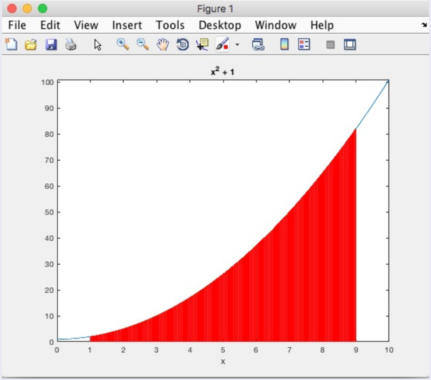
Práctica 3. Las integrales y sus aplicaciones

Matemáticas 2. Ingeniería Informática

La integral

Definición de área bajo una curva

Área bajo la curva $f(x) = x^2 + 1$ entre el eje x, desde $x = 1$ a $x = 9$



La integral se define como el área bajo la curva de una función

La integral

Ejemplo

Vamos a calcular el área dividiendo en rectángulos, de forma que la suma de las áreas de estos rectángulos será una aproximación del valor del área bajo la curva.

$>> f = @(x)x.\verb|^|2 + 1;$

$>> a = 1;\ \ b = 9;\ \ n = 1;$

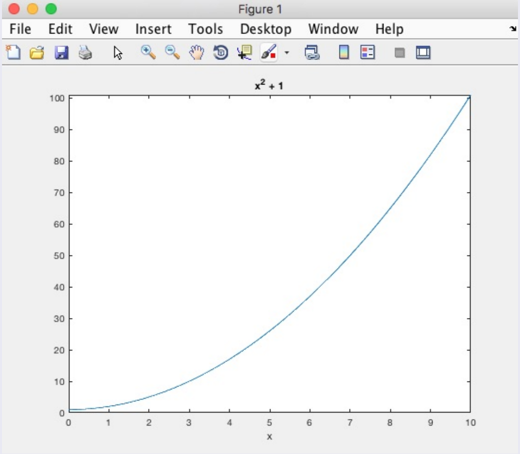
$>> ezplot(f(x), [a - 1, b + 1]);$

$>> axis(double([a - 1\ \ b + 1\ \ 0\ \ f(b + 1)]));$

$>> hold\ \ on;$

La integral

Ejemplo



La integral

Ejemplo. Dibujar rectángulos

Para dibujar un rectángulo se utilizan los comandos

$>> Ll = plot([a\ a], double([0\ f(a)]),'g');$

$>> Lt = plot([a\ b], double([f(a)\ f(a)]),'g');$

$>> Lr = plot([b\ b], double([0\ f(a)]),'g');$

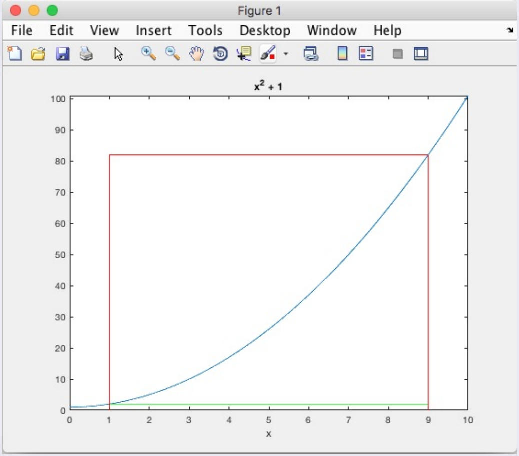
$>> Rl = plot([a\ a], double([0\ f(b)]),'r');$

$>> Rt = plot([a\ b], double([f(b)\ f(b)]),'r');$

$>> Rr = plot([b\ b], double([0\ f(b)]),'r');$

La integral

Ejemplo. Dibujar rectángulos



La integral

Ejemplo. Dibujar rectángulos

Crea un script con el siguiente código

$f = @(x)x.^\wedge 2 + 1;$

$a = 1;\ \ b = 9;\ \ n = 1;$

$ezplot(f, [a-1, b+1]);$

$axis(double([a-1\ \ b+1\ \ 0\ \ f(b+1)]));$

$hold\ \ on;$

$n = n * 2;$

$xi = linspace(a, b, n+1);$

La integral

Ejemplo. Dibujar rectángulos

Añade el código para representar los rectángulos inferiores y superiores

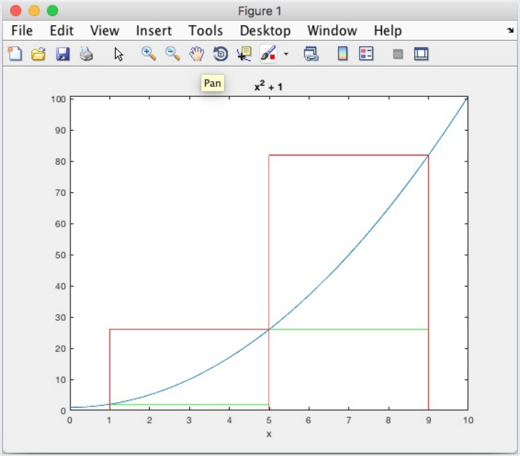
$for\ i = 1 : n$

$$Ll(i) = plot([xi(i)\ xi(i)], double([0\ f(xi(i))]), 'g');$$
$$Lt(i) = plot([xi(i)\ xi(i+1)], double([f(xi(i))\ f(xi(i))]), 'g');$$
$$Lr(i) = plot([xi(i+1)\ xi(i+1)], double([0\ f(xi(i))]), 'g');$$
$$Rl(i) = plot([xi(i)\ xi(i)], double([0\ f(xi(i+1))]), 'r');$$
$$Rt(i) = plot([xi(i)\ xi(i+1)], double([f(xi(i+1))\ f(xi(i+1))]), 'r');$$
$$Rr(i) = plot([xi(i+1)\ xi(i+1)], double([0\ f(xi(i+1))]), 'r');$$

end

La integral

Ejemplo. Dibujar rectángulos



La integral

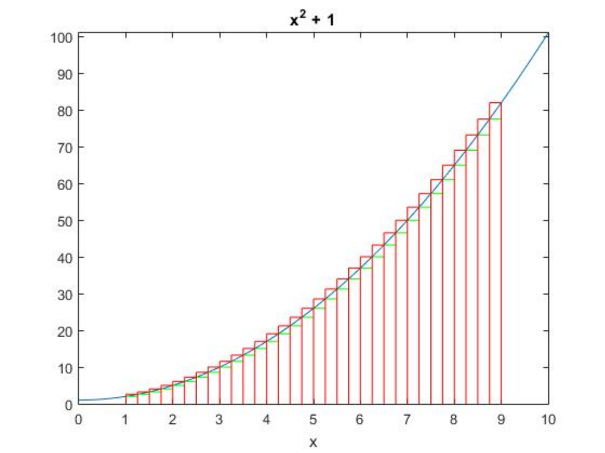
Ejemplo. Dibujar rectángulos

Cambia el código para que el script divida el área en 2^k rectángulos, tanto superiores como inferiores

$$
\begin{aligned}
&for\ \ k = 0:9\\
&\quad n = 2^\wedge k;\\
&\quad xi = linspace(a, b, n+1);\\
&\quad for\ \ i = 1:n\\
&\qquad Ll(i) = plot([xi(i)\ \ xi(i)], double([0\ \ f(xi(i))]),'g');\\
&\qquad Lt(i) = plot([xi(i)\ \ xi(i+1)], double([f(xi(i))\ \ f(xi(i))]),'g');\\
&\qquad Lr(i) = plot([xi(i+1)\ \ xi(i+1)], double([0\ \ f(xi(i))]),'g');\\
&\qquad Rl(i) = plot([xi(i)\ \ xi(i)], double([0\ \ f(xi(i+1))]),'r');\\
&\qquad Rt(i) = plot([xi(i)\ \ xi(i+1)], double([f(xi(i+1))\ \ f(xi(i+1))]),'r');\\
&\qquad Rr(i) = plot([xi(i+1)\ \ xi(i+1)], double([0\ \ f(xi(i+1))]),'r');\\
&\quad end\\
&end
\end{aligned}
$$

La integral

Ejemplo. Dibujar rectángulos



La integral

Suma Izquierda y Suma Derecha

Fíjate que para dibujar los rectángulos hemos elegido, para cada subintervalo, los valores del extremo izquierdo de $f(x)$ primero y los valores del extremo derecho de $f(x)$ a continuación. Las sumas de las áreas de esos rectángulos es lo que se denomina suma izquierda en un caso y suma derecha en el otro

La integral

Suma Izquierda y Suma Derecha

Tomando cada intervalo de igual longitud $h = (b - a)/n$, con n número de intervalos definidos por $\{a = x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} = b\}$, se obtiene

Suma Izquierda

$$L_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Suma Derecha

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1})$$

La integral

Suma Izquierda y Suma Derecha

Prueba el siguiente script y comprueba como la suma izquierda y derecha se aproximan al mismo valor conforme se aumenta el número n de intervalos

La integral

Suma Izquierda y Suma Derecha

$syms\ x; f = @(x)x^\wedge 2 + 1; a = 1; b = 9;$

$for\ \ k = 0 : 12$

$\quad n = 2^\wedge k;$

$\quad xi = linspace(a, b, n + 1);$

$\quad h = (b - a)/n;$

$\quad for\ \ i = 1 : n + 1$

$\qquad yi(i) = f(xi(i));$

$\quad end$

$\quad Ln = h * sum(double(yi(1 : n)));$

$\quad Rn = h * sum(double(yi(2 : n + 1)));$

$\quad double([Ln\ \ Rn]); pause$

end

Integral indefinida

Integración simbólica

La integración simbólica se lleva a cabo mediante el comando *int(f)* o *int(f,x)*, donde f es la **expresión simbólica** o el nombre de una expresión simbólica y x la variable respecto a la que se integra

Integral indefinida

Ejemplo

$$\int (2\cos x - 6x)dx$$

$>> syms\ x;$
$>> f = 2 * \cos(x) - 6 * x;$
$>> int(f)$
ans
$2 * \sin(x) - 3 * x^2$

MATLAB no incluye la constante de integración

Integral indefinida

Ejemplo

$$\int \sin(ax)\cos(bx)dx$$

$>> syms\ x\ a\ b;$
$>> int(\sin(a*x)*\cos(b*x),x)$
ans
$-(b*\sin(a*x)*\sin(b*x)+a*\cos(a*x)*\cos(b*x))/(a^2-b^2)$

Se pueden introducir parámetros en las integrales y trabajar con ellos como si fueran constantes

Integral definida

Integrales definidas

Para calcular integrales definidas se utilizan variantes del comando *int*

$$int(f, a, b) \text{ o } int(f, var, a, b)$$

Integral definida

Ejemplo

$$\int_0^{\pi} (\sin(y) - 5y^2)dy$$

$>> syms\ \ y;$
$>> f = \sin(y) - 5 * y^{\wedge}2$
$>> int(f, 0, pi)$
ans
$2 - (5 * pi \wedge 3)/3$

Integral definida

Ejemplo

$$\int_0^{\pi} (\sin(y) - ay^2)dy$$

$>> syms \;\; y \;\; a;$
$>> int(\sin(y) - a * y^\wedge 2, y, 0, pi)$
ans
$2 - (a * pi \wedge 3)/3$

Integral impropia

Ejemplo

$$\int_0^{inf} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

$>> syms\ x;$
$>> f = \sin(x)/x;$
$>> int(f, 0, inf)$
ans
$\pi/2$

Combina el concepto de integral y el de limite

Integral impropia

Ejemplo

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

$>>$ *syms x*;
$>>$ $int(1/x, 0, 1)$
ans
Inf

Integrales dobles y triples

Veamos el cálculo de una integral doble en MATLAB mediante un ejemplo

Integrales dobles

Para calcular integrales dobles

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) \cdot dy \cdot dx$$

se puede usar la función *dblquad* o *integral2*
$>> w = dblquad(fun, a, b, c, d)$
Con *fun* de la forma $fun(x, y)$
Para integrales triples se puede usar la función *triplequad* o *integral3*
$>> w = triplequad(fun, a, b, c, d, e, f)$
Con *fun* de la forma $fun(x, y, z)$ y admitir un vector como argumento x

Integrales dobles y triples

Veamos el cálculo de una integral doble en MATLAB mediante un ejemplo

Ejemplo

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \sin(x)\cos(y)dxdy$$

Con $0 \leq x \leq \pi$ y $0 \leq y \leq \pi/2$

Integrales dobles y triples

Ejemplo 1

Crea un script con

1. syms x y;
2. f=@(x,y) sin(x)*cos(y)
3. a=input('Límite integración inferior (x)')
4. b=input('Límite integración superior (x)')
5. c=input('Límite integración inferior (y)')
6. d=input('Límite integración superior (y)')
7. F=double(int(int(f,x,a,b),y,c,d))

Integrales dobles y triples

Ejemplo 2

Crea un script con

1. f=@(x,y) sin(x)*cos(y)
2. a=input('Límite integración inferior (x)')
3. b=input('Límite integración superior (x)')
4. c=input('Límite integración inferior (y)')
5. d=input('Límite integración superior (y)')
6. F=dblquad(f,a,b,c,d)

Integrales dobles y triples

Ejemplo

Crea un script con

1. fun=@(x,y,z) x.*sin(x)+z*cos(y)*cos(x)
2. a=input('Límite integración inferior (x)')
3. b=input('Límite integración superior (x)')
4. c=input('Límite integración inferior (y)')
5. d=input('Límite integración superior (y)')
6. e=input('Límite integración inferior (z)')
7. f=input('Límite integración superior (z)')
8. F=triplelquad(fun,a,b,c,d,e,f)

Aplicaciones

Área bajo una curva

El cálculo de la integral de una función no negativa en un intervalo $[a, b]$ se interpreta como el área delimitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = a, x = b$

Aplicaciones

Cálculo de volúmenes

Si cortamos un cuerpo por un plano perpendicular al eje de abscisas, obtenemos una sección de área $A(x)$ en cada punto de abscisa x. Entonces, el volumen de ese cuerpo comprendido entre los planos perpendiculares al eje OX en los puntos de abscisas a y b, viene dado por

$$\int_a^b A(x)\ dx$$

Aplicaciones

Ejemplo. Volumen limitado por un elipsoide

Dado el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Si cortamos el elipsoide por el plano $x = k$, la sección es la elipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$, es decir

$$\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - k^2)} + \frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(a^2 - k^2)} = 1$$

cuyos semiejes son $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - k^2}$ y $\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - k^2}$.
El área de la elipse es

$$A(k) = \pi \frac{bc}{a^2}(a^2 - k^2)$$

Aplicaciones

Ejemplo

$>> syms\ \ a\ \ b\ \ c\ \ x;$

$>> A = pi * (b * c/a^\wedge 2) * (a^\wedge 2 - x^\wedge 2);$

$>> V = int(A, x, -a, a)$

$V =$

$(4 * pi * b * c * a)/3$

Aplicaciones

Volumen de un cuerpo de revolución

Si se hace girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje de abscisas, se genera un sólido de revolución cuyo volumen viene dado por:

$$\pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Aplicaciones

Ejemplo

Calcula el volumen del sólido generado al girar la región acotada por la función $f(x) = \sqrt{x}$, la recta $x = 3$ y el eje de abcisas

$>> syms\ x$

$>> f(x) = sqrt(x)$

$>> V = pi * int(f^\wedge 2, 0, 3)$

V

$(9 * pi)/2$

Ejercicios

Ejercicio #1

Crea un script tal que para $f(x) = \sqrt{x}$ entre 1 y 2 calcula

1. L_4
2. R_4
3. Valor exacto de la integral (utilizar el comando *int*)
4. Porcentaje de error

Ejercicios

Ejercicio #2

Reutiliza el script de la Práctica #1 para calcular L_n y R_n de

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ en $[-2, 3]$ con $8, 16, 32$ y 48 rectángulos respectivamente
2. $f(x) = sen(2x)$ en $[-1, 5]$ con $10, 40, 60$ y 80 rectángulos respectivamente
3. $f(x) = -x^2 + 8x + 5$ en $[-2, 3]$ con $4, 12, 30$ y 50 rectángulos respectivamente

Ejercicios

Ejercicio #3

Calcula

1. $\int e^{4x} dx$
2. $\int x^5 \log x dx$
3. $\int \cos(\sin x) dx$

Ejercicios

Ejercicio #4

Sean $f(x) = x$ **y** $g(x) = (x+1)^2$**, calcula**

1. $\int_0^2 (f+g)dx$
2. $\int_0^2 f \; dx + \int_0^2 g \; dx$
3. Compara los resultados

Ejercicios

Ejercicio #5

Calcula

1. $\int_{-\pi/2}^{\pi} k\ f\ dx$ con $f(x) = \sin x$ y $k = 5$
2. $k \int_{-\pi/2}^{\pi} f\ dx$
3. Compara los resultados

Ejercicios

Ejercicio #6

Calcula $\int_1^1 x^2 \; dx$

Ejercicios

Ejercicio #7

Sea $f(x) = \cos x$**, calcula**

1. $\int_{-\pi}^{\pi} f \ dx$
2. $k \int_{-\pi}^{0} f \ dx + k \int_{0}^{\pi} f \ dx$
3. Compara los resultados

Ejercicios

Ejercicio #8

Calcula $\int_4^{\infty} \frac{1}{x^2-5x+4} \, dx$

Ejercicios

Ejercicio #9

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{x^2}{2y} dxdy$$

Con $1 \leq x \leq 2$ y $1 \leq y \leq 4$

Ejercicios

Ejercicio #10

$$\iiint_{\mathbb{Q}} x^2 \sin(z) dxdydz$$

Con $0 \leq x \leq \sqrt{5}$, $0 \leq y \leq 2\pi$ y $0 \leq z \leq \arctan 2$

Ejercicios

Ejercicio #11

$$\iint_{\mathbb{R}^2} xydydx$$

Con $0 \leq x \leq 1$ y $1 - x \leq y \leq 1 - x^2$

Ejercicios

Ejercicio #12

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} (x + y^3)\,dydx$$

Con $1 \leq x \leq 4$ y $x \leq y \leq x^2$

Ejercicios

Ejercicio #13

Calcula el volumen del sólido generado al girar $f(x) = \sqrt{x-1}$, la recta $x = 3$ y el eje de ordenadas

Ejercicios

Ejercicio #14-1

Dada la función $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ se pide:

1. Representar la gráfica de la función en $[0, 2] \times [0, 1]$
2. Calcular el volumen del sólido limitado por el rectángulo $[0, 2] \times [0, 1]$ del plano XY y por la superficie $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, mediante una integral doble.
3. Obtener una aproximación del volumen del sólido mediante una suma de Riemann para una partición regular de 10×8 celdas tomando el valor de la función en el punto medio de cada celda (mirar figura)

La suma de Rieman es

$$S = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{8} f(x_i, y_j)\Delta x \Delta y = \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{8} f(x_i, y_j)$$

con $\Delta x = \frac{2-1}{10}$ y $\Delta y = \frac{1-0}{8}$

Ejercicios

Ejercicio #14-2