Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CALCULO DIFERENCIAL. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

DEFINICIÓN DE DERIVADA PARCIAL

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables con dominio D. Si mantenemos la variable y fija: $y = b$, siendo b una constante, y suponemos que solo la x varía, la función f se convierte entonces en función de solo la variable x: $g(x) = f(x, y)$ Si g tiene derivada en a, entonces esta se llama derivada parcial de f respecto de x en (a, b), que denotamos por $f_x(a, b)$.

Luego por definición se tiene:

$$f_x(a,b) = g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a,b)}{h}$$

DEFINICIÓN DE DERIVADA PARCIAL

Análogamente, sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables. Si mantenemos la variable x fija: $x = a$, siendo a una constante, y suponemos que solo la y varía, la función f se convierte entonces en función de solo la variable y: $h(y) = f(a, y)$ Si h tiene derivada en b, entonces esta se llama derivada parcial de f respecto de y en (a, b), que denotamos por $f_y(a, b)$.

Luego por definición se tiene:

$$f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

DERIVADAS PARCIALES. NOTACIÓN

Dada una función de dos variables $z = f(x, y)$, otra notación para la derivada parcial de f respecto de las dos variables x e y es

$$f_x = z_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{o} \quad f_y = z_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

EJEMPLO

Calcula las derivadas parciales de

$$f(x,y) = 3x^2 + y^3 x + y$$

en el punto *(1, 1)*

EJEMPLO

$$f(x,y) = 3x^2 + y^3 x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + y^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 7$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 x + 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 4$$

EJERCICIO

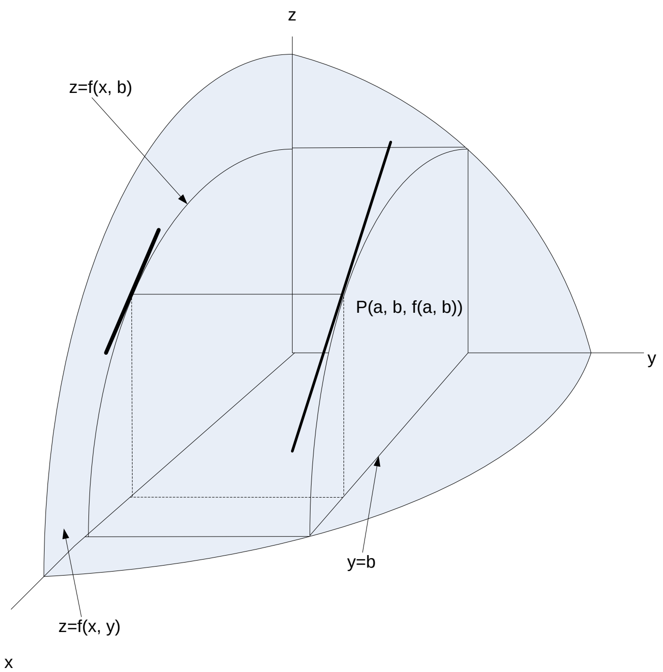
Calcula las derivadas parciales de

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \ln(\mathrm{xy})$$

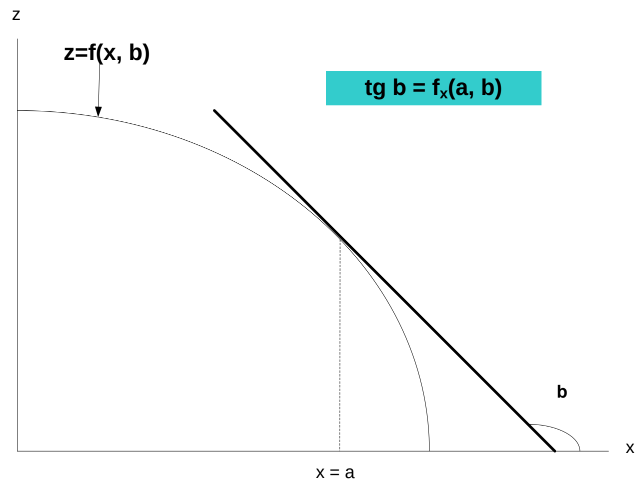
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si consideramos la superficie que tiene por ecuación $z=f(x, y)$, el plano $y = b$ corta a la superficie en la curva $z=f(x,b)$, que tiene por pendiente en el punto $x = a$, el valor de su derivada en dicho punto que es la derivada parcial respecto a x

Corte de z = f(x, y) con y = b



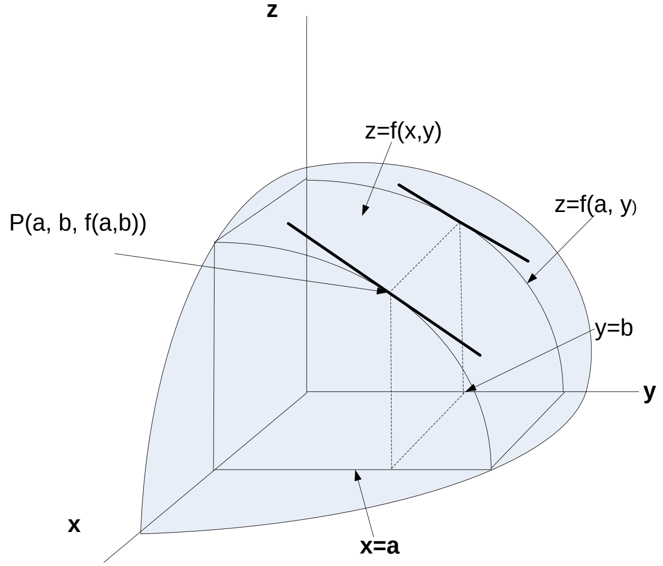
Proyección del corte de z=f(x, y) con y = b sobre el plano ZX



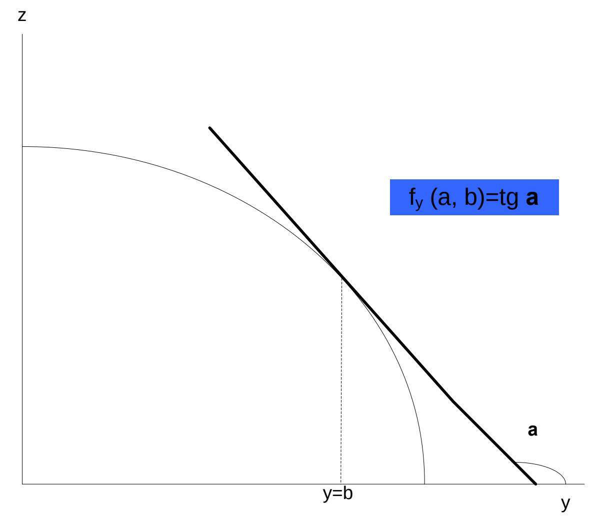
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Análogamente, si cortamos la superficie por el plano $x=a$ se obtiene la curva $z=f(a,y)$, que tiene por pendiente en el punto $y=b$, el valor de su derivada en dicho punto que es la derivada parcial respecto a y

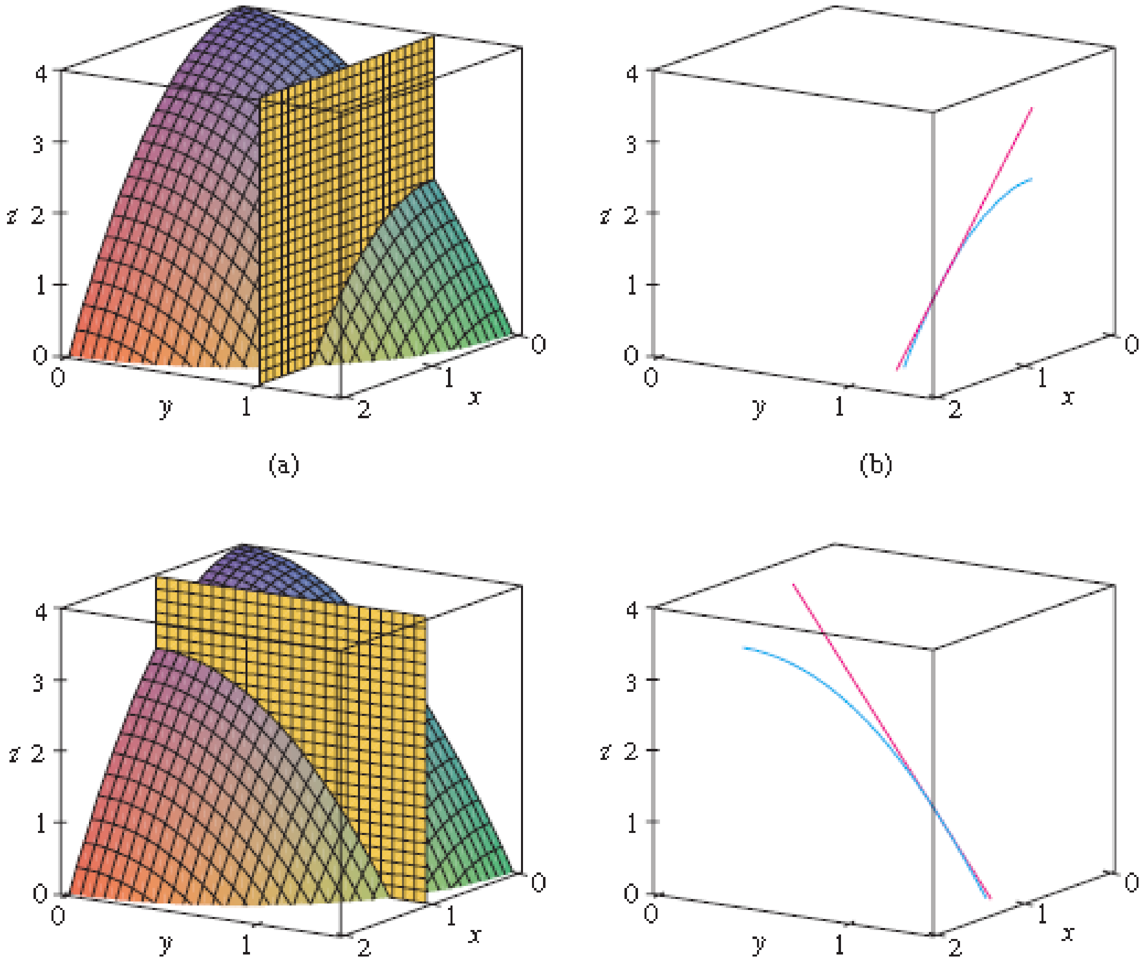
Corte de z=f(x, y) con x=a



Proyección del corte de z = f(x, y) con x = a sobre el plano ZY



CALCULO DIFERENCIAL. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES



PLANO TANGENTE

En una variable, la existencia de la derivada en un punto, equivale a la existencia de la recta tangente en el mismo.

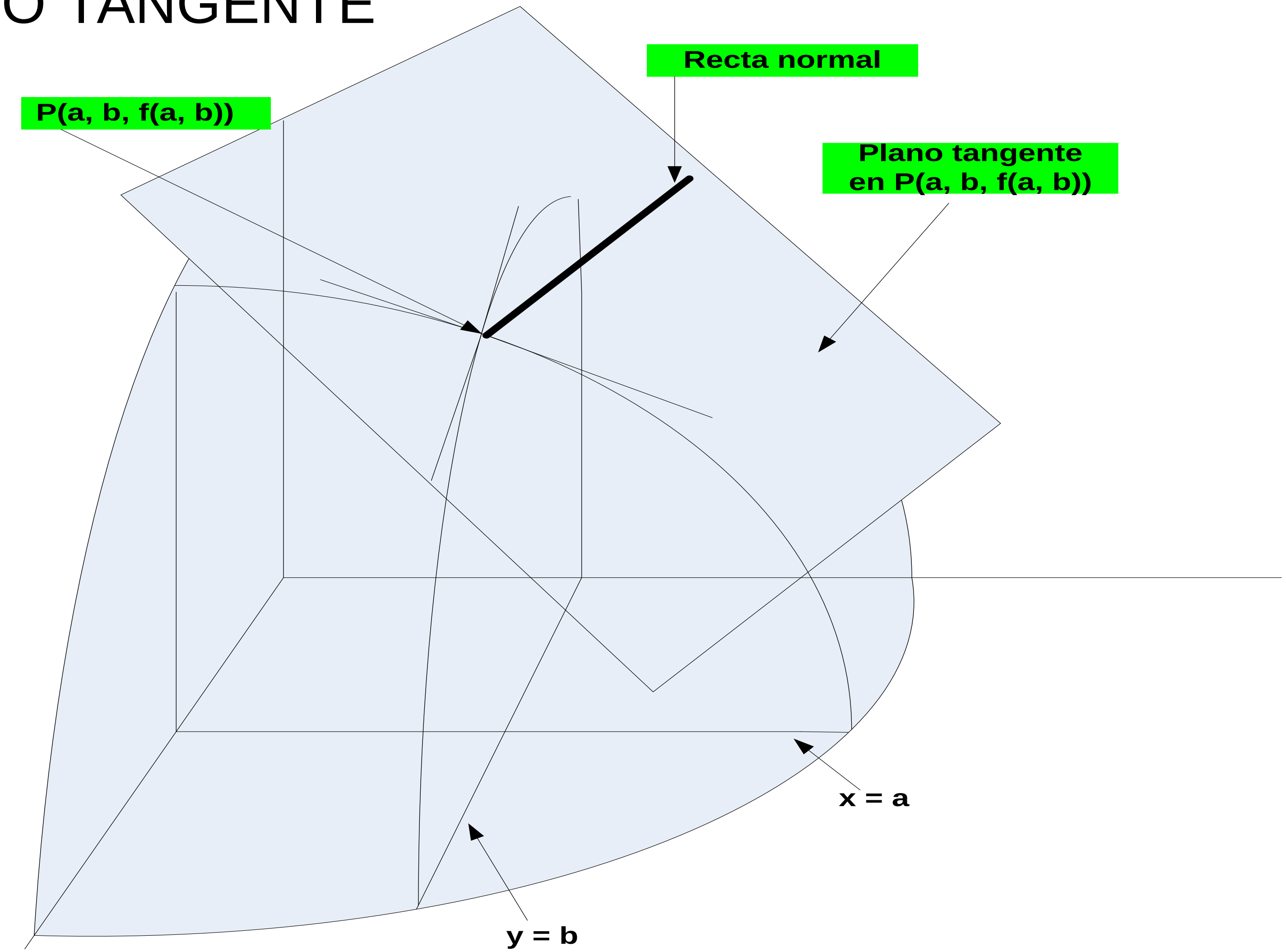
Para dos variables, la diferenciabilidad en un punto (a,b), equivale a la existencia del plano tangente a la superficie que representa la función en el mismo punto.

Teorema

La superficie $z = f(x,y)$ admite plano tangente en el punto $(a, b, f(a,b))$ si y solo si la función f es diferenciable en el punto (a,b) y, en este caso, su ecuación es:

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - \big(z - f(a,b)\big) = 0$$

PLANO TANGENTE



PLANO TANGENTE

EJERCICIO

Calcula el plano tangente a $f(x,y)=3x^2+y^3x+y$ en el punto $(1,1)$

Derivadas de funciones paramétricas

Tenemos dos formas de realizarla. Lo veremos con un ejemplo

Sea $f(x,y) = xy^2 - x^2$ *con* $x = cos\, t,\ \ y = sin\, t$ *, calcular la derivada de* f *respecto a* t*.*

1) Se sustituye x e y en f y se deriva respeto a t

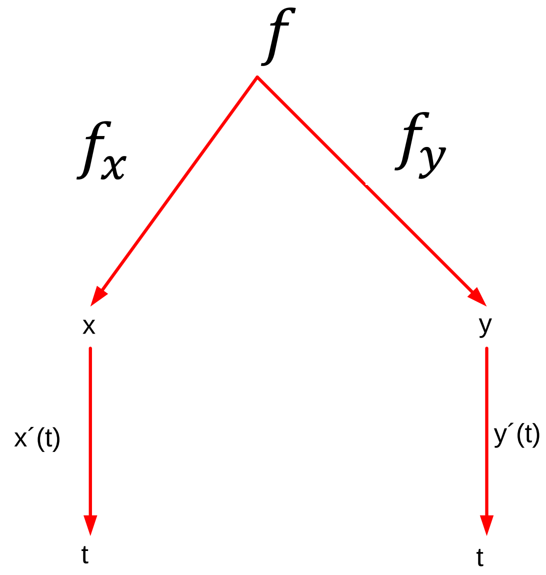
$$f = xy^2 - x^2 = \cos t\,(\sin t)^2 - (\cos t)^2$$

$$f'(t) = (-\sin t)^3 + 2(\cos t)^2 \sin t + 2\sin t \cos t$$

EJERCICIO

Sea $z = f(x,y) = xy^2 - x^2$ con $x = \cos t,\ \ y = \sin t$ calcular la derivada de la función z respecto a t.

2) Aplicar la regla de la cadena



$$f(x,y); x = g(t), y = h(t)$$

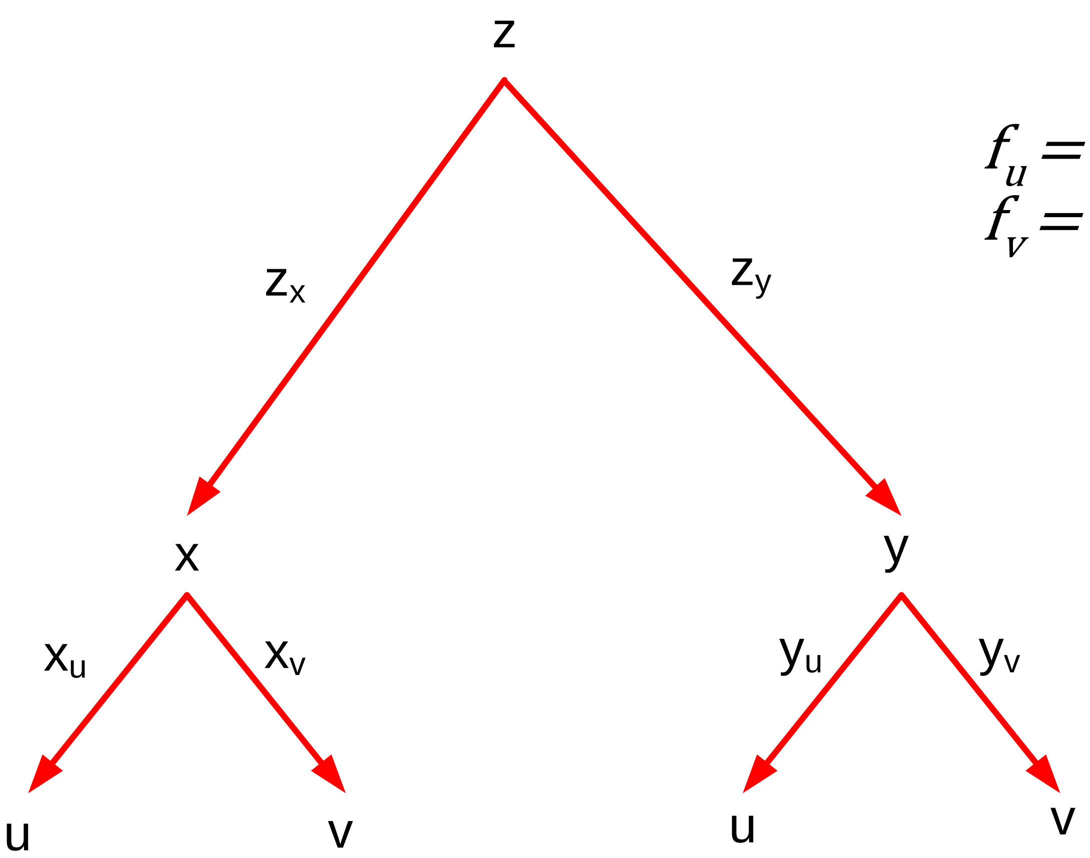
$$f'(t) = f_x x'(t) + f_y y'(t)$$

$$f'(t) = f_x x'(t) + f_y y'(t) = (y^2 - 2x)(-\sin t) + 2xy\cos t =$$
$$= ((\sin t)^2 - 2\cos t)(-\sin t) + 2(\cos t)^2 \sin t$$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CALCULO DIFERENCIAL. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En este caso tenemos una función de dos variables $z = f(x, y)$ y, a su vez, cada variable depende de dos parámetros, $x = g(u, v), y = h(u, v)$. En este caso las derivadas parciales serán



$$f_u = z_u = z_x x_u + z_y y_u$$
$$f_v = z_v = z_x x_v + z_y y_v$$

EJERCICIO

Sea $z = f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2}$ con $x = u + v$; $\quad y = u - v$, calcula f_u y f_v de dos formas distintas (sustituyendo x e y, y aplicando el teorema anterior)

EJEMPLO

Sabiendo que $z = f(x, y)$ calcula z_x y z_y de la ecuación implícita

$$z^3 \sin x + ze^{xy} - xy = 0$$

Derivadas parciales de funciones de tres variables: $f(x,y,z)$
Se definen las tres derivadas parciales

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

como las derivadas respecto de x, y o z respectivamente dejando las otras dos variables constantes

Para funciones de n variables $\quad f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$f_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad f_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad f_{x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad e_j = (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad b_{i\neq j} = 0 \quad b_j = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f\left(x + \lambda e_j\right) - f(x)}{\lambda}$$

Vector gradiente

Se define el **vector gradiente** de una función de *n* variables como el vector cuyas componentes son las derivadas parciales.

$$\text{Gradiente de f} = \nabla \mathrm{f}(\mathbf{x}) = (f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

La derivada en un punto de una función real de variable real informa de lo que varía la función por cada unidad que varía la variable independiente en ese punto

La misma información da el gradiente con cada una de sus componentes: informa de lo que varía la función por cada unidad que varía cada variable en el punto que se considere

Vector gradiente

$$\nabla \mathrm{f}(\mathbf{x}) = (f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_n}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

Como cada derivada parcial en un punto de una función es un número real, el gradiente en cada punto es un conjunto ordenado de números reales, es decir, un vector de dimensión el número de variables de la función.

Por ejemplo para una función con tres variables

$$\nabla \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = (f_x, f_y, f_z) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Vector gradiente

EJEMPLO

Calcula el gradiente de la función de tres variables

$$f(x,y,z) = 3x^2yz + 5xz + 6$$

$$\nabla f(x,y,z) = (6xyz + 5z, 3x^2z, 3x^2y + 5x) = (6xyz + 5z)i + (3x^2z)j + (3x^2y + 5x)k$$

El gradiente en los puntos *(0,2,-1)* y *(1,-1,-1)* vale

$$\nabla f_{(0,2,-1)} = (-5, 0, 0) = -5i$$

$$\nabla f_{(1,-1,-1)} = (1, -3, 2) = i - 3j + 2k$$

Propiedades del vector gradiente

El vector gradiente de una función de dos variables en un punto (x_0, y_0), señala la dirección de máximo crecimiento de la función en dicho punto. Es decir, de entre todas las (infinitas) direcciones que parten del punto (x_0, y_0) la dirección definida por el gradiente es aquella en la que la función crece más rápidamente.

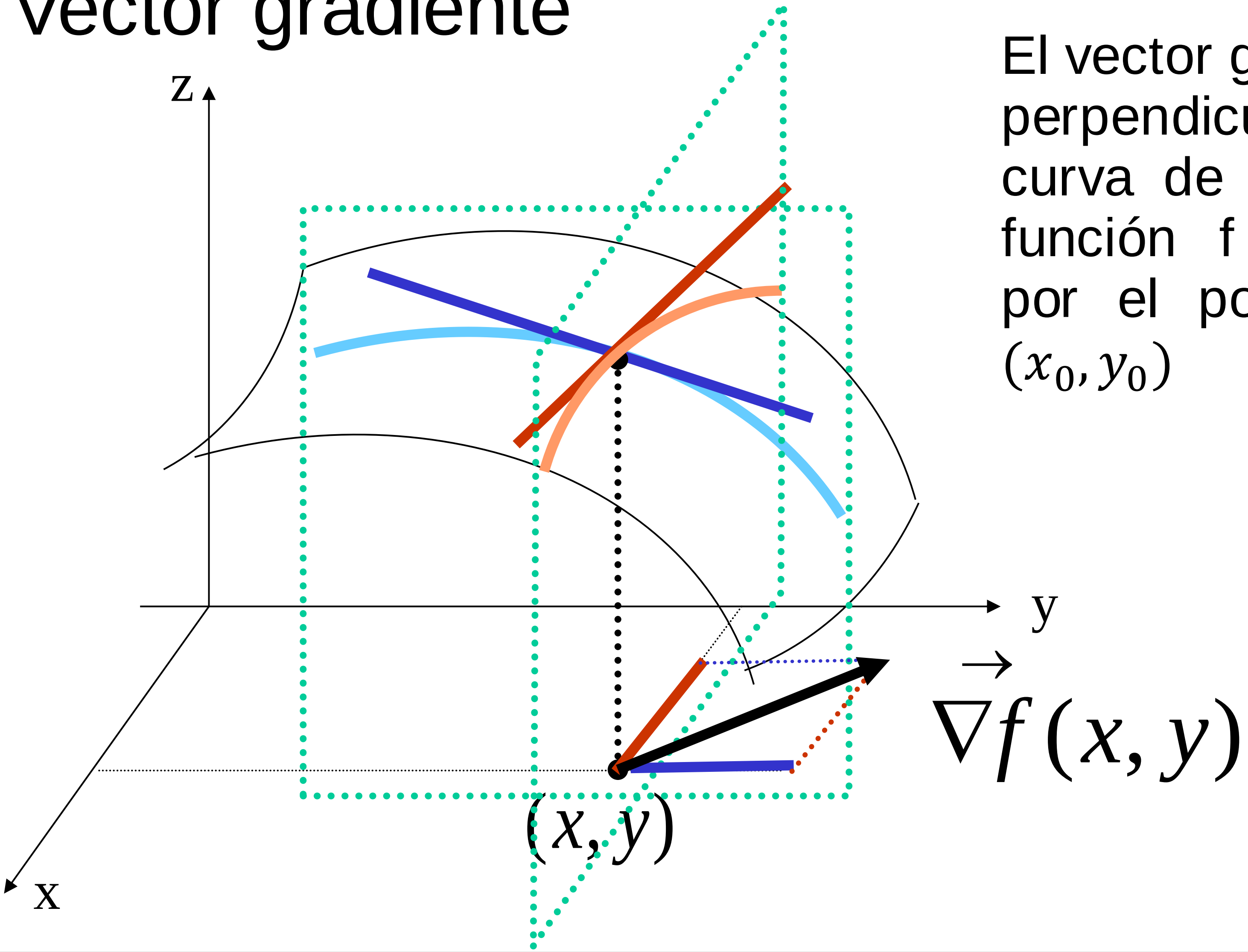
Como consecuencia, la dirección opuesta al gradiente es aquella en la que la función decrece más rápidamente.

Es necesario darse cuenta que $\nabla f(x, y)$ es un vector en el plano y $\nabla f(x, y, z)$ es un vector en el espacio. El vector gradiente marcará la dirección de máxima variación de la función en cualquier punto.

Propiedades del vector gradiente

Esta propiedad es de una importancia primordial en muchas situaciones reales. Por ejemplo, la *quimiotaxis*, que es el mecanismo por el que algunas células se mueven de acuerdo con la concentración de ciertas sustancias químicas en su medio ambiente, eligiendo para ello la dirección del gradiente de la concentración, si se busca, por ejemplo, alimento, o la opuesta al gradiente, si se busca, por ejemplo, alejarse de un veneno.

Vector gradiente



El vector gradiente es perpendicular a la curva de nivel de la función f que pasa por el por el punto (x_0, y_0)

Vector gradiente

EJEMPLO

La temperatura en grados Celsius en la superficie de una placa metálica es

$$\mathrm{T}(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

Donde x e y se miden en centímetros. ¿En qué dirección a partir de $(2, -3)$ aumenta más rápido la temperatura?¿Cuál es la tasa de crecimiento?

$$\nabla T(x, y) = T_x(x, y)\boldsymbol{i} + T_y(x, y)\boldsymbol{j} = -8x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j}$$

Luego $\nabla T(2, -3) = \mathbf{-16}\boldsymbol{i} + \mathbf{6}\boldsymbol{j}$ es la dirección de máximo crecimiento

Como el gradiente es un vector, existe su norma y a esta se le denomina **tasa de crecimiento**

En nuestro caso es $\|\nabla T(2, -3)\| = \sqrt{256 + 36} = \sqrt{292} \approx 19.09$ grados Celsius por centímetro.

Derivada direccional

La derivada direccional es el producto escalar del gradiente por el vector unitario que determina la dirección.
Es decir, si f es una función diferenciable en x e y, su derivada direccional es la dirección del vector unitario $\boldsymbol{u}$ es

$$D_u f(x, y) = \nabla T(x, y) \cdot \boldsymbol{u}$$

Derivada direccional

El concepto de derivada direccional se puede explicar con el siguiente ejemplo.

Supongamos que nos encontramos sobre una superficie inclinada, por ejemplo, sobre la ladera de una montaña. Dependiendo de la dirección en que caminemos, descenderemos o ascenderemos e incluso nos encontraremos con una mayor o menor pendiente.

EJEMPLO

Obtener la derivada direccional de la función

$$f(x,y,z) = 3x^2yz + 5xz + 6$$

En la dirección del vector *(1,-2,-1)*

EJEMPLO

Obtener la derivada direccional de la función

$$f(x,y,z) = 3x^2yz + 5xz + 6$$

En la dirección del vector *(1,-2,-1)*

$$\nabla f(x,y,z) = (6xyz + 5z, 3x^2z, 3x^2y + 5x)$$

Luego la derivada en cualquier punto *(x, y, z)* en la dirección del vector *(1,-2,-1)* cuyo módulo es $\sqrt{6}$ es

$$D_u f = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} = (6xyz + 5z, 3x^2z, 3x^2y + 5x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= \sqrt{6}xyz + \frac{5}{\sqrt{6}}z - \sqrt{6}x^2z - \sqrt{\frac{3}{2}}x^2y - \frac{5}{\sqrt{6}}x$$

MATRIZ JACOBIANA

Dado un conjunto de funciones $f = (f_1, f_2, \ldots f_s)$, de q variables cada una, se define la matriz Jacobiana de f (J_f) como una matriz con s filas y q columnas, tal que en la fila i, columna j, tiene el elemento $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$

$$J_f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_q} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_s}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_s}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_s}{\partial x_q} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO

Hallar la matriz Jacobiana en el punto $a = (1,1,1)$ de la función

$$f(x, y, z) = e^{x+y^3+z^2}$$

EJEMPLO

Hallar la matriz Jacobiana en el punto $a = (1,1,1)$ de

$$f(x,y,z) = e^{x+y^3+z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y^3+z^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 e^{x+y^3+z^2} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2ze^{x+y^3+z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = e^3 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 3e^3 \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = 2e^3$$

$$J_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^{x+y^3+x^2} & 3y^2 e^{x+y^3+z^2} & 2ze^{x+y^3+z^2} \end{bmatrix}$$

$$J_f(1,1,1) = \begin{bmatrix} e^3 & 3e^3 & 2e^3 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO

Hallar la matriz Jacobiana de $F = (f_1, f_2, f_3) = (x^2y^3, e^{x^2+y^4}, \operatorname{sen}(2\pi y))$

DERIVADAS PARCIALES SEGUNDAS

Se obtienen derivando parcialmente respecto a una variable x_i (dejando las demás fijas) y volviendo derivar a la derivada que se obtiene, derivándola parcialmente respecto a otra variable x_j o la misma variable x_i (y dejando las demás fijas)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx} = f''_x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy} = f''_y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{xy}$$

Las derivadas de orden superior sobre derivadas de distinta variable **se llaman derivadas "iteradas" o cruzadas.**

Teorema de Schwartz o Teorema de igualdad de las derivadas iteradas

Sea f una función escalar de dos variables y supongamos que para cada (x, y) de algún entorno V, existen $\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ es continua.

Entonces también existe la otra derivada cruzada y se verifica que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \sin(x)y^2 \arrow[dll, "\frac{\partial}{\partial x}"'] \arrow[drr, "\frac{\partial}{\partial y}"] & & & \\
 & \cos(x)y^2 \arrow[dl, "\frac{\partial}{\partial x}"'] \arrow[dr, "\frac{\partial}{\partial y}"] & & & & 2\sin(x)y \arrow[dl, "\frac{\partial}{\partial x}"'] \arrow[dr, "\frac{\partial}{\partial y}"] & \\
-\sin(x)y^2 & & 2\cos(x)y & & 2\cos(x)y & & 2\sin(x)
\end{tikzcd}$$

EJERCICIO

Determina si se cumple el teorema de Schwarz en la función

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}$$

MATRIZ HESSIANA

Dado una función real *f* de *n* variables reales. Si todas las segundas derivadas parciales existen, se define la matriz Hessiana de *f* (H_f) como una matriz cuadrada de tamaño n, tal que en la fila *i*, columna *j*, tiene el elemento $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$

$$H_f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO

Calcular la matriz Hessiana

$$f(x,y) = e^{x^2+y^3}$$

EJEMPLO

Calcular la matriz Hessiana

$$f(x,y) = e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^3} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2+4x^2)e^{x^2+y^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2e^{x^2+y^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (6y+9y^4)e^{x^2+y^3}$$

EJEMPLO

Calcular la matriz Hessiana

$$f(x,y) = e^{x^2+y^3}$$

$$H_f = \begin{bmatrix} (2+4x^2)e^{x^2+y^3} & 6xy^2e^{x^2+y^3} \\ 6xy^2e^{x^2+y^3} & (6y+9y^4)e^{x^2+y^3} \end{bmatrix}$$

Extremos locales de funciones de dos variables. Punto mínimo y valor mínimo

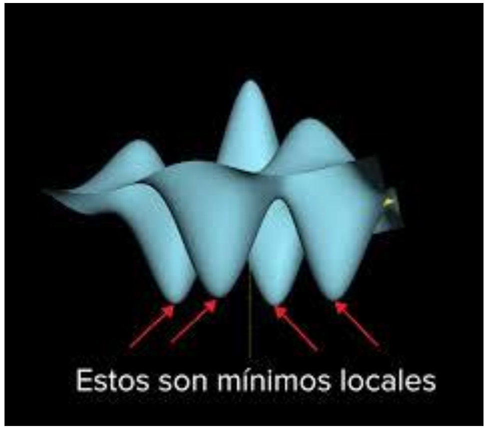
Dada una función $f(x, y)$ y (a, b) un punto perteneciente al dominio D de la función f

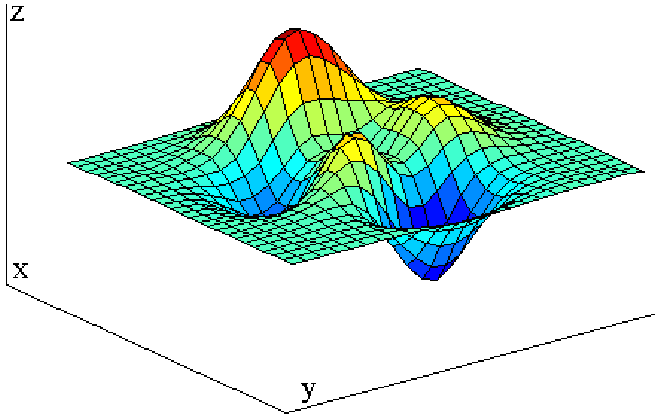
Se dice que (a, b) es punto mínimo absoluto de $f(x, y)$ si

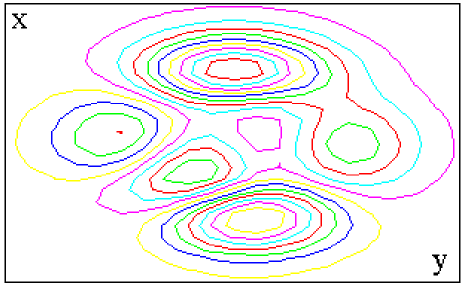
$$f(a, b) \leq f(x, y) \ \forall (x, y) \in D$$

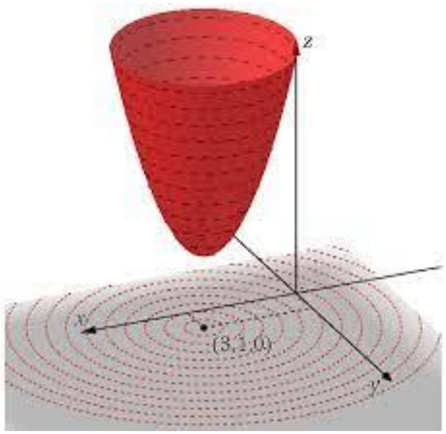
Cuando $f(a, b) \leq f(x, y)$ se verifica para todo (x, y) perteneciente a un disco centrado en (a, b) se dice que (a, b) es punto mínimo relativo o local.

EXTREMOS RELATIVOS: MÍNIMOS RELATIVOS









Extremos locales de funciones de dos variables. Punto máximo y valor máximo

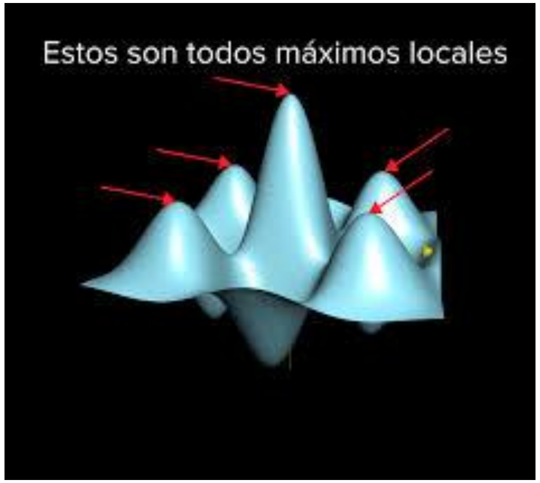
Dada una función $f(x, y)$ y (a, b) un punto perteneciente al dominio D de la función f

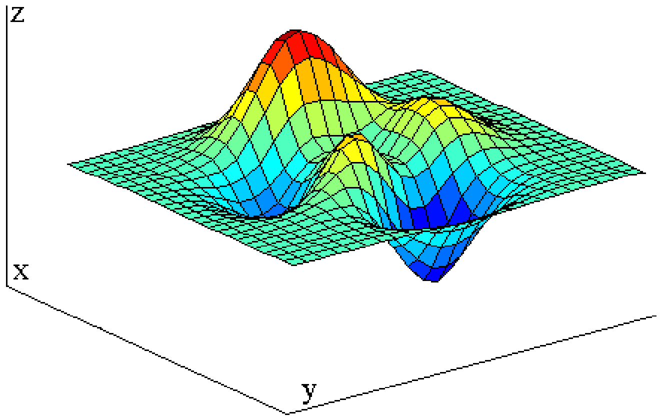
Se dice que (a, b) es punto máximo absoluto de $f(x, y)$ si

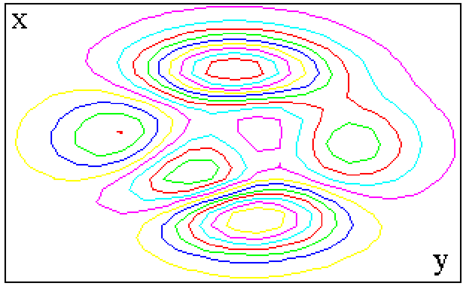
$$f(a,b) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$$

Cuando $f(a,b) \geq f(x,y)$ se verifica para todo (x,y) perteneciente a un disco centrado en (a,b) se dice que (a,b) es punto máximo relativo o local.

EXTREMOS RELATIVOS: MÁXIMOS RELATIVOS







Los puntos del dominio de la función que son mínimos o máximos relativos se llaman puntos extremos, los valores de la función en estos puntos se llamarán valores extremos.

Punto Crítico

Un punto (a,b) se llama punto critico de $f(x,y)$, si

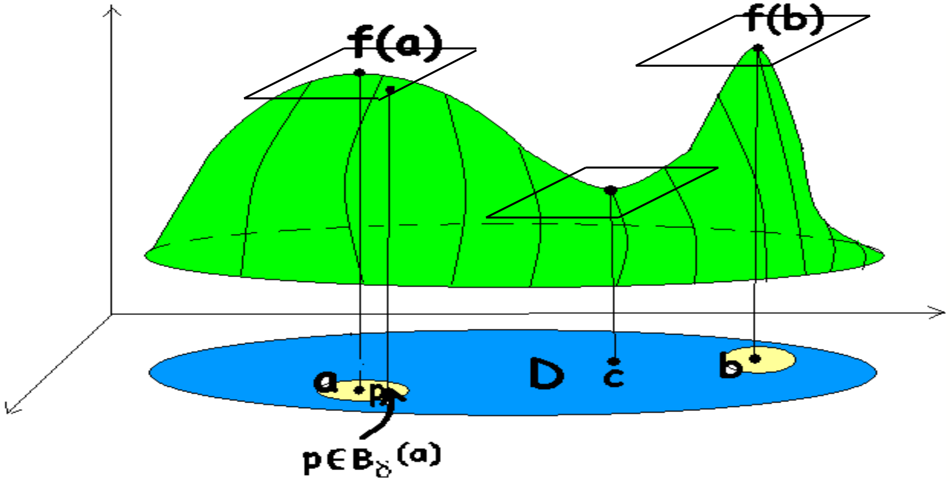
1. $(a,b) \in D$
2. $f_x(a,b) = 0$ y $f_y(a,b) = 0$

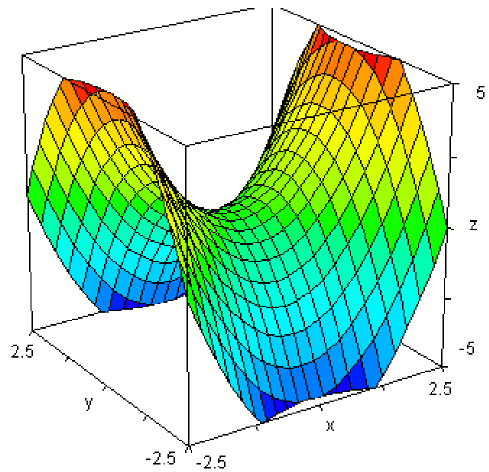
Si una función de dos variables *f* tiene un extremo local en (a, b) y las derivadas parciales de f existen en dicho punto, entonces

$$\nabla f(a,b) = 0; \text{es decir} \quad f_x(a,b) = 0 \ \text{ y } \ f_y(a,b) = 0$$

Como consecuencia, si $f(a, b)$ es un extremo relativo de f y si las derivadas parciales de f existen en dicho punto, entonces (a, b) es un punto crítico de f

CALCULO DIFERENCIAL. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES





En la figura a, b y c son puntos críticos puesto que $\nabla f(a, b) = 0$, sin embargo, a y *b* son extremos relativos pero *c* no lo es
Al punto c se llama punto de silla o punto de ensilladura y es punto crítico pero no extremo relativo

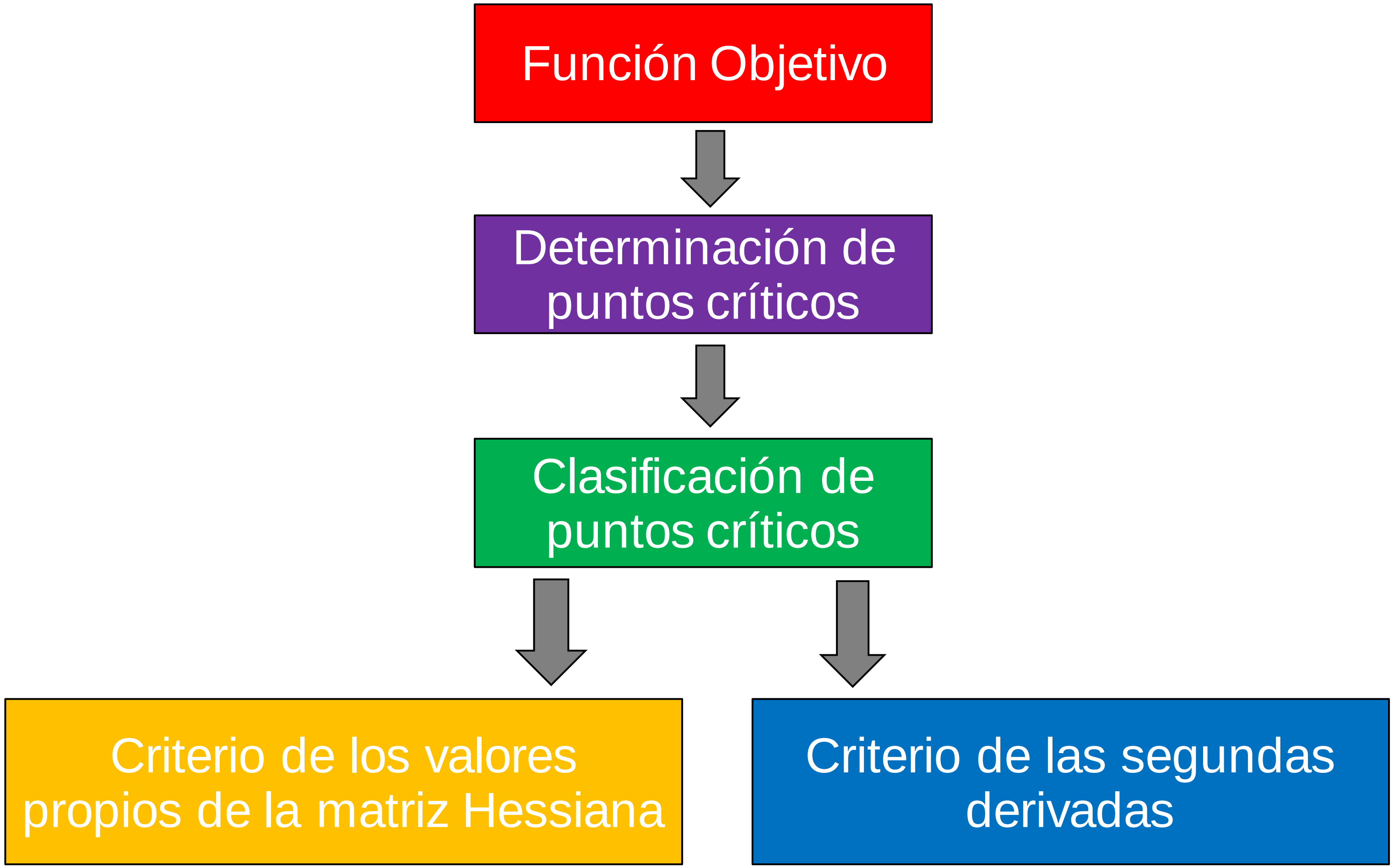
Se puede concluir que si un punto d es un punto crítico entonces, o bien es un extremo relativo o bien es un punto de silla

En funciones de dos variables, los puntos críticos pueden ser máximos, mínimos o punto de silla

¿Cómo saber cuando es cada uno?

Con el criterio de la segunda derivada o de la matriz Hessiana

Procedimiento para determinar extremos locales



Criterio de las segundas derivadas

Dada una función f, si en (a, b) sus derivadas parciales son cero. Dado el determinante de la matriz Hessiana

$$\left|H_j\right| = G = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}(a,b)\right]^2$$

Entonces

$$\text{mínimo local si } G > 0 \text{ y } f_{xx}(a,b) > 0$$

$$\text{máximo local si } G > 0 \text{ y } f_{xx}(a,b) < 0$$

$$\text{punto de silla si } G < 0$$

Si el determinante de la matriz Hessiana G es cero no se decide

Criterio de los valores propios

Dada una función f, si en (a, b) sus derivadas parciales son cero y dada su matriz Hessiana $H(a, b)$

$$|H(a,b) - \lambda I| = 0$$

1. Mínimo relativo: todos los valores propios son positivos $\lambda_i > 0$
2. Máximo relativo: todos los valores propios son negativos $\lambda_i < 0$
3. Punto de silla: tiene valores propios positivos y negativos $\lambda_i > 0$ y $\lambda_i < 0$

Si el $\lambda_i = 0$ no se tiene información

EJEMPLO

Determine los valores máximos, mínimos o puntos de ensilladura de la función

$$f(x,y) = xy - 2x - y$$

EJEMPLO

Determine los valores máximos, mínimos o puntos de ensilladura de la función

$$f(x,y) = xy - 2x - y$$

1) Calculamos sus derivadas parciales y las igualamos a cero

$$f_x = y - 2; \quad f_y = x - 1$$

$$y - 2 = 0 \to y = 2; \qquad x - 1 = 0 \to x = 1$$

EJEMPLO

Determine los valores máximos, mínimos o puntos de ensilladura de la función $f(x,y) = xy - 2x - y$

1) Calculamos sus derivadas parciales y las igualamos a cero

$$f_x = y - 2; \quad f_y = x - 1$$

$$y - 2 = 0 \rightarrow y = 2; \qquad x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

2) Calculamos sus derivadas parciales segundas

$$f_{xx} = 0; \quad f_{yy} = 0; \quad f_{xy} = 1; \quad f_{yx} = 1$$

3) Calculamos el determinante de la matriz hessiana G

$$G = f_{xx} f_{yy} - f_{xy} f_{yx} = -1 < 0$$

EJEMPLO

$$\text{mínimo local si } G>0 \text{ y } f_{xx}(a,b)>0$$
$$\text{máximo local si } G>0 \text{ y } f_{xx}(a,b)<0$$
$$\text{punto de silla si } G<0$$

En el ejemplo, como $G = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}\, f_{yx} = -1 < 0$

El punto $(1, 2)$ es un punto de silla

EJEMPLO

Determine los valores máximos, mínimos o puntos de ensilladura de $f(x,y) = e^{4y-y^2-x^2}$

EJEMPLO

Determine los valores máximos, mínimos o puntos de ensilladura de la función $f(x,y) = e^{4y-y^2-x^2}$

Calculamos sus derivadas parciales y las igualamos a cero

$$f_x = -2xe^{4y-y^2-x^2}; \;\; f_y = (4-2y)e^{4y-y^2-x^2}$$

$$-2xe^{4y-y^2-x^2} = 0; \;\; (4-2y)e^{4y-y^2-x^2} = 0$$

$$x = 0; \;\; (4-2y) = 0 \to y = 2 \quad \to\to\to (0,2)$$

EJEMPLO

Determine los valores máximos, mínimos o puntos de ensilladura de la función $f(x,y) = e^{4y-y^2-x^2}$

Calculamos sus derivadas parciales segundas

$$f_{xx}(x,y) = -2e^{4y-y^2-x^2} + 4x^2e^{4y-y^2-x^2} \rightarrow f_{xx}(0,2) = -2e^4$$

$$f_{yy}(x,y) = -2e^{4y-y^2-x^2} + (4-2y^2)\,e^{4y-y^2-x^2} \rightarrow f_{yy}(0,2) = -6e^4$$

$$f_{xy}(x,y) = -2x(4-2y)e^{4y-y^2-x^2} = f_{yx} \rightarrow f_{xy}(0,2) = f_{yx}(0,2) = 0$$

EJEMPLO

mínimo local si $G > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0$

máximo local si $G > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$

punto de silla si $G < 0$

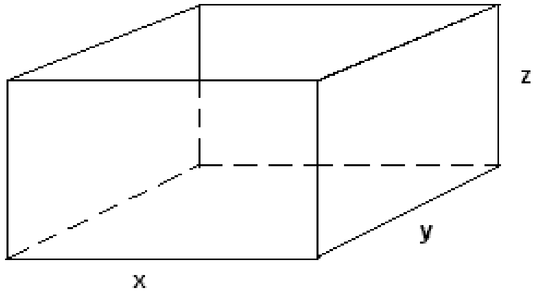
$$G = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}\, f_{yx} = 4e^8 > 0 \rightarrow f_{xx}(0{,}2) < 0$$

El punto *(0, 2)* es un máximo relativo

Optimización de funciones de dos variables

EJEMPLO

Se decide construir una caja que tiene la forma de un prisma rectangular con un volumen de 1000 cm^3. Encuentra las dimensiones x, y, z de la caja de modo que la superficie total de las 6 caras sea mínima.



Optimización de funciones de dos variables

El área total de las seis caras es $A = 2xy + 2yz + 2zx$

Y el volumen $V = x\,y\,z = 1000$

Despejando z del volumen y sustituyendo en el área se tiene

$$A(x,y) = 2xy + 2y\left(\frac{1000}{xy}\right) + 2x\left(\frac{1000}{xy}\right) = 2xy + \frac{2000}{x} + \frac{2000}{y}$$

Es una función de dos variables, se calculan las primeras derivadas parciales (gradiente) y se igualan a cero

$$f_x = 2y - \frac{2000}{x^2} = 0;\; f_y = 2x - \frac{2000}{y^2} = 0$$

Resolviendo las ecuaciones sale $x=10$ e $y=10$

Optimización de funciones de dos variables

Calculamos las derivadas parciales segundas

$$f_{xx}(x,y) = \frac{4000}{x^3};\ f_{yy}(x,y) = \frac{4000}{y^3};\ f_{xy}(x,y) = 2 = f_{yx}(x,y)$$

Calculamos el determinante de la matriz Hessiana G

$$G = f_{xx}(10,10)\ f_{yy}(10,10) - (f_{xy}(x,y))^2 = 14$$

Como $G > 0$ y $f_{xx}(10,10) > 0$ Es un mínimo relativo

Ejercicios finales

1) Si $T(x,y) = x^2y + 3xy^4$ representa la temperatura en el punto (x,y) y $x = e^t; y = \sin t$, son las ecuaciones paramétricas de una curva C. Calcula la razón de cambio de la temperatura T a lo largo de la curva

2) Determina si se cumple el teorema de Schwarz en la función $f(x,y) = x^2y^2 \sin\frac{1}{xy^2}$

3) Hallar $f_x(x,y), f_y(x,y)$ para $f(x,y) = \ln(\frac{x+y}{x-y})$

4) Encontrar la ecuación del plano tangente a la función implícita $3xy + z^2 = 4$ en el punto *(1, 1, 1)*

5) Dada la función $f(x, y, z) = 2x + 3y^2 - \sin z$, calcula el vector gradiente

6) Encontrar la ecuación del plano tangente al paraboloide $z = \frac{x^2+4y^2}{10}$ en el punto *(2, -2, 2)*

7) Determina la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 + y^3$ en la dirección del punto *Q (-1, 1)* al punto *R(3, 0)*

8) Calcular la matriz Hessiana de la función

$$f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$$

9) Una empresa fabrica y vende dos productos, llamados I y II, que cuestan de producir *30* y *20* euros por unidad, respectivamente. Los ingresos por la comercialización de x unidades de producto I e y unidades de producto II siguen la función $98x + 112y - 0.04xy - 0.1x^2 - 0.2y^2$. Encuentra los valores de x e y que maximizan las ganancias de la empresa

10) Considerar la función $f(x,y) = xy^2 + x^2y + 5x - y$. Si estamos situados en el punto $(1,2)$, en que dirección la función decrece más rápidamente