Математическое моделирование

Лабораторная работа № 2

Сергей Павленко

2026-02-24

Содержание (i)

1. Вводная часть

Цель работы

Показать, как строится математическая модель, позволяющая выбрать рациональную стратегию поиска и преследования.

Сценарий: в условиях тумана катер береговой охраны ведёт погоню за лодкой браконьеров. На короткое время видимость улучшается, и лодку удаётся зафиксировать на расстоянии k км от катера. Затем туман снова скрывает лодку; она продолжает двигаться прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в n раз больше скорости лодки. Требуется определить траекторию катера, обеспечивающую перехват.

1. Выполнить вывод и обосновать систему дифференциальных уравнений для случая $v_{\text{катер}} = n\, v_{\text{лодка}}$.

Задание

1. Выполнить вывод и обосновать систему дифференциальных уравнений для случая $v_{\text{катер}} = n\, v_{\text{лодка}}$.
2. Построить траектории катера и лодки для двух вариантов начальных условий.

Задание

1. Выполнить вывод и обосновать систему дифференциальных уравнений для случая $v_{\text{катер}} = n\, v_{\text{лодка}}$.
2. Построить траектории катера и лодки для двух вариантов начальных условий.
3. По графику найти точку пересечения траекторий (момент перехвата).

2. Теория: постановка и вывод модели

Начальные обозначения и координаты

Положим $t_0 = 0$.

В момент обнаружения:

- лодка находится в точке $X_0 = 0$,

Переходим к полярным координатам:

Начальные обозначения и координаты

Положим $t_0 = 0$.

В момент обнаружения:

- лодка находится в точке $X_0 = 0$,
- катер расположен на расстоянии k: $X_0 = k$ относительно лодки.

Переходим к полярным координатам:

Начальные обозначения и координаты

Положим $t_0 = 0$.

В момент обнаружения:

- лодка находится в точке $X_0 = 0$,
- катер расположен на расстоянии k: $X_0 = k$ относительно лодки.

Переходим к полярным координатам:

- полюс — точка обнаружения лодки,

Начальные обозначения и координаты

Положим $t_0 = 0$.

В момент обнаружения:

- лодка находится в точке $X_0 = 0$,
- катер расположен на расстоянии k: $X_0 = k$ относительно лодки.

Переходим к полярным координатам:

- полюс — точка обнаружения лодки,
- ось r направлена через начальное положение катера.

Дистанция перехода к «обходу» полюса

Требуется найти расстояние x, при котором катер и лодка окажутся на одном и том же радиусе относительно полюса.

За время t лодка проходит путь x, а катер — $x - k$ либо $x + k$ (в зависимости от взаимного расположения катера и полюса в начальный момент).

Разложение скорости катера и система ОДУ

Из условия равенства времен движения получаются два режима начальных данных:

- case = plus:

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

Далее движение катера рассматривается как комбинация радиальной и тангенциальной компонент, что приводит к системе ОДУ в полярных координатах.

Разложение скорости катера и система ОДУ

Из условия равенства времен движения получаются два режима начальных данных:

- case = plus:

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

- case = minus:

$$x_2 = \frac{k}{n-1}, \quad \theta_0 = -\pi$$

Далее движение катера рассматривается как комбинация радиальной и тангенциальной компонент, что приводит к системе ОДУ в полярных координатах.

Исключая t, приходим к уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Отсюда следует качественный вывод: траектория катера в полярной системе имеет вид экспоненциально расходящейся спирали.

3. Эксперимент: численное моделирование

Параметры:

- расстояние обнаружения: $k = 20$ км,

Цель: построить траектории катера и лодки и определить момент перехвата как пересечение кривых.

Условие задачи для расчётов

Параметры:

- расстояние обнаружения: $k = 20$ км,
- преимущество в скорости: $n = 5$.

Цель: построить траектории катера и лодки и определить момент перехвата как пересечение кривых.


Базовый эксперимент (case=plus)
катер
лодка
90°
45°
0°
315°
225°
180°
135°
12
10
8
6
4
2
0

Базовый эксперимент: case = plus

Наблюдаемая картина:

- траектория катера — расходящаяся спираль;

Базовый эксперимент: case = plus

Наблюдаемая картина:

- траектория катера — расходящаяся спираль;
- радиус r возрастает при увеличении угла θ;

Базовый эксперимент: case = plus

Наблюдаемая картина:

- траектория катера — расходящаяся спираль;
- радиус r возрастает при увеличении угла θ;
- траектория лодки в полярных координатах выглядит как луч (прямая в декартовой системе).

Базовый эксперимент: case = minus

Базовый эксперимент: case = minus

Ключевые отличия от case=plus:

- начальный радиус больше, поэтому спираль «сдвинута» наружу;

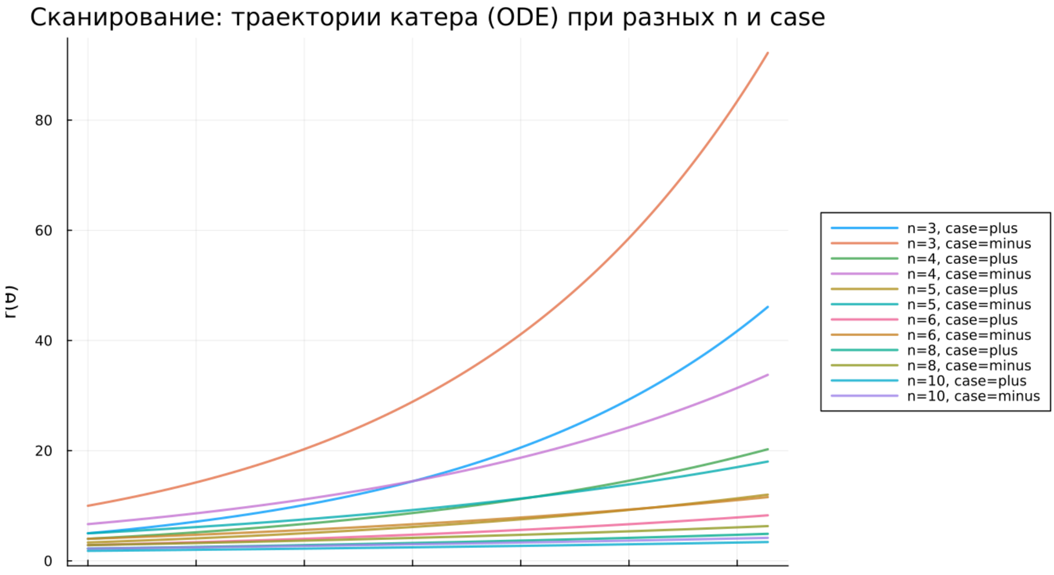
Базовый эксперимент: case = minus

Ключевые отличия от case=plus:

- начальный радиус больше, поэтому спираль «сдвинута» наружу;
- форма траектории не меняется, меняется лишь масштаб.

4. Параметрический анализ

Сканирование по параметру n



Из уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

видно, что коэффициент роста по углу равен $1/\sqrt{n^2 - 1}$. Следовательно:

- при малых n спираль «раскручивается» быстрее;

Сканирование по параметру n

Из уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

видно, что коэффициент роста по углу равен $1/\sqrt{n^2 - 1}$. Следовательно:

- при малых n спираль «раскручивается» быстрее;
- при больших n рост радиуса замедляется;

Из уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

видно, что коэффициент роста по углу равен $1/\sqrt{n^2 - 1}$. Следовательно:

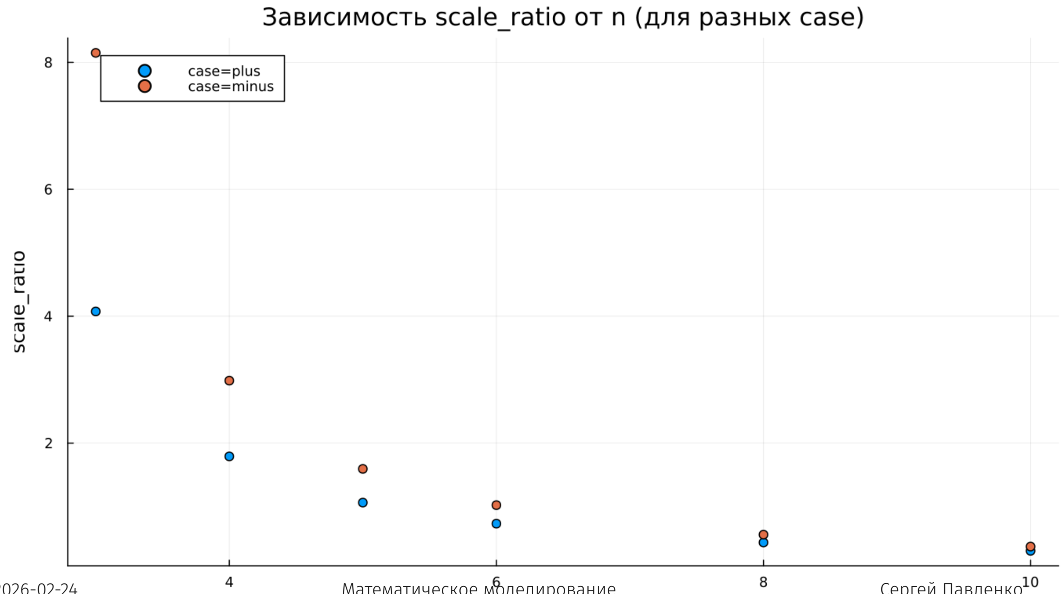
- при малых n спираль «раскручивается» быстрее;
- при больших n рост радиуса замедляется;
- траектории становятся более плавными (менее крутыми).

Метрика scale_ratio

Введём показатель:

$$\text{scale\_ratio} = \frac{r_{\text{final}}}{\max(r_{\text{boat}})}.$$

Метрика scale_ratio



Метрика scale_ratio

Смысл результатов:

- при небольших n метрика заметно больше 1 — катер существенно превосходит лодку по радиальному «масштабу» траектории;

Для режима case=minus значения выше, поскольку стартовый радиус больше.

Метрика scale_ratio

Смысл результатов:

- при небольших n метрика заметно больше 1 — катер существенно превосходит лодку по радиальному «масштабу» траектории;
- при росте n значение быстро уменьшается;

Для режима case=minus значения выше, поскольку стартовый радиус больше.

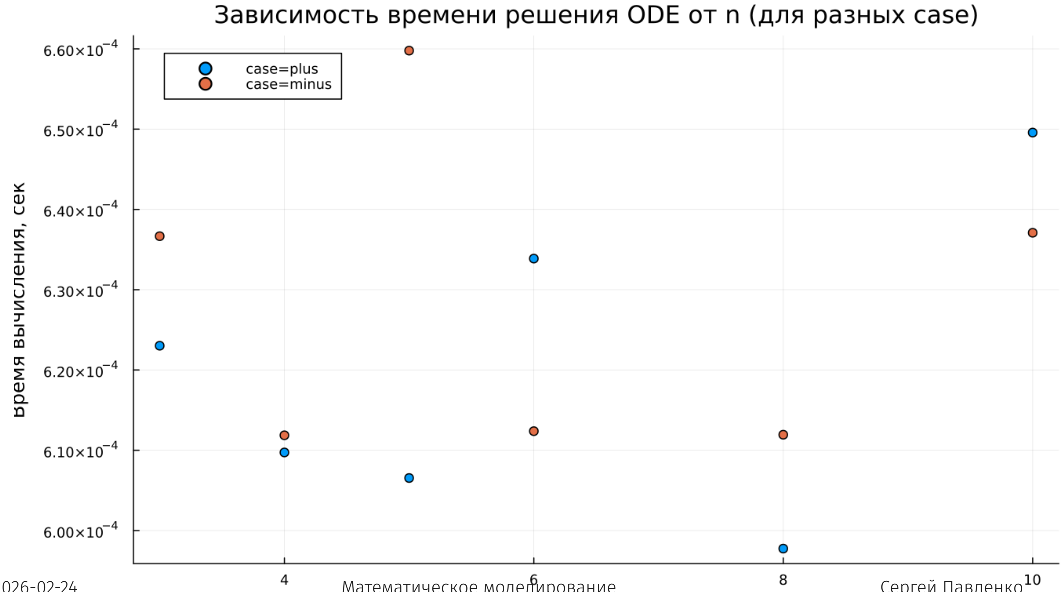
Метрика scale_ratio

Смысл результатов:

- при небольших n метрика заметно больше 1 — катер существенно превосходит лодку по радиальному «масштабу» траектории;
- при росте n значение быстро уменьшается;
- при больших n масштабы траекторий становятся близкими.

Для режима case=minus значения выше, поскольку стартовый радиус больше.

Время вычислений



Время вычислений

Итоги бенчмаркинга:

- время расчёта порядка $\sim 6 \times 10^{-4}$ сек;

Время вычислений

Итоги бенчмаркинга:

- время расчёта порядка $\sim 6 \times 10^{-4}$ сек;
- выраженной зависимости от n не видно;

Итоги бенчмаркинга:

- время расчёта порядка $\sim 6 \times 10^{-4}$ сек;
- выраженной зависимости от n не видно;
- небольшие колебания объясняются адаптивным шагом интегрирования.

5. Итоги

Выводы

1. Траектория катера в полярных координатах описывается экспоненциально расходящейся спиралью.

Выводы

1. Траектория катера в полярных координатах описывается экспоненциально расходящейся спиралью.
2. Параметр n задаёт интенсивность радиального роста: чем больше n, тем медленнее увеличивается r при росте θ.

Выводы

1. Траектория катера в полярных координатах описывается экспоненциально расходящейся спиралью.
2. Параметр n задаёт интенсивность радиального роста: чем больше n, тем медленнее увеличивается r при росте θ.
3. Режим начальных условий (case) определяет масштаб траектории, не меняя её качественного типа.

Выводы

1. Траектория катера в полярных координатах описывается экспоненциально расходящейся спиралью.
2. Параметр n задаёт интенсивность радиального роста: чем больше n, тем медленнее увеличивается r при росте θ.
3. Режим начальных условий (case) определяет масштаб траектории, не меняя её качественного типа.
4. Численное решение демонстрирует устойчивость, а вычислительные затраты слабо зависят от n.