

Signal- und Systemtheorie Übung¹—Frank Schultz, Sascha Spors, Institut für Nachrichtentechnik (INT), Fakultät für Informatik und Elektrotechnik (IEF), Universität Rostock & Robert Hauser, Universität Rostock—Sommersemester 2022, Version: 25. Oktober 2021

1 Aufgabe

Gegeben sei folgende Differentialgleichung eines LRC-Schwingkreises (hergeleitet in https://github.com/spatialaudio/signals-and-systems-exercises/blob/master/tutorial_latex_deu/sig_sys_ex_03Add0n.tex):

$$LC \frac{d^2}{dt^2} y(t) + RC \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t). \quad (1)$$

Leiten Sie aus dieser Differentialgleichung eine Differenzengleichung für diskrete Signale, die mit T abgetastet werden, ab!

Berechnen Sie anschließend

- die Impuls- und Sprungantwort des kontinuierlichen Systems!
- die Impuls- und Sprungantwort des diskreten Systems!

Folgende Werte sollen dabei verwendet werden:

$$R = 2L = 3C = 1, \quad (2)$$

$$T \in \left\{ \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1, 2 \right\}. \quad (3)$$

2 Lösung

2.1 Herleitung Differenzengleichung

Mit einer zeitlichen Ableitung wird der Anstieg zum Zeitpunkt t ermittelt. Während es für algebraische Funktionen viele Techniken zum Ableiten gibt, basiert die Idee auf Differenzenquotienten. Man legt zwischen zwei Punkten eine Gerade an und bestimmt dessen Anstieg. Dabei verringert man immer weiter den Abstand h zwischen den Punkten. Beim Übergang $h \rightarrow 0$ erhält man dann die Ableitung. Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten, wo genau die Gleichung angelegt wird:

- eine Gerade G_1 von $(t-h, y(t-h))$ nach $(t, y(t))$,
- eine Gerade G_2 von $(t, y(t))$ nach $(t+h, y(t+h))$.

¹This tutorial is provided as Open Educational Resource (OER), to be found at <https://github.com/spatialaudio/signals-and-systems-exercises> accompanying the OER lecture <https://github.com/spatialaudio/signals-and-systems-lecture>. Both are licensed under a) the Creative Commons Attribution 4.0 International License for text and graphics and b) the MIT License for source code. Please attribute material from the tutorial as *Frank Schultz, Continuous- and Discrete-Time Signals and Systems - A Tutorial Featuring Computational Examples, University of Rostock* with main file, github URL, commit SHA number and/or version tag, year.

Der Anstieg der Geraden berechnet sich dann wie folgt:

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(t) - y(t-h)}{t - (t-h)} = \frac{y(t) - y(t-h)}{h}, \quad (4)$$

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(t+h) - y(t)}{(t+h) - t} = \frac{y(t+h) - y(t)}{h}. \quad (5)$$

Wie oben bereits erwähnt, erhält man beim Grenzübergang $h \rightarrow 0$ die Ableitung zum Zeitpunkt t :

$$\frac{d}{dt}y(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(t-h)}{h} \quad (6)$$

bzw.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}. \quad (7)$$

Wir haben es aber nun mit diskreten Signalen zu tun, d.h. wir können h nicht unendlich klein werden lassen, sondern maximal eine Abtastperiode T klein. Die beiden Differenzenquotienten lauten damit

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{y(t) - y(t-T)}{T}, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{y(t+T) - y(t)}{T}. \quad (9)$$

Wir bilden noch das arithmetische Mittel aus beiden Quotienten und definieren uns einen Differenzenquotienten für diskrete Signale:

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{\frac{y(t) - y(t-T)}{T} + \frac{y(t+T) - y(t)}{T}}{2} = \frac{y(t+T) - y(t-T)}{2T}. \quad (10)$$

Diesen nennt man auch den zentralen Differenzenquotienten erster Ordnung.

Des weiteren gilt bei diskreten Signalen $t = kT$ bzw. $y(kT) = y[k]$. Wir können unseren Differenzenquotienten somit noch etwas einfacher fassen:

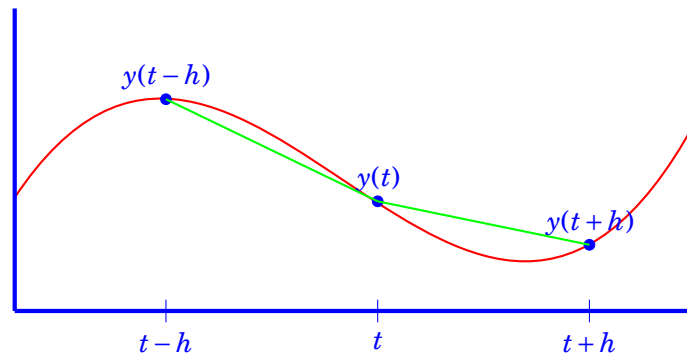
$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{y[k+1] - y[k-1]}{2T}. \quad (11)$$

Für die doppelte zeitliche Ableitung lässt sich auch ein Differenzenquotient finden. Der zentrale Differenzenquotient zweiter Ordnung lautet (zu finden u.a. in (Reinhardt, 2012, Kap. 5, S. 138), (Meister und Sonar, 2019, Kap. 5, S. 149) oder (Scholz, 2016, Kap. 8, S. 184))

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \frac{y(t+T) - 2y(t) + y(t-T)}{T^2} \quad (12)$$

bzw. unter der Berücksichtigung, dass $t = kT$,

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \frac{y[k+1] - 2y[k] + y[k-1]}{T^2} \quad (13)$$



Wir setzen die Differenzenquotienten nun in die Differentialgleichung ein

$$\frac{1}{6} \frac{d^2}{dt^2} y(t) + \frac{1}{3} \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t) \quad (14)$$

$$\frac{1}{6} \frac{y[k+1] - 2y[k] + y[k-1]}{T^2} + \frac{\overset{=}{t=kT}}{3} \frac{y[k+1] - y[k-1]}{T} + y[k] = x[k] \quad (15)$$

und erhalten somit eine Differenzengleichung.

Wir verschieben die Differenzengleichung nun um 1 nach rechts:

$$\frac{1}{6} \frac{y[k] - 2y[k-1] + y[k-2]}{T^2} + \frac{1}{6} \frac{y[k] - y[k-2]}{T} + y[k-1] = x[k-1]. \quad (16)$$

Wir sortieren noch etwas um. Die endgültige Differenzengleichung lautet somit

$$\frac{1}{6T} \left(\frac{1}{T} + 1 \right) y[k] + \left(1 - \frac{1}{3T^2} \right) y[k-1] + \frac{1}{6T} \left(\frac{1}{T} - 1 \right) y[k-2] = x[k-1]. \quad (17)$$

2.2 Aufgabe a)

Es stehen viele Werkzeuge zum Berechnen der Impuls- und Sprungantwort zur Verfügung. Wir werden an dieser Stelle die Laplace-Transformation nutzen.

$$LC \frac{d^2}{dt^2} y(t) + RC \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t) \quad (18)$$

○ — ●

$$LC s^2 Y(s) + RC s Y(s) + Y(s) = X(s) \quad (19)$$

⇔

$$Y(s)(LC s^2 + RC s + 1) = X(s) \quad (20)$$

⇔

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{LC s^2 + RC s + 1} = \frac{1}{LC} \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (21)$$

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (22)$$

⇔

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad (23)$$

Wir setzen nun die Werte der Aufgabenstellung ein.

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-6} = -1 \pm j\sqrt{5} \quad (24)$$

Unter der Wurzel befand sich der Ausdruck $-5 < 0$, wodurch wir es mit komplexen Nullstellen zu tun haben. Wir wenden nun einen Trick an: $6 = 1 + 5$: das bedeutet, wir nutzen zur Faktorisierung nur die 1 aus der 6, die 5 belassen wir extra.

$$H(s) = 6 \frac{1}{(s^2 + 2s + 1) + 5} = 6 \frac{1}{(s+1)^2 + 5} \quad (25)$$

Somit können wir folgende Korrespondenz nutzen:

$$e^{s_0 t} \sin(\omega_0 t) \epsilon(t) \quad \text{○ — ●} \quad \frac{\omega_0}{(s - s_0)^2 + \omega_0^2} \quad (26)$$

$$H(s) = \frac{6}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{(s+1)^2 + 5} \quad (27)$$

● — ○

$$h(t) = \frac{6}{\sqrt{5}} e^{-t} \sin(\sqrt{5}t) \epsilon(t) \quad (28)$$

Für die Sprungantwort müssen wir unsere Systemfunktion nur mit $\frac{1}{s}$ multiplizieren und dann eine PZB anwenden.

$$H_e(s) = \frac{1}{s}H(s) = 6 \frac{1}{s(s+1)^2+5} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s+1)^2+5} \quad (29)$$

$$6 = A((s+1)^2+5) + (Bs+C)s = A(s^2+2s+6) + Bs^2 + Cs = s^2(A+B) + s(2A+C) + 6A \quad (30)$$

$$z^2: 0 = A+B \quad (31)$$

$$z^1: 0 = 2A+C \quad (32)$$

$$z^0: 6 = 6A \quad (33)$$

Daraus folgt:

$$A = 1, \quad (34)$$

$$B = -A = -1, \quad (35)$$

$$C = -2A = -2. \quad (36)$$

Somit haben wir die Laplace-Transformierte unserer Sprungantwort berechnet, es fehlt nur noch die Rücktrafo:

$$H_e(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{(s+1)^2+5} - \frac{2}{(s+1)^2+5} \quad (37)$$

\Leftrightarrow

$$H_e(s) \frac{1}{s} - \frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+5} - \frac{2}{(s+1)^2+5} \quad (38)$$

\Leftrightarrow

$$H_e(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+5} - \frac{1}{(s+1)^2+5} \quad (39)$$

\Leftrightarrow

$$H_e(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)+5} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{(s+1)^2+5} \quad (40)$$

$\bullet \longrightarrow \circ$

$$h_e(t) = \epsilon(t) - e^{-t} \cos(\sqrt{5}t) - \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-t} \sin(\sqrt{5}t) \quad (41)$$

2.3 Aufgabe b)

Wir wollen nun die Impuls- und Sprungantwort aus folgender Differenzengleichung berechnen:

$$\frac{1}{6T} \left(\frac{1}{T} + 1 \right) y[k] - \left(1 - \frac{1}{3T^2} \right) y[k-1] + \frac{1}{6T} \left(\frac{1}{T} - 1 \right) y[k-2] = x[k-1]. \quad (42)$$

Wie gewohnt transformieren wir die Differenzengleichung zunächst in den z -Bereich:

$$\frac{1}{6T} \left(\frac{1}{T} + 1 \right) Y(z) + \left(1 - \frac{1}{3T^2} \right) z^{-1} Y(z) + \frac{1}{6T} \left(\frac{1}{T} - 1 \right) z^{-2} Y(z) = z^{-1} X(z) \quad (43)$$

Wir klammern $Y(z)$ aus und stellen nach $\frac{Y(z)}{X(z)}$ um.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{\frac{1}{6T} \left(\frac{1}{T} + 1 \right) + \left(1 - \frac{1}{3T^2} \right) z^{-1} + \frac{1}{6T} \left(\frac{1}{T} - 1 \right) z^{-2}} \quad (44)$$

Wir erweitern mit $\frac{6Tz^2}{6Tz^2}$.

$$H(z) = 6T \frac{z}{\frac{1+T}{T} z^2 + \left(6T - \frac{2}{T} \right) z + \frac{1-T}{T}} \quad (45)$$

Wir erweitern mit $\frac{T/(T+1)}{T/(T+1)}$.

$$H(z) = \frac{6T^2}{1+T} \frac{z}{z^2 + \frac{6T^2-2}{1+T} z + \frac{1-T}{1+T}} \quad (46)$$

Wir zerlegen den Nenner in die einzelnen Pole:

$$z^2 + \frac{6T^2-2}{1+T} z + \frac{1-T}{1+T} = 0 \quad (47)$$

$$(48)$$

Wir wenden die p - q -Formel an.

$$z_{1,2} = \frac{1-3T^2}{1+T} \pm \sqrt{\frac{(1-3T^2)}{(1+T)^2} + \frac{T-1}{T+1}} \quad (49)$$

Unter der Wurzel bringen wir die Summe auf einen gemeinsamen Nenner.

$$z_{1,2} = \frac{1-3T^2}{1+T} \pm \sqrt{\frac{1-6T^2+9T^4}{(1+T)^2} + \frac{T^2-1}{(T+1)^2}} \quad (50)$$

Die Brüche unter der Summe können somit zusammengefasst werden.

$$z_{1,2} = \frac{1-3T^2}{1+T} \pm \sqrt{\frac{1-6T^2+9T^4+T^2-1}{(1+T)^2}} \quad (51)$$

Der Zähler in der Wurzel vereinfacht sich somit.

$$z_{1,2} = \frac{1-3T^2}{1+T} \pm \sqrt{\frac{9T^4-5T^2}{(1+T)^2}} \quad (52)$$

Im Zähler kann T^2 ausgeklammert werden.

$$z_{1,2} = \frac{1-3T^2}{1+T} \pm \sqrt{\frac{T^2(9T^2-5)}{(1+T)^2}} \quad (53)$$

$$(54)$$

Wir ziehen T^2 und $(1+T)^2$ aus der Wurzel raus.

$$z_{1,2} = \frac{1-3T^2 \pm T\sqrt{9T^2-5}}{1+T} \quad (55)$$

Je nachdem, wie T gewählt wird, ergeben sich unter der Wurzel Werte > 0 , $= 0$ oder < 0 .

$$9T^2 - 5 > 0 \quad (56)$$

$$9T^2 > 5T^2 > \frac{5}{9} \quad (57)$$

$$T > \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.745 \quad (58)$$

Für $T \geq \frac{\sqrt{5}}{3}$ haben wir reelle, für $T < \frac{\sqrt{5}}{3}$ komplexe Polstellen.

Fall 1: $T < \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$z_{1,2} = \frac{1 - 3T^2 \pm jT\sqrt{5 - 9T^2}}{1 + T} \quad (59)$$

$$H(z) = \frac{6T^2}{1 + T} \frac{z}{\left(z - \frac{1 - 3T^2 + jT\sqrt{5 - 9T^2}}{1 + T}\right)\left(z - \frac{1 - 3T^2 - jT\sqrt{5 - 9T^2}}{1 + T}\right)} \quad (60)$$

Wir wenden eine PZB an.

$$H(z) = \frac{6T^2}{1 + T} \frac{z}{\left(z - \frac{1 - 3T^2 + jT\sqrt{5 - 9T^2}}{1 + T}\right)\left(z - \frac{1 - 3T^2 - jT\sqrt{5 - 9T^2}}{1 + T}\right)} = \frac{A}{z - \frac{1 - 3T^2 + jT\sqrt{5 - 9T^2}}{1 + T}} + \frac{B}{z - \frac{1 - 3T^2 - jT\sqrt{5 - 9T^2}}{1 + T}} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \\ \frac{6T^2 z}{1 + T} &= A\left(z - \frac{1 - 3T^2 - jT\sqrt{5 - 9T^2}}{1 + T}\right) + B\left(z - \frac{1 - 3T^2 + jT\sqrt{5 - 9T^2}}{1 + T}\right) \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \\ \frac{6T^2 z}{1 + T} &= z(A + B) - A \frac{1 - 3T^2 - jT\sqrt{5 - 9T^2}}{1 + T} - B \frac{1 - 3T^2 + jT\sqrt{5 - 9T^2}}{1 + T} \end{aligned} \quad (63)$$

$$(64)$$

Damit können wir ein LGS aufstellen.

$$z^1: \quad \frac{6T^2}{1 + T} = A + B \quad (65)$$

$$z^0: \quad 0 = -A \frac{1 - 3T^2 - jT\sqrt{5 - 9T^2}}{1 + T} - B \frac{1 - 3T^2 + jT\sqrt{5 - 9T^2}}{1 + T} \quad (66)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3T^2 + jT\sqrt{5 - 9T^2} - 1} & \frac{1}{3T^2 - jT\sqrt{5 - 9T^2} - 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6T^2}{T + 1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (67)$$

Wir wenden die Cramersche Regel an.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{6T^2}{1 + T} & 1 \\ 0 & \frac{3T^2 - jT\sqrt{5 - 9T^2} - 1}{T + 1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3T^2 + jT\sqrt{5 - 9T^2} - 1}{1 + T} & \frac{3T^2 - jT\sqrt{5 - 9T^2} - 1}{T + 1} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{6T^2}{1 + T} \frac{3T^2 - jT\sqrt{5 - 9T^2} - 1}{T + 1}}{\frac{3T^2 - jT\sqrt{5 - 9T^2} - 1}{T + 1} - \frac{3T^2 + jT\sqrt{5 - 9T^2} - 1}{1 + T}} \\ &= \frac{6T^2 \frac{3T^2 - jT\sqrt{5 - 9T^2} - 1}{T + 1}}{3T^2 - jT\sqrt{5 - 9T^2} - 1 - 3T^2 - jT\sqrt{5 - 9T^2} + 1} = -\frac{3T(3T^2 - jT\sqrt{5 - 9T^2} - 1)}{(1 + T)(j\sqrt{5 - 9T^2})} \end{aligned} \quad (68)$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{3T^2+jT\sqrt{5-9T^2}-1} & \frac{6T^2}{1+T} \\ \frac{1}{3T^2-jT\sqrt{5-9T^2}-1} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{3T^2+jT\sqrt{5-9T^2}-1} & \frac{1}{3T^2-jT\sqrt{5-9T^2}-1} \\ \frac{1}{1+T} & \frac{1}{1+T} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{6T^2}{1+T} \frac{3T^2+jT\sqrt{5-9T^2}-1}{1+T}}{\frac{-2jT\sqrt{5-9T^2}}{1+T}} = \frac{3T(3T^2+jT\sqrt{5-9T^2}-1)}{(1+T)(j\sqrt{5-9T^2})} \quad (69)$$

$$H(z) = -\frac{3T(3T^2-jT\sqrt{5-9T^2}-1)}{(1+T)(j\sqrt{5-9T^2})} \frac{1}{z - \frac{1-3T^2+jT\sqrt{5-9T^2}}{1+T}} + \frac{3T(3T^2+jT\sqrt{5-9T^2}-1)}{(1+T)(j\sqrt{5-9T^2})} \frac{1}{z - \frac{1-3T^2-jT\sqrt{5-9T^2}}{1+T}} \quad (70)$$

•↘○

(71)

$$\begin{aligned} h[k] = & -\frac{3T(3T^2-jT\sqrt{5-9T^2}-1)}{(1+T)(j\sqrt{5-9T^2})} \left(\frac{1-3T^2+jT\sqrt{5-9T^2}}{1+T} \right)^{k-1} \epsilon[k-1] \\ & + \frac{3T(3T^2+jT\sqrt{5-9T^2}-1)}{(1+T)(j\sqrt{5-9T^2})} \left(\frac{1-3T^2-jT\sqrt{5-9T^2}}{1+T} \right)^{k-1} \epsilon[k-1] \end{aligned} \quad (72)$$

Wir ändern das Vorzeichen der Koeffizienten und können somit den Term im Nenner umdrehen, um ihn danach in die Basis der Potenzfunktion zu ziehen.

$$\begin{aligned} h[k] = & \frac{3T(1-3T^2+jT\sqrt{5-9T^2})}{(1+T)(j\sqrt{5-9T^2})} \left(\frac{1-3T^2+jT\sqrt{5-9T^2}}{1+T} \right)^{k-1} \epsilon[k-1] \\ & - \frac{3T(1-3T^2-jT\sqrt{5-9T^2})}{(1+T)(j\sqrt{5-9T^2})} \left(\frac{1-3T^2-jT\sqrt{5-9T^2}}{1+T} \right)^{k-1} \epsilon[k-1] \\ = & \frac{3T}{j\sqrt{5-9T^2}} \left(\frac{1-3T^2+jT\sqrt{5-9T^2}}{1+T} \right)^k \epsilon[k-1] \\ & - \frac{3T}{j\sqrt{5-9T^2}} \left(\frac{1-3T^2-jT\sqrt{5-9T^2}}{1+T} \right)^k \epsilon[k-1] \end{aligned} \quad (73)$$

Wir gucken, welchen Wert die Potenzfunktionen für $k=0$ hätten, somit könnten wir diesen mit einem Dirac-Impuls abziehen und die Sprungfunktion auf k setzen.

$$\begin{aligned} & \frac{3T}{j\sqrt{5-9T^2}} \left(\frac{1-3T^2+jT\sqrt{5-9T^2}}{1+T} \right)^k - \frac{3T}{j\sqrt{5-9T^2}} \left(\frac{1-3T^2-jT\sqrt{5-9T^2}}{1+T} \right)^k \\ & \stackrel{k=0}{=} \frac{3T}{j\sqrt{5-9T^2}} - \frac{3T}{j\sqrt{5-9T^2}} = 0 \end{aligned} \quad (74)$$

Somit lautet unsere Impulsantwort für $T < \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$h[k] = \frac{3T}{j\sqrt{5-9T^2}} \left[\left(\frac{1-3T^2+jT\sqrt{5-9T^2}}{1+T} \right)^k \epsilon[k] - \left(\frac{1-3T^2-jT\sqrt{5-9T^2}}{1+T} \right)^k \epsilon[k] \right] \quad (75)$$

Buchzitate

- [Meister und Sonar 2019] MEISTER, Andreas ; SONAR, Thomas: *Numerik*. Springer Spektrum, 2019. – URL <https://doi.org/10.1007/978-3-662-58358-6>
- [Reinhardt 2012] REINHARDT, Hans-Jürgen: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*. 2. De Gruyter, 2012. – URL <https://doi.org/10.1515/9783110280463>
- [Scholz 2016] SCHOLZ, Daniel: *Numerik interaktiv*. 1. Springer Spektrum, 2016. – URL <https://doi.org/10.1007/978-3-662-52940-9>