i$ para cada $i \in \{1, \dots, r\}$.

□

Dado que un álgebra estratificada no depende de la estratificación, sólo de la propiedad de ser estratificada, la siguiente definición es consistente.

Definición 5.6. Dado un grupo de Lie estratificado, G , con álgebra estratificada

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r,$$

se define la **dimensión homogénea** de G como el número natural

$$Q := \sum_{i=1}^r i \cdot \dim(V_i).$$

Volveremos al estudio de esta dimensión más adelante.

Dentro de los grupos estratificados se pueden construir de manera directa, gracias a la existencia de bases adaptadas, las que se conocen como bases de Malcev.

Definición 5.7. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Una base ordenada $\{X_1, \dots, X_n\}$ es una base de **Malcev** del álgebra si cumple que, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$, $\mathfrak{g}_k := \text{span}\{X_1, \dots, X_k\}$ es un ideal de \mathfrak{g} , es decir, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k] \subset \mathfrak{g}_k$.

Proposición 5.2. *Toda álgebra estratificada admite una base de Malcev.*

Demostración. Tomemos una base adaptada del álgebra, $\{X_1, \dots, X_n\}$. Veamos que $\{X_n, \dots, X_1\}$ cumple la condición de ser una base de Malcev. Sea $k \in \{1, \dots, n\}$ y sea $\mathfrak{g}_k = \{X_1, \dots, X_k\}$. Supongamos que $X_k \in V_j$, con $j \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$V_{j+1} \oplus \cdots \oplus V_r \subset \mathfrak{g}_k \subset V_j \oplus \cdots \oplus V_r.$$

Por tanto se tiene que

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k] &\subset [V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, V_j \oplus \cdots \oplus V_r] \\ &\subset V_{j+1} \oplus \cdots \oplus V_r \subset \mathfrak{g}_k. \end{aligned}$$

□

Una vez estudiadas algunas de las propiedades de los grupos y álgebras estratificadas, antes de pasar propiamente a los grupos de Carnot, vamos a tratar los automorfismos distinguidos en estos grupos.

Definición 5.8. Sean \mathfrak{g} un álgebra estratificada con estratificación (V_1, \dots, V_r) , con dimensiones respectivas (n_1, \dots, n_r) , $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(r)}) \in \mathfrak{g}$, $X^{(i)} \in V_i$ y $\lambda > 0$. Definimos la **dilatación** de factor λ como la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \delta_\lambda: \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ X &\longmapsto (\lambda X^{(1)}, \dots, \lambda^r X^{(r)}). \end{aligned}$$

Proposición 5.3. *Toda dilatación es un homomorfismo de álgebras de Lie.*

Demostración. Se mantiene la notación usada hasta ahora. Es suficiente con ver que para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{g}$ se tiene que

$$\delta_\lambda([X, Y]) = [\delta_\lambda X, \delta_\lambda Y].$$

Consideremos la descomposición $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(r)})$, $Y = (Y^{(1)}, \dots, Y^{(r)})$, con $X^{(i)}, Y^{(i)} \in V_i$. Se tiene que

$$[X^{(i)}, Y^{(j)}] \in [V_i, V_j] \subset V_{i+j}.$$

Esta última inclusión se debe al hecho de que el álgebra es estratificada, en efecto, razonamos por inducción, es claro por la definición que $[V_1, V_1] \subset V_2$. Para ver el caso general tenemos que

$$[V_i, V_j] = [[V_1, V_{i-1}], [V_1, V_{j-1}]] \subset [V_1, [[V_1, V_{i-1}], V_{j-1}]].$$

Donde la última inclusión es consecuencia directa de la igualdad de Jacobi. Aplicando la hipótesis de inducción y usando que el álgebra es estratificada tenemos que

$$[V_1, [[V_1, V_{i-1}], V_{j-1}]] \subset [V_1, [V_i, V_{j-1}]] \subset [V_1, V_{i+j-1}] = V_{i+j}.$$

Continuando con lo que queremos ver, es claro que, usando la descomposición que hemos hecho y que $[V_i, V_j] \subset V_{i+j}$,

$$\begin{aligned} [\delta_\lambda X, \delta_\lambda Y] &= \sum_{i,j=1}^r [\lambda^i X^{(i)}, \lambda^j Y^{(j)}] = \sum_{i,j=1}^r \lambda^{i+j} [X^{(i)}, Y^{(j)}] = \\ &= \sum_{i,j=1}^r \delta_\lambda [X^{(i)}, Y^{(j)}] = \delta_\lambda [X, Y]. \end{aligned}$$

□

Observación 5.4. De la demostración anterior se deduce directamente que $\delta_\lambda^{-1} = \delta_{1/\lambda}$.

Ejemplo 5.3. Volviendo al álgebra de Heisenberg, con la estratificación vista, $V_1 = \langle X, Y \rangle$ y $V_2 = \langle Z \rangle$, la dilatación definida en esta sección coincide con la construida en la sección anterior. Es decir, que la dilatación tiene la forma

$$\delta_\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z), \quad x, y \in V_1, \quad z \in V_2.$$

Proposición 5.4. El determinante de la aplicación lineal $\delta_\lambda: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es λ^Q , siendo Q la dimensión homogénea de \mathfrak{g} .

Demostración. Sea (X_1, \dots, X_n) una base adaptada de \mathfrak{g} . En esta base, δ_λ se escribe como

$$\delta_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & \lambda^2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda^2 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda^r & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda^r \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el determinante de esta aplicación es $\lambda^{\sum_{i=1}^r i \dim(V_i)} = \lambda^Q$.

□

Observación 5.5. Volviendo al ejemplo principal, en el caso del álgebra de Heisenberg, se tiene que $Q = \dim(V_1) + 2 \dim(V_2) = 4$, con determinante de la dilatación λ^4 . No es casualidad que la dimensión homogénea del álgebra y la dimensión de Hausdorff del grupo coincidan.

Finalmente, damos la noción de dilatación sobre grupos de Lie estratificados, para ello usamos el Teorema 2.2.

Definición 5.9. Sean G un grupo estratificado, \mathfrak{g} su álgebra de Lie y δ_λ la dilatación de factor λ del álgebra. Definimos la **dilatación** de factor λ en G como la única aplicación $\delta_\lambda: G \rightarrow G$ de manera que $d\delta_\lambda = \delta_\lambda$. Usamos la misma notación para las dos aplicaciones pues se puede sobreentender cuando trabajamos con una o con otra.

Observación 5.6. De las propiedades de la exponencial se obtiene directamente que las dilataciones entre las álgebras y los grupos conmutan por la aplicación exponencial, es decir,

$$\delta_\lambda \circ \exp = \exp \circ \delta_\lambda$$

5.2. Fórmula BCH en grupos estratificados

Una de las preguntas naturales, que es común en al teoría de grupos de Lie, es si se cumple que $\exp(X + Y) = \exp(X)\exp(Y)$. La respuesta, con carácter más general, la da la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. Vamos a dar los resultados principales en el contexto de los grupos estratificados.

Definición 5.10. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie nilpotente. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, definimos la operación de **Campbell-Hausdorff** como

$$X * Y := \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{p_i + q_i \geq 1 \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{(\text{ad}_X)^{p_1} \circ (\text{ad}_Y)^{q_1} \circ \cdots \circ (\text{ad}_X)^{p_n} \circ (\text{ad}_Y)^{q_n} Y}{p_1! q_1! \cdots p_n! q_n! \sum_{j=1}^n (p_j + q_j)}.$$

Donde $\text{ad}_X(Y) = [X, Y]$ como ya comentamos en la Observación 2.6.

Observación 5.7. Los primeros términos de la operación de Campbell-Hausdorff son

$$X * Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] - [Y, [X, Y]]) + \cdots.$$

Realmente, dado que el álgebra es nilpotente, esta suma no se realiza en todo \mathbb{N} , tan solo en los primeros r términos, siendo r el orden de nilpotencia del álgebra, es decir, es una suma finita.

Vamos a enunciar los resultados más relevantes en este contexto, prescindiendo de sus demostraciones.

Teorema 5.1 (Baker-Campbell-Hausdorff). *Sea G un grupo conexo y simplemente conexo con álgebra de Lie asociada, \mathfrak{g} , nilpotente. Entonces la operación de Campbell-Hausdorff dota a \mathfrak{g} con la estructura de grupo de Lie, considerada como la variedad que se le induce por ser espacio vectorial. Además, la aplicación $\exp: (\mathfrak{g}, *) \longrightarrow G$ es un isomorfismo de grupos de Lie y cumple que*

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(X * Y).$$

La demostración de este resultado puede encontrarse en [Var13].

Dado que a toda álgebra de Lie de dimensión finita se le puede asociar de manera única, salvo isomorfismo, un grupo de Lie conexo y simplemente conexo (tercer teorema de Lie), tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.1. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita. Entonces $(\mathfrak{g}, *)$ es un grupo de Lie cuya álgebra asociada es isomorfa al álgebra \mathfrak{g} .*

Demostración. Consideremos el grupo de Lie conexo y simplemente conexo, G , cuya álgebra de Lie, \mathfrak{g}' es isomorfa a \mathfrak{g} . Dado que, por hipótesis, el álgebra de Lie es nilpotente, el álgebra de G también lo es. Aplicando el Teorema 5.1 concluimos que $(\mathfrak{g}, *)$ es un grupo de Lie.

Para ver la segunda parte del enunciado consideremos el isomorfismo $\varphi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$, la aplicación exponencial $\exp: \mathfrak{g}' \longrightarrow G$ y sea \mathfrak{g}^* el álgebra de Lie asociada al grupo $(\mathfrak{g}, *)$. Tenemos que ver que $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ como álgebras de Lie. Por el Teorema de Campbell-Hausdorff tenemos que la aplicación exponencial, vista como homomorfismo entre los grupos, $\exp: (\mathfrak{g}, *) \longrightarrow G$, es un isomorfismo. Por otro lado, es claro

que todo isomorfismo entre álgebras de Lie induce un isomorfismo entre los grupos que se inducen por la operación de Campbell-Hausdorff, por lo tanto, se tiene que la aplicación $\exp \circ \varphi: (\mathfrak{g}, *) \longrightarrow G$ es un isomorfismo de grupos de Lie. Si consideramos la diferencial de la aplicación anterior tenemos que en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{exp} \circ \varphi & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 (\mathfrak{g}, *) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathfrak{g}', *) & \xrightarrow{\text{exp}} & G \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{d(\text{exp} \circ \varphi)} & \mathfrak{g}' & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & \mathfrak{g} \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & d(\text{exp} \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} & &
 \end{array}$$

las flechas horizontales son isomorfismos, en particular se tiene que $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$.

□

Una vez introducidos los conceptos generales sobre las álgebras y grupos de Lie nilpotentes y estratificados pasamos al objeto en el que se centra el trabajo, los grupos de Carnot.

5.3. Grupos de Carnot

Consideremos un grupo de Lie, G , conexo, simplemente conexo y con álgebra de Lie asociada \mathfrak{g} . Sean $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ una estratificación de \mathfrak{g} y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar definido sobre V_1 con norma asociada $\|\cdot\| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Es claro que $V_1 \subset T_e G$ como espacio vectorial, además, para todo $x \in G$, las traslaciones a la izquierda inducen una distribución en todo el fibrado tangente TG de la forma

$$\mathcal{D} := \{(l_x)_* V_1 : x \in G\}. \quad (5.1)$$

De igual manera podemos inducir, a partir de la norma definida en V_1 , una norma de la forma

$$\begin{aligned}
 \|\cdot\|: \quad \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (v, x) &\longmapsto \|(l_x)_* v\| := \|v\|.
 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Es decir, lo que hacemos es fijar un producto escalar en V_1 e imponer una norma que es invariante por la izquierda en todo el álgebra. Es claro que con la operación del corchete podemos generar todo el álgebra a partir de V_1 . Con todo esto definimos los grupos de Carnot como sigue.

Definición 5.11. Manteniendo la notación anterior, sean un grupo de Lie, G , conexo, simplemente conexo y estratificado, \mathcal{D} y $\|\cdot\|$ definidas como en (5.1) y (5.2), respectivamente. A la terna $(G, \mathcal{D}, \|\cdot\|)$ es lo que se conoce como **grupo de Carnot**.

Ejemplo 5.4. Es claro, con todo lo que hemos visto, que el grupo de Heisenberg, H , es un grupo de Carnot. El grupo, con la estratificación de su álgebra dada por

$$\mathfrak{h} = V_1 \oplus V_2,$$

$V_1 = \langle X, Y \rangle$ y $V_2 = \langle Z \rangle$ y junto con la métrica inducida por el producto escalar usual sobre V_1 .

Definición 5.12. Dado un grupo de Carnot, $(G, \mathcal{D}, \|\cdot\|)$, definimos los **caminos horizontales** como aquellas aplicaciones $\gamma: I \rightarrow G$ de manera que $\gamma'(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$. Se define la longitud de estos caminos como

$$L(\gamma) := \int_I \|\gamma'(t)\| dt.$$

Al conjunto de curvas horizontales sobre el grupo G lo denotaremos por $S(G)$.

Definición 5.13. Definimos la **distancia de Carnot-Carathéodory** sobre un grupo de Carnot, G , como

$$d_{cc}(x, y) := \inf\{L(\gamma) : \gamma \in S(G)\}.$$

En el caso de no existir tal curva diremos que la distancia entre esos dos puntos es infinita.

En primer lugar, es claro que esta función es una distancia pues se define a partir de la longitud de ciertos caminos. Veamos las propiedades principales, análogas a las ya vistas en el grupo de Heisenberg, dadas en la Proposición 4.2.

Proposición 5.5. *Sea G un grupo de Carnot con dilatación, asociada a la estratificación, δ_λ . Denotemos por $B_{dcc}(x, r)$ la bola en la métrica de Carnot-Carathéodory de centro $x \in G$ y radio $r > 0$. En estas condiciones se tiene que:*

- i) $d_{cc}(\delta_\lambda x, \delta_\lambda y) = \lambda d_{cc}(x, y)$, para todo $x, y \in G$.
- ii) $d_{cc}(xy, yz) = d_{cc}(y, z)$ para todo $x, y, z \in G$.
- iii) $B_{dcc}(x, r) = l_x(\delta_r(B_{dcc}(e, 1)))$, para todo $x \in G$ y $r > 0$.

Demostración. Consideremos en primer lugar una base adaptada a la estratificación del álgebra y tomemos la base del primer estrato $V_1 = \langle E_1^1, \dots, E_{n_1}^1 \rangle$. Es claro que para todo elemento $X \in V_1$ se tiene que $(\delta_\lambda)_* X = \lambda X$.

Veamos i). Consideremos un camino $\gamma \in S(G)$ que conecta $x, y \in G$, claramente, por definición, $\gamma'(t) \in V_1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por tanto, la curva $\delta_\lambda \circ \gamma$ es una curva que conecta $\delta_\lambda x$ y $\delta_\lambda y$ y, además, $\delta_\lambda \circ \gamma \in S(G)$ pues

$$(\delta_\lambda \circ \gamma)' = (\delta_\lambda)_* \gamma' = \lambda \gamma'.$$

ii) se deduce directamente del hecho de que G es un grupo de Carnot, es decir, su norma es invariante por la izquierda, esto es,

$$\|xy\| = \|l_x y\| = \|y\|,$$

para todo $x, y \in G$. Por lo tanto, las distancias bajo traslaciones a la izquierda permanecen invariantes.

iii) es consecuencia directa de i) y ii).

□

A partir de este punto el objetivo es demostrar que la distancia que acabamos de definir es finita sobre cualquier grupo de Carnot. Este resultado es el que se conoce como el teorema de Chow y precisa de ciertas observaciones y lemas que involucran la relación de los corchetes de Lie y la operación de Campbell-Hausdorff.

5.4. El teorema de Chow

La demostración que se da de este resultado hace uso tanto de la demostración expuesta en [BLU07] como en la dada en [LD17a].

Consideremos el conjunto de letras $\{x_1, \dots, x_q\}$, $q \in \mathbb{N}$ y sea \mathfrak{a} el conjunto de palabras formales generado por el conjunto anterior. Consideremos que la estructura de \mathfrak{a} para la concatenación es asociativa y sea la operación formal $[x, y] := xy - yx$, $x, y \in \mathfrak{a}$. Definimos, dado un multi-índice $J = (j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, q\}^k$, los conmutadores de longitud k como los elementos de la forma

$$x_J := [x_{j_1}, [x_{j_2}, \dots [x_{j_{k-1}}, x_{j_k}] \dots].$$

Definimos, para cada $q, k \in \mathbb{N}$, el espacio vectorial formal

$$P_k[x_1, \dots, x_q] := \text{Span}\{x_J : J \in \{1, \dots, q\}^k\}$$

generado por los conmutadores de longitud k . Al espacio $P_k[x_1, \dots, x_q]$ le denominamos el espacio formal homogéneo de polinomios de Lie de grado k . Es claro que todo elemento $P \in P_k[x_1, \dots, x_q]$ se escribe como

$$P = \sum_{J \in I} a_J x_J,$$

para cierto $I \subset \{1, \dots, q\}^k$ y $a_J \in \mathbb{R}$.

Dados $q, k, r \in \mathbb{N}$, definimos el álgebra graduada de polinomios de Lie como

$$\mathcal{P} := \bigoplus_{k=0}^r P_k[x_1, \dots, x_q].$$

Donde $P_0[x_1, \dots, x_q] := \mathbb{R}$. Un elemento de este espacio se escribe como $\sum_{k=0}^r P_k$, con $P_k \in P_k[x_1, \dots, x_q]$. Podemos definir, de manera natural, dado un álgebra de Lie \mathfrak{g} , nilpotente, de orden r , la aplicación evaluación definida como aquella que sustituye sobre cada elemento P_k las letras formales $\{x_1, \dots, x_q\}$ por los campos $\{X_1, \dots, X_q\} \subset \mathfrak{g}$. Esta sustitución la denotaremos por $P_k(X_1, \dots, X_q)$. A lo largo de toda esta sección, con la finalidad de facilitar la lectura, indexaremos los campos sobre los subíndices.

Con todo esto, estamos en condiciones de enunciar el siguiente lema. Vamos a fijar la siguiente notación, dados ciertos campos X_i de un álgebra de Lie, consideramos

$$X_{-i} := X_i.$$

Lema 5.1. *Sean G un grupo de Carnot de orden r y $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Existe una constante, $c_q \in \mathbb{N}$, que solo depende de q , una asignación*

$$j: \{1, \dots, c_q\} \longrightarrow \{-q, \dots, -1, 1, \dots, q\}$$

y un polinomio de Lie,

$$R_{q+1} \in \bigoplus_{k=q+1}^r P_k[x_1, \dots, x_q],$$

de manera que

$$[X_q, \dots [X_2, X_1] \dots] = X_{j_q(1)} * \dots * X_{j_q(c_q)} + R_{q+1}(X_1, \dots, X_q).$$

La operación $*$ es la operación de Campbell-Hausdorff definida en 5.10. Además, $c_q = 3 \cdot 2^{q-1} - 2$.

Demostración. Vamos a proceder por inducción sobre q .

- $q = 2$: En este caso $c_2 = 4$ y vamos a comprobar que la asignación viene dada por

$$\begin{aligned} j_2(1) &= 2 & j_2(2) &= 1 \\ j_2(3) &= -2 & j_2(4) &= -1. \end{aligned}$$

Es decir, tenemos que demostrar que, dados dos campos $X, Y \in \mathfrak{g}$, se tiene la igualdad

$$[Y, X] = Y * X * (-Y) * (-X) + R_3(X, Y),$$

con $R_3 \in \bigoplus_{k=3}^r P_k[x_1, x_2]$. Esto es consecuencia directa de hacer el cálculo usando la definición de la operación de Campbell-Hausdorff:

$$\begin{aligned}
 Y * X * (-Y) * (-X) &= \\
 &= X * Y + (-Y) * (-X) + \frac{1}{2}[Y * X, (-Y) * (-X)] + \\
 &+ H_3(Y * X, (-Y) * (-X)) = \left(Y + X + \frac{1}{2}[Y, X] + H_3(Y, X) \right) + \\
 &+ \left(-Y - X + \frac{1}{2}[Y, X] + H_3(-Y, -X) \right) + \\
 &+ \frac{1}{2}[Y + X + H_2(Y, X), -Y - X + H_2(-Y, X)] + P_3(X, Y) = \\
 &= [Y, X] + H_3(Y, X) + H_3(-Y, X) + \frac{1}{2}[Y + X, -Y - X] + \\
 &+ \frac{1}{2}P_3(X, Y) + P'_3(X, Y) = [Y, X] + R_3(X, Y),
 \end{aligned}$$

donde $H_2 \in \bigoplus_{k=2}^r P_k[x_1, x_2]$ y $P_3, P'_3, R_3 \in \bigoplus_{k=3}^r P_k[x_1, x_2]$.

- $q \geq 2$ Vamos a proceder por inducción para demostrar el caso general, supongamos que el caso para q es cierto y veamos que para $q + 1$ también es cierto. En primer lugar, dada la asignación j_q , se tiene la siguiente igualdad:

$$(-X_{j_q(c_q)}) * \cdots * (-X_{j_q(1)}) = -(X_{j_q(1)} * \cdots * X_{j_q(c_q)}).$$

En efecto, esto es consecuencia de que el inverso de un elemento $X \in \mathfrak{g}$ con la operación $*$ es $-X$.

Definimos

$$\alpha(X_{j_q(1)}, \dots, X_{j_q(c_q)}) := X_{j_q(c_q)} * \cdots * X_{j_q(1)} * (-X_{j_q(c_q)}) * \cdots * (-X_{j_q(1)}).$$

Por ejemplo, en el caso de $q = 2$ se tiene que

$$[Y, X] = Y * X * (-Y) * (-X) + R_3(X, Y) = \alpha(X, Y) + R_3(X, Y).$$

Consideremos, para el caso general, operar con un elemento X_{q+1} de manera que

$$\begin{aligned}
 X_{q+1} * (X_{j_q(1)} * \cdots * X_{j_q(c_q)}) * (-X_{q+1}) * (-X_{j_q(c_q)}) * \cdots * (-X_{j_q(1)}) &= \\
 = \alpha(X_{j_q(1)} * \cdots * X_{j_q(c_q)}, X_{q+1}) &= \\
 = [X_{q+1}, X_{j_q(1)} * \cdots * X_{j_q(c_q)}] - R_3(X_{j_q(1)} * \cdots * X_{j_q(c_q)}, X_{q+1}).
 \end{aligned}$$

Aplicando ahora la hipótesis de inducción dentro del corchete en esta última igualdad obtenemos

$$\begin{aligned}
 [X_{q+1}, X_{j_q(1)} * \cdots * X_{j_q(c_q)}] - R_3(X_{j_q(1)} * \cdots * X_{j_q(c_q)}, X_{q+1}) &= \\
 = [X_{q+1}, [X_q, [\cdots [X_2, X_1] \cdots]] - R_{q+1}(X_1, \dots, X_q) + P_{q+2}(X_1, \dots, X_{q+1}) &= \\
 = [X_{q+1}, [X_q, [\cdots [X_2, X_1] \cdots]] + P'_{q+2}(X_1, \dots, X_{q+1}),
 \end{aligned}$$

donde $P_{q+1}, P'_{q+1} \in \bigoplus_{k=q+2}^r P_k[x_1, \dots, x_{q+1}]$. Para completar la prueba es suficiente con comprobar que

$$2c_q + 2 = 2(3 \cdot 2^{q-1} - 2) + 2 = 3 \cdot 2^q - 2 = c_{q+1}.$$

□

Ya nos encontramos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema de Chow para los grupos de Carnot.

Teorema 5.2 (Chow). *Sobre un grupo de Carnot, G , cualesquier punto se pueden conectar con la identidad mediante un camino horizontal.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ el álgebra de Lie, estratificada, de orden r , asociada a G y sean $(X_1, \dots, X_q) \subset \mathfrak{g}$. Aplicando el lema 5.1 podemos encontrar una asignación j de manera que

$$[X_q, \dots [X_2, X_1] \dots] = X_{j_q(1)} * \dots * X_{j_q(c_q)} + R_{q+1}(X_1, \dots, X_q),$$

con $R_{q+1} \in \bigoplus_{k=q+1}^r P_k[x_1, \dots, x_q]$ y $q \in \mathbb{N}$. Consideremos ahora la aplicación

$$P_t(X_1, \dots, X_q) := \exp(t^q [X_q, \dots [X_2, X_1] \dots]) - R_{q+1}(tX_1, \dots, tX_q).$$

Por el lema 5.1 y aplicando el teorema 5.1 obtenemos que

$$P_t(X_1, \dots, X_q) = \exp(tX_{j(1)}) \dots \exp(tX_{j(c_q)}). \quad (5.3)$$

Además, es directo ver que se satisfacen las igualdades

$$\begin{aligned} P_{\lambda t}(X_1, \dots, X_q) &= P_t(\lambda X_1, \dots, \lambda X_q) \\ \delta_\lambda P_t(X_1, \dots, X_q) &= P_t(\delta_\lambda X_1, \dots, \delta_\lambda X_q). \end{aligned}$$

Consideremos ahora

$$\mathfrak{B} = \{E_1^1, \dots, E_{n_1}^1, \dots, E_1^r, \dots, E_{n_r}^r\} = \{E_1, \dots, E_n\}$$

una base adaptada del álgebra \mathfrak{g} , $n = n_1 + \dots + n_r$. Por ser el álgebra estratificada y estar con una base adaptada, todo elemento de la base $E_j \in V_d$ se puede representar como

$$E_j = [E_{j,d} \dots [E_{j,2}, E_{j,1}] \dots],$$

siendo $(E_{j,1}, \dots, E_{j,d}) \subset V_1$. Consideremos, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$P^j(t) := P_t(E_{j,1}, \dots, E_{j,d})$$

y $t^\alpha := \text{signo}(t)|t|^\alpha$. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow G \\ \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) &\longmapsto P^1(t_1^{1/n_1}) \dots P^n(t_n^{1/n_r}). \end{aligned}$$

Vamos a demostrar que esta aplicación cumple las siguientes propiedades:

- 1) F es abierta en un entorno del 0.
- 2) F es sobreyectiva.
- 3) F es un camino horizontal que conecta el 0 con $E(t_1, \dots, t_n)$.

1) es consecuencia directa del teorema de la función inversa, las entradas de la matriz jacobiana de F en el 0 son

$$\begin{aligned} d_0 F &= \left(\frac{d}{dt_1} F(\mathbf{t}), \dots, \frac{d}{dt_n} F(\mathbf{t}) \right)_{\mathbf{t}=0} = \\ &= \left(\frac{d}{dt_1} P^1(t_1^{1/n_1}), \dots, \frac{d}{dt_n} P^n(t_n^{1/n_r}) \right)_{\mathbf{t}=0} = \\ &= \left(\frac{d}{dt_1} \exp(t_1 E_1 - R_1(t_1 E_1^1, \dots, t_1 E_{n_1}^1)), \dots, \frac{d}{dt_n} \exp(t_n E_n - R_{n_r}(t_n E_1^r, \dots, t_n E_{n_r}^r)) \right)_{\mathbf{t}=0} = \\ &= (E_1, \dots, E_n). \end{aligned}$$

Es decir, que la diferencial de esta aplicación en el 0 transforma la base canónica en la base (E_1, \dots, E_n) , aplicando el teorema de la función inversa obtenemos 1).

Para ver 2) tenemos que ver que $F(\mathbb{R}^n) = G$. En primer lugar, dado que F es un difeomorfismo local, usando dilataciones tenemos que, para cada $x \in G$, podemos encontrar un \mathbf{t} y un λ de manera que $\delta_\lambda F(\mathbf{t}) = x$.

Consideremos $\mathbf{s} = (\lambda t_1, \dots, \lambda t_{n_1}, \dots, \lambda^{n_r} t_n)$, aplicando las propiedades de P_t vistas obtenemos que

$$P^j(s_j^{1/n_k}) = \delta_\lambda P^j(t_j^{1/n_k}),$$

siendo n_k la dimensión del estrato asociado a t_j . Por tanto, usando que las dilataciones son un homomorfismo de grupos de Lie, obtenemos que

$$\begin{aligned} F(\mathbf{s}) &= P^1(s_1^{1/n_1}) \dots P^n(s_n^{1/n_r}) = \\ &= \delta_\lambda P^1(t_1^{1/n_1}) \dots \delta_\lambda P^n(t_n^{1/n_r}) = \\ &= \delta_\lambda \left(P^1(t_1^{1/n_1}) \dots P^n(t_n^{1/n_r}) \right) = \\ &= \delta_\lambda F(\mathbf{t}) = x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $F(\mathbb{R}^n) = G$, es decir, la aplicación F es sobreyectiva.

Finalmente, por (5.3), cada $P^j(t)$ es un producto de exponenciales, es decir, que para un $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ determinado, el elemento $x = F(\mathbf{t}) \in G$ se expresa de igual manera como un producto de exponenciales de la forma

$$x = F(\mathbf{t}) = \exp(t_{\sigma_i}^{\alpha_i} E_{\beta_1}) \dots \exp(t_{\sigma_K}^{\alpha_K} E_{\beta_K}),$$

con $1/\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\beta_i \in \{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$ y $\sigma_i \in \{1, \dots, n\}$. Dado que sabemos que la aplicación F es sobreyectiva, todo elemento del grupo se expresa de esta forma. Es claro que si tomamos un elemento de la forma

$$y = \exp(t_{\sigma_{K+1}}^{\alpha_{K+1}} E_{K+1}),$$

el elemento x se conecta con el y por el camino

$$\begin{aligned} \gamma: \quad [0, t_{\sigma_{K+1}}^{\alpha_{K+1}}] &\longrightarrow G \\ s &\longmapsto x \exp(s E_{\beta_{K+1}}). \end{aligned}$$

Además, es claro que este camino es tangente a la distribución generada por los campos $\{E_1^1, \dots, E_{n_1}^1\}$, es decir, es un camino horizontal. Por tanto, se puede construir de manera iterada un camino hasta cualquier elemento de G .

□

Corolario 5.2. *La distancia d_{cc} es finita en todo grupo de Carnot.*

Demostración. Por el teorema de Chow tenemos que, para cualquier $p \in G$, $d_{cc}(e, p) < \infty$. Dado que d_{cc} es invariante por traslaciones, se concluye que $d_{cc}(q, p) < \infty$ para todo $p, q \in G$.

□

Corolario 5.3. *La métrica de G como variedad y como grupo de Carnot, es decir, con la métrica d_{cc} , generan la misma topología.*

Demostración. Dado que ya hemos demostrado el teorema de Chow, este resultado se deduce directamente del hecho de la métrica que induce la distancia d_{cc} es invariante por traslaciones, es decir, que para ver que se generan las mismas topologías es suficiente con ver que ambas métricas generan los mismos entornos sobre la identidad, $e \in G$. Pero esto es consecuencia directa de la primera de las propiedades de la aplicación F dadas en la demostración del teorema de Chow.

□

Pasamos a dar una de las consecuencias más relevantes del teorema de Chow. Consideremos un grupo de Carnot, G , con estratificación $V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ y una base adaptada a la estratificación,

$$\{E_1^1, \dots, E_{n_1}^1, \dots, E_1^r, \dots, E_{n_r}^r\},$$

que enumeramos y escribimos como $\{E_1, \dots, E_n\}$, $n = n_1 + \dots + n_r$, para mayor comodidad. Definimos el grado de cada uno de los elementos de la base como el valor d_j tal que $E_j \in V_{d_j}$.

Definición 5.14. En las condiciones anteriores, definimos la **caja** de radio $r > 0$ asociada a la base anterior como

$$\text{Box}(r) := \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : |t_j| < r^{d_j}\},$$

con $n_1 + \dots + n_r = n$.

Lo que vamos a demostrar ahora es que las bolas en la métrica de un grupo de Carnot son *comparables* a las cajas que acabamos de definir en un sentido concreto.

Consideremos un grupo de Carnot, G , con una base, $\{X_1, \dots, X_n\}$, adaptada a la estratificación. La aplicación exponencial, a partir de esta base, induce unas coordenadas, $\Phi: \mathbf{R}^n \rightarrow G$, dadas por:

$$\Phi(\mathbf{t}) := \Phi(t_1, \dots, t_n) = \exp \left(\sum_{j=1}^n t_j X_j \right).$$

Teorema 5.3. *Sea G un grupo de Carnot. Fijemos una base de este grupo adaptada a la estratificación de su álgebra. Existe una constante, $C > 1$, de manera que, para cada $x \in G$ y para cada $r > 0$,*

$$B \left(x, \frac{\lambda}{C} \right) \subset \Phi_x(\text{Box}(\lambda)) \subset B(x, \lambda C).$$

La aplicación Φ_p son las coordenadas exponenciales, respecto de la base fijada, en el punto x . $B(x, r)$ representa la bola en la métrica d_{cc} de centro $x \in G$ y radio r .

Demostración. Comenzamos definiendo la aplicación $\delta_\lambda: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ dada por

$$\delta_\lambda(\mathbf{t}) = (\lambda t_1, \dots, \lambda^{d_j} t_j, \dots, \lambda^{d_n} t_n).$$

Siendo cada uno de los d_j el grado de cada uno de los elementos de la base asociada a la estratificación. Es un cálculo directo encontrar que

$$\delta_\lambda(\text{Box}(r)) = \text{Box}(\lambda r).$$

Además, es claro que, dado que la exponencial es un difeomorfismo, $\Phi(\text{Box}(1))$ es un entorno acotado de la identidad, $e \in G$.

Consideremos la distancia d_{cc} asociada al grupo G , aplicando el corolario 5.3, tenemos que esta métrica induce la topología de la variedad, por tanto, podemos encontrar un $C > 1$ de manera que se tengan las inclusiones

$$B \left(e, \frac{1}{C} \right) \subset \Phi(\text{Box}(1)) \subset B(e, C).$$

Usando ahora la aplicación δ_λ obtenemos que

$$B \left(e, \frac{\lambda}{C} \right) \subset \delta_\lambda \Phi(\text{Box}(1)) \subset B(e, \lambda C).$$

Por otro lado, tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
 \delta_\lambda \Phi(Box(1)) &= \delta_\lambda \{\Phi(\mathbf{t}) : |t_j| < 1\} = \\
 &= \delta_\lambda \left\{ \exp \left(\sum_{j=1}^n t_j X_j \right) : |t_j| < 1 \right\} = \\
 &= \left\{ \exp \left(\delta_\lambda \sum_{j=1}^n t_j X_j \right) : |t_j| < 1 \right\} = \\
 &= \left\{ \exp \left(\sum_{j=1}^n \lambda^{d_j} t_j X_j \right) : |t_j| < 1 \right\} = \\
 &= \left\{ \exp \left(\sum_{j=1}^n s_j X_j \right) : |s_j| < \lambda^{d_j} \right\} = \\
 &= \Phi(Box(\lambda)).
 \end{aligned}$$

En la tercera de las igualdades anteriores hemos usado que las dilataciones entre grupos y álgebras conmutan por la exponencial. Como consecuencia tenemos que

$$B\left(e, \frac{\lambda}{C}\right) \subset \Phi(Box(\lambda)) \subset B(e, \lambda C).$$

Ya tenemos el resultado para $e \in G$. Dado que la distancia d_{cc} es invariante por la izquierda y que

$$\phi(\mathbf{t}) = x\Phi(\mathbf{t}) = l_x\Phi(\mathbf{t})$$

obtenemos el resultado para toda caja centrada en cualquier elemento del grupo.

□

Un corolario directo, dado que la demostración es análoga a la dada en el teorema anterior es el siguiente:

Corolario 5.4. *Las bolas en un grupo de Carnot son homeomorfas a las bolas euclídeas usuales.*

Para concluir este capítulo presentamos un corolario del teorema anterior que muestra que, en cierto sentido, la aproximación geométrica de estos grupos y la aproximación métrica, más concretamente desde el punto de teoría de la medida, coinciden.

Corolario 5.5. *Sea G un grupo de Carnot. La dimensión homogénea de G , Q , y su dimensión de Hausdorff coinciden.*

Demostración. Consideremos la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R}^n , \mathcal{L}^n . Ya vimos que, en las coordenadas adecuadas, es decir, en las coordenadas exponenciales en

este caso, el determinante del jacobiano asociado a las dilataciones de factor λ del grupo es λ^Q , es decir, que tenemos la igualdad,

$$\lambda^Q \mathcal{L}^n(Box(1)) = \mathcal{L}^n(Box(\lambda)), \quad (5.4)$$

siendo Q la dimensión homogénea de G . Para ver que la dimensión de Hausdorff es precisamente Q vamos a aplicar la proposición 3.2. Es decir, hay que encontrar una constante $C > 0$ de manera que

$$\mathcal{L}^n(B(x, \lambda)) \leq \lambda^Q \mathcal{L}^n(B(e, 1)),$$

$x \in G$. Pero esto ahora resulta directo aplicando el teorema anterior, es decir, teniendo la igualdad (5.4), se tiene que

$$\mathcal{L}^n(B(x, \lambda)) \leq \lambda^Q \mathcal{L}^n(B(e, 1)),$$

es decir, la dimensión de Hausdorff de G es Q .

□

Finalmente, este resultado nos permite calcular la dimensión de Hausdorff de una variedad diferenciable.

Observación 5.8. Consideremos una variedad diferenciable, M , de dimensión topológica n . Consideremos un punto $p \in M$ y una distribución $\mathcal{D} = \{X^1, \dots, X^n\}$ de manera que, en un entorno de dicho punto, se tenga que

$$TM = \langle X^1, \dots, X^n \rangle.$$

En concreto se tiene que $\langle X_p^1, \dots, X_p^n \rangle = T_p M$. Podemos suponer, dado que esta distribución es involutiva, es decir, es cerrada para el corchete, podemos tomar una estratificación del álgebra de Lie dada por la totalidad del fibrado tangente en el punto p . En este caso es claro que el grupo de Lie asociado a esta estratificación es $(\mathbb{R}^n, +)$ con base asociada $\{X_p^1, \dots, X_p^n\}$. La dilatación en este álgebra, dado que solo posee un estrato, es la aplicación

$$\delta_\lambda(X^1, \dots, X^n) = (\lambda X^1, \dots, \lambda X^n)$$

que tiene por determinante de su jacobiano λ^n . Es decir, la dimensión homogénea $(\mathbb{R}^n, +)$ coincide con su dimensión topológica, que es la dimensión topológica de la variedad. Aplicando el corolario 5.5 obtenemos que la dimensión de Hausdorff de $(\mathbb{R}^n, +)$ es n y, dado que este espacio, como variedad riemanniana es localmente bi-Lipschitz a la variedad M , en virtud de la proposición 3.3, obtenemos que la dimensión de Hausdorff de la variedad es n , la cual coincide con la dimensión topológica de la misma.

Capítulo 6

Variedades subriemannianas y conos tangentes

Ya hemos visto que los grupos de Carnot poseen una estructura métrica muy especial. En este capítulo vamos a centrarnos en citar el principal papel que estos grupos juegan, tanto desde el punto de vista geométrico como métrico. Tanto las líneas de la exposición como las demostraciones que se exponen a lo largo de este capítulo se han tomado, con carácter general, de [Mon02].

Para poder trabajar con cierta comodidad es necesario introducir algunas nociones nuevas.

6.1. Métrica de Gromov-Hausdorff

La intención de esta sección es presentar una noción de métrica entre espacios métricos abstractos con el fin de generalizar de una manera cómoda la idea de cono tangente.

Definición 6.1. Sea (X, d) un espacio métrico, una dilatación de factor λ en X es una aplicación $\delta_\lambda: X \rightarrow X$ con la propiedad de que para cualesquiera $x, y \in X$, se tiene que $d(\delta_\lambda x, \delta_\lambda y) = \lambda d(x, y)$.

Observación 6.1. Es claro que, en el caso de los grupos de Carnot, estas dilataciones coinciden con las dilataciones del grupo tal y como las hemos definido.

Definición 6.2. Dado un espacio métrico, X , un espacio métrico **punteado** es un par (X, x) , $x \in X$. Decimos que x es el punto distinguido. Diremos que un espacio métrico punteado, (X, x) , admite una dilatación si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ existe una dilatación, de factor λ , que fija el punto distinguido.

Definición 6.3. Sean (X, d) un espacio métrico, $\lambda > 0$ y $A \subset X$. Definimos el λ -entorno del conjunto A como el conjunto

$$N_\lambda(A) := \{x \in X : d(x, a) \leq \lambda \text{ para algún } a \in A\}$$

Definición 6.4. Sean (X, d) un espacio métrico, $A, B \subset X$. Definimos la **distancia de Hausdorff** entre A y B , asociada a X , como

$$d_X(A, B) := \inf\{\lambda: A \subset N_\lambda(B) \text{ y } B \subset N_\lambda(A)\}.$$

Observación 6.2. La distancia de Hausdorff induce una distancia sobre el conjunto de los cerrados de X en el caso de que el espacio X esté acotado. Si el espacio no es acotado puede darse el caso de que la distancia entre conjuntos no sea finita.

Ejemplo 6.1. En el caso del espacio métrico euclídeo se tiene que la distancia de Hausdorff entre bolas es precisamente la distancia entre los centros. Por lo tanto, dos bolas con el mismo centro distan 0 en esta métrica.

Realmente, lo que hace la distancia de Hausdorff es medir la distancia entre subespacios métricos que se encuentran en un espacio métrico común. Esta misma idea nos va a servir para generalizar la noción de distancia entre espacios métricos abstractos.

Definición 6.5. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos y $\{((Z, d_Z), i, j)\}$ la familia de espacios métricos con las inclusiones isométricas $i: X \rightarrow Z$ y $j: Y \rightarrow Z$. Definimos la **distancia de Gromov-Hausdorff** como

$$d_{GH}(X, Y) := \inf\{d_Z(i(X), j(Y))\}.$$

Una vez tenemos presentada esta noción de distancia entre espacios podemos dar la noción de convergencia de espacios métricos.

Definición 6.6. Consideremos una familia de espacios métricos $\{X_i\}_{i \in I}$, I es un espacio métrico. Decimos que esta familia converge a un espacio métrico, Y , cuando i tiende a i_0 , si $d_{GH}(X_i, Y) \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow i_0$.

La principal utilidad de esta noción de convergencia se puede encontrar en la proposición siguiente, cuya demostración puede encontrarse en [Gro07], Proposición 3.6.

Proposición 6.1. Sean X, Y dos espacios métricos compactos. Si $d_{GH}(X, Y) = 0$ entonces X e Y son espacios isométricos.

Veamos, usando esta última proposición, algún ejemplo sobre el comportamiento de la métrica de Gromov-Hausdorff.

Ejemplo 6.2. 1) Si un espacio métrico, X , es acotado se tiene que la familia de espacios λX converge a un espacio métrico formado por un único punto cuando $\lambda \rightarrow 0$. En efecto, consideremos una cota c para el diámetro de X y sea $x \in X$. Es claro que $d_{\lambda X}(X, x) \leq \lambda c$. Es decir, la distancia entre estos espacios converge a 0 cuando $\lambda \rightarrow 0$.

- 2) Recordamos que una ε -red en un espacio métrico, X , es un conjunto discreto, $\Gamma \subset X$, de manera que cada uno de los puntos de X dista como mucho ε de alguno de los puntos de Γ , es decir, $d_X(\Gamma, X) \leq \varepsilon$. Supongamos que X es compacto, para cada ε podemos encontrar una ε -red, Γ , finita. Dado que podemos hacer esto para cada ε tenemos que los espacios métricos finitos son densos en el sentido de la métrica de Gromov-Hausdorff sobre los espacios métricos compactos. Como consecuencia podemos ver que esta convergencia no preserva invariantes topológicos como puede ser la dimensión.
- 3) Consideremos la familia de espacios $\{[-n, n] : n \in \mathbb{N}\}$. Nos gustaría que estos espacios convergiesen a \mathbb{R} en el sentido de Gromov-Hausdorff cuando $n \rightarrow \infty$. Sin embargo, este hecho, con la definición que tenemos, es falso, pues $d_{GH}([-n, n], \mathbb{R}) = \infty$ para cada n .

Con este último ejemplo queda motivada la siguiente definición, la cual da una noción de convergencia *local* entre espacios métricos.

Definición 6.7. Sean $\{(X_i, x_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios métricos punteados y (Y, y_0) otro espacio métrico punteado. Decimos que la familia $\{(X_i, x_i)\}_{i \in I}$ converge a (Y, y_0) si para todo $\lambda > 0$ las bolas de radio λ , centradas en x_i , de X_i convergen, en el sentido de Gromov-Hausdorff, a las bolas de la radio λ , centradas en y_0 , de Y .

Ejemplo 6.3. Es claro que con esta nueva definición tenemos que $([-n, n], 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ cuando $n \rightarrow \infty$, pues las *bolas* de radio n en ambos casos son los intervalos de la forma $(-n, n)$. Por tanto, soluciona el conflicto contra intuitivo que nos presentaba la definición anterior de convergencia.

Con todas estas ideas presentadas nos encontramos en condición de dar la definición de cono tangente de Gromov-Hausdorff. Como veremos más adelante, esta definición generaliza de una manera natural la noción de espacio tangente en variedades riemannianas.

Definición 6.8. Sea (X, x) un espacio métrico punteado. Definimos el **cono tangente métrico** o **cono tangente de Gromov-Hausdorff** como el límite, cuando este exista, de los espacios $(\lambda X, x)$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$.

Veamos algunos resultados que nos serán de utilidad para ver la relación existente entre los grupos de Carnot y los conos tangentes métricos.

Definición 6.9. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Decimos que una métrica d es **compatible** con la unión disjunta $X \amalg Y$ si $(X \amalg Y, d)$ es un espacio métrico y su restricción a los espacios X e Y coincide con las métricas d_X y d_Y , respectivamente.

Observación 6.3. Nótese que para definir una métrica compatible en una unión disjunta de espacios métricos es suficiente con definir una función positiva, $X \times Y \rightarrow [0, +\infty)$, que preserve la desigualdad triangular.

La siguiente proposición nos ayuda a entender de una forma más intuitiva la métrica GH.

Proposición 6.2. *Consideremos dos espacios métricos, (X, d_X) e (Y, d_Y) . La distancia GH entre estos espacios viene dada por*

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\{d(X, Y) : d \text{ compatible en } X \amalg Y\}.$$

Demostración. Comencemos denotando por k el valor del ínfimo en la derecha de la igualdad del enunciado, veamos que este valor coincide con la distancia GH entre X y Y viendo las dos desigualdades. En primer lugar, directamente por la definición, tenemos que, considerando las inclusiones $i: X \rightarrow X \amalg Y$ e $j: Y \rightarrow X \amalg Y$ tenemos la desigualdad $d_{GH}(X, Y) \leq d_{X \amalg Y}(i(X), j(Y))$, esta desigualdad se mantiene para cualquier métrica compatible, es decir, tenemos la desigualdad $d_{GH}(X, Y) \leq k$.

Para ver la desigualdad inversa consideremos dos inclusiones isométricas, i y j , de X e Y en un espacio métrico Z , respectivamente. Si el espacio $i(X) \cup j(Y)$ es disjunto hemos terminado, pues este espacio es claramente isométricamente isomorfo a $X \amalg Y$, es decir, tomando la restricción $d_Z|_{i(X) \cup j(Y)}$ obtenemos una métrica en $X \amalg Y$ de manera que $d_Z(i(X), j(Y)) \geq k$. Supongamos, por tanto, que la unión $i(X) \cup j(Y)$ no es disjunta. Para solventar este problema vamos a *separar* esta unión. Consideremos un intervalo de la recta real $I_\varepsilon = [0, \varepsilon]$ y tomemos el espacio $(Z', d_{Z'})$ dado por $Z' := Z \times I_\varepsilon$ y

$$d_{Z'}((x, t), (y, s)) := \sqrt{d_Z(x, y)^2 + |t - s|^2}.$$

Es directo que este nuevo espacio es métrico. Podemos tomar ahora las inclusiones $i': X \rightarrow Z'$, $i'(x) := (i(x), 0)$ y $j': Y \rightarrow Z'$, $j'(y) := (j(y), \varepsilon)$. En estas condiciones tenemos que $i'(X) \cup j'(Y)$ es una unión disjunta y que

$$d(j'(X), j'(Y)) = \sqrt{d_Z(i(X), j(Y))^2 + \varepsilon^2}.$$

Es decir,

$$k \leq \sqrt{d_Z(i(X), j(Y))^2 + \varepsilon^2},$$

haciendo tender ε a 0 obtenemos la desigualdad buscada y el final de la prueba. □

La siguiente proposición resulta un tanto técnica pero, de alguna manera, nos permite aproximar isometrías entre espacios métricos. Este resultado nos va a ser de vital utilidad para ver como se aproximan los conos tangentes métricos.

Proposición 6.3. *Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos, $A \subset X$ y $f: A \rightarrow Y$ una aplicación, no necesariamente continua. Supongamos que*

$$|d_Y(f(a_1, a_2)) - d_X(a_1, a_2)| \leq \delta$$

para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$ y que cada punto de X y de Y se encuentran en $\varepsilon_X, \varepsilon_Y$ -entornos de A y $f(A)$, respectivamente. Entonces se tiene que

$$d_{GH}(X, Y) \leq \max\{\varepsilon_X, \varepsilon_Y\} + \frac{\delta}{2}.$$

Demostración. Vamos a demostrar este resultado definiendo una métrica adecuada y compatible en $X \amalg Y$ y aplicando la proposición 6.2.

Consideremos, para cada $x \in X$ e $y \in Y$, la aplicación

$$d(x, y) = \inf_{a \in A} \{d_X(x, a) + d_Y(f(a), y)\} + \frac{\delta}{2}.$$

Es suficiente con ver que esta aplicación extiende la desigualdad triangular cuando se toman puntos de X y de Y . Comenzamos viendo la desigualdad

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, y) + d(y, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X, \quad \forall y \in Y.$$

Por cómo se ha definido d tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_1, y) + d(y, x_2) &= \inf_{a_1 \in A} \{d_X(x_1, a_1) + d_Y(f(a_1), y)\} + \\ &\quad \inf_{a_2 \in A} \{d_X(x_2, a_2) + d_Y(f(a_2), y)\} + \delta, \end{aligned}$$

además, para que la métrica sea compatible, se cumple la desigualdad

$$d(x_1, x_2) = d_X(x_1, x_2) \leq d(x_1, a_1) + d_X(a_1, a_2) + d_X(a_2, x_2).$$

Además, usando las hipótesis se tiene que

$$d_X(a_1, a_2) \leq d_Y(f(a_1), f(a_2)) + \delta \leq d_Y(f(a_1), y) + d_Y(y, f(a_2)) + \delta.$$

Con todo esto, tenemos la desigualdad

$$d(x_1, x_2) \leq d_X(x_1, a_1) + d_Y(f(a_1), y) + d_Y(f(a_2), y) + d_X(x_2, a_2) + \delta,$$

es decir, tomando ínfimos en a_1 y a_2 obtenemos la desigualdad buscada. El resto de las desigualdades triangulares se razonan de manera similar.

Una vez que tenemos que la métrica es compatible vamos a concluir la demostración aplicando, como hemos dicho, la proposición 6.2. Por hipótesis, para cada $y \in Y$, existe un $a \in A$ de manera que $d_Y(f(a), y) < \varepsilon_Y$, por tanto,

$$d(a, y) = d_Y(f(a), y) + \frac{\delta}{2} < \varepsilon_Y + \frac{\delta}{2}.$$

Es decir, Y está contenido en un $(\varepsilon_Y + \delta/2)$ -entorno de X para la métrica d . Razonando por analogía concluimos que X se encuentra en un $(\varepsilon_X + \delta/2)$ -entorno

de Y , es decir, aplicando la proposición 6.2 concluimos que la distancia GH debe ser menor que cualquiera que sea la distancia entre las métricas compatibles, en este caso particular se tiene que

$$d_{GH}(X, Y) \leq \max\{\varepsilon_X, \varepsilon_Y\} + \frac{\delta}{2}.$$

□

Como consecuencia de este último resultado damos la siguiente definición.

Definición 6.10. Una aplicación $f: A \rightarrow Y$, con la misma notación y características que en la proposición 6.3 es lo que se conoce como una δ -**aproximación isométrica** entre X e Y .

Gracias a esta última proposición podemos encontrar algunos de los conos tangentes métricos.

Definición 6.11. Sea X un espacio métrico, diremos que X tiene la propiedad de **expansión continua** en $x_0 \in X$ si $N_h(B(r, x_0)) = B(r + h, x_0)$ para todo $r, h > 0$, siendo $B(r, x_0)$ la bola en la métrica del espacio X .

Observación 6.4. Esta propiedad resulta bastante estándar y suele darse en general en los espacios métricos no discretos. Para nuestro interés, esta propiedad se mantiene en el caso de las variedades riemannianas.

Proposición 6.4. Sea (X, x_0) un espacio métrico punteado con distancia d_0 y tal que admite una dilatación δ_t , de factor $t > 0$. Sea $U \subset X$ un entorno en la métrica d_0 del punto x_0 y d otra métrica definida en U de manera que existe una función $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t)/t \rightarrow 0$, si $t \rightarrow 0$, tal que, para cualesquiera $x_1, x_2 \in U$,

$$|d(\delta_t x_1, \delta_t x_2) - d_0(\delta_t x_1, \delta_t x_2)| \leq f(t). \quad (6.1)$$

Si, además, tanto d como d_0 tienen la propiedad de expansión continua en x_0 , entonces el cono tangente de Gromov-Hausdorff de (X, d, x_0) es (X, d_0, x_0) .

Demostración. Vamos a considerar la métrica $(1/t)d$, es decir, la métrica d que da multiplicada por el factor $1/t$. Vamos a denotar por $B_t(r, x_0)$ a las bolas en esta última métrica y por $B_0(r, x_0)$ a las bolas en la métrica d_0 . Vamos a demostrar que las bolas $B_t(r, x_0)$ convergen en el sentido de Gromov-Hausdorff a las bolas $B_0(r, x_0)$ usando la proposición 6.3.

Dado que la dilatación del espacio es una d_0 -dilatación, es decir, $d_0(\delta_t x_1, \delta_t x_2) = t d_0(x_1, x_2)$, se tiene que la desigualdad (6.2) puede escribirse como

$$\left| \frac{1}{t} d(\delta_t x_1, \delta_t x_2) - d_0(x_1, x_2) \right| \leq h(t),$$

$h(t) := f(t)/t$. Es decir, de esta última desigualdad podemos decir que la dilatación, δ_t , es una $h(t)$ -aproximación isométrica entre las bolas $B_t(r, x_0)$ y $B_0(r, x_0)$, para todo $t > 0$. De la misma desigualdad obtenemos que, tomando $x_1 = x_0$, $\delta_t(B_0(r - h(t), x_0)) \subset B_t(r, x_0)$ y $B_t(r - h(t), x_0) \subset \delta_t(B_0(r, x_0))$. Es decir, si tomamos como $A = \delta_t^{-1}(B_t(r, x_0)) \cap B_0(r, x_0)$ en las hipótesis de la proposición 6.3 podemos concluir, dado que la aplicación δ_t es una $h(t)$ -aproximación isométrica, que

$$d_{GH}(B_t(r, x_0), B_0(r, x_0)) \leq h(t) + h(t) + h(t)/2 = 3h(t)/2.$$

Dado que, por hipótesis, $h(t) = f(t)/t \rightarrow 0$ si $t \rightarrow 0$, obtenemos el resultado deseado.

□

El siguiente corolario muestra la importancia de los resultados que acabamos de demostrar.

Corolario 6.1. *El cono tangente métrico en una variedad riemanniana, M , sobre un punto, p , es el espacio tangente euclídeo usual.*

Demostración. Supongamos que M tiene dimensión topológica n y sean las coordenadas (x_1, \dots, x_n) inducidas por la aplicación exponencial en un entorno de $p \in M$. La métrica en estas coordenadas vendrá dada por una expresión de la forma

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n (dx_i)^2 + \{\text{términos de grado 2}\},$$

con una distancia inducida d . Es decir, en cierto sentido, la métrica euclídea usual, $\sum_{i=1}^n (dx_i)^2$, cuya distancia denotaremos por d_0 se puede comparar con la métrica de la variedad. Además, consideremos la dilatación $\delta_t(x_1, \dots, x_n) := (tx_1, \dots, tx_n)$. Por tanto, para un entorno suficientemente pequeño de p , tenemos la cota

$$|d(\delta_t q_1, \delta_t q_2) - d_0(\delta_t q_1, \delta_t q_2)| \leq h(t).$$

Donde, $h(t)$, es una función de t , que depende de la métrica ds^2 y que solo tiene términos de la forma t^k , $k \geq 2$, es decir, estamos en las condiciones adecuadas de aplicar la proposición 6.4 y concluir que el cono tangente de Gromov-Hausdorff sobre una variedad riemanniana, entorno a un punto, coincide con el cono tangente usual, equipado con la métrica euclídea plana.

□

En la sección siguiente veremos unas nuevas estructuras que generalizan la noción de variedad riemanniana y estudiaremos sus conos tangentes métricos. El objetivo final será mostrar, de una manera intuitiva, que estos conos tangentes, sobre estas nuevas estructuras, son precisamente los grupos de Carnot.

6.2. Variedades subriemannianas y nilpotenciación

Si tratamos de abstraer la noción de grupo de Carnot lo que encontramos, dejando de lado la idea de que se trata de un grupo de Lie, es una variedad diferenciable a la que se le ha dado una distribución concreta junto a un producto escalar en cada uno de los espacios que genera dicha distribución. La siguiente definición recoge esta idea.

Definición 6.12. Sea M una variedad diferenciable. Una **estructura subriemanniana** sobre M es una distribución \mathcal{D} y una aplicación $g: \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$, de manera que la aplicación inducida en cada punto $p \in M$, $g_p := \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ es un producto escalar y es diferenciable en el sentido de la definición 1.13.

Una **variedad subriemanniana** es una variedad diferenciable equipada con una estructura subriemanniana.

De la misma manera que hemos ido haciendo a lo largo de todo el trabajo, la distribución de la estructura subriemanniana se denomina **horizontal** y las curvas, γ , de la variedad que son tangentes a dicha distribución son curvas horizontales.

Definimos la longitud de estas curvas, razonando por analogía, como

$$L(\gamma) := \int_0^T \|\gamma'\| dt,$$

donde $\|\gamma'\| := \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)}}$.

Definimos, de igual manera que en el caso de los grupos de Carnot, la distancia de Carnot-Carathéodory entre dos puntos como el ínfimo de las longitudes de los caminos horizontales que los unen, en el caso de existir, y como infinito si no existe un camino admisible en este sentido.

Observación 6.5. Es claro que, con esta definición, los grupos de Carnot son variedades subriemannianas con la distribución que da el primer estrato de la estratificación de su álgebra. Sin embargo, no toda variedad subriemanniana precisa de una estructura tan compleja. Toda variedad riemanniana tiene esta estructura, tomando por distribución a la totalidad del fibrado tangente.

A partir de este punto surgen un gran número de preguntas, algunas de estas son: ¿Cuándo la distancia de Carnot-Carathéodory es finita en estas variedades?, ¿Son los grupos de Carnot variedades subriemannianas distinguidas en algún aspecto?

La respuesta detallada a cada una de estas preguntas llevaría un desarrollo teórico demasiado extenso como para poder ser afrontado en las líneas de este trabajo, sin embargo, vamos a tratar de dar los esquemas generales que responden a estas

preguntas, centrándonos principalmente en la última.

Por lo que respecta a la primera pregunta, ¿cuándo la distancia de Carnot-Carathéodory es finita en estas variedades? Es claro que no toda variedad subriemanniana admite una métrica de Carnot-Carathéodory finita, un contra ejemplo sumamente elemental es considerar una variedad diferenciable junto con una distribución involutiva. Esta distribución trae consigo una subvariedad, usando el teorema de Frobenius, distinta de la variedad inicial, por tanto cualquier punto fuera de esta subvariedad no se puede conectar por un camino horizontal con otro punto de la variedad que no forme parte de esta.

La respuesta, por tanto, debe estar relacionada con la estructura que tenga la distribución asociada a la estructura subriemanniana. La clave resulta ser el hecho de que la distribución, junto con la operación del corchete de Lie, genere todo el fibrado tangente. El teorema análogo al teorema de Chow en este contexto es el siguiente:

Teorema 6.1. *Sea M una variedad subriemanniana. Si la distribución asociada junto con la operación del corchete generan todo el fibrado tangente entonces la distancia de Carnot-Carathéodory es finita entre cualesquiera dos puntos.*

Una demostración detallada de este resultado se encuentra en [Mon02].

Vamos a dedicar la última parte de este trabajo en responder, de una manera más detallada, sin entrar demasiado en las cuestiones técnicas, a la segunda de las preguntas que hemos formulado. Sin duda, los grupos de Carnot juegan un papel esencial en toda la teoría de las variedades subriemannianas. De igual manera que en el corolario 6.1 se muestra que el cono tangente métrico en una variedad riemanniana es el espacio tangente euclídeo usual, vamos a intentar convencernos de que, en el caso de las variedades subriemannianas, estos conos tangentes de Gromov-Hausdorff son los grupos de Carnot. Este resultado es el famoso teorema de Mitchell. Antes de lanzarnos al enunciado y las ideas principales de su demostración vamos a desarrollar algunas herramientas que nos van a ser de utilidad.

6.2.1. Nilpotenciación

Definición 6.13. Sea \mathcal{D} una distribución sobre una variedad diferenciable, M . Diremos que esta distribución es **no-holónoma** si esta distribución, bajo la acción del corchete, genera todo el fibrado tangente, TM .

Como ya hemos comentado, para que se cumpla el análogo del teorema de Chow en el caso subriemanniano es necesario que la distribución que da la estructura subriemanniana sea no-holónoma. Es por esto que nos vamos a centrar en este tipo de distribuciones.

Consideremos una variedad diferenciable, M , y una distribución no-holónoma, \mathcal{D} , en M . Vamos a considerar la siguiente familia de distribuciones:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(1)} &:= \mathcal{D} \\ \mathcal{D}^{(j)} &:= \mathcal{D}^{(j-1)} + [\mathcal{D}, \mathcal{D}^{(j-1)}].\end{aligned}$$

La condición de ser no-holónoma nos garantiza la existencia de un $r > 0$ de manera que $\mathcal{D}^{(r)} = TM$.

Observación 6.6. Se tiene que $[\mathcal{D}^{(l)}, \mathcal{D}^{(m)}] \subset \mathcal{D}^{(l+m)}$, en efecto, el caso $l = 1$ es directo y podemos ver el caso general usando inducción y la identidad de Jacobi: supuesto cierto para el caso k , veamos que se cumple para el caso $k + 1$. Se tiene que

$$\begin{aligned}[\mathcal{D}^{(k+1)}, \mathcal{D}^{(m)}] &= [\mathcal{D}^{(k)} + [\mathcal{D}, \mathcal{D}^{(k)}], \mathcal{D}^{(m)}] = \\ &= [\mathcal{D}^{(k)}, \mathcal{D}^{(m)}] + [[\mathcal{D}, \mathcal{D}^{(k)}], \mathcal{D}^{(m)}] \subset \\ &\subset \mathcal{D}^{(k+m)} + [[\mathcal{D}^{(k)}, \mathcal{D}^{(m)}], \mathcal{D}] + [[\mathcal{D}^{(m)}, \mathcal{D}], \mathcal{D}^{(k)}] \subset \\ &\subset \mathcal{D}^{(k+m)} + [\mathcal{D}^{(k+m)}, \mathcal{D}] + [\mathcal{D}^{(k+m)}, \mathcal{D}^{(k)}] \subset \\ &\subset \mathcal{D}^{(k+m)} + \mathcal{D}^{(k+m+1)} + \mathcal{D}^{(k+m+1)} \subset \mathcal{D}^{(k+m+1)},\end{aligned}$$

tal y como se deseaba. La operación del corchete da, por tanto, una estructura graduada a la sucesión $\{\mathcal{D}^{(j)}\}_{j=1}^r$. Es decir, tenemos una sucesión de la forma

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^{(2)} \subset \dots \subset \mathcal{D}^{(r)} = TM,$$

con una estructura graduada por el corchete. Localmente, en cada punto, $p \in M$, tenemos una sucesión de la forma

$$\mathcal{D}_p \subset \mathcal{D}_p^{(2)} \subset \dots \subset \mathcal{D}_p^{(r)} = T_p M,$$

donde $\mathcal{D}_p^{(j)} := \langle X_p : X \in \mathcal{D}^{(j)} \rangle$.

Uno de los invariantes numéricos más relevantes que podemos dar a una distribución viene dado por la siguiente definición.

Definición 6.14. Sean M una variedad diferenciable, \mathcal{D} una distribución no-holónoma en M y $p \in M$. Definimos el **vector de crecimiento** de la distribución \mathcal{D} en el punto p como el vector $(n_1(p), \dots, n_r(p))$, donde $n_i(p) := \dim \mathcal{D}_p^{(i)}$. Al menor de los valores r , tal que $\mathcal{D}_p^{(r)} = T_p M$, es lo que llamamos **grado** de la distribución en el punto $p \in M$.

Definición 6.15. Diremos que una distribución no-holónoma sobre una variedad, M , es **regular** en un punto $p \in M$ si el vector de crecimiento asociado es constante en un entorno de p . De igual manera, en estas condiciones, diremos que dicho punto es **regular**.

- Ejemplo 6.4.** 1) El grupo de Heisenberg, que es ejemplo típico que hemos trabajado, tiene como vector de crecimiento, en cada uno de sus puntos, $(2, 3)$. Es decir, la distribución es regular en todos sus puntos y, de igual manera, todos sus puntos son regulares.
- 2) Veamos un ejemplo más sofisticado en el que no todos los puntos de la variedad son regulares en el sentido mencionado. Consideremos en \mathbb{R}^3 la distribución generada por los campos, \mathcal{D} ,

$$\begin{aligned} X &= \partial_y \\ Y &= \partial_x + y^2 \partial_z. \end{aligned}$$

A la estructura subriemanniana dada por el par $(\mathbb{R}^3, \mathcal{D})$ es lo que se conoce como variedad de Martinet. En esta variedad existen puntos que no son regulares, estudiemos los vectores de crecimiento según cada uno de los puntos. Consideremos los campos $Z = 2y\partial_z$ y $W = 2\partial_z$. En estas condiciones tenemos las relaciones, fuera del plano $\{y = 0\}$, $[X, Y] = Z$ y $[X, Z] = W$. Es decir, fuera de este plano, tenemos un vector de crecimiento $(2, 3)$ y dentro, dado que $y = 0$, tenemos el vector $(2, 2, 3)$. Es decir, en estas condiciones, los puntos de este plano no son regulares.

Consideremos ahora una distribución \mathcal{D} no-holónoma sobre una variedad M y sea $p \in M$ un punto regular asociado a la distribución, de grado r en dicho punto. En estas condiciones, en un entorno de p , podemos considerar la siguiente graduación:

$$Gr(\mathcal{D}) := \mathcal{D}^{(1)} \oplus (\mathcal{D}^{(2)}/\mathcal{D}^{(1)}) \oplus \dots \oplus (\mathcal{D}^{(r)}/\mathcal{D}^{(r-1)}),$$

donde, tomando $V_j := \mathcal{D}^{(j)}/\mathcal{D}^{(j-1)}$, tenemos que $Gr(\mathcal{D}) = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$. De igual manera, si centramos esta graduación en un punto, $p \in M$, tenemos

$$Gr(\mathcal{D})_p := \mathcal{D}_p^{(1)} \oplus (\mathcal{D}_p^{(2)}/\mathcal{D}_p^{(1)}) \oplus \dots \oplus (\mathcal{D}_p^{(r)}/\mathcal{D}_p^{(r-1)}).$$

Definición 6.16. En las condiciones anteriores. Definimos la **nilpotenciación** de una distribución no-holónoma, \mathcal{D} , sobre un punto regular p como el espacio graduado $Gr(\mathcal{D})_p$

La definición de la nilpotenciación no debe resultarnos novedosa ni artificial. Realmente, cuando hemos estado trabajando con álgebras estratificadas y no estratificadas, ejemplos 5.1 y 5.2, la forma en la que estudiamos la posible estratificación del álgebra era haciendo la nilpotenciación de algunas de las subdistribuciones. Veamos este hecho más detalladamente en algunos ejemplos.

- Ejemplo 6.5.** 1) Como acabamos de comentar, en el caso de la estructura subriemanniana del grupo de Heisenberg, dado que todos los puntos son regulares, si tomamos la nilpotenciación de alguno de sus puntos, asociada a la distribución $\mathcal{D} = \langle X, Y \rangle$, $[X, Y] = Z$, obtenemos la estratificación del álgebra de Heisenberg, en efecto,

$$Gr(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^{(2)}/\mathcal{D} = V_1 \oplus V_2,$$

$$V_1 = \langle X, Y \rangle \text{ y } V_2 = \langle Z \rangle.$$

- 2) Si consideramos ahora el ejemplo 5.2 y tomamos, por ejemplo, la distribución dada por $\mathcal{D} = \langle X^1, X^2 \rangle$. En este caso tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(2)}/\mathcal{D} &= \langle X^3 \rangle \\ \mathcal{D}^{(3)}/\mathcal{D}^{(2)} &= \langle X^4 \rangle \\ \mathcal{D}^{(4)}/\mathcal{D}^{(3)} &= \langle X^5 \rangle \\ \mathcal{D}^{(5)}/\mathcal{D}^{(4)} &= \langle X^6 \rangle \\ \mathcal{D}^{(6)}/\mathcal{D}^{(5)} &= \langle X^7 \rangle.\end{aligned}$$

Es decir, la nilpotenciación asociada a esta distribución viene dada por

$$\begin{aligned}Gr(\mathcal{D}) &= V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus V_5 \oplus V_6 = \\ &= \langle X^1, X^2 \rangle \oplus \langle X^3 \rangle \oplus \langle X^4 \rangle \oplus \langle X^5 \rangle \oplus \langle X^6 \rangle \oplus \langle X^7 \rangle.\end{aligned}$$

Debemos tener cuidado, pues, como ya comentamos en el ejemplo, esta álgebra no es estratificada, es decir, no podemos dar una estratificación como suma directa de espacios y con una graduación con el corchete. En efecto, la nilpotenciación es una suma directa de espacios y posee una graduación por el corchete, sin embargo, para realmente ser una estratificación sería necesario que $[V_1, V_3] = V_4$ y esto es falso pues la relación $[X^2, X^4] = X^7 \notin V_4$. Este problema solo pone de manifiesto que las relaciones del álgebra dada no permiten ningún tipo de estratificación, tal y como ya vimos en su momento.

- 3) Tomemos ahora del ejemplo 6.4 la variedad de Martinet, $(\mathbb{R}^3, \mathcal{D})$, manteniendo la misma notación que en el ejemplo, y veamos que ocurre si intentamos hacer la nilpotenciación de un punto no regular. Consideremos un punto, $p \in \mathbb{R}^3$, del plano $\{y = 0\}$, este punto no es regular y tiene un vector de crecimiento $(2, 2, 3)$. En este caso, si hacemos la nilpotenciación en este punto obtenemos una suma directa de la forma

$$Gr(\mathcal{D})_p = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = \langle X_p, Y_p \rangle \oplus \langle Z_p = 0 \rangle \oplus \langle W_p \rangle = \mathbb{R}^2 \oplus 0 \oplus \mathbb{R}.$$

En principio esto no supone ningún problema, por lo tanto, ¿por qué se define la nilpotenciación sobre puntos regulares? La respuesta viene de la mano de que las nilpotenciaciones sobre puntos regulares obtienen, por la operación que induce el corchete de los campos que lo forman, una estructura de álgebra de Lie estratificada. Esto no ocurre en el caso de los puntos que no son regulares como veremos más adelante.

Veamos pues la estrecha relación que existe entre la nilpotenciación sobre un punto regular y las álgebras de Lie estratificadas.

Proposición 6.5. *Sea \mathcal{D} una distribución no-holónoma sobre una variedad diferenciable M . El conjunto $Gr(\mathcal{D})$ tiene estructura de álgebra de Lie con corchete inducido por el corchete de Lie de los campos que lo forman. Si $p \in M$ es un punto regular asociado a la distribución \mathcal{D} , entonces $Gr(\mathcal{D})_p$ tiene una estructura de álgebra de Lie estratificada.*

Demostración. La clave de la demostración es la propiedad 6.6, $[\mathcal{D}^{(m)}, \mathcal{D}^{(l)}] \subset \mathcal{D}^{(m+l)}$. En efecto, debemos ver que el corchete de Lie en la distribución \mathcal{D} desciende bien al cociente al considerar $Gr(\mathcal{D}) = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$. Consideremos campos $X \in \mathcal{D}^{(j)}, Y \in \mathcal{D}^{(k)}$ y tomemos sus clases, $\bar{X} \in V_j, \bar{Y} \in V_k$. Es decir, $\bar{X} = \{X + v : v \in \mathcal{D}^{(j-1)}\}$ y $\bar{Y} = \{Y + u : u \in \mathcal{D}^{(k-1)}\}$. Por lo tanto tenemos que $[X, u] \in \mathcal{D}^{(j+k-1)}, [Y, v] \in \mathcal{D}^{(j+k-1)}$ y $[u, v] \in \mathcal{D}^{(j+k-2)}$, es decir, que el corchete $[\bar{X}, \bar{Y}] = \{[X, Y] + w : w \in \mathcal{D}^{(j+k-1)}\}$ está bien definido como clase de equivalencia. La estructura graduada se deduce directamente de la propiedad citada al principio.

Tenemos que ver que esta estructura no es solo graduada, si no que es estratificada, sin embargo, esta propiedad se deduce de manera directa del hecho de que la distribución sea no-holónoma, pues $[V_1, V_1] = [\mathcal{D}, \mathcal{D}] = V_2$ y se comprueba directamente por inducción que $[V_1, V_k] = V_{k+1}$.

Además, dado que p es regular, localmente, en un entorno de p , podemos extender la relación del corchete en ese punto a toda la distribución sobre dicho entorno.

□

Veamos un ejemplo en el que se ve lo que ocurre si se intenta dar estructura de álgebra de Lie graduada sobre un punto no regular.

Ejemplo 6.6. Consideremos de nuevo la variedad de Martinet, $(\mathbb{R}^3, \mathcal{D})$, de los ejemplos 6.4 y 6.5, usando la misma notación. Tomemos un punto no regular, es decir, un punto $p \in y = 0$. En estas condiciones tenemos que

$$Gr(\mathcal{D})_p = \mathbb{R}^2 \oplus 0 \oplus \mathbb{R} = \langle X_p, Y_p \rangle \oplus \langle Z_p = 0 \rangle \oplus \langle W_p \rangle.$$

Si tratamos de extender a un entorno de p las relaciones del corchete dadas por la distribución encontramos que la relación $[Y, Z] = W$ debe ser nula en el punto p , pues $[Y_p, Z_p = 0] = 0$, sin embargo, $W_p \neq 0$ en general.

Observación 6.7. Un hecho que no debe dar lugar a confusión es que, aún teniendo la nilpotenciación una estructura de álgebra de Lie estratificada, puntos regulares distintos no dan necesariamente nilpotenciaciones isomorfas como álgebras de Lie.

Una vez visto el concepto de la nilpotenciación podemos pasar a mencionar uno de los focos centrales de interés de nuestro trabajo, los conos tangentes métricos.

6.2.2. Teorema de Mitchell

Este resultado es uno de los teoremas que mejor justifica el presente trabajo, pues pone de manifiesto que los grupos de Carnot no solo son variedades subriemannianas, si no que juegan un papel crucial en toda esta teoría. Antes de presentar su enunciado damos una definición previa.

Definición 6.17. Sea (M, \mathcal{D}) una variedad subriemanniana, definimos el grupo de Carnot asociado a la nilpotenciación de la distribución en un punto regular de M como el único grupo de Lie simplemente conexo que tiene por álgebra de Lie la nilpotenciación de la distribución en un entorno de dicho punto.

El teorema de Mitchell es el siguiente:

Teorema 6.2 (Mitchell). *El cono tangente métrico de Gromov-Hausdorff en un punto regular de una variedad subriemanniana, con distribución no-holónoma, es el grupo de Carnot asociado a la nilpotenciación en ese punto.*

La demostración totalmente precisa puede encontrarse en [Mon02], junto con la referencia auxiliar de [Bel96]. Este resultado necesita de un gran número de herramientas adicionales que van más allá del alcance del presente trabajo, sin embargo, vamos a dar las ideas y los conceptos pertinentes para que se puedan entender las líneas generales de la demostración. Además, durante este desarrollo, vamos a usar gran parte de todos los conceptos que hemos ido trabajando a lo largo de todo el texto.

La idea que subyace en el corazón de la demostración es la siguiente:

Consideremos la variedad subriemanniana en cuestión (M, \mathcal{D}) junto con un punto regular $p \in M$. En un entorno de este punto, U , podemos encontrar un conjunto de campos $\Sigma := \{X^1, \dots, X^n\}$ con la propiedad de que

$$\mathcal{D}_q = \langle X_q^1, \dots, X_q^n \rangle, \quad \forall q \in U.$$

La idea central es considerar estos campos, que conforman una base del primer estrato de $Gr(\mathcal{D})$ en este entorno y extenderlo a toda una base

$$\bar{\Sigma} := \{X^1, \dots, X^n, \dots, X^{n_2}, \dots, X^{n_r}\}$$

del álgebra estratificada, $Gr(\mathcal{D}) = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$, de orden r , que sea adaptada en el sentido que ya conocemos. Denotemos por (x_1, \dots, x_{n_r}) las coordenadas asociadas a los campos de esta base. Dado que la base es adaptada, la dilatación en el álgebra induce una dilatación en las coordenadas que en cada una de las entradas de las coordenadas viene dada por

$$\delta_t(x_i) = t^k x_i, \quad X^i \in V_k.$$

En este punto tenemos que tanto la variedad subriemanniana, por el hecho de serlo, como el Grupo de Carnot asociado a la nilpotenciación en p , G , tienen una estructura métrica que, tomando el punto p , toman una estructura de espacio métrico punteado. Sea d la métrica de la variedad subriemanniana y sea d_0 la métrica que se induce en el grupo de Carnot, G . Lo que se desea probar para terminar el teorema es que, en el entorno U , existe una función $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t)/t \rightarrow 0$, si $t \rightarrow 0$ de manera que para cualesquiera puntos, $p_1, p_2 \in U$, se tenga la cota

$$|d(\delta_t p_1, \delta_t p_2) - d_0(\delta_t p_1, \delta_t p_2)| \leq f(t). \quad (6.2)$$

Una vez estemos en este punto, por la proposición 6.4, concluiremos que el cono tangente de Gromov-Hausdorff de (M, \mathcal{D}, p, d) es (G, d_0, e) , donde e es la identidad del grupo. Con esto termina la prueba. Lo que resta por probar es que se puede encontrar una estimación como la de (6.2). La respuesta a esta cuestión la da el siguiente teorema.

Teorema 6.3. *En las precedentes condiciones. Existen constantes $c, C > 0$ de manera que*

$$cd(\delta_t p_1, \delta_t p_2)^{1/r} \leq d(\delta_t p_1, \delta_t p_2) - d_0(\delta_t p_1, \delta_t p_2) \leq Cd_0(\delta_t p_1, \delta_t p_2)^{1/r}, \quad \forall p_1, p_2 \in U.$$

Es decir, gracias a este resultado tenemos la relación

$$|d(\delta_t p_1, \delta_t p_2) - d_0(\delta_t p_1, \delta_t p_2)| \leq Cd(\delta_t p_1, \delta_t p_2)d_0(\delta_t p_1, \delta_t p_2)^{1/r}.$$

La parte derecha de esta última desigualdad nos vale como función $f(t)$ para la estimación (6.2).

Observación 6.8. Como puede apreciarse, todo el resultado se condensa en el teorema anterior. Este teorema no es en absoluto elemental, precisa de una fuerte maquinaria en el campo del análisis de distribuciones. Una exposición detallada tanto de este resultado como del mismo teorema de Mitchell puede encontrarse en [Bel96]. De hecho, en el texto citado, se da una noción adecuada a la nilpotenciación en puntos no regulares y se da un resultado análogo al teorema de Mitchell en este contexto.

Corolario 6.2. *El cono tangente métrico a un grupo de Carnot es él mismo.*

Observación 6.9. No debe confundirse uno a partir de este punto. Los conos tangentes métricos son una forma adecuada de generalizar, desde un punto métrico, el espacio tangente al uso de las variedades riemannianas. Sin embargo, no se pueden extrapolar los resultados que se conocen y que relacionan los espacios tangentes con las variedades, pues fallan con carácter general. Uno de los ejemplos más claros de este hecho es que no es cierto en general que el cono tangente métrico de una variedad subriemanniana sea bi-Lipschitz equivalente a su cono tangente métrico.

6.3. Una presentación métrica y conclusiones

Uno de los temas que hemos tratado de remarcar es el hecho de que tanto los resultados puramente métricos como los de carácter geométrico se compaginan para dar resultados tanto en grupos de Carnot como en variedades subriemannianas. La presentación de los grupos de Carnot ha sido a partir del desarrollo de la teoría de grupos de Lie. Dado que hemos visto que en el contexto de estos grupos la aproximación métrica como geométrica coinciden, cabe preguntarse si existe una presentación puramente métrica de estos grupos. La respuesta es afirmativa, se presenta a continuación.

Definición 6.18. Un espacio métrico (X, d) se dice **geodésico** si existen, para cada $p, q \in X$, un embebimiento isométrico $i: [0, T] \rightarrow X$ de manera que $i(0) = p$ e $i(T) = q$.

Definición 6.19. Decimos que un espacio métrico, (X, d) , es **isométricamente homogéneo** si para cualesquiera $p, q \in X$, existe un homeomorfismo, que preserva la distancia, $f: X \rightarrow X$ de manera que $f(p) = q$.

Con todas estas definiciones podemos presentar de una manera axiomática y puramente métrica los grupos de Carnot. La demostración de la caracterización resulta fuera del objeto del trabajo.

Teorema 6.4. *Los grupos de Carnot son los únicos espacios métricos que son localmente compactos, geodésicos, isométricamente homogéneos y que admiten dilataciones.*

Para una idea de la demostración y referencias auxiliares puede consultarse [LD17a].

Es decir, si hubiésemos partido de esta definición podríamos haber desarrollado los mismos resultados expuestos en el trabajo, pero partiendo desde un punto de vista completamente métrico.

6.4. Conclusiones

Como se ha mostrado a lo largo de todo el trabajo, los grupos de Carnot resultan fascinantes, tanto por su esencia compartida métrica y geométrica como por el papel que juegan en el campo de las variedades subriemannianas. La presentación y la justificación que se ha dado ha sido más teórica que práctica, pues estos grupos y sus resultados presentan interesantes herramientas aplicadas a la teoría de control. En [BLU07] se da una exposición de los grupos de Carnot con la intención de atacar estos enfoques desarrollando una teoría de *sub-laplacianos*.

De igual manera, otros puntos de interés que se han eludido en el trabajo y que son de gran importancia en el desarrollo actual de esta teoría, son, por ejemplo:

El estudio de las bolas en las variedades subriemannianas, pues resulta ser un problema abierto si las bolas de estos espacios, con carácter general, son homeomorfas a las bolas euclídeas usuales de la variedad subyacente. En el caso de los grupos de Carnot, como ya vimos, la respuesta es afirmativa. En el caso de las variedades subriemannianas con distribuciones de orden 2 ha demostrado ser cierto, como puede verse en [Bar00]. En el resto de casos esta cuestión sigue abierta.

Las geodésicas, cómo se generalizan las ecuaciones de Euler-Lagrange al caso subriemanniano y si estas son realmente las ecuaciones de las geodésicas, lo cual es falso, por ejemplo, la variedad de Martinet posee geodésicas que no cumplen estas ecuaciones. Un desarrollo detallado de todos estos resultados puede encontrarse en [Mon02].

Para finalizar estas posibles ramas de ataque de estudio, las estructuras riemannianas inducen, en el caso de tratarse de unos *fibrados* con ciertas propiedades, estructuras subriemannianas en las variedades de las cuales son proyecciones. Un ejemplo precioso es que, si tomamos una 2-esfera de área 2π , y definimos en ella la distribución de Heisenberg, obtenemos una estructura de álgebra de Heisenberg sobre la 3-esfera. Bien, es precioso el hecho de que las geodésicas de este espacio, son las que se inducen por la fibración de Hopf en estas esferas:

$$\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^2.$$

Un apéndice con las nociones necesarias para entender este hecho se presenta en [Mon02].

Como puede observarse, estos grupos no solo son relevantes, sino que su campo de estudio en un gran número de ramas de las matemáticas sigue abierto. Una sección entera dedicada a los problemas abiertos en la teoría de variedades subriemannianas y de grupos de Carnot, en aspectos no detallados en este texto, se puede encontrar, junto con las referencias pertinentes, en [Mon02].

Como conclusión final, atacando el marco personal tras el estudio de los temas expuestos en el trabajo, puedo decir que los grupos de Carnot, como las variedades subriemannianas, dan ejemplo de uno de esos fenómenos en matemáticas con una belleza particular: tomando enfoques distintos (geometría, análisis, etc. . .), herramientas distintas (como la dimensión de Hausdorff y la dimensión homogénea, por ejemplo) y quizá, como comentamos en esta última sección, objetos que en un principio se dirían distintos (la presentación de los grupos de Carnot como grupos de Lie o como la caracterización métrica del teorema 6.4) lo que se descubre es que los *objetos mirados* son uno solo. Es la forma de mirarlo, algo dado por el sujeto,

CAPÍTULO 6. VARIEDADES SUBRIEMANNIANAS Y CONOS TANGENTES

como son las ramas y campos de las matemáticas, aquello que decide dar sus rasgos esenciales de una manera u otra.

Bibliografía

- [Bar00] Yu Baryshnikov. On small carnot-carathéodory spheres. *Geometric and Functional Analysis*, 10(2):259–265, 2000.
- [Bel96] André Bellaïche. The tangent space in sub-riemannian geometry. In *Sub-Riemannian geometry*, pages 1–78. Springer, 1996.
- [BLU07] Andrea Bonfiglioli, Ermanno Lanconelli, and Francesco Uguzzoni. *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [Car92] Manfredo Perdigao do Carmo. *Riemannian geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [EG15] Lawrence Craig Evans and Ronald F Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Chapman and Hall/CRC, 2015.
- [Fol13] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, 2013.
- [GR06] JM Gamboa and JM Ruiz. Introducción al estudio de las variedades diferenciables. *Editorial Sanz y Torres*, 2006.
- [Gro07] Mikhail Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [LD17a] Enrico Le Donne. *Lecture notes on sub-Riemannian geometry*. 2017.
- [LD17b] Enrico Le Donne. A primer on carnot groups: homogenous groups, carnot-carathéodory spaces, and regularity of their isometries. *Analysis and Geometry in Metric Spaces*, 5(1):116–137, 2017.
- [MGR] Vicente Muñoz, Ángel González, and Juan Ángel Rojo. *Geometry and Topology of Surfaces*.
- [Mon02] Richard Montgomery. A tour of subriemannian geometries. *Their geodesics and applications*. Providence, RI: Amer. Math. Soc, 2002.
- [Var13] Veeravalli S Varadarajan. *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, volume 102. Springer Science & Business Media, 2013.

- [War13] Frank W Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94. Springer Science & Business Media, 2013.