Práctica 2. La derivada y sus aplicaciones

Matemáticas 2. Ingeniería Informática

Límite de funciones

Límites en MATLAB

El concepto de límite es la base del Cálculo Diferencial.
El Paquete Simbólico permite calcular límites de funciones mediante

$$\text{limit}(f, x, a)$$

$f =$ función, $x =$ variable, $a =$ punto al que tiende (puede ser -inf-)

Límite de funciones

Límites en MATLAB

Si f es una función de una única variable, se puede usar

$$\text{limit}(f, a)$$

Por otro lado

$$limit(f) = limit(f, 0).$$

Para límites laterales

$$\text{limit}(f, x, a, \text{'left'}) \text{ o } \text{limit}(f, x, a, \text{'right'})$$

Límite de funciones

Límites en MATLAB

Ejemplos:

$>>$ syms x

$>>$ limit$((1+1/x)^\wedge x, x, inf)$

ans $=$

$exp(1)$

$>>$ syms t, limit$((1+t)^\wedge(1/t))$

ans $=$

$exp(1)$

$>>$ syms x, limit$([1/(x^\wedge 2), sin(x)/x, log(x)], x, 0,$'right')

ans $=$

$[Inf, 1, -Inf]$

Límite de funciones de dos variables

Límites en MATLAB

Para calcular los limite iterados de una función de dos variables

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \tag{1}$$

Primero se definen las variables simbólicas y la función simbólica y luego se calculan los límites iterados de la forma

$>> Lfx = \mathrm{limit}(f, x, a)$

$>> Lfy = \mathrm{limit}(f, y, b)$

$>> Limiteiterado1 = \mathrm{limit}(Lfx, y, b)$ % x constante

$>> Limiteiterado2 = \mathrm{limit}(Lfy, x, a)$ % y constante

Límite de funciones

Límites en MATLAB

Ejemplos:

Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{xy - x + y}{x + y} \tag{2}$$

$>> Lfx =$ limit$(f, x, 0)$

$>> Lfy =$ limit$(f, y, 0)$

$>> Limiteiterado1 =$ limit$(Lfx, y, 0)$ % x constante

$>> Limiteiterado2 =$ limit$(Lfy, x, 0)$ % y constante

La derivada

La derivada como límite

La **derivada** de f en x viene dada por la expresión

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3}$$

- La derivada existe, si existe el límite
- Para todo x para los que exista el límite, f' es función de x

La derivada

Ejemplo

a) Define la función
$>>$ *syms x*
$>> funcf = 0.5 * x^\wedge 4 + x^\wedge 2 - 2$

b) Haz la gráfica de la función: $>> ezplot(funcf, [0, 2])$

c) Define la función
$>>$ *syms h*
$>> funcg =$
$((0.5 * (1.2 + h)^\wedge 4 + (1.2 + h)^\wedge 2 - 2) - (0.5 * 1.2^\wedge 4 + 1.2^\wedge 2 - 2))/h$

d) Evalúa el valor de *funcg* para
$h = 1, h = 0.01, h = 0.001, h = -0.01, h = -0.001$
mediante el comando
$>> subs(funcg, 1);$

e) La función *funcg*, tiende a un valor fijo, ¿cuál es ese valor?

La derivada

Ejemplo

Para el cálculo de una derivada según la definición

1. Se definen las variables simbólicas $>> syms\ x\ h$
2. Se calcula el límite cuando h tiende a cero
   $>> limit((cos(x+h)-cos(x))/h, h, 0)$

La derivada

La derivada

- Se declara la variable x como simbólica $>>$ *syms* x
- Se define la función $>> f = -2 * x^\wedge 4 + 2 * x^\wedge 3$
- Se calcula la derivada $>> diff(f, x)$
- Para una función de dos variables $>>$ *syms* x y;
- $>> g(x, y) = x^\wedge 2 + y^\wedge 3$
- Derivadas de primer y segundo orden,
  $>> diff(g, x)$, $>> diff(g, y)$, $>> diff(g, x, 2)$ o $>> diff(g, y, 2)$

Los objetos simbólicos también se almacenan en el **workspace**

La derivada

Polinomio de Taylor

Para el cálculo de un polinomio de Taylor se utiliza el comando *Taylor* cuya sintaxis es *taylor*(f, x, x_0)
Por defecto calcula el polinomio de Taylor de grado seis de la función f (tiene que ser simbólica) alrededor del valor x_0.
Si no se especifica el punto en cuestión, el programa considera que es 0
Si no se especifica el grado, el programa toma n=6
Si se quiere indicar un orden diferente a 5 se le indica con el parámetro *'Order'*

La derivada

Ejemplo

1. Se define la variable simbólicas
   $>> syms\ x$
2. Se define la función simbólica
   $>> f = exp(x)$
3. Se calcula el polinomio de Taylor de orden 7
   $>> taylor(f,'order',7)$

Análisis de Funciones

Ejemplo

$$f(x) = \frac{2(x^2-9)}{x^2-4}$$

a) Se define la función

$>> syms \;\; x$

$>> num = 2 * (x^\wedge 2 - 9);$

$>> den = x^\wedge 2 - 4;$

$>> f(x) = num/den$

$f = (2 * x^\wedge 2 - 18)/(x^\wedge 2 - 4)$

b) Se dibuja la gráfica de la función

$>> ezplot(f)$

Análisis de Funciones

Ejemplo (cont)

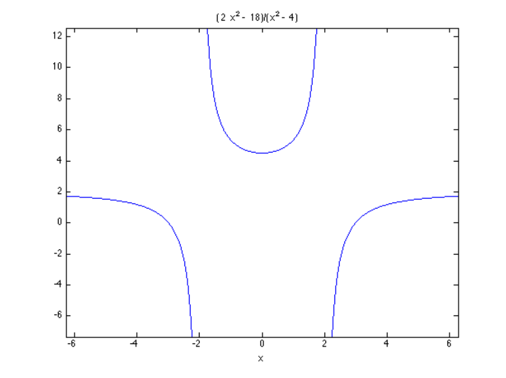


Figura: Función definida

Análisis de Funciones

Ejemplo (cont)

d) *Asíntotas Horizontales*

$>> limit(f, inf)$

e) *Asíntotas Verticales* se resuelve el denominador y se almacenar los resultados en una variable

$>> roots = solve(den)$

$roots =$

2

-2

Análisis de Funciones

Ejemplo (cont)

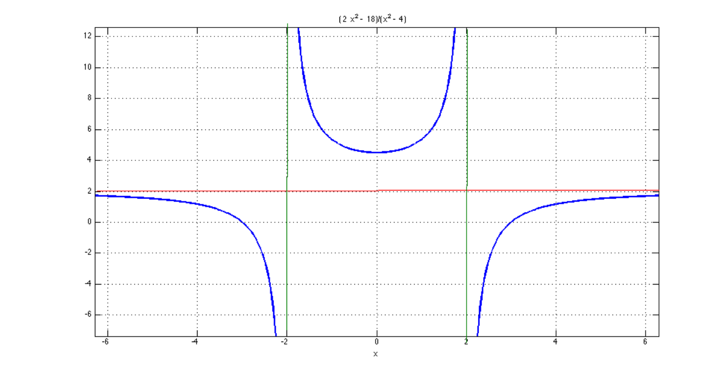


Figura: Función con asíntotas: horizontal (rojo) y vertical (verde)

Análisis de Funciones

Ejemplo (cont)

f) Para los puntos críticos hay que encontrar las derivadas

$>> f1 = diff(f)$

$f1 =$

$(4 * x)/(x^\wedge 2 - 4) - (2 * x * (2 * x^\wedge 2 - 18))/(x^\wedge 2 - 4)^\wedge 2$

Se simplifica la expresión:

$>> f1simp = simplify(f1)$

$f1simp =$

$(20 * x)/(x^\wedge 2 - 4)^\wedge 2$

Análisis de Funciones

Ejemplo (cont)

f) Para los puntos críticos se resuelve $\mathbf{f'(x) = 0}$

$>> criticos = solve(f1simp == 0)$

$criticos =$

0

Así pues, se tiene un punto crítico en $x = 0$.

Para ver si es un máximo o mínimo se necesita el signo de la segunda derivada:

$>> f2 = diff(f, 2);$

$f2simp = simplify(f2)$

$f2simp =$

$-(20 * (3 * x\hat{}2 + 4))/(x\hat{}2 - 4)\hat{}3$

Análisis de Funciones

Ejemplo (cont)

f) Se calcula la segunda derivada en $x = 0$
$>> valor2deri = subs(f2simp, 0)$
$5/4$
positivo, luego hay un mínimo relativo en $x = 0$.

g) Ahora se dibuja este punto en la función
$>> hold\ on;$
$>> plot(criticos, subs(f, criticos), 'ro')$

h) Se le añade un título al gráfico y una etiqueta al punto.
$>> title('Minimodef')$
$>> text(0, 4, 'Minimorelativo')$

Análisis de Funciones

Ejemplo (cont)

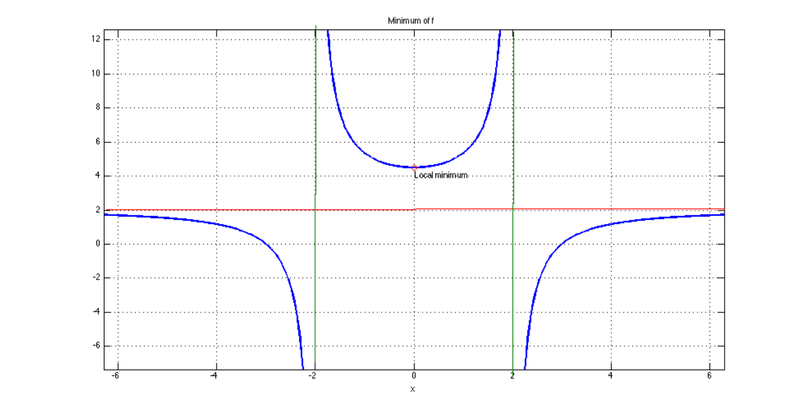


Figura: Mínimo de la Función.

Análisis de Funciones

Ejemplo (cont)

i) Para estudiar la concavidad y convexidad se mira el signo de la segunda derivada
$f2simp = -(20*(3*x\hat{}2+4))/(x\hat{}2-4)\hat{}3$
El numerador siempre es positivo y el denominador es negativo en $(-2,2)$.
Una manera sencilla de buscar puntos de inflexión es trazar el signo de la función:
$>> ezplot(sign(f2simp),[-5,5])$
(mirar la siguiente transparencia)

j) Puntos de inflexión, el signo de la segunda derivada cambia en $x=-2$ (de negativo a positivo) y también en $x=2$ (de negativo a positivo)

Análisis de Funciones

Ejemplo (cont)

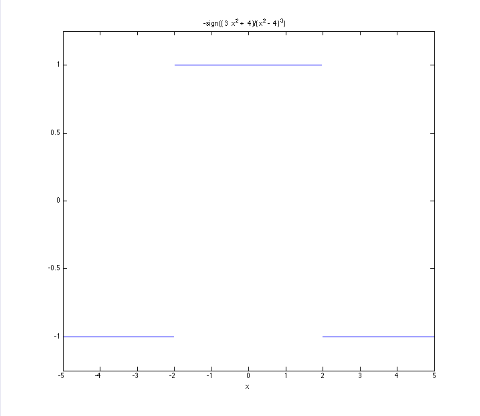


Figura: Signo de la segunda derivada.

Optimización

Etapas

Para resolver un problema de optimización

- *Variables:* Identificar las variables
- *Función:* Encontrar la función a optimizar: error, área, perímetro,etc
- *Reducción:* Si hay mas de una variable independiente $x_1, x_2 \ldots$, se reduce la función a una única variable Si no es posible, debemos resolver un problema de optimización para cada variable independiente
- *Dominio:* Hay que saber los dominios admisibles para la solución y descartar resultados absurdos

Optimización

Ejemplo. Recta de mínimos cuadrados

Dado un conjunto de pares $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, se quiere encontrar la ecuación de la recta $y = mx + b$ de manera que esté lo más próxima posible a todos ellos.
Puesto que $y = mx + b$ se tiene que las variables son m y b, ya que definen la solución (una línea). Si los puntos estuvieran alineados

$$
\begin{aligned}
y_1 &= mx_1 + b \\
y_2 &= mx_2 + b \\
\ldots &= \ldots \qquad (4) \\
y_n &= mx_n + n
\end{aligned}
$$

$$(5)$$

Optimización

Ejemplo. Recta de mínimos cuadrados (cont)

x_i e y_i son **datos**, **no variables**!!
Por ejemplo

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	3.5	4	8	9.5	10	12	14	16	18.5	20

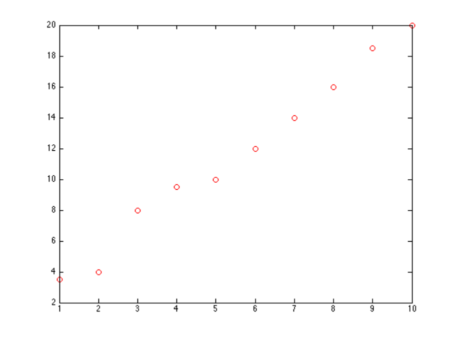
En MATLAB:
$>> xi = 1 : 10;$
$>> yi(1) = 3.5; yi(2) = 4; yi(3) = 8; yi(4) = 9.5; yi(5) = 10;$
$>> yi(6) = 12; yi(7) = 14; yi(8) = 16; yi(9) = 18.5; yi(10) = 20;$

¿Qué ecuación se satisface? (si hay alguna): $y_i = mx_i + b$?

Optimización

Ejemplo. Recta de mínimos cuadrados (cont)

Dibujando los puntos del ejemplo $>> plot(xi, yi, 'ro')$ se tiene



Optimización

Ejemplo. Recta de mínimos cuadrados (cont)

Para encontrar la función a optimizar partimos de las ecuaciones $y_i = mx_i + b$ para todos los punto.

Definimos el siguiente **error** respecto a (x_i, y_i):

$$E_i(m, b) = (y_i - mx_i - b)^2$$

Hay que encontrar una función que minimice el error que se comete, es decir hay que minimizar la función:

$$E(m, b) = E_1(m, b) + E_2(m, b) + \ldots + E_n(m, b)$$

Optimización

Ejemplo. Recta de mínimos cuadrados (cont)

Por lo tanto, la función de **mínimos cuadrados** a optimizar es:

$$E(m,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)^2$$

La elección optima es aquella para la que el error $E(m,b)$ se minimiza. El error es una función de dos variables m y b, luego tomando derivadas parciales e igualando a cero

$$\frac{dE}{dm} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)(-x_i) = 0$$

$$\frac{dE}{db} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)(-1) = 0$$

Optimización

Ejemplo. Recta de mínimos cuadrados (cont)

El error es una función de dos variables (m, b) pero, por simplificar el problema, elegimos solo una.
Si consideramos $b = 0$ (la recta pasa por el origen), entonces la función error se reduce a

$$E(m, 0) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i)^2$$

Como ahora es una función de una variable, derivando respecto a m obtenemos la óptima

$$\frac{dE}{dm} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i)(-x_i) = 0$$

Optimización

Ejemplo. Recta de mínimos cuadrados. Instrucciones

- $>> syms\ \ m$
- $>> f(m) = sum((yi - m * xi).\hat{}2)$
  $f(m) =$
  $(m - 7/2)\hat{}2 + (2 * m - 4)\hat{}2 + (3 * m - 8)\hat{}2 + (5 * m - 10)\hat{}2 + (6 * m - 12)\hat{}2 + (7 * m - 14)\hat{}2 + (8 * m - 16)\hat{}2 + (4 * m - 19/2)\hat{}2 + (10 * m - 20)\hat{}2 + (9 * m - 37/2)\hat{}2$
  $>>$
- $>> f1 = diff(f, m)$
  $f1(m) =$
  $770 * m - 1576$
- $>> respuesta = double(solve(f1 == 0))$
  $respuesta =$
  2.0468

Optimización

la función *fminbnd*

La función de Matlab que resuelve problemas de optimización de funciones de una variable es fminbnd, con sintaxis

$$f = @(x)funcion$$

$x = fminbnd(f, x1, x2)$ o $[x, fval] = fminbnd(f, x1, x2)$
$funcion$ = función a minimizar
x = valor que devuelve
$fval$ = valor de la función evaluada en la solución dada (x)
$x1, x2$ = región de búsqueda de la solución
En verdad este comando calcula el mínimo de una función f, si se quiere calcular el máximo debemos cambiar la función a $-f$

Optimización

la función *fminsearch*

La función de Matlab que resuelve problemas de optimización de funciones de más de una variable es fminseacrh, con sintaxis

$$f = @(x) funcion$$

$$[x, fval] = fminsearch(f, x0, opciones)$$

Encuentra el valor de las variables x que minimizan *función*, comenzando por el valor especificado en $x0$

Ejemplo:

$fun = @(x) 100(x(2) - x(1))^2 + (1 - x(1))^2$

$x0 = [1.2, 1]$

$x = fminsearch(fun, x0)$

Optimización

la función *fminunc*

La función de Matlab que resuelve problemas de optimización de funciones de más de una variable es fminunc, con sintaxis

$$f = @(x)funcion$$

$$[x, fval, grad, hessian] = fminunc(f, x0, opciones)$$

localiza el minimizo local de una función de varias variables. A diferencia de la anterior (*fminsearch*) que se basa en la evaluación de la función objetivo, esta utiliza información del gradiente y el hessiano

Ejercicios

Ejercicio #1

Crea un scipt que calcule el límite de las siguiente funciones y haga un gráfico de las mismas

1. $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+5}{x^4+7}$
2. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-3}{abs(x-3)}$ y $\lim_{x\to 0^-} \frac{x-3}{abs(x-3)}$

Ejercicios

Ejercicio #2

Sabiendo que $f(x) = \frac{3*x+5}{x-3}$ y $g(x) = x^2 + 1$ **Crea un scipt que calcule los siguientes límites**

1. $l1 = \lim_{x\to 4} f(x)$
2. $l2 = \lim_{x\to 4} g(x)$
3. $lsum = \lim_{x\to 4}(f(x) + g(x))$
4. $lrest = \lim_{x\to 4}(f(x) - g(x))$
5. $lprod = \lim_{x\to 4}(f(x) * g(x))$
6. $ldiv = \lim_{x\to 4}(f(x)/g(x))$

Ejercicios

Ejercicio #3

Crea un scipt que calcule el límite de las siguientes funciones

1. $lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{x^2-1}{3x+y}$
2. $lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x+3}{xy-4}$

Ejercicios

Ejercicio #4

Crea un scipt que calcule el límite de la siguiente función (utilizando límites iterados) y haga un gráfico de la misma

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \tag{6}$$

Ejercicios

Ejercicio #5

Utilizando un script de instrucciones, obtén la derivada de la función $sin(x)$ **recurriendo a la definición de derivada y utilizando el comando limit**

Ejercicios

Ejercicio #6

Utilizando un script de instrucciones, obtén la derivada de la matriz

$$\begin{bmatrix} cos(4x) & 3x \\ x & sin(5x) \end{bmatrix} \tag{7}$$

Ejercicios

Ejercicio #7

Crea un script que calcule la primera derivada parcial respecto a x de las siguientes expresiones

1. $tan(x+y)$
2. $ay+bx+cz$
3. $x^{0,5}-3y$

Ejercicios

Ejercicio #8

Crea un script que calcule los polinomios de Taylor de grados 1, 2, 5 y 8 de la función $cos(x)$ **alrededor del valor** $x = \pi/6$. Represéntalos junto con la función coseno en cuatro ventanas gráficas que se puedan visualizar al mismo tiempo, en el rectángulo $[0, 2\pi] \times [0, 3]$

Ejercicios

Ejercicio #9

Analiza las siguientes funciones. Para ello, crea un script por cada función. Cada script creará un gráfico con la función junto con las raíces, las asíntotas y los puntos críticos

1. $\frac{2x}{x^2+1}$
2. $\frac{\ln x}{x}$
3. $\frac{x+1}{\sqrt{x-1}-5}$
4. $\frac{x^3}{(x-1)^2} - 8$

Ejercicios

Recuerda como se resuelven los problemas de optimización

- *Variables:* Identificar las variables x e y
- *Función objetivo:* Encontrar la función a optimizar y reemplazar $y = f(x)$
- *Reducción:* Reduce la función a una única variable independiente
- *Dominio:* Comprobar el dominio de admisión de las soluciones y descartar las absurdas
- *Calculo:* Calcular el máximo o mínimo de la función objetivo

Ejercicios

Ejercicio $\#10$

Queremos construir una caja cuya longitud sea tres veces su anchura. El material usado para construir la tapa y la base cuesta 10 **euros por metro cuadrado y el material usado para construir los lados cuesta** 6 **euros por metro cuadrado. Si la caja tiene que tener un volumen de** 50 **metros cúbicos, determina las dimensiones que que minimizan el coste de construir la caja**

Ejercicios

Ejercicio #11

Una ventana se construye en su parte superior con un semicírculo y en la parte inferior con rectángulo. Si hay 12m. de materiales, ¿cuales serán las dimensiones de la ventana para que entre la mayor cantidad de luz?

Ejercicios

Ejercicio $\#12$

Determinar los puntos sobre $y = x^2 + 1$ **mas cercanos a** $(0, 2)$

Ejercicios

Ejercicio #13

Resolver la b para el valor óptimo de m para la recta del ejemplo de la recta de mínimos cuadrados creando un script para las soluciones

Dado $m = 2.0468$ reemplazar en la función de error

$$E(m, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2$$

Optimizarlo respecto a b.

Ejercicios

Ejercicio #14

Representa las siguientes funciones y calcula su gradiente

1. $f(x, y) = x^2y^3$
2. $g(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$

Ejercicios

Ejercicio #15

Calcula la matriz Hessiana de la función

$$f(x, y) = xy + 2zx$$

Ejercicios

Ejercicio #16

Calcula la matriz Jacobiana de

$$g(x, y, z) = (e^x, cos(y), sin(z))$$

Ejercicios

Ejercicio #17

Minimiza las funciones

- $f(x) = x^2 - 12x + 3$ en el intervalo $-8 \leq x \leq 8$.
- $f(x) = x + \cos(x^2)$ en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$.

Ejercicios

Ejercicio #18

Utiliza fminunc para minimiza las funciones

- $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 1.$
- $f(x_1, x_2) = x_1x_2 \ln(x_1^2 + x_2^2).$