Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

La temperatura T en un punto de la superficie de la tierra a una hora determinada depende de la longitud y latitud de dicho punto.

Se puede pensar en T como una función de dos variables y si las denominamos x e y, esta dependencia functional se puede poner como

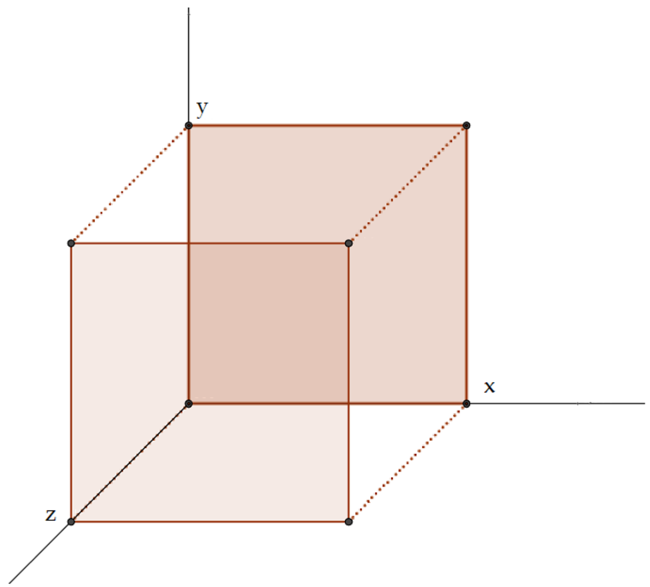
$$T = f(x, y)$$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

El volumen de una caja rectangular de dimensiones x, y, z es Volumen = x·y·z.

Este es un ejemplo de una función real de tres variables reales, que simbolizamos por:

$$f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$$



FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Definición:

En general, una función real de *n* variables reales es una correspondencia que asigna a cada n-tupla $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, un único valor

$$u = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

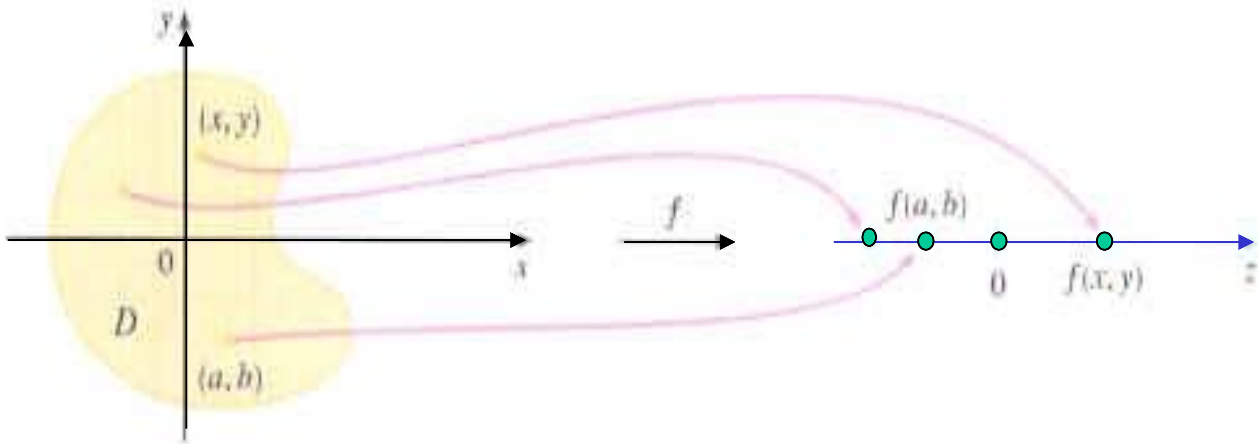
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Los conceptos conocidos para funciones de una variable tienen su equivalente para funciones de *n* variables.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Particularizando a dos variables, una función *f* de dos variables asigna a cada par ordenado de números reales *(x,y)* pertenecientes a un conjunto *D*, un número real único denotado por u = *f(x,y)*.

El conjunto *D* es el dominio de *f* y su imagen es el conjunto de valores que toma *f*.



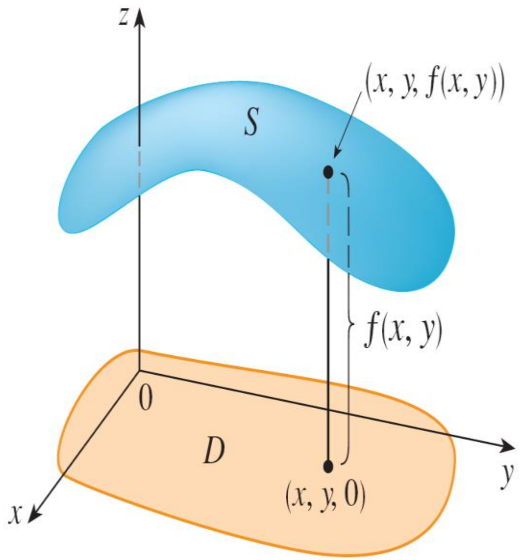
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Las funciones de dos variables se suelen escribir de la forma $z = f(x, y)$ para explicitar el valor tomado por la función f en un punto (x, y). Las variables x e y son las variables independientes y z es la variable dependiente.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

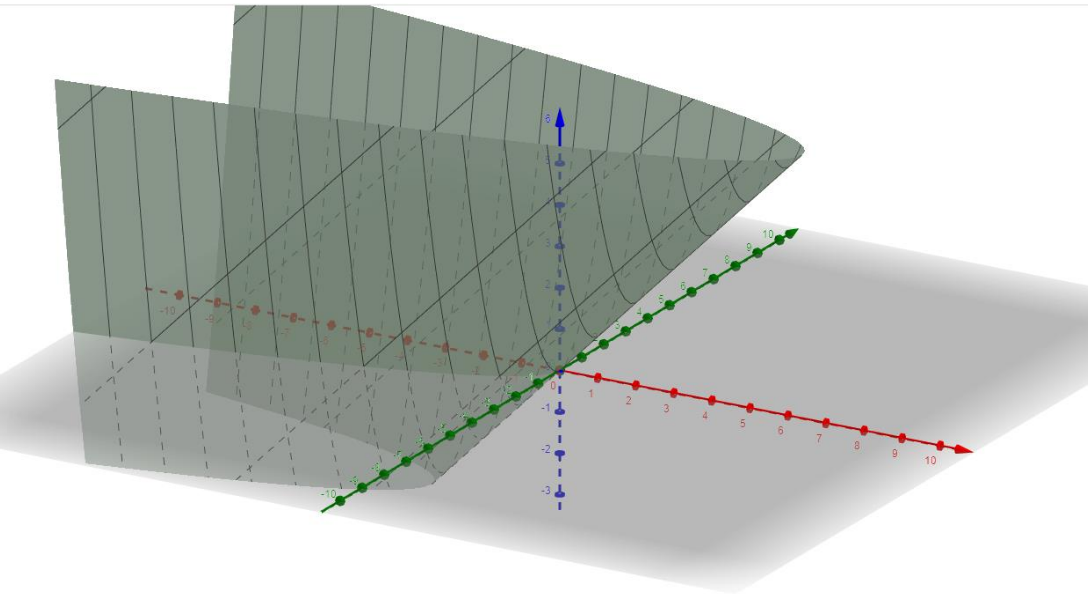
Si *f* es una función de dos variables con dominio *D*, entonces la gráfica de *f* es el conjunto de ternas *(x, y, z)* de R^3 tales que $z = f(x,y)$ y (x,y) está en *D*.

Igual que las gráficas de funciones de una variable son curvas en el plano, las gráficas de funciones de dos variables son superficies en el espacio.



FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Por ejemplo, $z = f(x, y) = x + y^2$ es una función de dos variables con dominio todos los parejas de números reales y cuya representación en 3D es

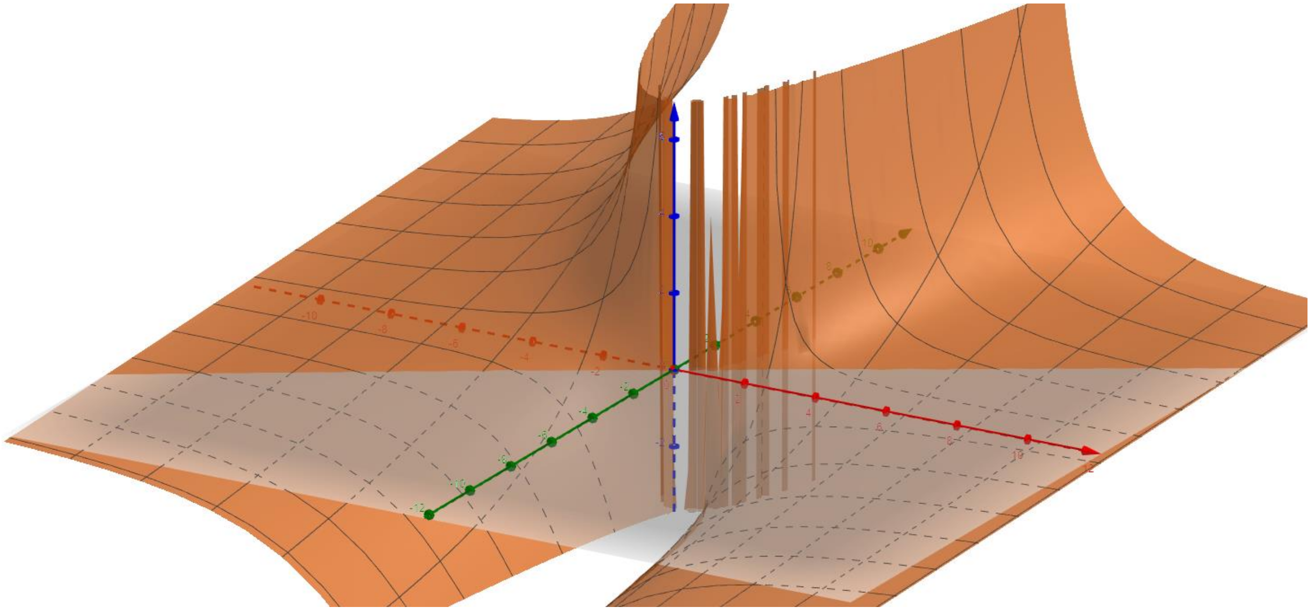


FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

EJEMPLO

$$z=f(x, y)=\frac{3x-5y}{y-x^2} \Rightarrow D=\left\{(x, y)\in R^2/y-x^2 \neq 0\right\}$$

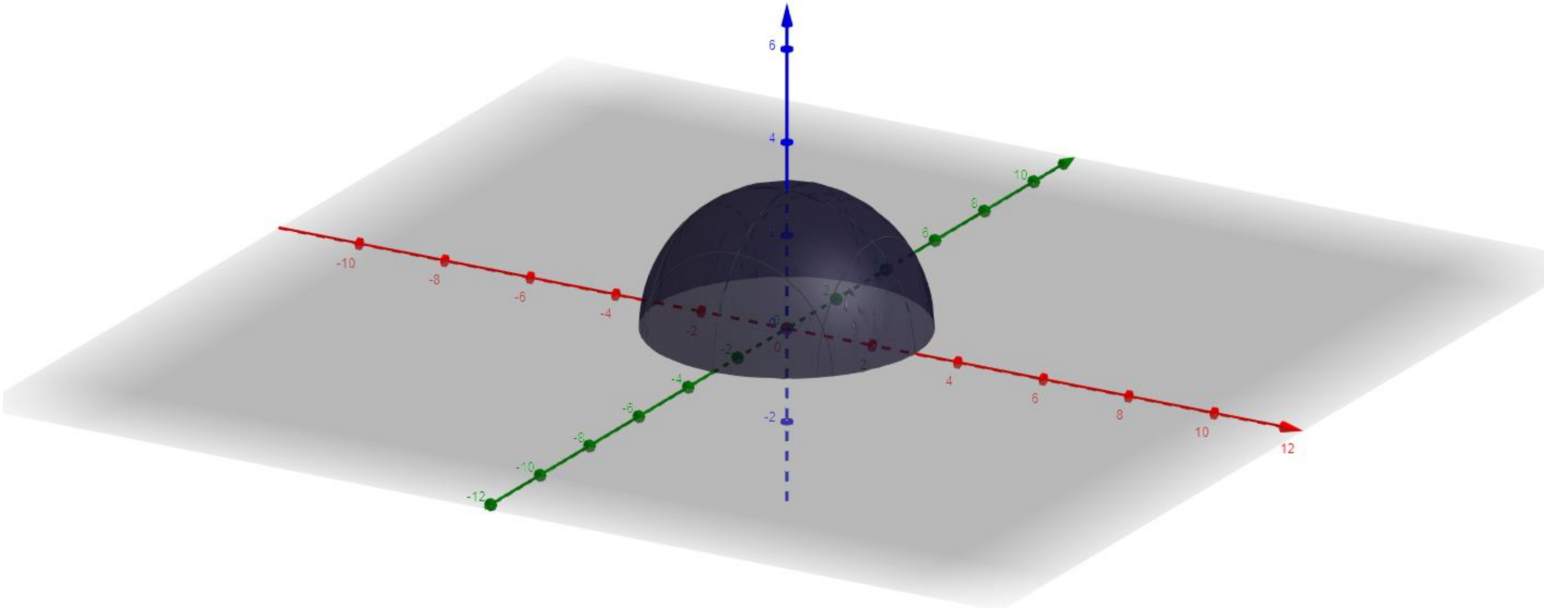


El dominio es todo el plano R^2 excepto los puntos de la parábola $y = x^2$.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

EJEMPLO

$$z=f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2} \Rightarrow D=\left\{(x,y)\in R^2/9-x^2-y^2 \geq 0\right\}$$



Como $x^2 + y^2 = 9$, es la ecuación de una circunferencia de centro el origen y radio 3, *D* representa el interior y la frontera de dicha circunferencia.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

El dominio de la función

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \sin z$$

Es

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

Es decir todos los puntos que están por encim del plano $z = y$.

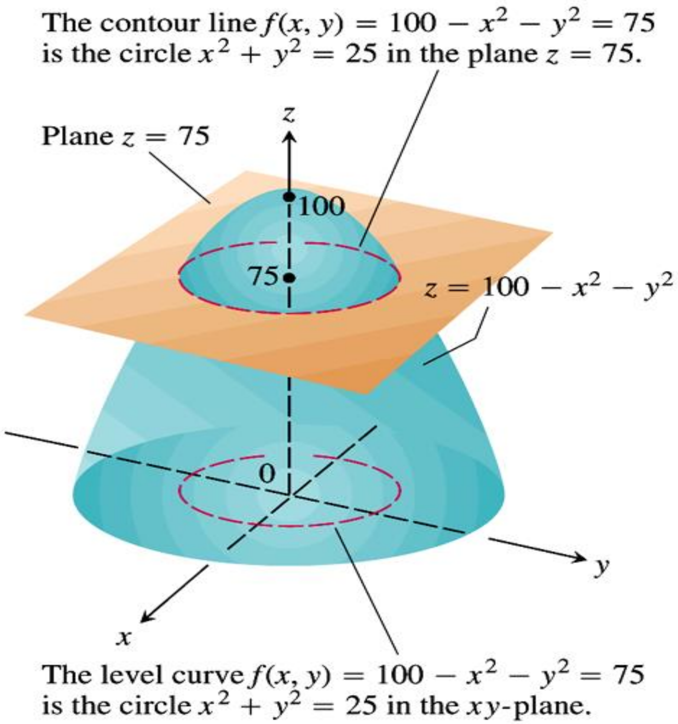
Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

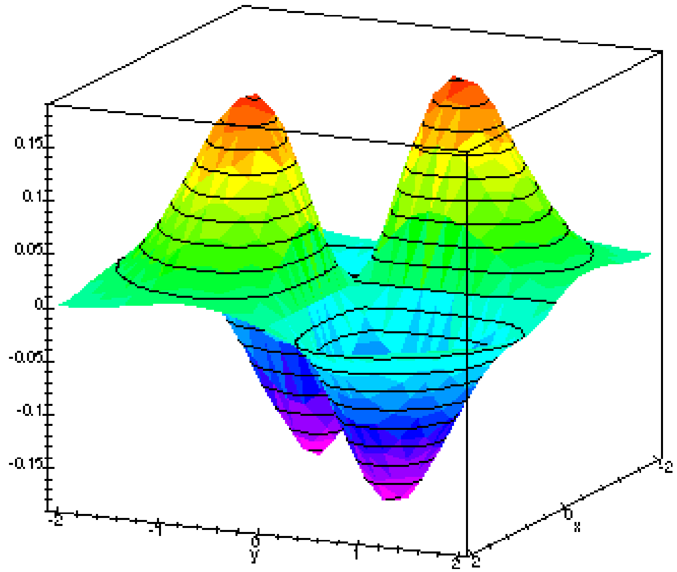
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Las funciones de varias variables pueden operarse de igual forma que las de una variable, ya sea con suma, producto, cociente o composición de funciones.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. CURVAS DE NIVEL

Las curvas de nivel de una función *f* de dos variables, son las curvas con ecuaciones *f(x,y)=k*, donde *k* es una constante (que pertenece a la imagen de f)





FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. CURVAS DE NIVEL

EJEMPLO

Obtener las curvas de nivel de $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. CURVAS DE NIVEL

EJEMPLO

Obtener las curvas de nivel de $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$

Sustituimos la variable z por una constante $z = c$,

$$c = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$$

Elevando al cuadrado,

$$c^2 = 100 - x^2 - y^2$$

Reorganizando

$$x^2 + y^2 = 100 - c^2$$

Se obtienen circunferencias de centro el origen de coordenadas para $c < 10$; el valor para $c = 10$; y para $c > 10$ no tienen significado geométrico

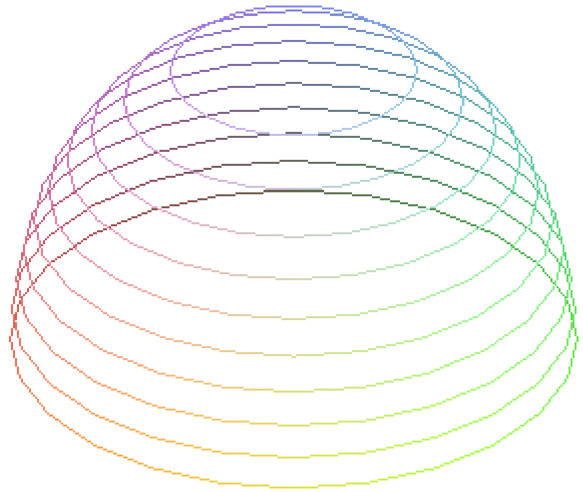
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. CURVAS DE NIVEL

Ejercicio:

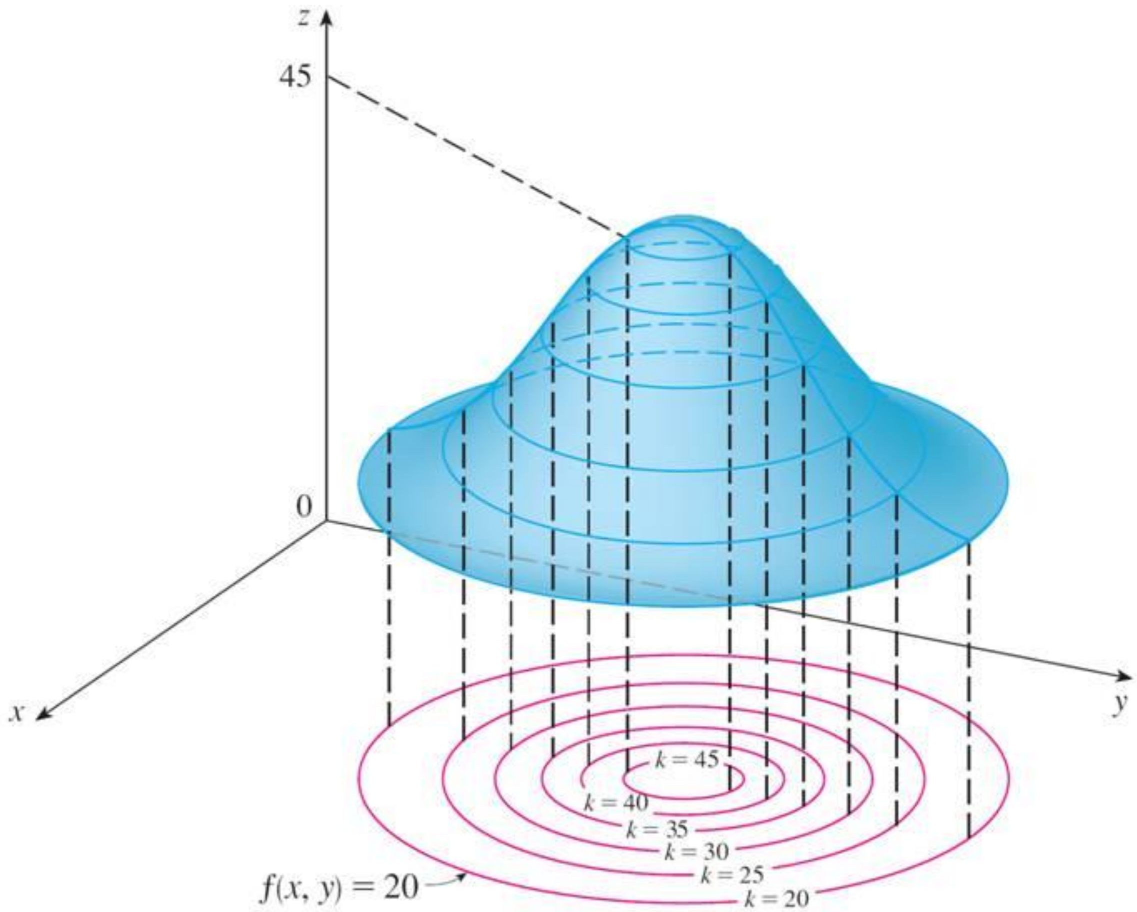
Obtener las curvas de nivel de la función de dos variables

$$z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$$

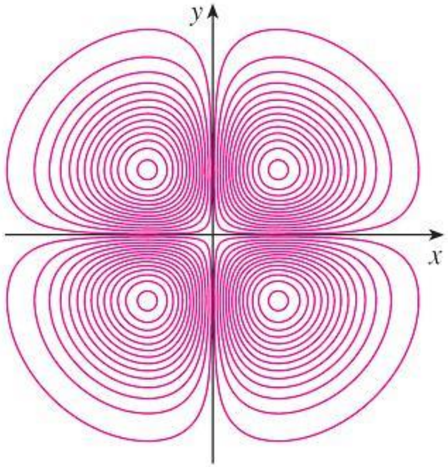
$$x^2 + y^2 = 100 - c^2$$



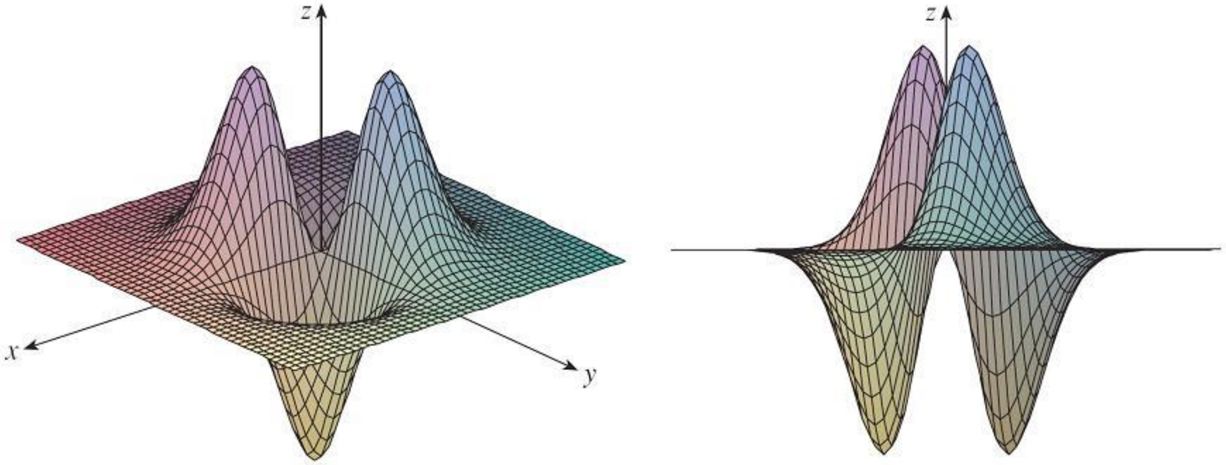
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. CURVAS DE NIVEL



FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. CURVAS DE NIVEL



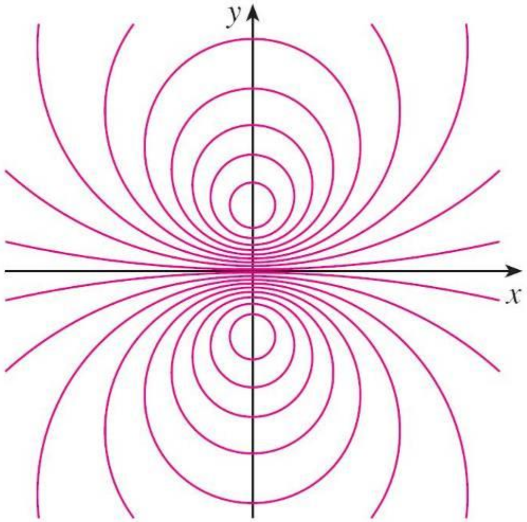
(a) Level curves of $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



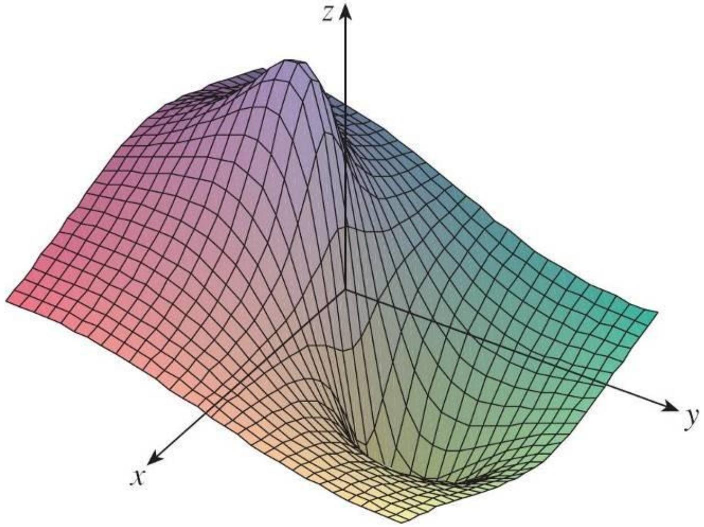
(b) Two views of $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$

Figure 19

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. CURVAS DE NIVEL

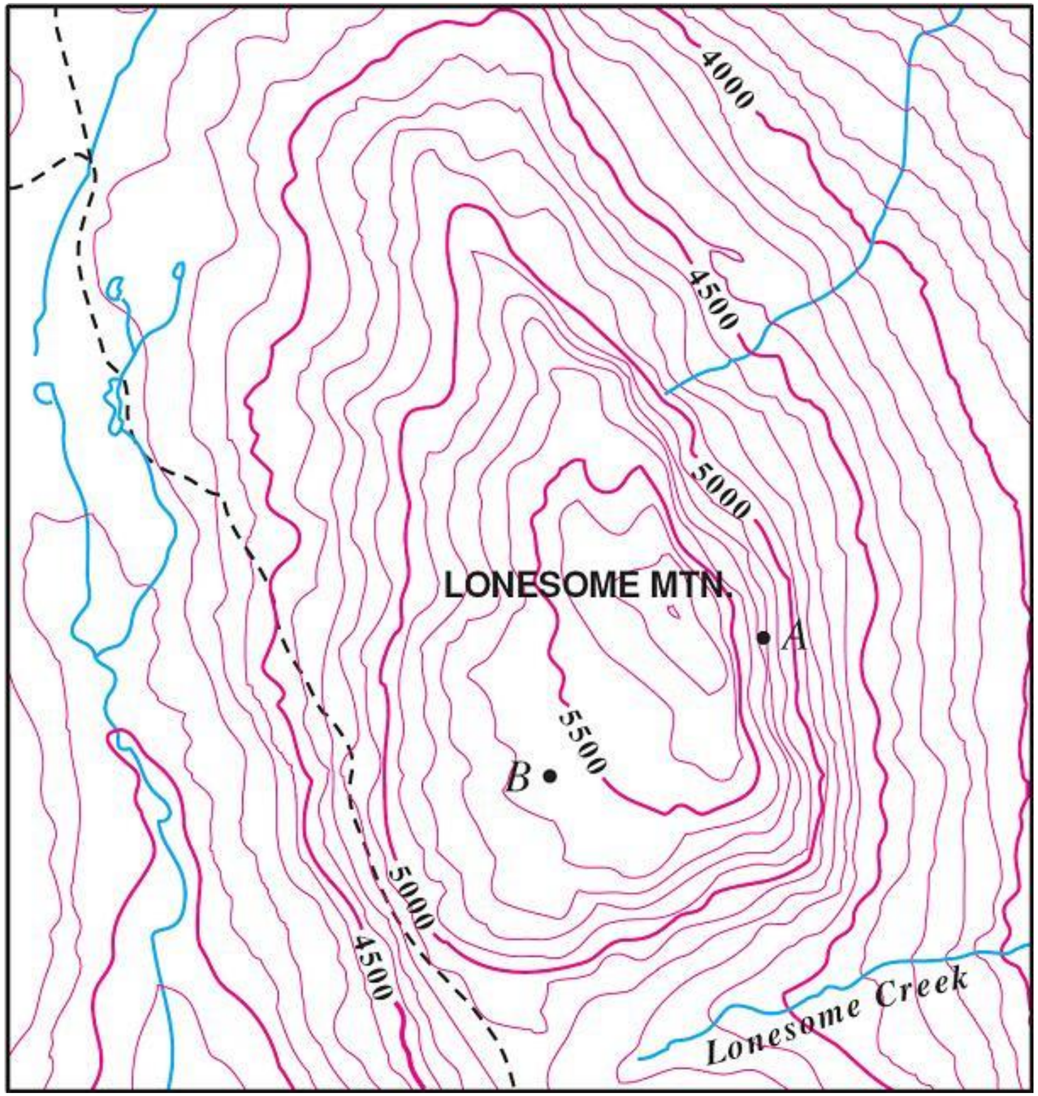


Level curves of $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$



$f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. CURVAS DE NIVEL



EJERCICIOS

Encontrar el dominio de la función

$$f(x,y,z) = \arcsin(xy)\, e^{3z} + e^{(y+z)\ln(x+z)}$$

Describe los conjuntos de curvas de nivel para los valores de k indicados

a) $f(x,y) = x^2 + y^2, k = 0,1,2,3.$

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2, k = 0,1,2.$

c) $f(x,y) = x^2 - y^2, k = -2,-1,0,1,2.$