Zeitkontinuierliche Elementarsignale

Signals and Systems, University of Rostock, Institute of Communications Engineering, Prof. Sascha Spors, Frank Schultz,

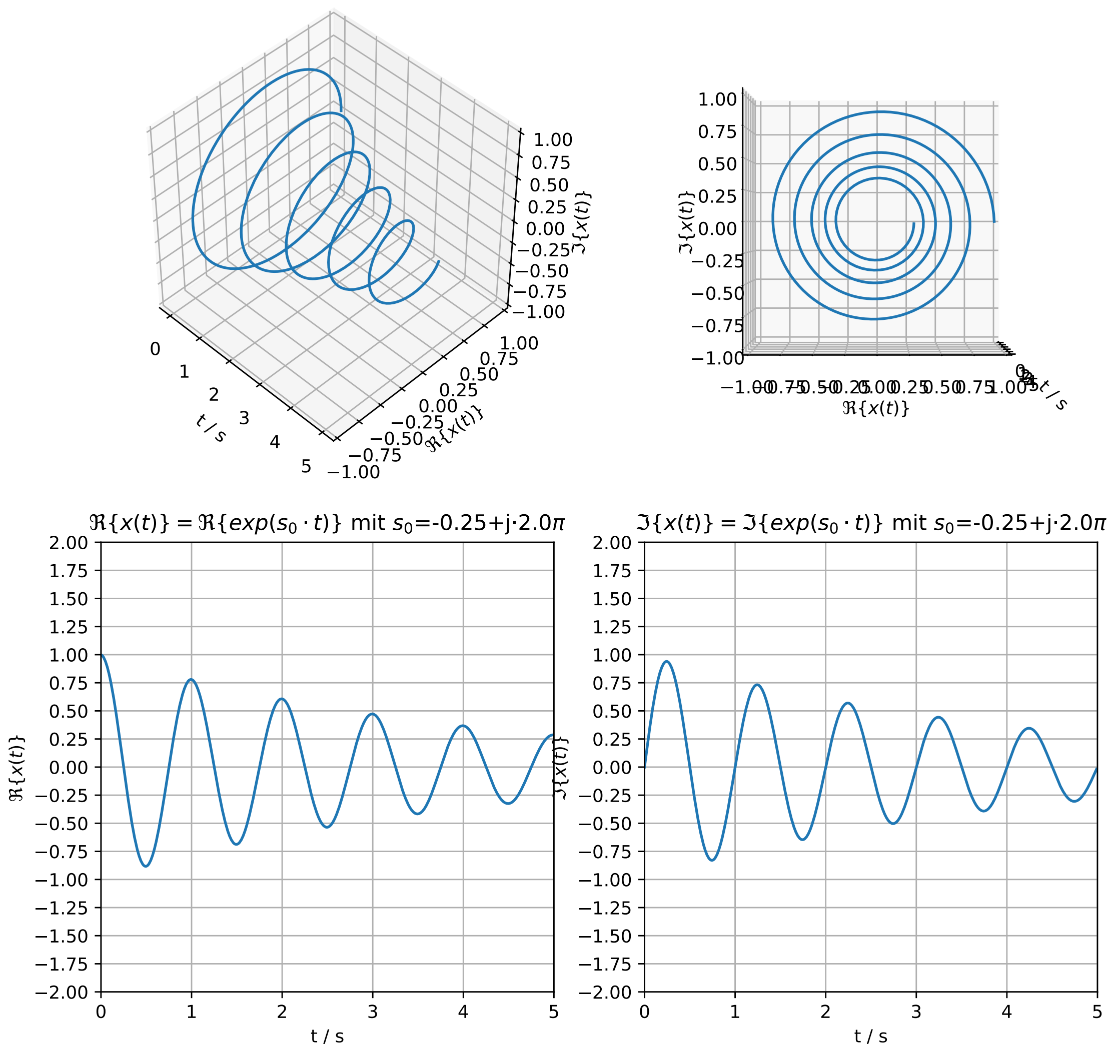
2020-04-02

1 Mathematisch positiv drehende, abklingende, komplexe Schwingung

$f_0 = 1$ Hz, daher $\omega_0 = 2\pi$ rad/s

$\sigma_0 = -0.25$ /s

$x(t) = \mathrm{e}^{s_0 \cdot t}$ mit $s = \sigma_0 + \mathrm{j}\omega_0$

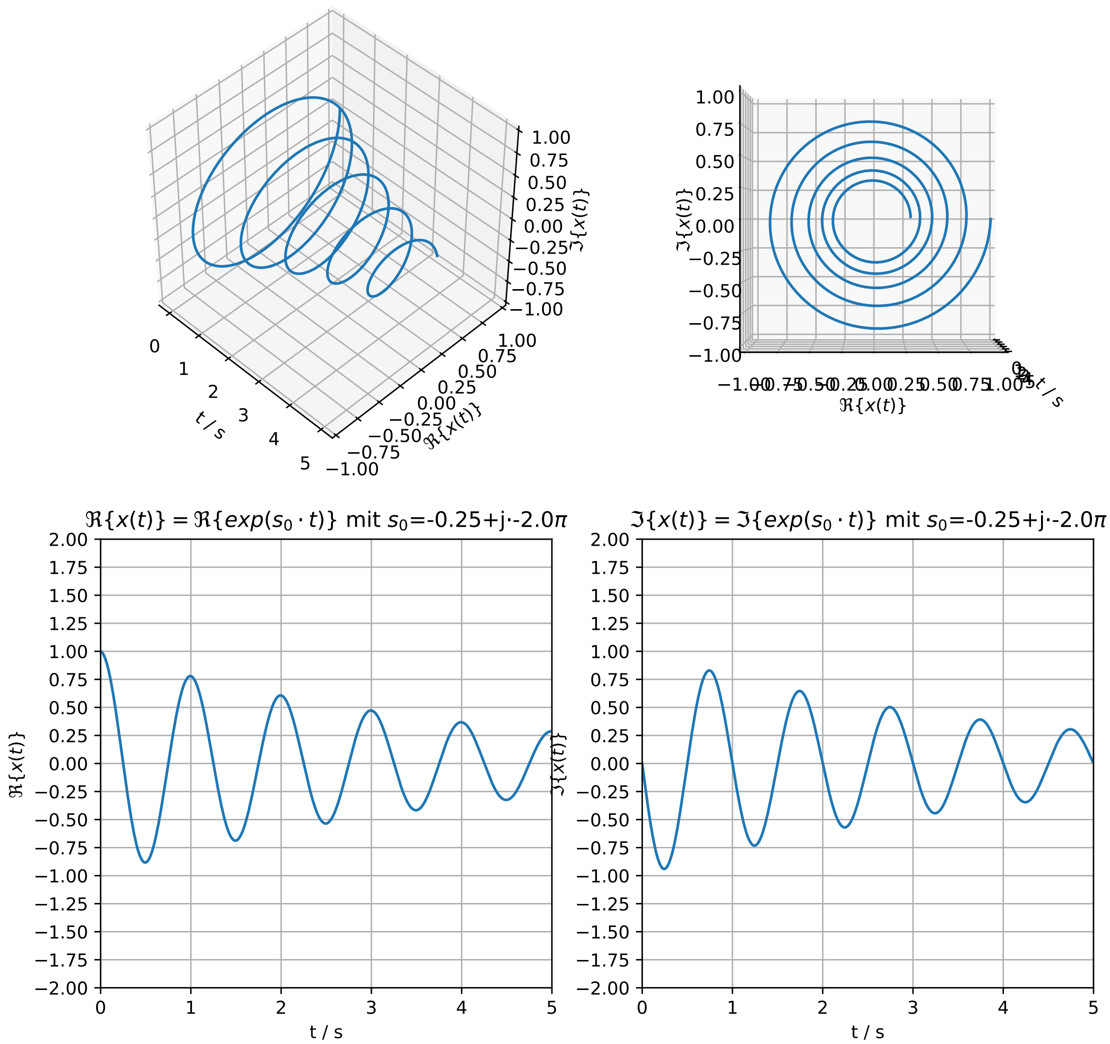


2 Mathematisch negativ drehende, abklingende, komplexe Schwingung

$f_0 = 1$ Hz, daher $\omega_0 = 2\pi$ rad/s

$\sigma_0 = -0.25$ /s

$x(t) = \mathrm{e}^{s_0 \cdot t}$ mit $s_0 = \sigma_0 - \mathrm{j}\omega_0$, negativ drehend weil **Minuszeichen** in s! Kann interpretiert werden als negative Kreisfrequenz $-\omega_0$.

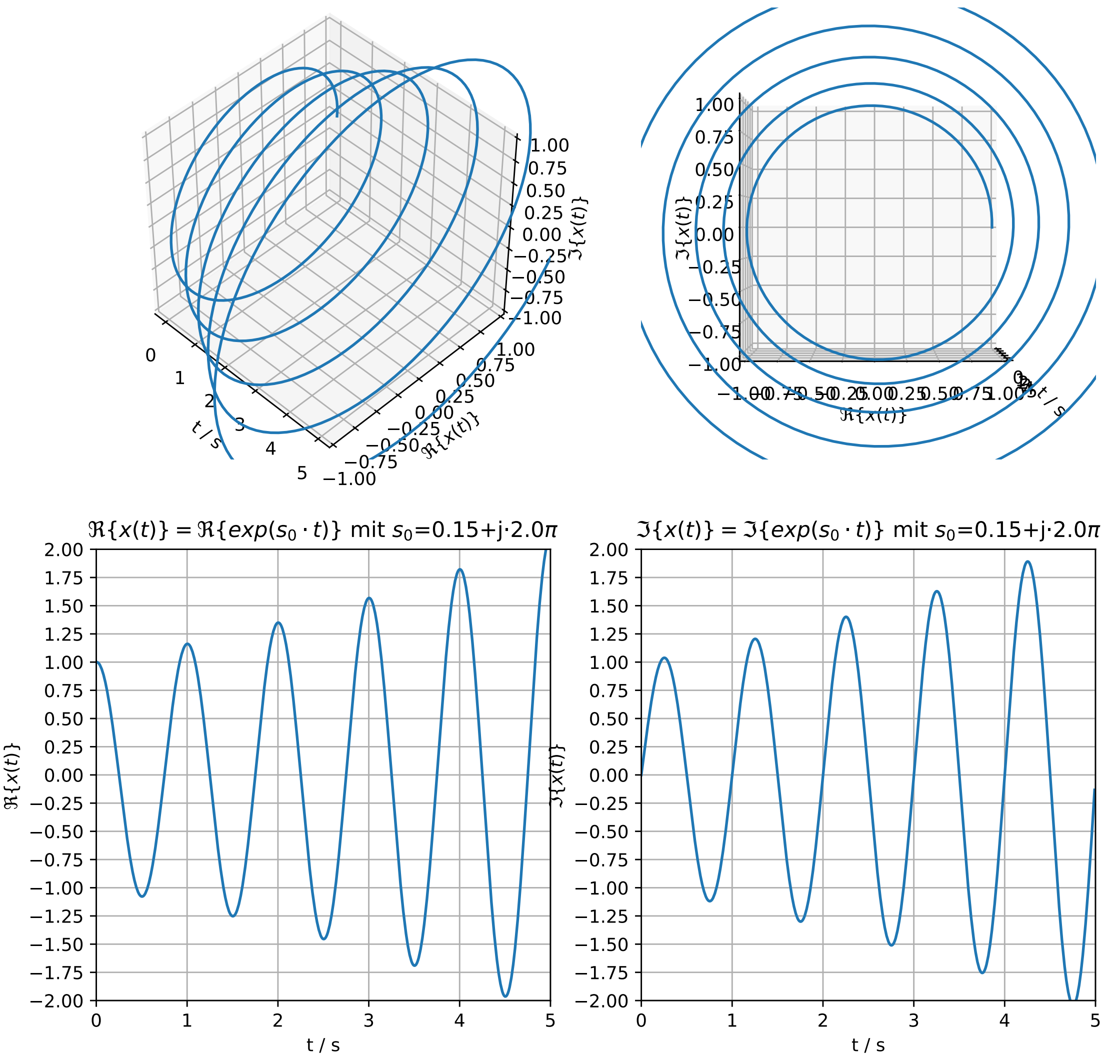


3 Mathematisch positiv drehende, aufschwingende, komplexe Schwingung

$f_0 = 1$ Hz, daher $\omega_0 = 2\pi$ rad/s

$\sigma_0 = +0.1$ /s (aufschwingend, weil hier positives Vorzeichen und $\omega_0 > 0$)

$x(t) = \mathrm{e}^{s_0 \cdot t}$ mit $s_0 = \sigma_0 + \mathrm{j}\omega_0$



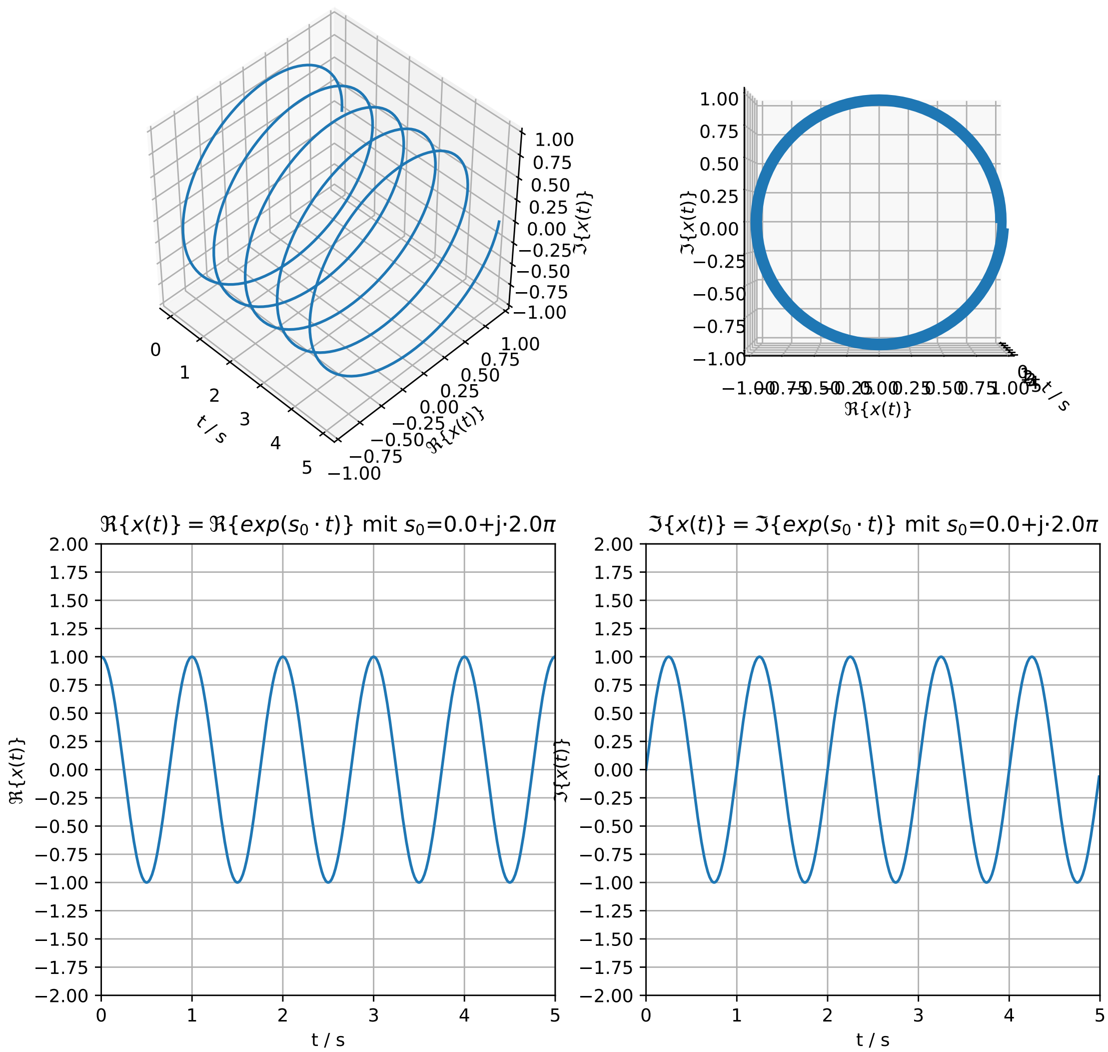
4 Mathematisch positiv drehende, harmonische, komplexe Schwingung

$f_0 = 1$ Hz, daher $\omega_0 = 2\pi$ rad/s

$\sigma_0 = 0$ /s (ungedämpft)

$x(t) = \mathrm{e}^{s_0 \cdot t}$ mit $s_0 = \sigma_0 + \mathrm{j}\omega_0$, also hier speziell $x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 \cdot t}$

Im Bild oben, rechts erkennt man nicht, ob positiv oder negativ drehend, daher brauchen wir zusätzlich den Bezug zwischen Real- und Imaginärteil über die Zeit.



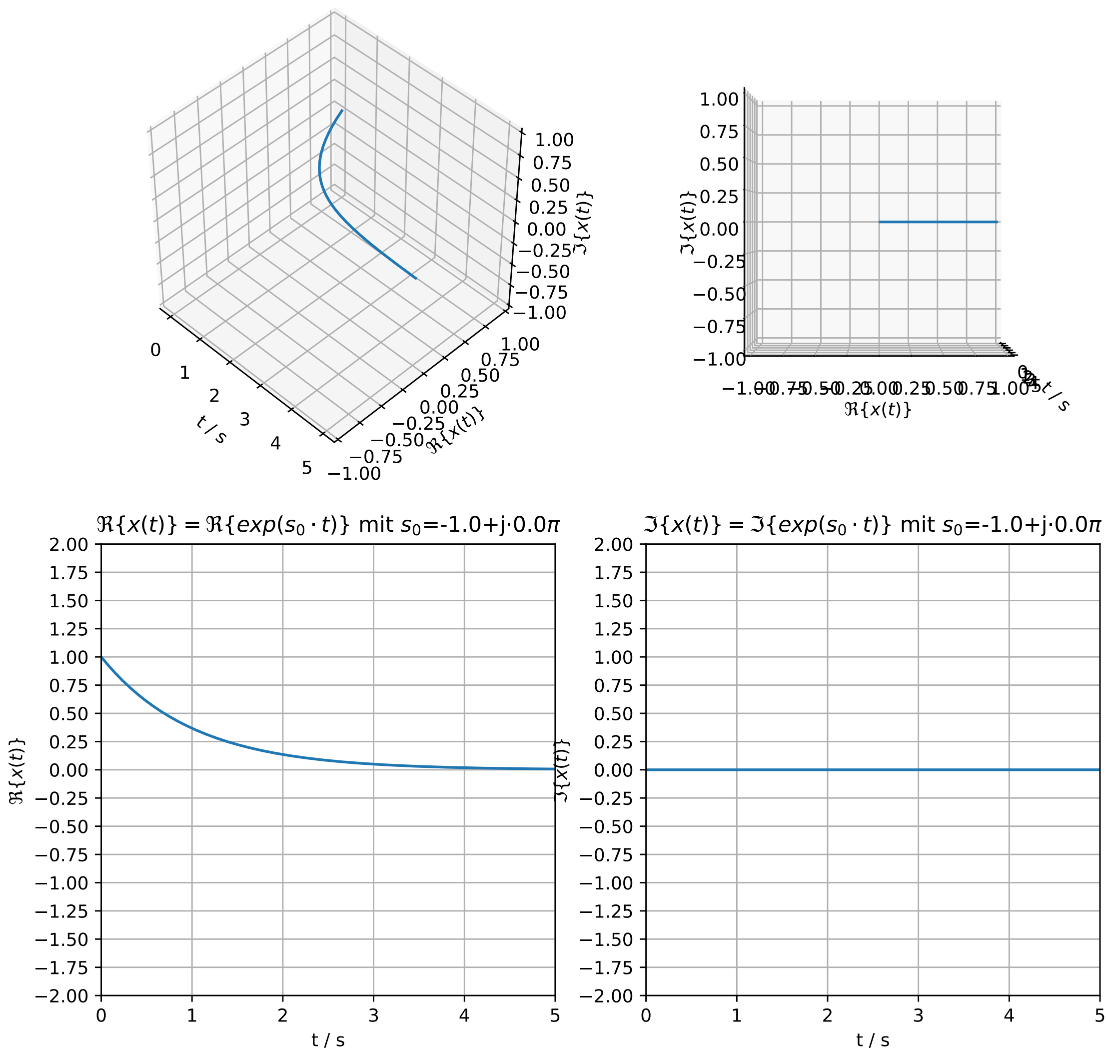
5 Exponentiell abklingend

$f_0 = 0$ Hz, daher $\omega_0 = 0$ rad/s

$\sigma_0 = -1$ /s (negatives Vorzeichen ist abklingend)

$x(t) = \mathrm{e}^{s_0 \cdot t}$ mit $s_0 = \sigma_0 + \mathrm{j}\omega_0$

Wir erhalten eine reelle Funktion x(t), ähnelt einer Entladekurve des Kondensators mit $\tau = 1$ s, diese Lösung einer Differentialgleichung ist ein Spezialfall eines Elementarsignals.



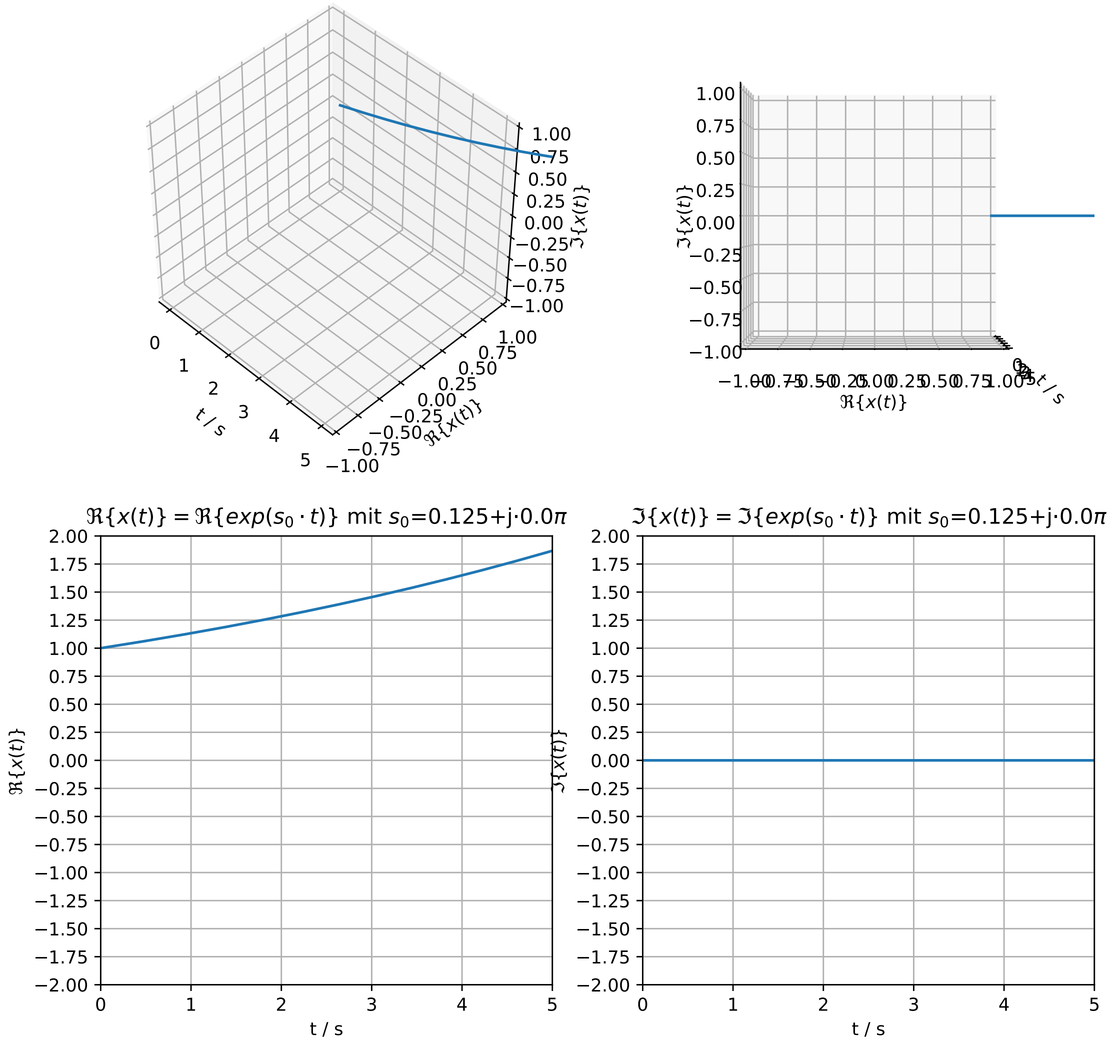
6 Exponentiell ansteigend

$f_0 = 0$ Hz, daher $\omega_0 = 0$ rad/s

$\sigma_0 = 0.125$ /s (positives Vorzeichen ist ansteigend)

$x(t) = \mathrm{e}^{s_0 \cdot t}$ mit $s_0 = \sigma + \mathrm{j}\omega_0$

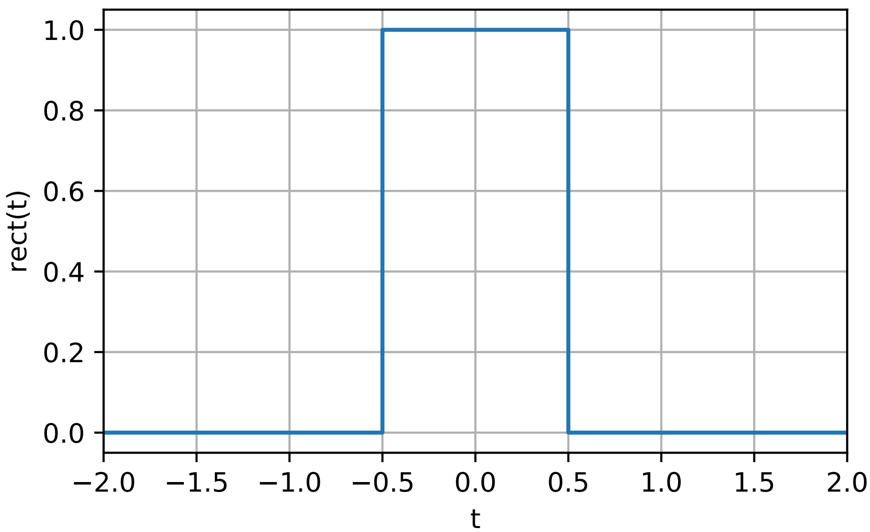
Wir erhalten eine reelle Funktion x(t).



7 Rechteck-Signal

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |t| = \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

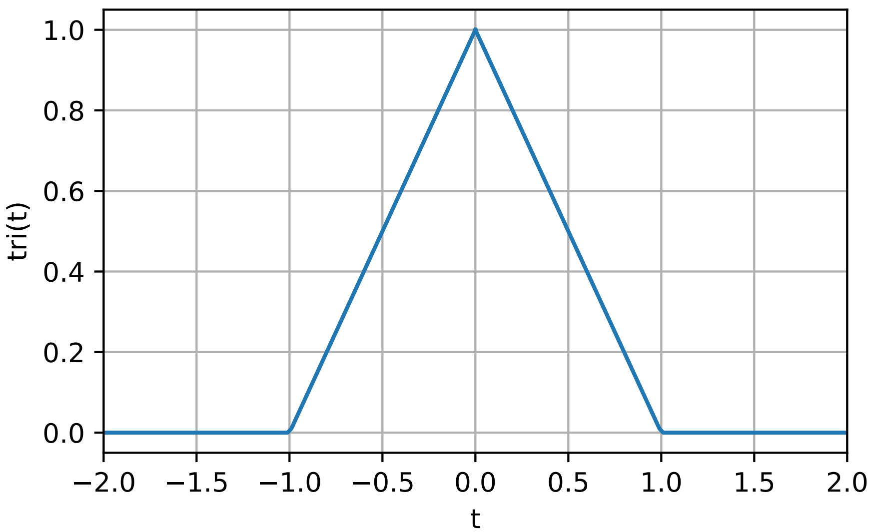
Nach Definition hat rect(t) Fläche 1.



8 Dreieck-Signal

$$\mathrm{tri}(t) = \begin{cases} +t+1 & -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1 & 0 \leq t \leq +1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Definition hat tri(t) Fläche 1.



9 Spaltfunktion

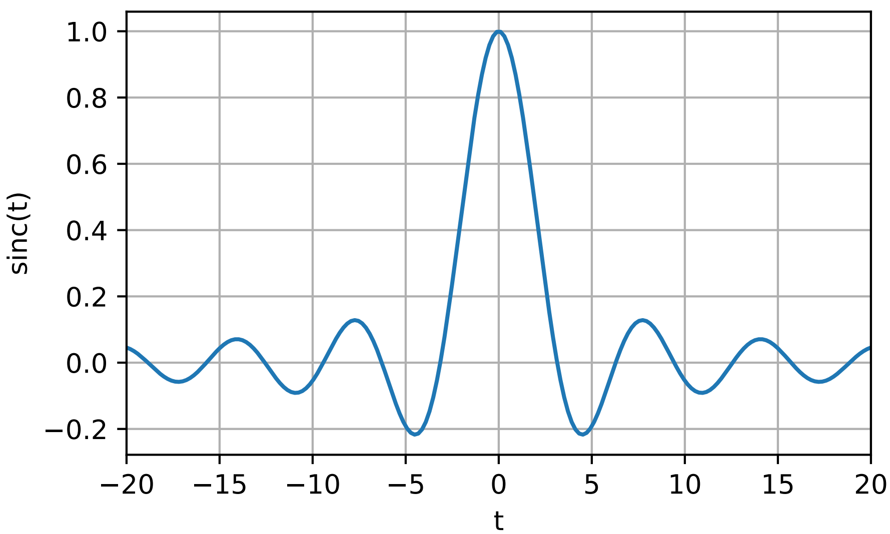
Sinc-Funktion

$$\operatorname{sinc}(t) := \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

Hier Vorsicht: es gibt eine sehr gängige Alternativ-Definition mit π

$$\operatorname{sinc}(t) := \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

der wir **nicht** folgen.

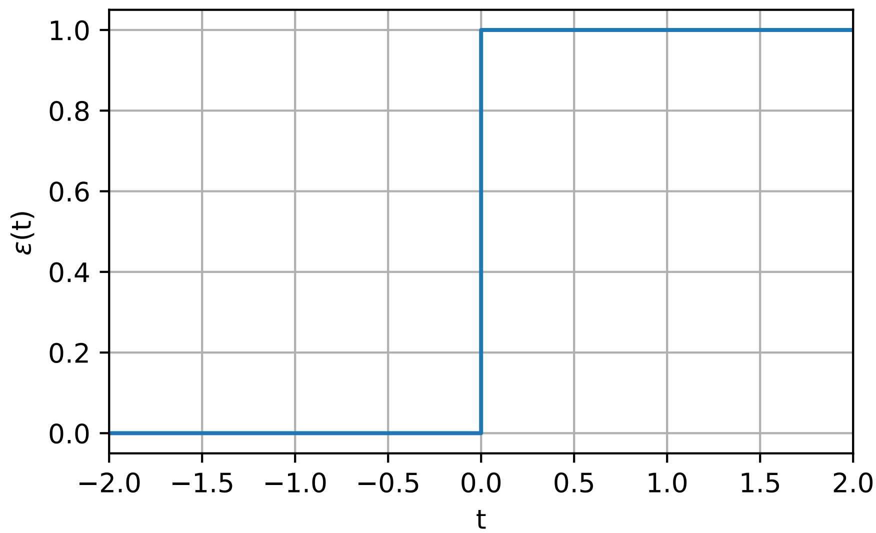


10 Sprungfunktion

Einheitssprung, Heaviside-Funktion, Heaviside step function

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Wichtig: wir sollten die Sprungfunktion und Vorzeichenfunktion gut zu unterscheiden wissen.

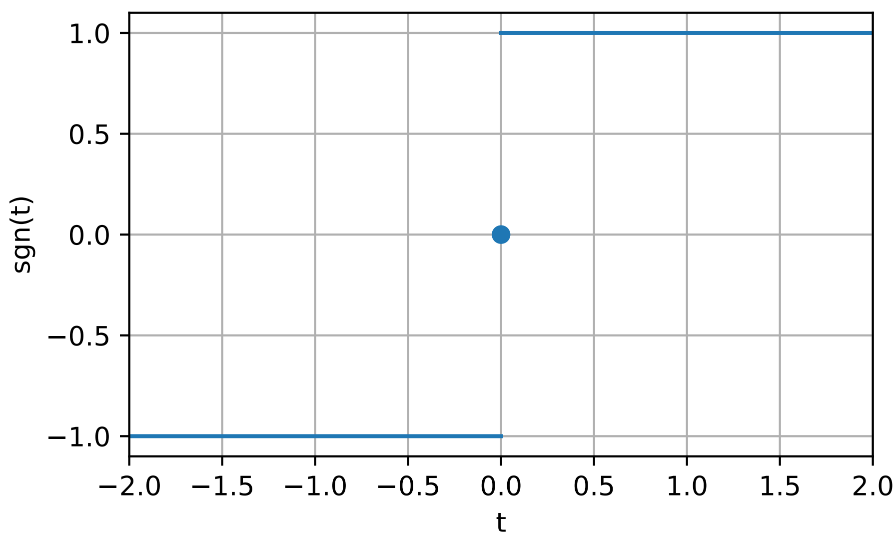


11 Vorzeichenfunktion

sign function, signum function

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

Wichtig: wir sollten die Sprungfunktion und Vorzeichenfunktion gut zu unterscheiden wissen.



12 Dirac Impuls

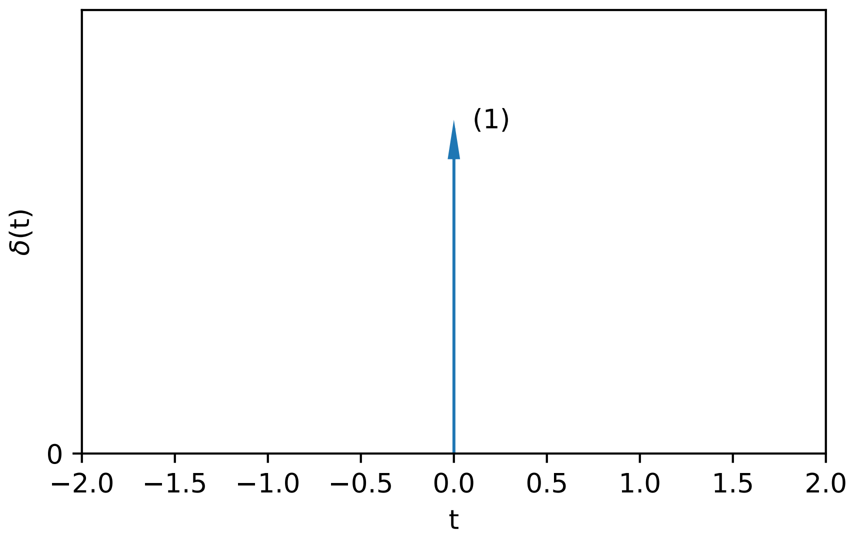
Es wird definiert

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t) := x(t = 0)$$

Speziell für $x(t) = 1$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$$

Wir zeichnen den Dirac Impuls als Pfeil und seinen Vorfaktor/Gewicht in Klammern an die Pfeilspitze. Streng genommen hat der Pfeil keine Amplitude, aber beim Malen müssen wir ihm eine Höhe geben, es hat sich bewährt, die Höhe des Vorfaktors zu benutzen, speziell dann, wenn in das Diagramm auch andere Signale eingezeichnet werden.



13 Dirac Impuls-Kamm

Wir definieren einen verschobenen Dirac Impuls um Einheitszeiten $\mu \in \mathbb{Z}$

Ein wegen seines Aussehens sogenannter Dirac Kamm ist dann definiert als

$$\perp\!\perp\!\perp(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta(t-\mu)$$

Wie oben angedeutet, malen wir hier die Pfeile für die Dirac Impulse mit der Amplitude des Vorfaktors/Gewichts, also