Santiago Passos
Alejandro Rojas

Tarea 4

Problema 1

Considere la función
$$f(x) = e^{x+3} + \frac{x^3}{3} - 10$$

1. Demuestre que la función tiene una **única** raíz en el intervalo [-1,0].
   Se puede ver en la figura (1) que la función es continua en el intervalo [-1,0]. Además

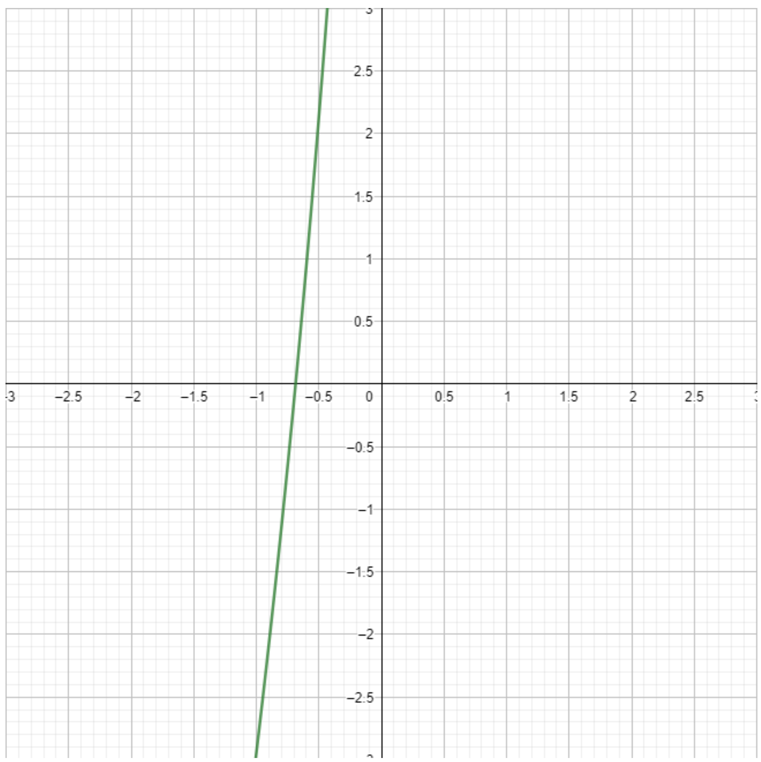

Figura 1: Gráfica de $f(x)$ entre -3 y 3, generada con GeoGebra.

   $f(-1) = e^2 - \frac{31}{3} < 0$ y $f(0) = e^3 - 10 > 0$. Finalmente,
$$\frac{df(x)}{dx} = x^2 + e^{x+3}$$
   es monótona en $[-1, 0]$ ya que $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 2x + e^{x+3}$ es positiva para cualquier $x \in [-1, 0]$. Así, por el teorema de existencia de una única raíz se garantiza que existe una única rapiz $x_m \in [-1, 0]$.

2. Justifique que se puede aplicar el método de la bisección en [-1, 0] para aproximar la raíz de la ecuación f(x) = 0 y luego úselo para aproximar la raíz con una tolerancia de

10^{-6} (es decir, se debe satisfacer que $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$).

Por el punto anterior se sabe de la existencia de una única raíz en el intervalo [-1, 0], por ello podemos aplicar el método de bisección en ese intervalo.

Después de aplicar el método se obtuvo $x_m = -0{,}6866797804832458$

3. ¿Cuántas iteraciones serían necesarias para obtener un error absoluto menor a 10^{-8} (Responda sin realizar iteraciones).

Cómo la cota para el error absoluto del método es $\frac{b-a}{2^n}$ siendo n el número de iteraciones, podemos despejar la n de allí.

$$10^{-8} = \frac{0-(-1)}{2^n} \tag{1}$$
$$2^n = \frac{1}{10^{-8}} \tag{2}$$
$$n = log_2(\frac{1}{10^{-8}}) \tag{3}$$
$$n \approx 26{,}575424 \tag{4}$$

De aquí se sabe que se necesitarán 27 iteraciones como mínimo para obtener un error absoluto menor a 10^{-8}.

Problema 10

Para cada una de las siguientes ecuaciones determine todos los intervalos que contienen las raíces, utilice un graficador y el método de búsquedas incrementales para **refinar los intervalos** de tal manera que sean adecuados para ejecutar los métodos, utilitce los algoritmos implementados para todos los métodos vistos en clase para obtener una raíz con las coniciones dadas en cada caso. Tenga en cuenta que la cantidad de cifras que se entregan en la solución dependen los requerimientos establecidos para el error.

1. Determine todas las raíces de la siguiente ecuación, con 8 cifras significativas.

$$ln(x^2+1) + xcos(6x+3) - 3x - 10 = 0$$

Se graficó la función utilizando Geogebra. Ver figuras (2) y (3).

Partiendo de los intervalos que se pueden ver en la gráfica (3), se hace una búsqueda incremental sobre ellos con un paso de 0,01 para hacer más pequeño dicho intervalo y luego se usa bisección para encontrar la raíz correspondiente. Ver cuadro (1).

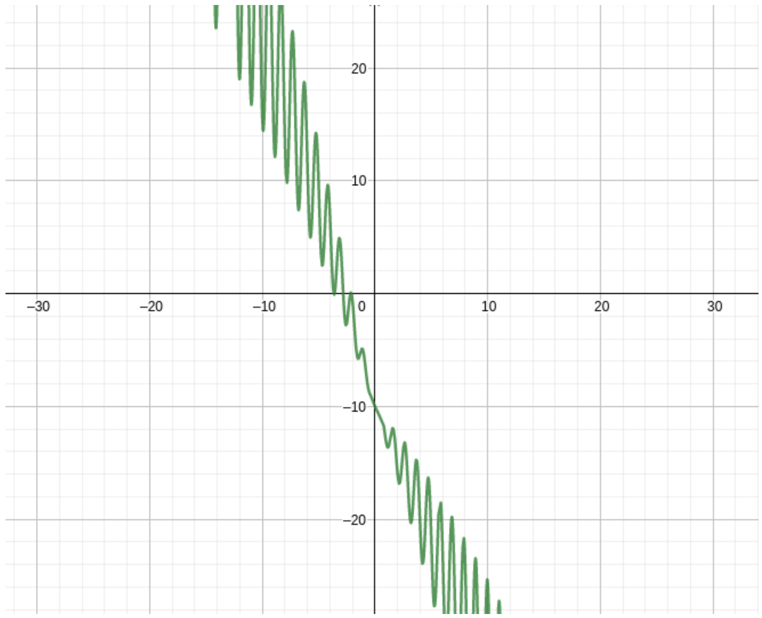

Figura 2: Gráfica de $ln(x^2+1)+xcos(6x+3)-3x-10$ entre -30 y 30 generada con Geogebra

Cuadro 1: Intervalos y raíces para la función $ln(x^2+1)+xcos(6x+3)-3x-10$

Intervalo	**Intervalo Mejorado**	**Raíz**
[-3.7, -3.8]	[-3.66, -3.65]	-3.6575000
[-3.6, -3.5]	[-3.59, -3.58]	-3.5875000
[-2.9, -2.8]	[-2.82, -2.81]	-2.8175000
[-2.2, -2.1]	[-2.19, -2.18]	-2.1875000
[-2.1, -2.0]	[-2.09, -2.08]	-2.0825000

2. Determine todas las raíces de la siguiente ecuación, entre [20, 20] con 7 decimales correctos mediante un método adecuado.

$$e^{-x^2+1}+xsin(x-3)-x$$

Se graficó la función utilizando Geogebra. Ver figura (4).

Se utilizó búsqueda incremental a partir de -15 con un paso de 0,01 y se encontró el intervalo

$$[0{,}79, 0{,}80]$$

Aplicando bisección se obtuvo la raíz 0,79705494 en 19 iteraciones. Usando el método de la secante se obtuvo la raíz 0,79705496 en 3 iteraciones.

Figura 3: Gráfica de $ln(x^2+1)+xcos(6x+3)-3x-10$ entre -3.8 y -2 generada con Geogebra

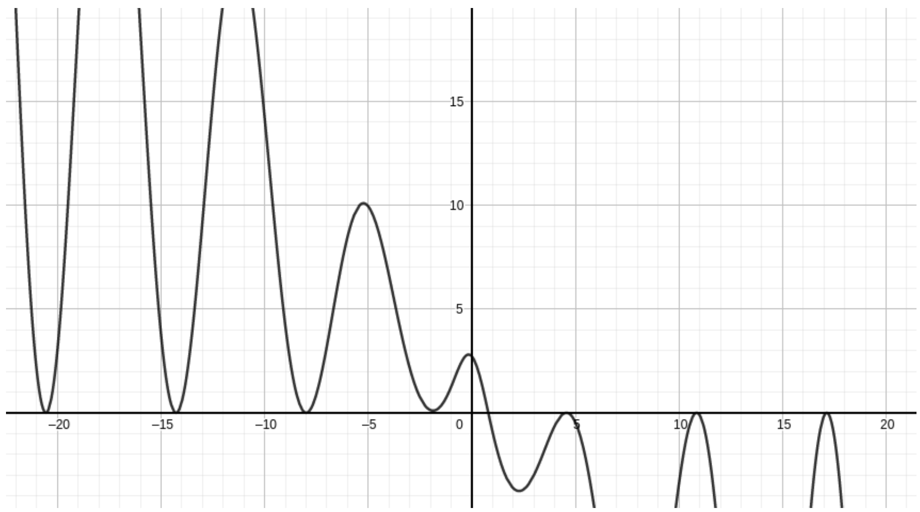

Figura 4: Gráfica de $e^{-x^2+1}+xsin(x-3)-x$ entre -20 y 20.

Luego se utilizó búsqueda incremental a partir de 4 con un paso de 0,0001 y se encontró el intervalo

$$[4{,}5707, 4{,}5708]$$

.

Aplicando bisección se obtuvo la raíz 4,570775 en 2 iteraciones. Usando el método de la secante se obtuvo la raíz 4,57075 en una iteración.

3. Determine la mayor raíz negativa y la menor raíz positiva de la siguiente ecuación, con una tolerancia de 10^{-8}

$$e^{-x^2+4}+3xcos(x-3)-2x+16=0$$

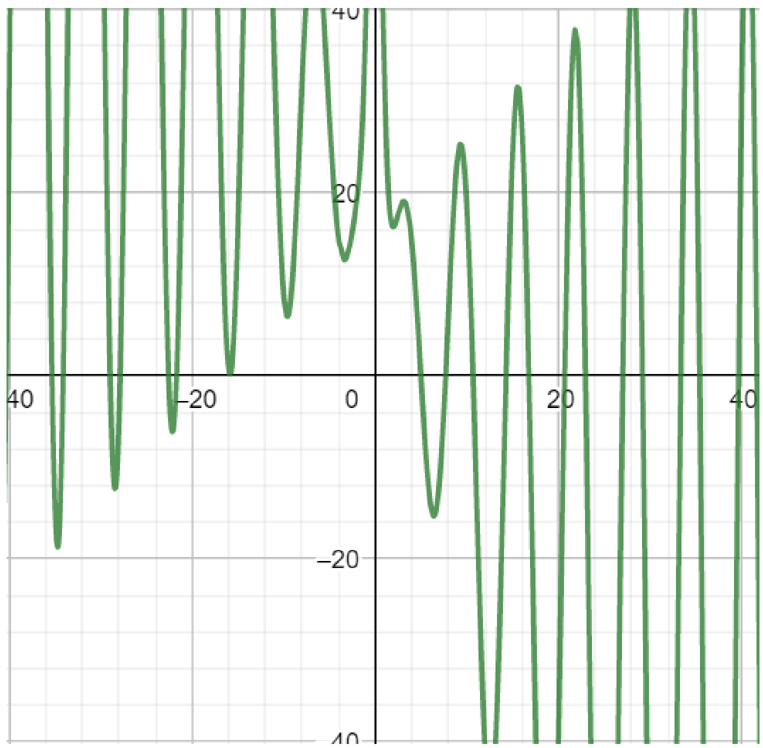

Figura 5: Gráfica de $e^{-x^2+4} + 3xcos(x-3) - 2x + 16$ entre -40 y 40, generada con GeoGebra.

Se puede ver en la gráfica (5) que para hallar el intervalo de la mayor raíz negativa usando búsquedas incrementales se puede comenzar en el punto -25. Para hallar el intervalo de la menor raíz positiva se puede comenzar en el punto 0. Para ambos intervalos se usó un paso de 0,01. Los intervalos obtenidos fueron:

$$[-22{,}57799999, -22{,}57699999]$$

$$[4{,}98499999, 4{,}98600000]$$

Luego, aplicando el método de bisección con una tolerancia de 10^{-8} como criterio de parada. Si x_1 es la máxima raíz negativa y x_2 es la mínima raíz positiva, los resultados obtenidos fueron:

$$x_1 = -22{,}57708157$$

$$x_2 = 4{,}98566250$$

4. Determine todas las raíces de la siguiente ecuación, con una máximo error relativo de $0{,}5 * 10^{-9}$

$$\sqrt{x^2+1} - 5xe^{-x} - 4x^2 + 31x + 12$$

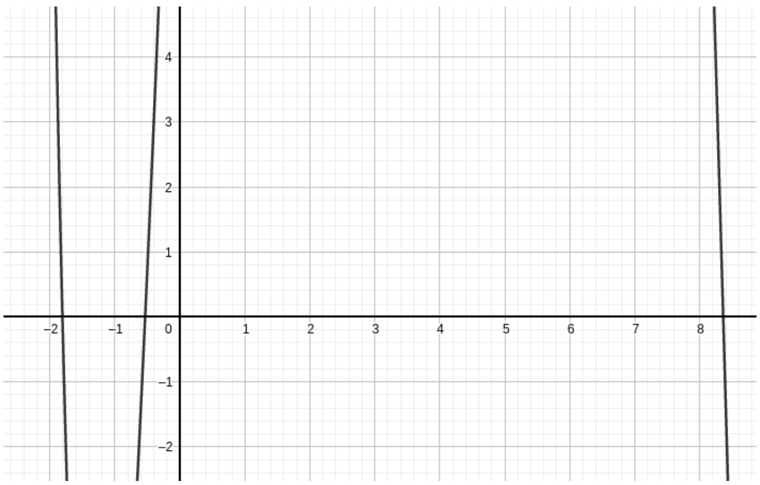

Figura 6: Gráfica de $\sqrt{x^2+1} - 5xe^{-x} - 4x^2 + 31x + 12$ entre -3 y 9, generada con GeoGebra.

Al ver la gráfica (6) se puede ver que la ecuación tiene 3 raíces entre -3 y -9. Los intervalos iniciales pensados fueron:

$$[-2, -1]$$

$$[-0{,}9, 0]$$

$$[8, 9]$$

Luego de aplicar búsquedas incrementales con un paso de 0,01, se obtuvieron los siguientes intervalos mejorados:

$$[-1{,}807, -1{,}806]$$

$$[-0{,}534, -0{,}533]$$

$$[8{,}354, 8{,}361]$$

Y se obtuvieron las siguientes raíces usando bisección con un máximo error relativo de $0{,}5 * 10^{-9}$ como criterio de parada:

$$-1{,}8062718$$

$$-0{,}53369398$$

$$8{,}3603272$$

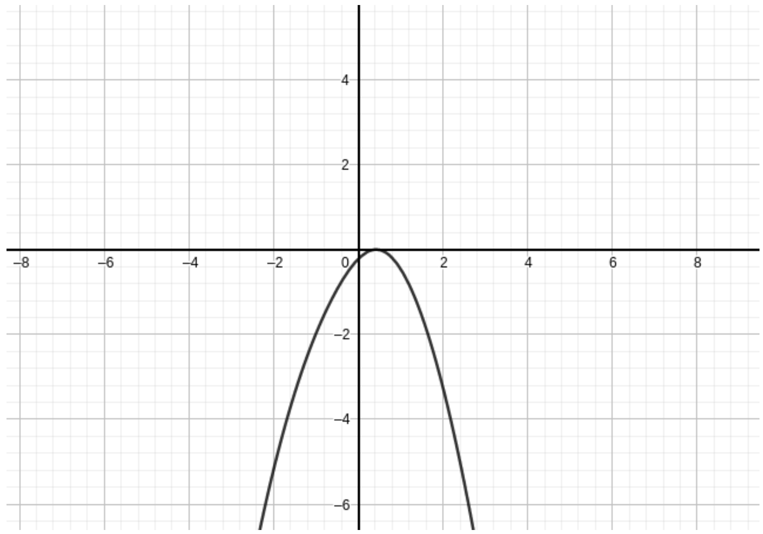

Figura 7: Gráfica de $tanh(x) - x^2 - 0{,}22$ entre -8 y 9, generada con GeoGebra.

5. Resuelva la siguiente ecuación, con una tolerancia de $0{,}5 * 10^{-9}$

$$tanh(x) - x^2 - 0{,}22 = 0$$

Viendo la gráfica (7) se puede ver que la función tiene una raíz en el intervalo [0, 2]. Al aplicar búsquedas incrementales con un paso de 0,01 se obtuvo el intervalo mejorado

[0,4000,401]

Y usando bisección con un máximo error absoluto de $0{,}5 * 10^{-9}$ como criterio de parada, se obtuvo la siguiente raíz:

0,40093827

6. Determine las raíces positivas hasta 30 de la siguiente ecuación, con un máximo error absoluto de $0{,}5 * 10^{-9}$.

$$x - xtan(x) = 0$$

Se puede ver en la figura (8) que la función tiene 10 raíces entre 0 y 30. Se realizó 10 búsquedas incrementales comenzando en los puntos: 0, 2.5, 5, 10, 11, 15, 19, 22, 25, 28 y con paso de 0,01. Para las raíces se utilizó el método de bisección con una tolerancia de 10^{-8} como criterio de parada. Los resultados obtenidos se pueden ver en el Cuadro (2).

7. Resuelva la siguiente ecuación, con una tolerancia de $0{,}5 * 10^{-9}$.

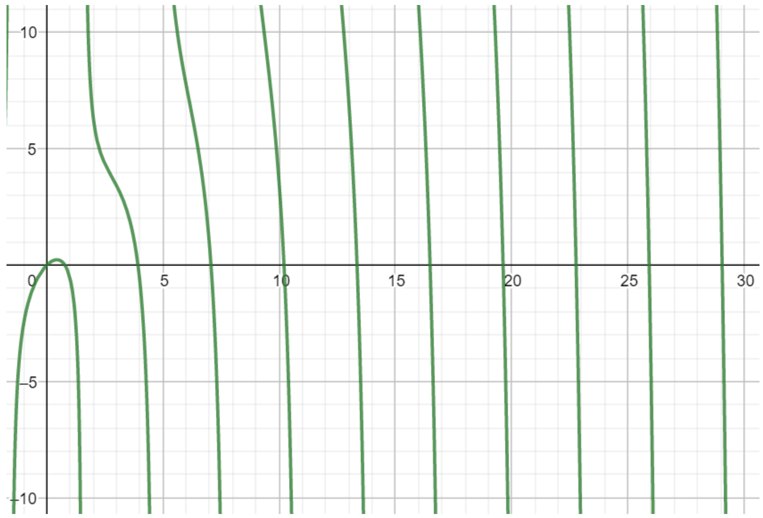

Figura 8: Gráfica de $x - xtan(x)$ entre 0 y 30, generada con GeoGebra.

$$-2tanh(x) + e^1 - x + 95 - 5 = 0$$

Se graficó la función utilizando Geogebra. Ver figura (9).

Se utilizó búsqueda incremental con un paso de 0,1 desde 80, y se obtuvo el intervalo

$$[90{,}7, 90{,}80]$$

Luego se utilizó nuevamente búsqueda inicial a partir de 90,7 pero con un paso de 0,001 y se obtuvo el intervalo

$$[90{,}718, 90{,}719]$$

Finalmente, se uso bisección y se encontró la raíz

$$90{,}718281828$$

en 20 iteraciones.

Problema 12

Dada la ecuación $x - 2xsin(x) = 0$ determine el número de puntos fijos que puede tener la ecuación $x = 2xsin(x)$. Justifique su respuesta desde el punto de vista gráfico.
En la figura (10) se puede ver que la gráfica oscila y que tiene múltiples raíces.

Cuadro 2: Intervalos y raíces para la función $x - xtan(x)$

Intervalo	**Intervalo Mejorado**	**Raíz**
[0, 2.4]	[0.785, 0.786]	0.785398163
[2.5, 4.9]	[3.926, 3.927]	3.926990817
[5, 9.9]	[7.068, 7.069]	7.068583471
[10, 10.9]	[10.210, 10.211]	10.210176124
[11, 14.9]	[13.351, 13.352]	13.351768778
[15, 18.9]	[16.493, 16.494]	16.493361431
[19, 21.9]	[19.634, 19.635]	19.634954085
[22, 24.9]	[22.776, 22.777]	22.776546739
[25, 27.9]	[25.918, 25.919]	25.918139392
[28, 30]	[29.059, 29.060]	29.059732046

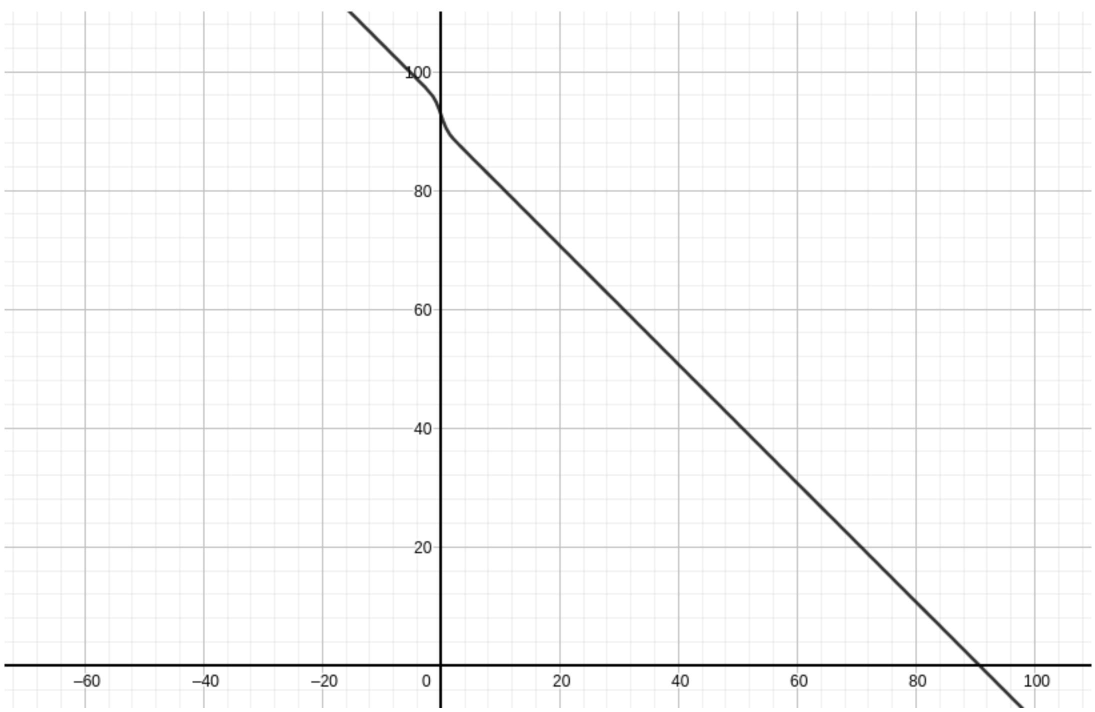

Figura 9: Gráfica de $-2tanh(x) + e^1 - x + 95 - 5$ entre -60 y 100, generada con GeoGebra.

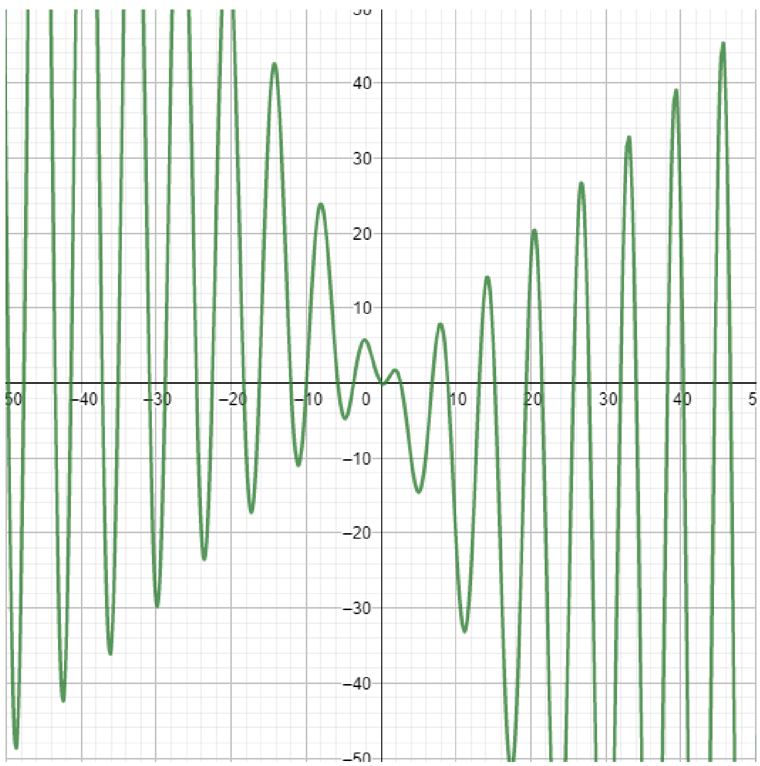

Figura 10: Gráfica de $x - 2xsin(x) = 0$ entre -50 y 50, generada con GeoGebra.