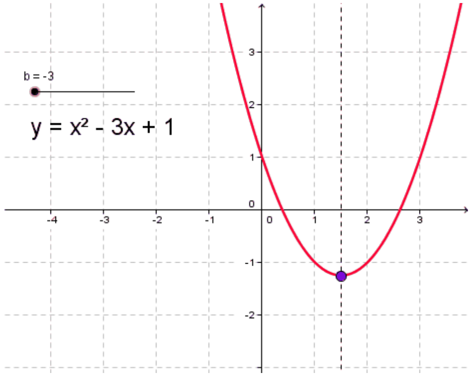
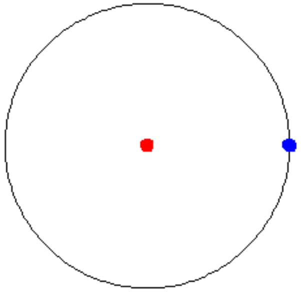
CURVAS PARAMÉTRICAS

CURVAS PARAMÉTRICAS. INTRODUCCIÓN

Hasta ahora se han utilizado dos formas de representar curvas en el plano

1. Explícita $y = f(x)$. Por ejemplo $y = ax^2 + bx + c$
2. Implícita $f(x,y)=0$. Por ejemplo $x^2 + y^2 - r^2 = 0$



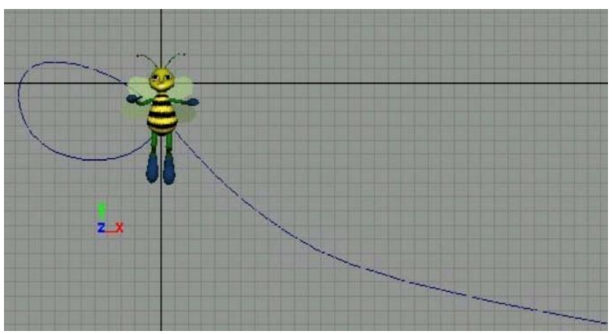


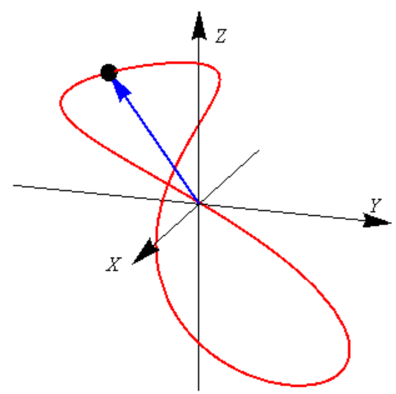
Estos enfoques son útiles si entre las variables hay una relación funcional

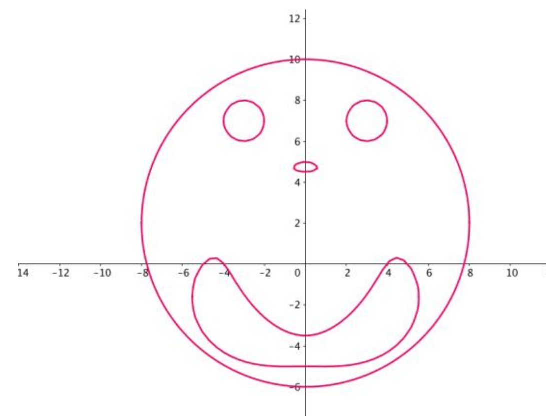
CURVAS PARAMÉTRICAS. INTRODUCCIÓN

Pero ¿cómo se pueden modelar curvas reales?

Por ejemplo curvas que rigen el movimiento de animación







Hay que utilizar un nuevo enfoque

CURVAS PARAMÉTRICAS. INTRODUCCIÓN

Consiste en expresar la relación entre x e y de la forma

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t)$$

donde $f_1(t)$, $f_2(t)$ expresan relaciones funcionales

Los valores x e y se expresan en términos de una variable independiente t que se denomina parámetro y que generalmente se elige comprendido entre *0* y *1*

CURVAS PARAMÉTRICAS. INTRODUCCIÓN

Si se tiene una serie finta de puntos $(x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n)$ y se quiere aproximar una función que pase por todos ellos

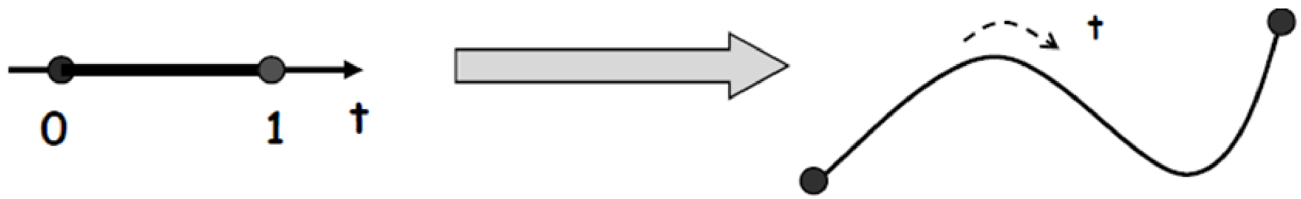
$$x = f_1(t_i); \quad y = f_2(t_i) \quad i = 0,\ldots,n$$

el parámetro t *se elige* de modo que para t_0 corresponde al primer punto (x_0,y_0) y para t_n corresponde a último punto (x_n,y_n)

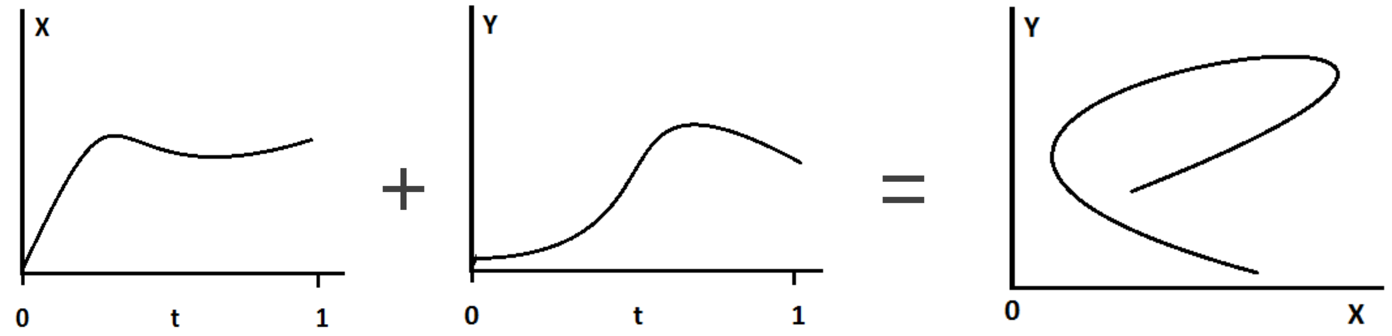
CURVAS PARAMÉTRICAS. INTRODUCCIÓN

De esta forma se tiene una aplicación $f(t) \rightarrow (x, y)$

tal que



Se puede ver como dos funciones combinadas



CURVAS PARAMÉTRICAS. INTRODUCCIÓN

Se suelen utilizar funciones que son polinomios en un parámetro t

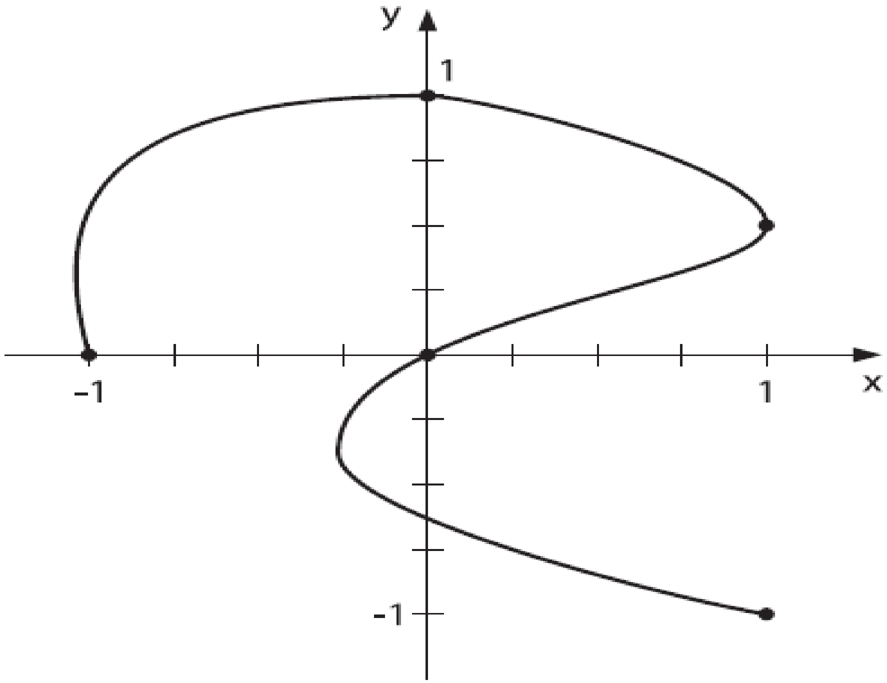
Como principales ventajas

- **Eficiencia en el cómputo**
- Involucra operaciones elementales como sumas y multiplicaciones
- Fáciles de derivar e integrar
- Se puede aproximar cualquier función con tanta precisa como se quiera (Teorema de Aproximación)
- Ofrece control local utilizando funciones definidas a trozos

Se asume que el parámetro t varía entre *0* y *1*

CURVAS PARAMÉTRICAS. EJEMPLO

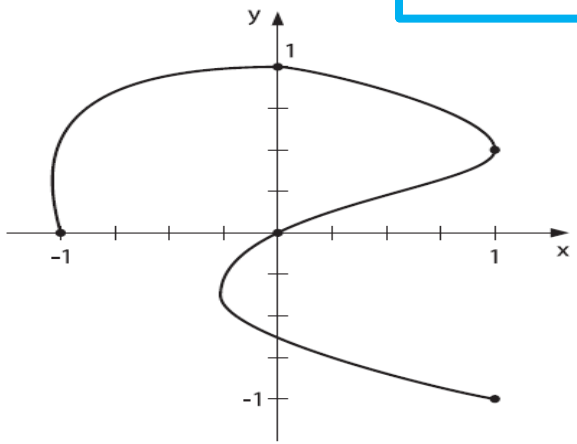
Se desea construir un par de polinomios de Lagrange para aproximar la siguiente curva, usando los puntos de muestreo indicados en la misma



CURVAS PARAMÉTRICAS. EJEMPLO

Se eligen los puntos t_i espaciados de forma equidistante en [*0*, *1*], obteniendo los siguientes datos

i	0	1	2	3	4
t_i	0	0.25	0.5	0.75	1
x_i	-1	0	1	0	1
y_i	0	1	0.5	0	-1



CURVAS PARAMÉTRICAS. EJEMPLO

Con (*0, -1*), (*0.25, 0*), (*0.5, 1*), (*0.75, 0*) y (*1, 1*) para t y x, se obtiene el polinomio de Lagrange

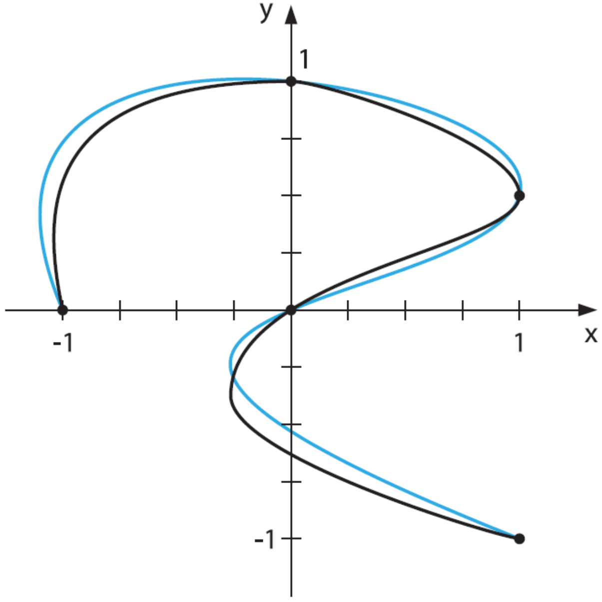
$$x(t) = \left(\left(\left(64t - \frac{352}{3}\right)t + 60\right)t - \frac{14}{3}\right)t - 1$$

Con (*0, 0*), (*0.25, 1*), (*0.5, 0.5*), (*0.75, 0*) y (*1, -1*) para t e y se obtiene el polinomio de Lagrange

$$y(t) = \left(\left(\left(-\frac{64}{3}t + 48\right)t - \frac{116}{3}\right) + 11\right)t.$$

CURVAS PARAMÉTRICAS. INTRODUCCIÓN

Representando este sistema paramétrico, se obtiene la curva



A pesar de pasar por los puntos de muestreo, es una aproximación relativamente imprecisa

OBJETIVO DEL TEMA

Objetivo

Construir curvas de una manera fácil y exacta

¿Cómo?

CURVAS DE BEZIER

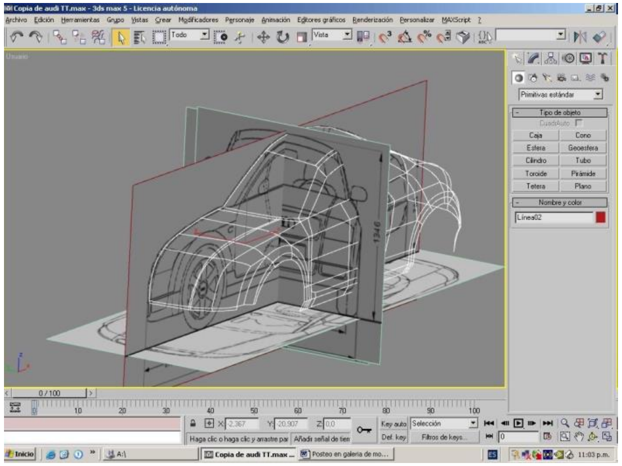
Las curvas de Bézier son un sistema que se desarrollo en 1960, para el trazado de dibujos técnicos, en el diseño aeronáutico y de automóviles

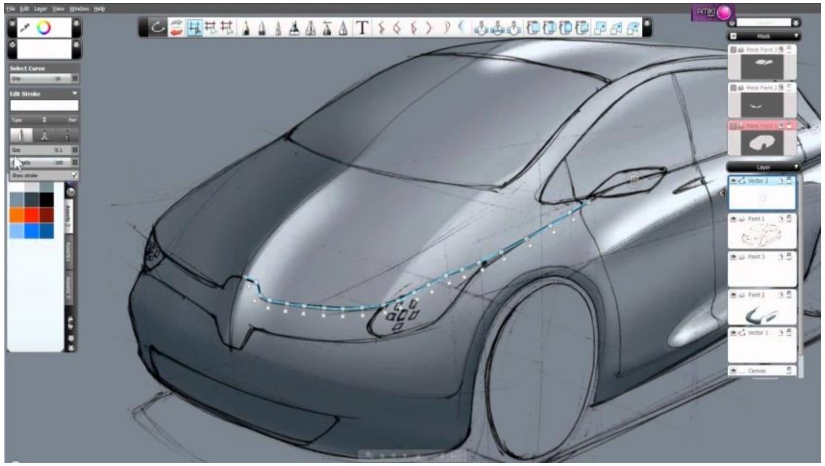
Anteriormente las curvas se tenían que trazar por medio de reglas francesas

CURVAS DE BEZIER

En 1959, De Casteljau (Citroën), idea una formulación matemática para diseñar las formas curvas de los coches

Posteriormente (1966), Bézier (Renault) llega a las mismas conclusiones, pero partiendo de otro desarrollo matemático



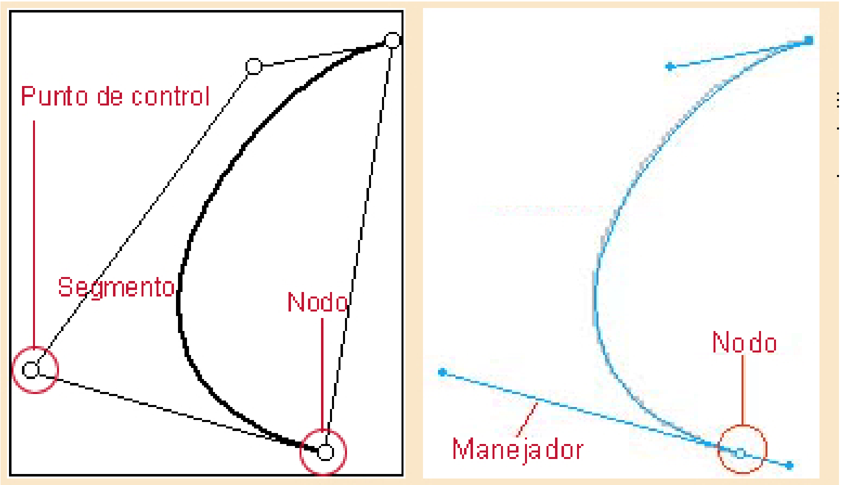


CURVAS DE BEZIER

Se definen por una serie de **puntos de control**

La curva siempre empieza en el primer punto de control y termina en el último de ellos

Los puntos intermedios “atraen” hacia si a la curva



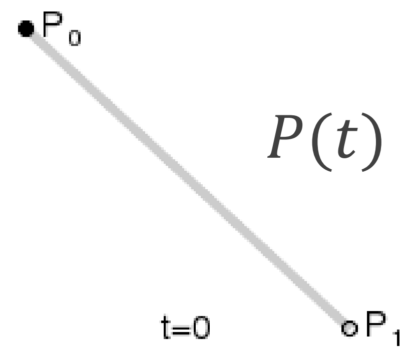
Son curvas paramétricas en las cuales el parámetro *t* varía entre *0* y *1*

CURVAS DE BEZIER LINEALES

Con sólo dos puntos de control P_0 y P_1, las curvas son líneas rectas

La curva (recta) va de P_0 a P_1 y se puede recorrer variando el parámetro t *ϵ [0,1]*

$P(t) = (1-t)P_0 + tP_1$ con $t \in [0,1]$



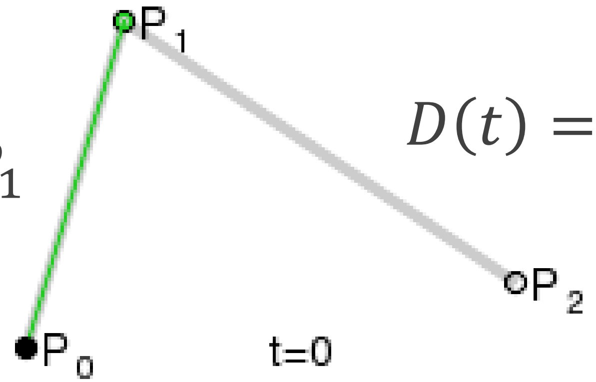
CURVAS DE BEZIER CUADRÁTICAS

Con tres puntos de control P_0, P_1 y P_2 se construyen dos curvas lineales entre $P_0 \rightarrow P_1$ y $P_1 \rightarrow P_2$

La tercera curva de Bézier se construye recursivamente de las dos anteriores y da lugar a un polinomio de segundo grado

El parámetro *t* recorre esta tercera curva de P_0 a P_2 con un "efecto gravitatorio" ejercido por P_1

$$C(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$



$$D(t) = (1-t)P_1 + tP_2$$

$$P(t) = (1-t)C(t) + tD(t) = (1-t)^2P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2P_2$$

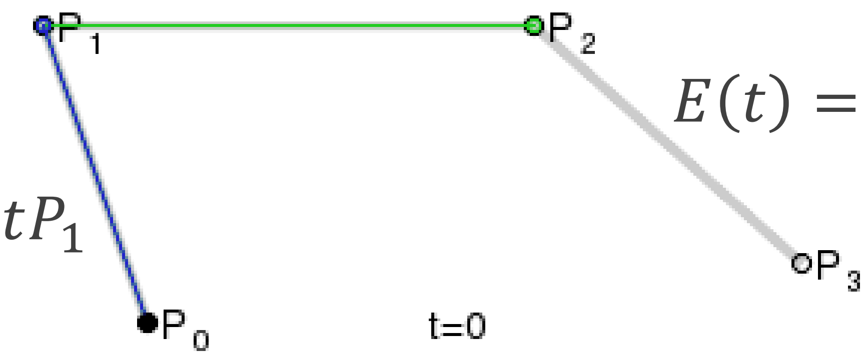
CURVAS DE BEZIER CÚBICAS

Con cuatro puntos de control P_0, P_1, P_2 y P_3 se construyen curvas cúbicas (las más utilizadas)

$$D(t) = (1-t)P_1 + tP_2$$

$$E(t) = (1-t)P_2 + tP_3$$

$$C(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$

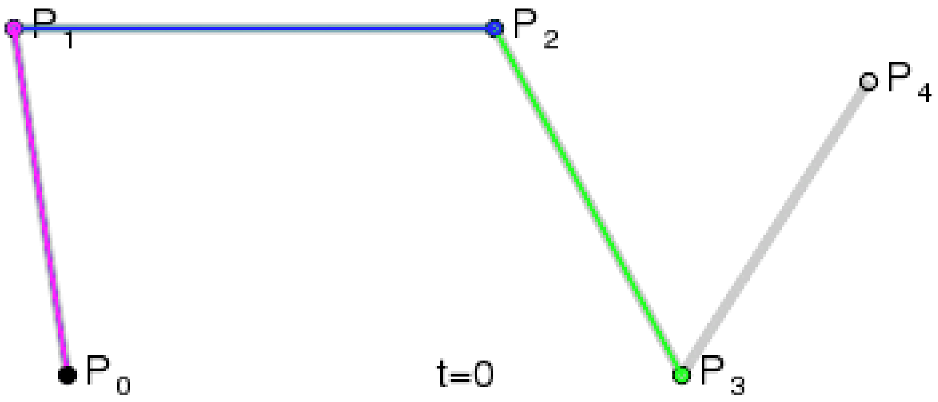


$$F(t) = (1-t)C(t) + tD(t) \qquad G(t) = (1-t)D(t) + tE(t)$$

$$P(t) = (1-t)F(t) + tG(t) = P_0 + 3(1-t)^2tP_1 + 3(1-t)t^2P_2 + t^3$$

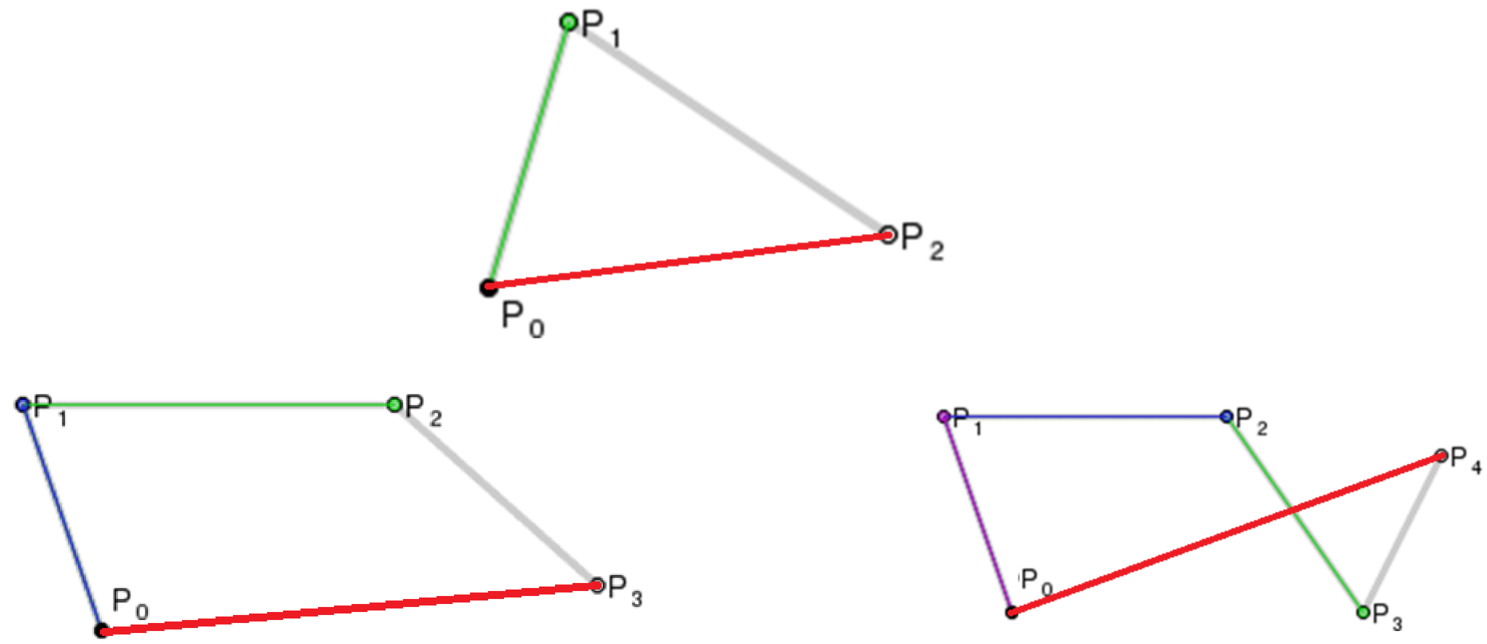
CURVAS DE BEZIER DE GRADO SUPERIOR

De esta forma se pueden generar curvas de cualquier grado



POLIGONOS DE BEZIER

Los puntos de control para una curva de Bézier forman lo que se llama Polígono de Bézier



CURVAS DE BEZIER. FORMALIZACIÓN

Forma explícita. Polinomios de Bernstein

Algoritmo de De Casteljau

Forma matricial. Curvas de Bezier cúbicas

CURVAS DE BEZIER. POLINOMIOS DE BERNSTEIN

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Se parte de la siguiente expresión

$$(t + (1 - t))^{n}$$

si se desarrolla según el binomio de Newton

$$(t + (1 - t))^{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^{i} (1 - t)^{n-1} = 1$$

Se denominan polinomios de Bernstein de grado *n* a cada uno de los términos de sumatorio

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^{i} (1 - t)^{n-1} \quad \forall\, i = 0, \dots, n$$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CURVAS DE BEZIER. POLINOMIOS DE BERNSTEIN. EJEMPLO

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-1}$$

Polinomios de Bernstein de grado *1*

$$B_0^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^0 (1-t)^{1-0} = \frac{1!}{0!1!}(1-t) = (1-t)$$

$$B_1^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^1 (1-t)^{1-1} = \frac{1!}{1!0!} t \qquad = t$$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CURVAS DE BEZIER. POLINOMIOS DE BERNSTEIN. EJEMPLO

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-1}$$

Polinomios de Bernstein de grado *2*

$$B_0^2(t) = \binom{2}{0} t^0 (1-t)^{2-0} = \frac{2!}{0!2!}(1-t)^2 = (1-t)^2$$

$$B_1^2(t) = \binom{2}{1} t^1 (1-t)^{2-1} = \frac{2!}{1!1!} t(1-t) = 2t(1-t)$$

$$B_2^2(t) = \binom{2}{2} t^2 (1-t)^{2-2} = \frac{2!}{2!0!} t^2 \qquad = t^2$$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CURVAS DE BEZIER. POLINOMIOS DE BERNSTEIN. EJEMPLO

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-1}$$

Polinomios de Bernstein de grado 3

$$B_0^3(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} t^0 (1-t)^{3-0} = \frac{3!}{0!3!}(1-t)^3 = (1-t)^3$$

$$B_1^3(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t^1 (1-t)^{3-1} = \frac{3!}{1!2!} t(1-t)^2 = 3t(1-t)^2$$

$$B_2^3(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t^2 (1-t)^{3-2} = \frac{3!}{2!1!} t^2(1-t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_3^3(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} t^3 (1-t)^{3-3} = \frac{3!}{3!0!} t^3 = t^3$$

CURVAS DE BEZIER. POLINOMIOS DE BERNSTEIN. PROPIEDADES

La suma de todos los polinomios de Bernstein de un mismo grado para cualquier valor de *t* entre *0* y *1* es por definición *1*

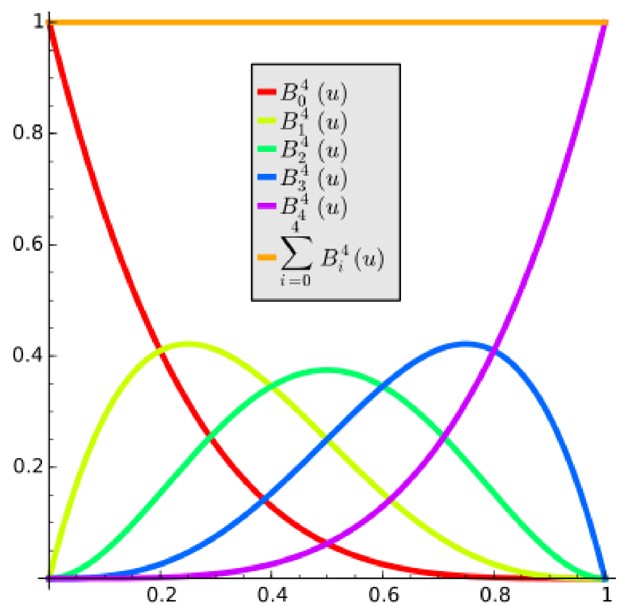
	Bernstein de grado 1		
t	**1-t**	**t**	**Suma**
0	1	0	1
0,2	0,8	0,2	1
0,4	0,6	0,4	1
0,6	0,4	0,6	1
0,8	0,2	0,8	1
1	0	1	1

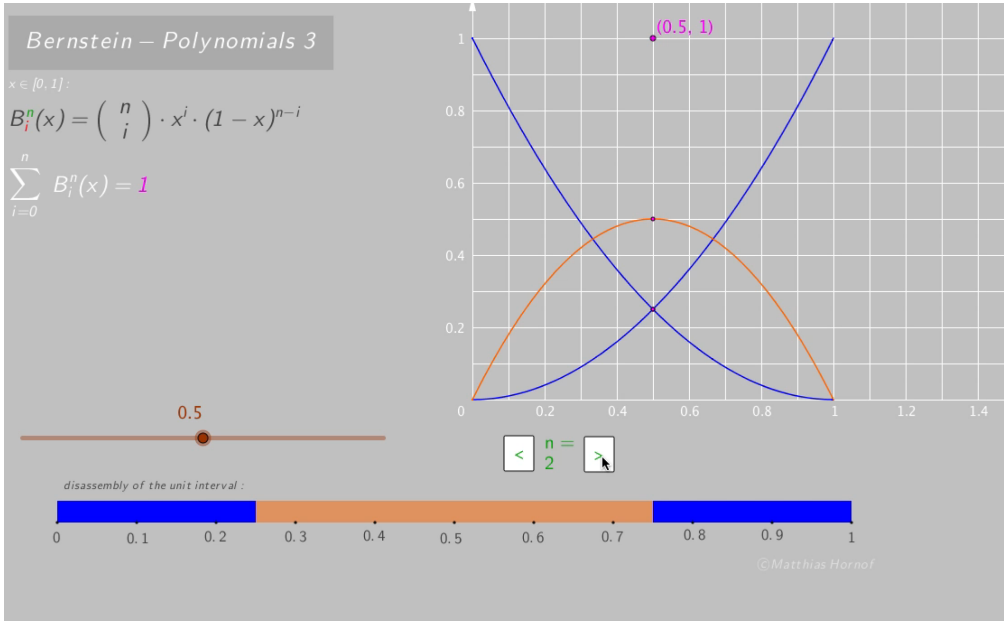
	Bernstein de grado 2			
t	**$(1-t)^2$**	**$2t(1-t)$**	**t^2**	**Suma**
0	1	0	0	1
0,2	0,64	0,32	0,04	1
0,4	0,36	0,48	0,16	1
0,6	0,16	0,48	0,36	1
0,8	0,04	0,32	0,64	1
1	0	0	1	1

	Bernstein de grado 3				
t	**$(1-t)^3$**	**$3t(1-t)^2$**	**$3t^2(1-t)$**	**t^3**	**suma**
0	1	0	0	0	1
0,2	0,512	0,384	0,096	0,008	1
0,4	0,216	0,432	0,288	0,064	1
0,6	0,064	0,288	0,432	0,216	1
0,8	0,008	0,096	0,384	0,512	1
1	0	0	0	1	1

CURVAS DE BEZIER. POLINOMIOS DE BERNSTEIN. PROPIEDADES

La suma de todos los polinomios de Bernstein de un mismo grado para cualquier valor de *t* entre *0* y *1* es por definición *1*





CURVAS DE BEZIER. POLINOMIOS DE BERNSTEIN. PROPIEDADES

Además

Son linealmente independientes. Forma una base para los polinomios de grado *n*

Son simétricos $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$

Sus únicas raíces son *0* y *1*

Son positivos en todo el intervalo (*0*,*1*)

Satisfacen la relación de recurrencia

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

$$B_i^n(t) = 0 \text{ si } i < 0 \text{ o } i > n$$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CURVAS DE BEZIER CON POLINOMIOS DE BERNSTEIN

Como la suma de los polinomios siempre es *1* y sus valores son positivos en el intervalo (*1,0*), al evaluar cada polinomio de Bernstein para un valor de t, el resultado es un escalar, que se aplica como peso a cada punto de control

Es decir, se puede utiliza para ponderar la participación de los puntos de control

	Bernstein de grado 1		**Bernstein de grado 2**			**Bernstein de grado 3**			
t	**1-t**	**t**	**$(1-t)^2$**	**$2t(1-t)$**	**t^2**	**$(1-t)^3$**	**$3t(1-t)^2$**	**$3t^2(1-t)$**	**t^3**
0	100%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	0%
0,2	80%	20%	64%	32%	4%	51%	38%	10%	1%
0,4	60%	40%	36%	48%	16%	22%	43%	29%	6%
0,6	40%	60%	16%	48%	36%	6%	29%	43%	22%
0,8	20%	80%	4%	32%	64%	1%	10%	38%	51%
1	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	100%
	P_0	**P_1**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**

CURVAS DE BEZIER CON POLINOMIOS DE BERNSTEIN

$$\boxed{b(t) = \big(x(t), y(t)\big) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \cdot P_i}$$

Donde los P_i son los puntos de control o vértices del polígono de Bézier

CURVAS DE BEZIER CON POLINOMIOS DE BERNSTEIN. EJEMPLO

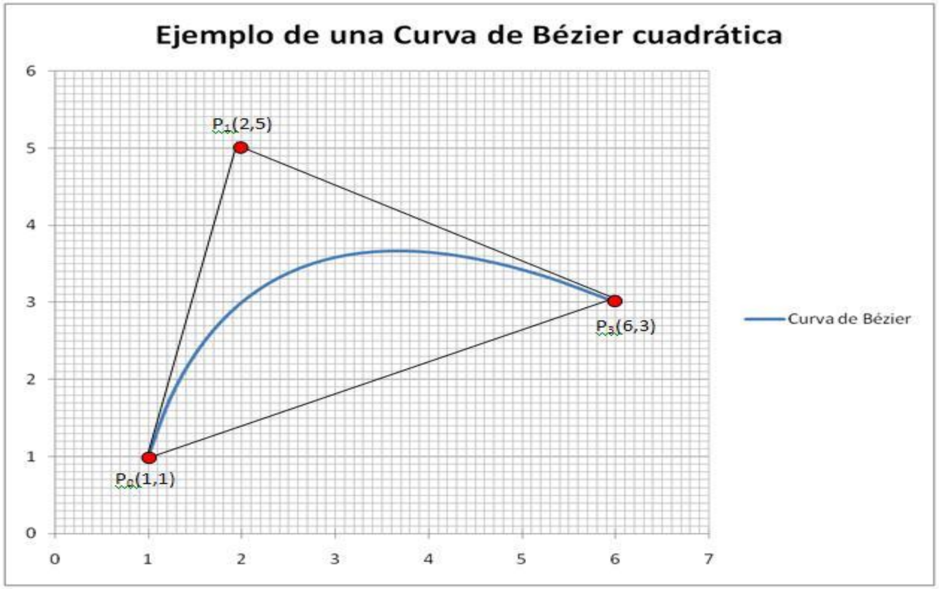
Para los puntos de control *P_0=(1,1), P_1=(2,5) y P_2=(6,3)*

$$(x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{2} B_i^2(t) P_i = B_0^2(t)P_0 + B_1^2(t)P_1 + B_2^2(t)P_2$$

$$(x(t), y(t)) = (1-t)^2(1,1) + (2t-2t^2)(2,5) + t^2(6,3)$$

$$x(t) = (3t^2 + 2t + 1)$$

$$y(t) = (-6t^2 + 8t + 1)$$



CURVAS DE BEZIER. RECURSIVIDAD

Aprovechando la propiedad de recursividad que tenían los polinomios de Bernstein se puede deducir otra formulación para las curvas de Bezier llamada **Formulación de De Casteljau**

La curva de Bezier de grado *n* es $b(t) = b_n^i(t)$

donde

$$\boxed{\begin{aligned} b_0^i(t) &= P_i \\ b_k^i(t) &= (1-t)b_{k-1}^i(t) + t b_{k-1}^{i+1}(t) \end{aligned}}$$

CURVAS DE BEZIER. FORMULACIÓN DE DECASTELJAU

$$b_0^0(t) = P_0 \xrightarrow{(1-t)} b_1^0(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$

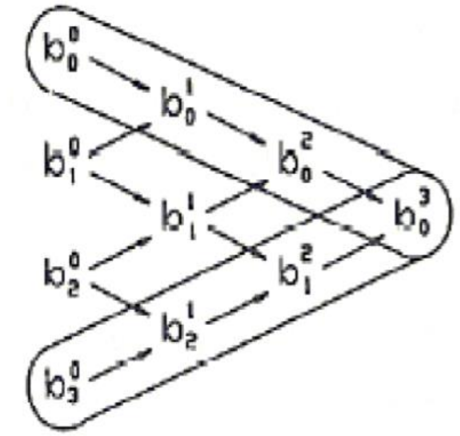
$$b_0^1(t) = P_1 \xrightarrow{t} b_1^0(t), \qquad b_0^1(t) = P_1 \xrightarrow{(1-t)} b_1^1(t)$$

$$b_0^2(t) = P_2 \xrightarrow{t} b_1^1(t) = (1-t)P_1 + tP_2$$

$$b_1^0(t) \xrightarrow{(1-t)} b_2^0(t), \qquad b_1^1(t) \xrightarrow{t} b_2^0(t)$$

$$b_2^0(t) = (1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] + t[(1-t)P_1 + tP_2]$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_0^i(t) &= P_i \\ b_k^i(t) &= (1-t)b_{k-1}^i(t) + tb_{k-1}^{i+1}(t) \end{aligned}}$$



CURVAS DE BEZIER. FORMULACIÓN DE DE CASTELJAU

$$
\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[dr, "(1-t)"] & & \\
& (1-t)P_0 + tP_1 \arrow[dr, "(1-t)"] & \\
P_1 \arrow[ur, "t"] \arrow[dr, "(1-t)"] & & (1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] + t[(1-t)P_1 + tP_2] \\
& (1-t)P_1 + tP_2 \arrow[ur, "t"] & \\
P_2 \arrow[ur, "t"] & &
\end{tikzcd}
$$

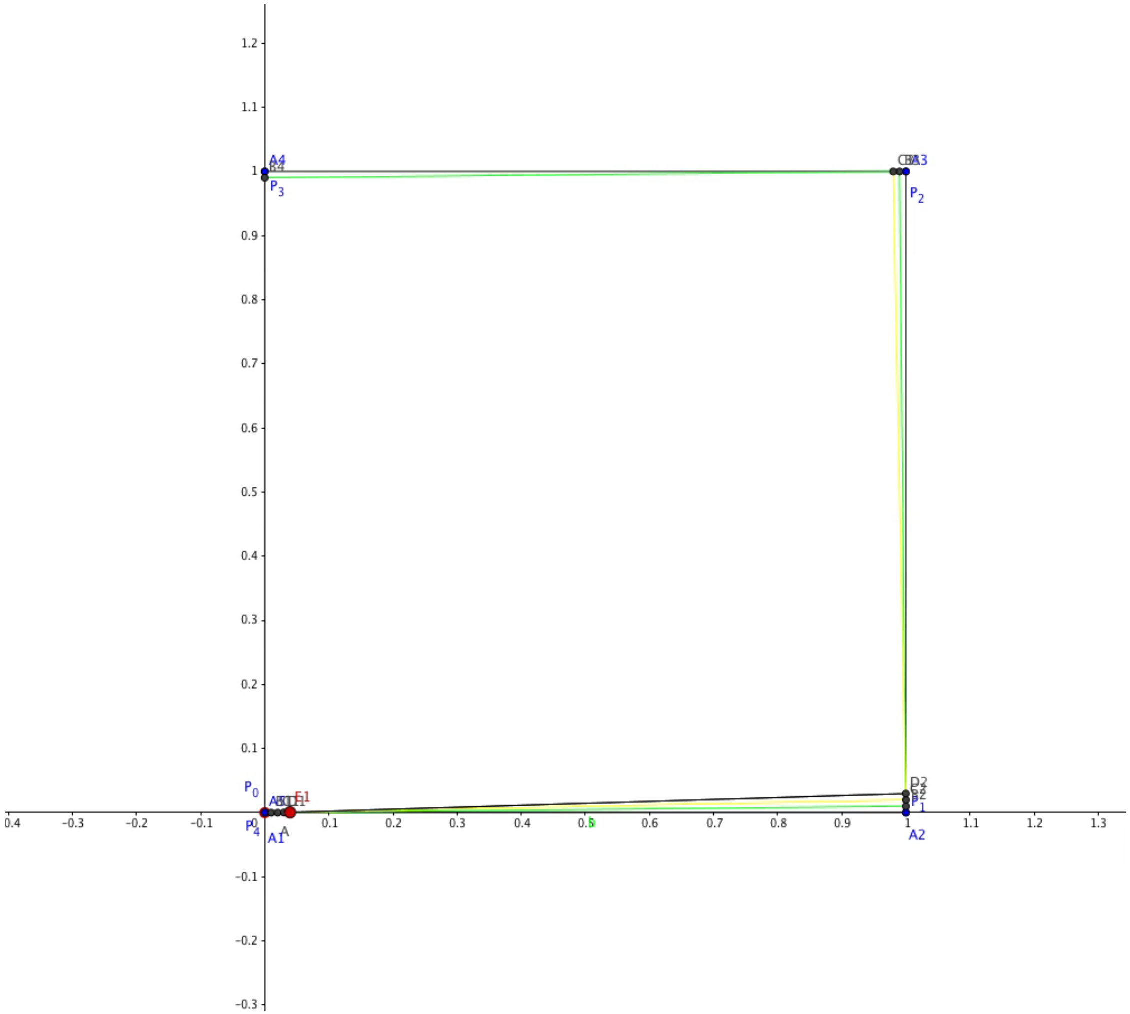
$$b_k^i(t) = (1-t)b_{k-1}^i(t) + tb_{k-1}^{i+1}(t)$$

$$b_0^i(t) = P_i$$

Primera columna: Puntos de control
Segunda columna: Curvas de Bézier lineales
Tercera columna: Curvas de Bézier cuadráticas
Cuarta columna: Curvas de Bézier cúbicas

Forma recursiva de construir las curvas

CURVAS DE BEZIER. FORMULACIÓN DE DE CASTELJAU



CURVAS DE BEZIER. FORMA MATRICIAL DE LAS CURVAS DE BEZIER CÚBICAS

Las curvas de Bézier cúbicas son las más utilizadas debido a su flexibilidad y grado no muy alto

Obtener estas curvas se reduce a realizar productos matriciales

$$b(t) = P_0(1-t)^3 + P_1[3t(1-t)^2] + P_2[3t^2(1-t)] + P_3t^3$$

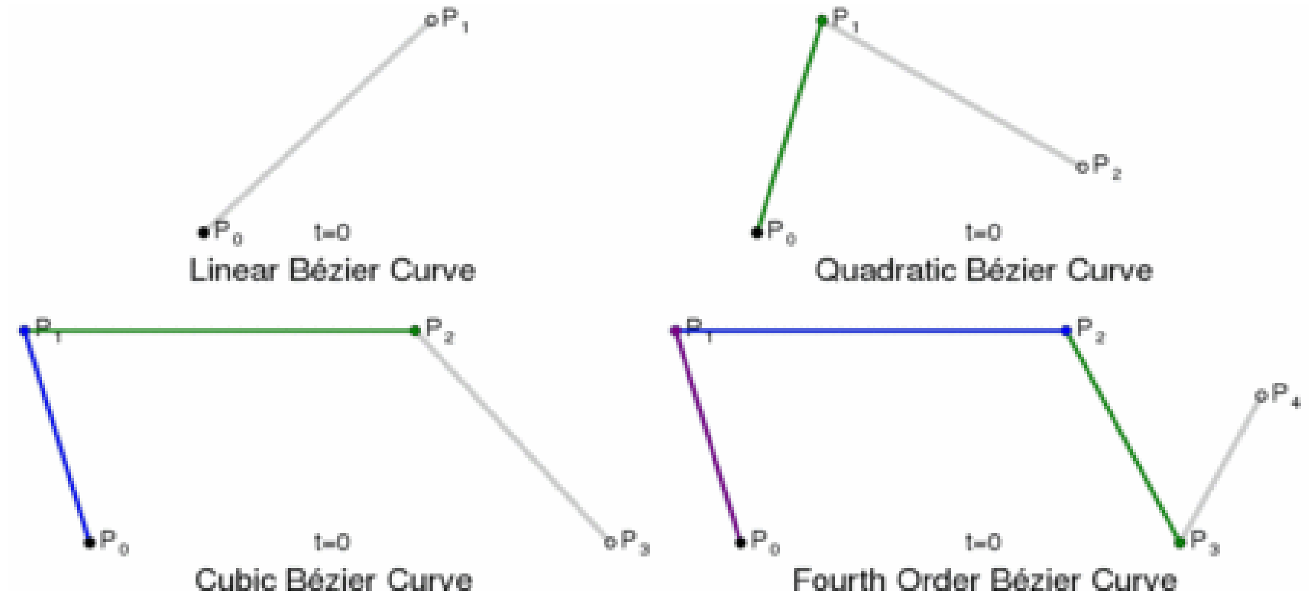
$$b(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CURVAS DE BEZIER. PROPIEDADES

$$b(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$$

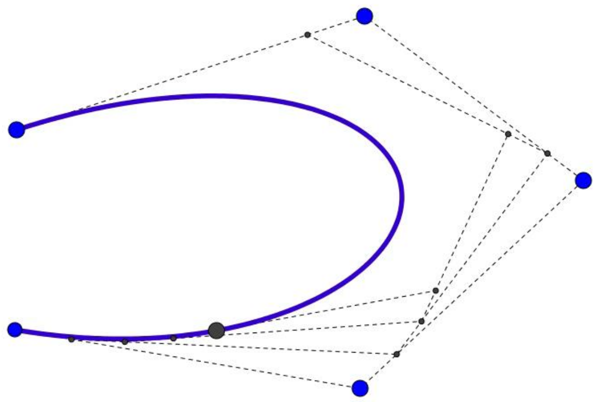
1. El grado de una curva de Bézier definida por *n+1* puntos de control es *n*



CURVAS DE BEZIER. PROPIEDADES

$$b(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$$

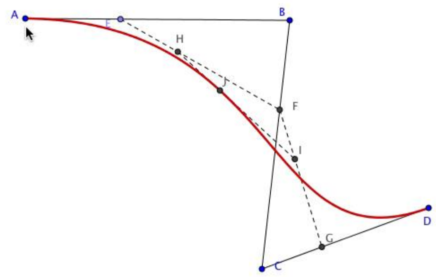
2. La curva de Bézier pasa por el primer y el último punto de control



CURVAS DE BEZIER. PROPIEDADES

$$b(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$$

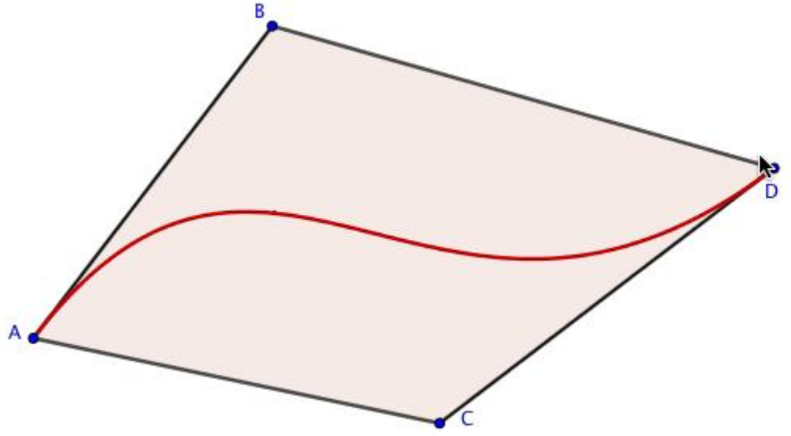
3. Las curvas de Bézier son tangentes al primer y último lado del polígono de Bezier



CURVAS DE BEZIER. PROPIEDADES

$$b(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$$

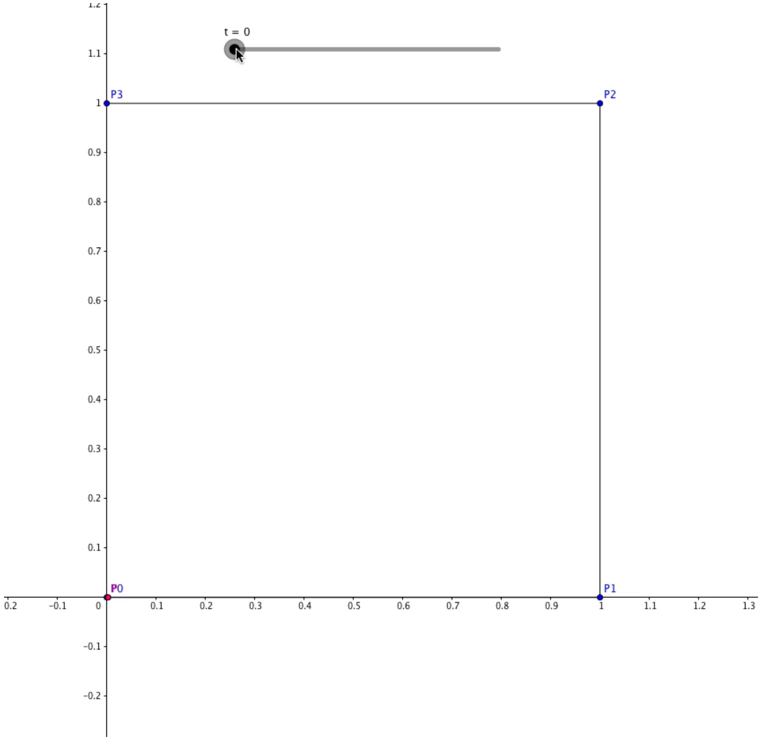
4. La curva no escapa de la envolvente convexa



CURVAS DE BEZIER. PROPIEDADES

$$b(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$$

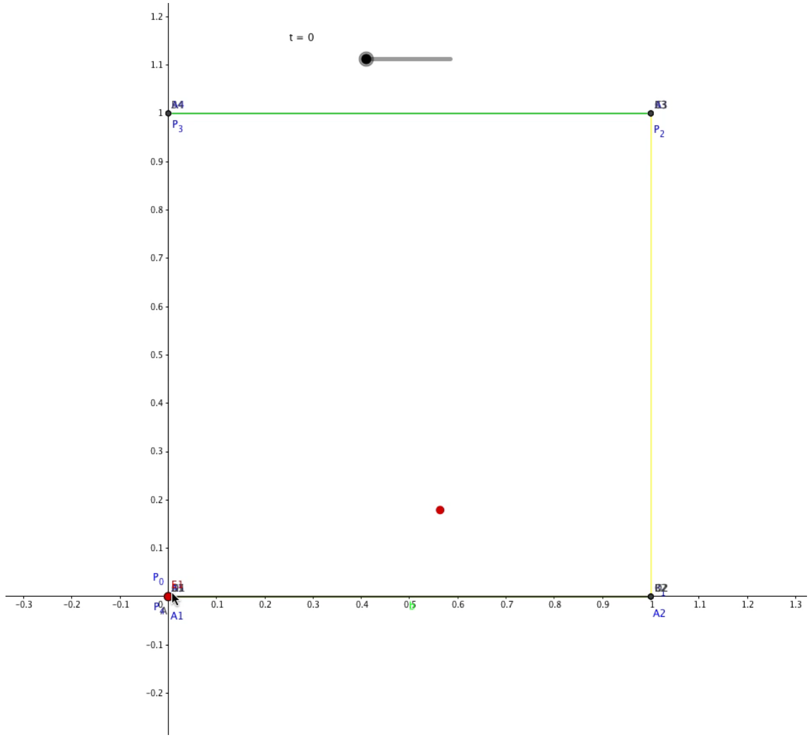
5. Si se mueven los puntos de control, la curva cambia



CURVAS DE BEZIER. PROPIEDADES

$$b(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$$

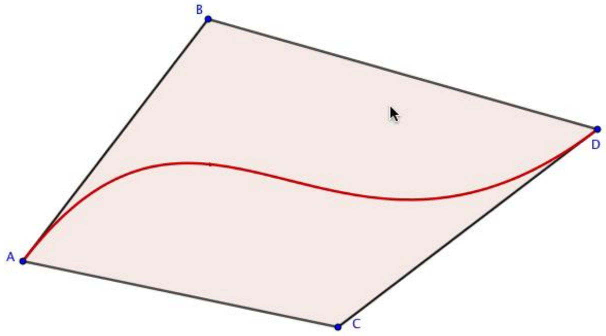
6. Múltiples puntos de control en una misma posición dan más peso a esa posición



CURVAS DE BEZIER. PROPIEDADES

$$b(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$$

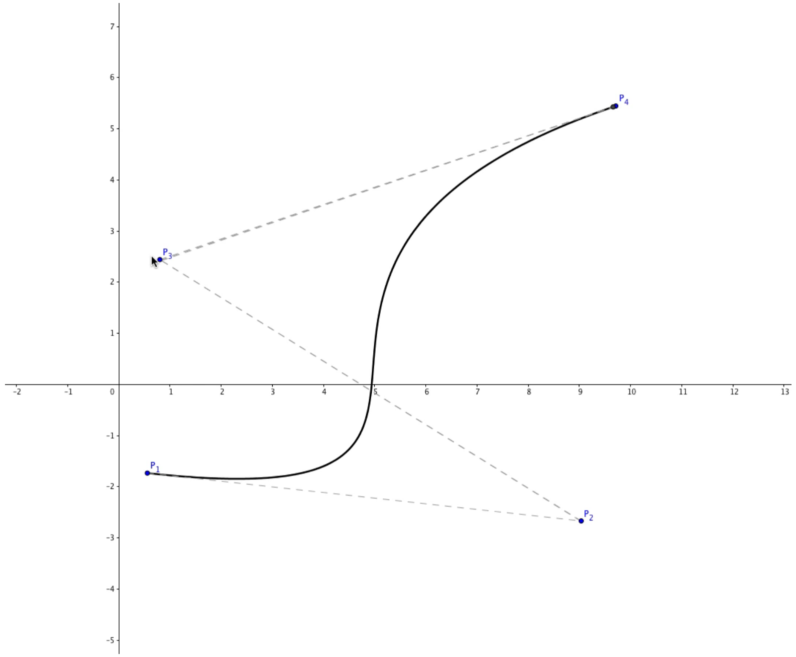
7. Las curvas cerradas se obtienen especificando el primer y el último punto de control en la misma posición



CURVAS DE BEZIER. PROPIEDADES

$$b(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$$

8. Tienen un control global, es decir el desplazamiento de un solo punto de control modifica a toda la curva

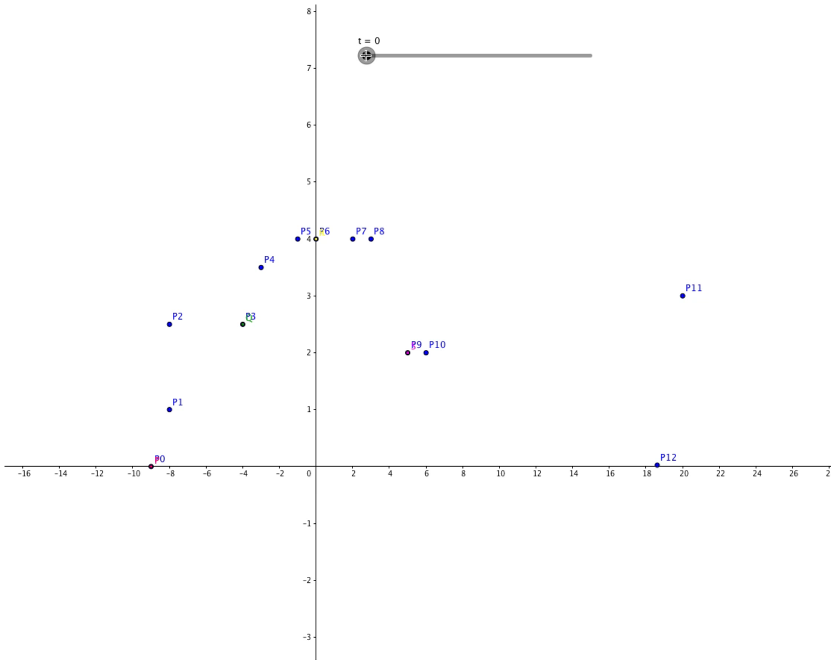


Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CURVAS DE BEZIER. PROPIEDADES

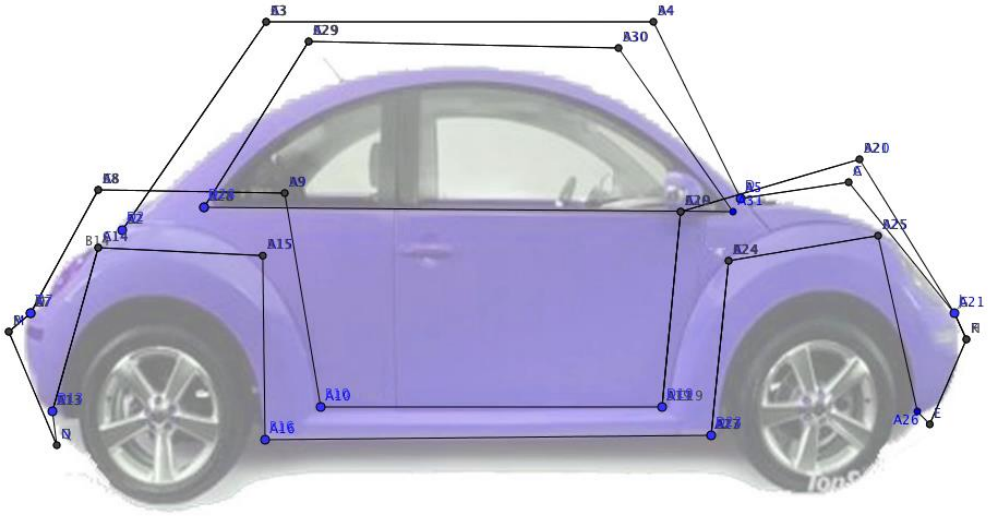
$$b(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$$

9. Las curvas complicadas (muchos puntos de control) se generan con la concatenación de varias curvas de grado menor



CURVAS DE BEZIER A TROZOS

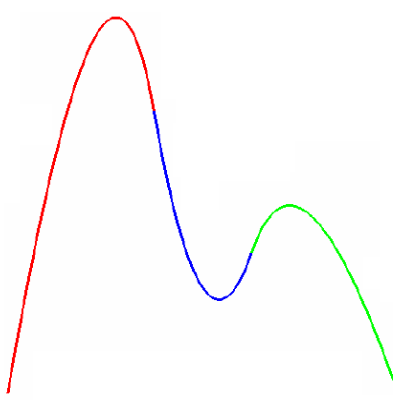
Es fundamental controlar las uniones de los trozos

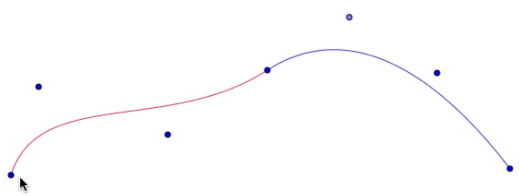


CURVAS DE BEZIER. PROPIEDADES

$$b(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$$

10. Las curvas de Bezier Cúbicas dan una flexibilidad razonable evitando el incremento de cálculo producido con polinomios de grado alto

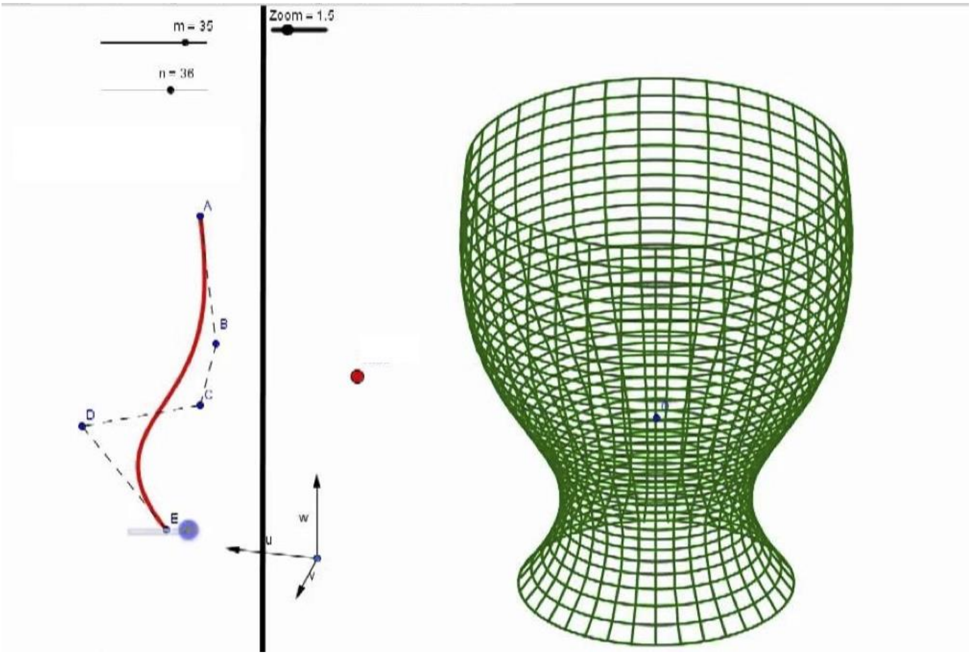


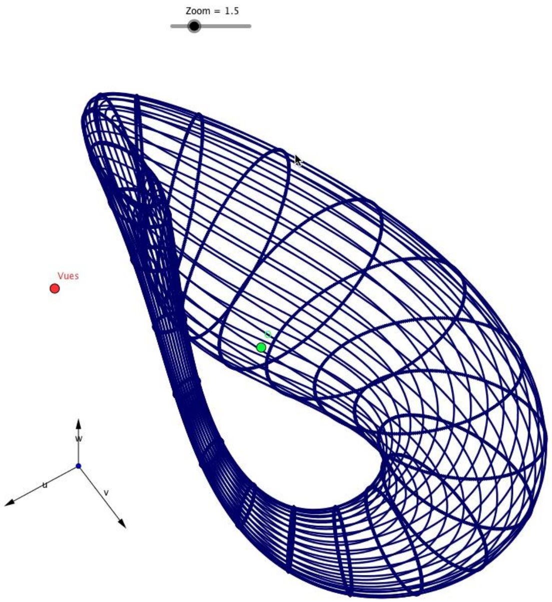


CURVAS DE BEZIER. PROPIEDADES

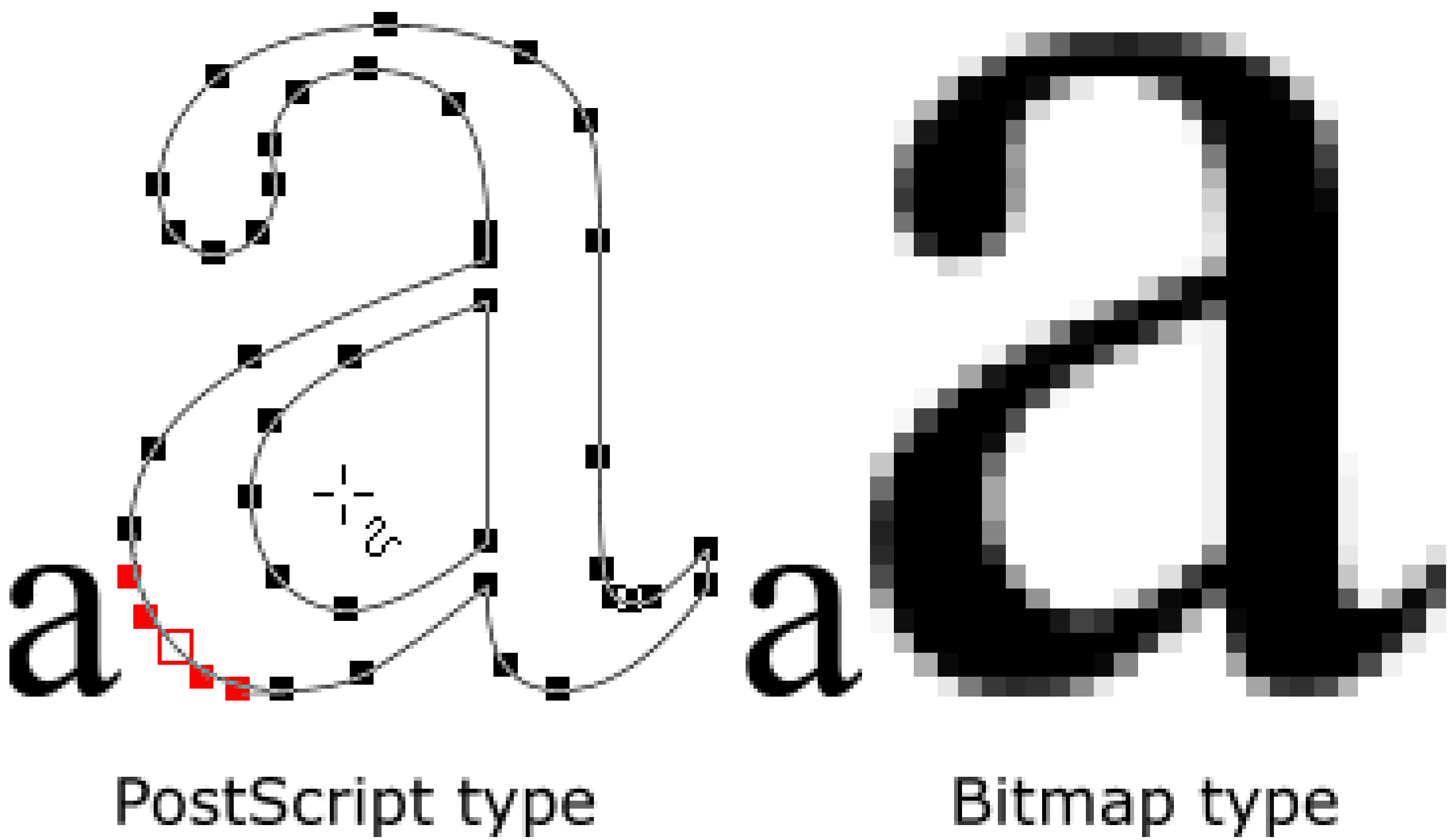
$$b(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$$

11. Se pueden crear superficies 3D a partir de curvas de Bezier



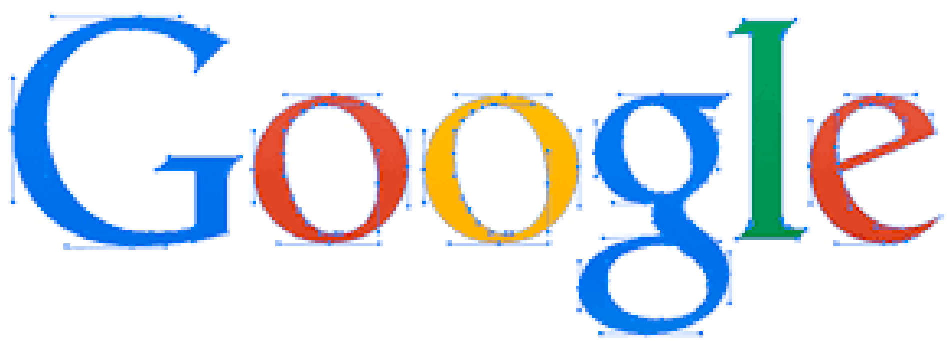


CURVAS DE BEZIER. USOS

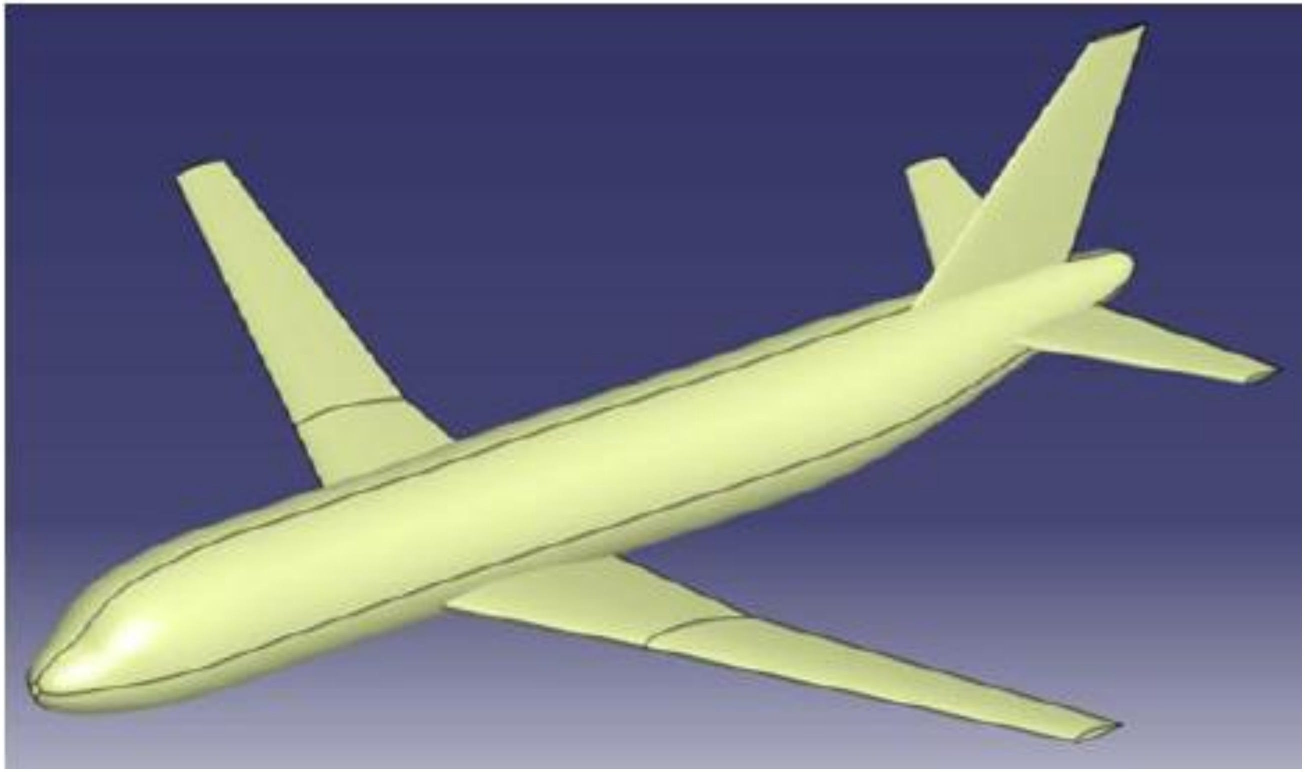


Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CURVAS DE BEZIER. USOS

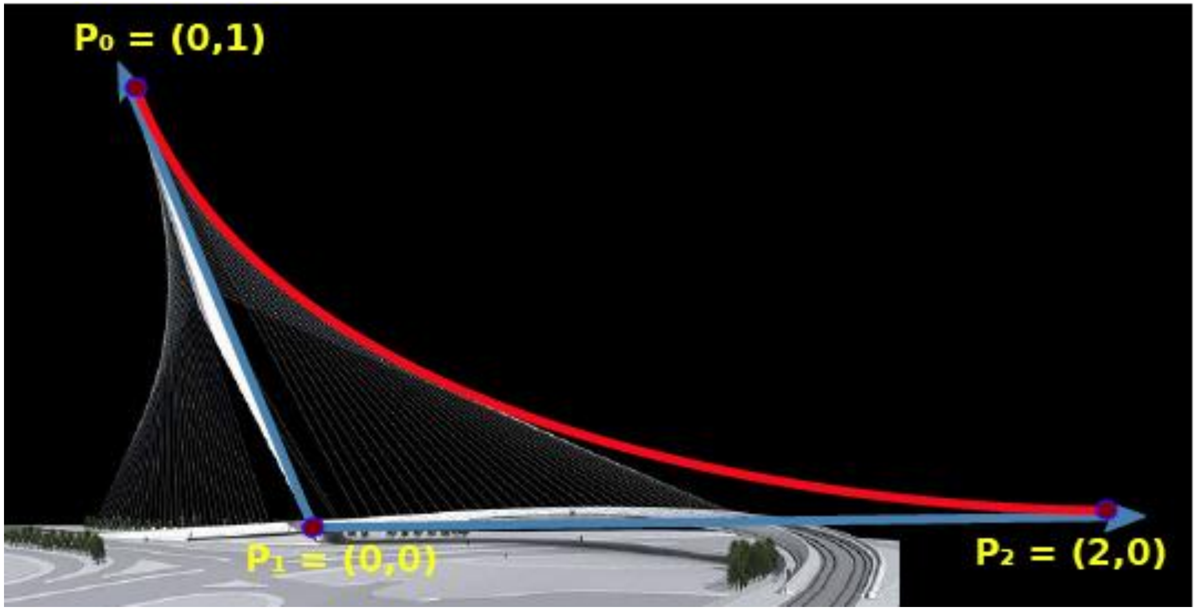


CURVAS DE BEZIER. USOS

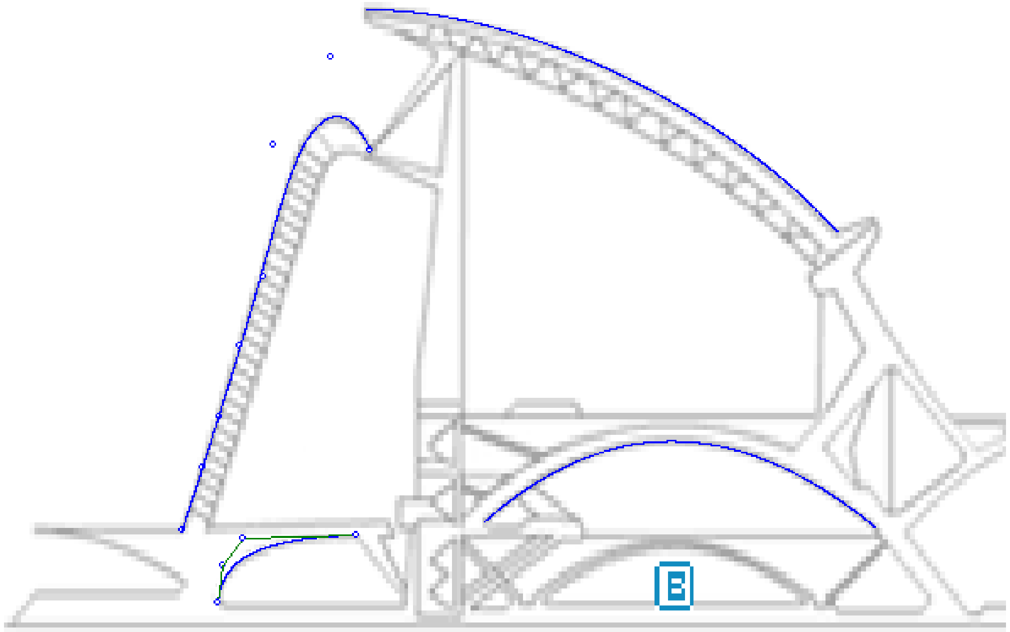


CURVAS DE BEZIER. USOS

CURVAS DE BEZIER. USOS



CURVAS DE BEZIER. USOS



SUPERFICIES DE BEZIER

Las superficies Bezier son una extensión directa de las curvas de Bezier

En este caso, la superficie está parametrizada por dos variables, *s* y *t* con valores en el intervalo [*0, 1*]

$$f(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$

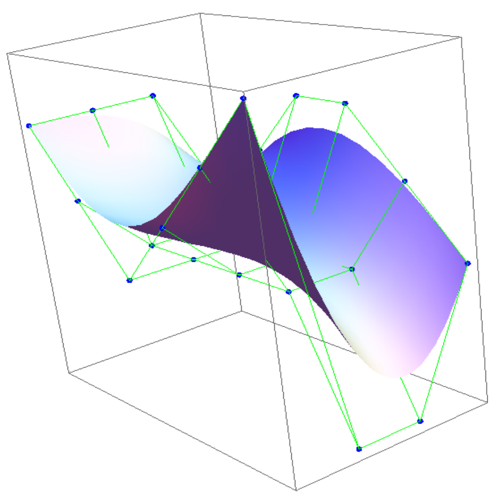
Es un tipo de superficie paramétrica que tienen una topología rectangular y que, a veces, se denominan parches

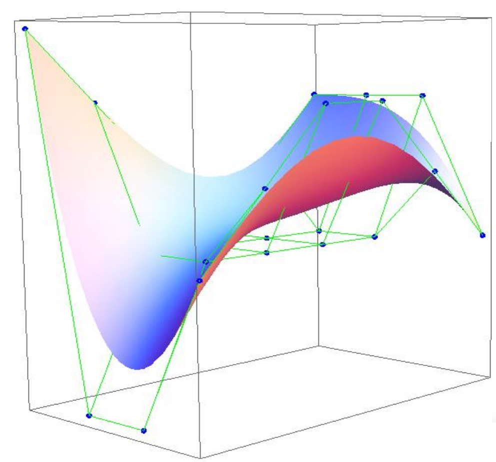
SUPERFICIES DE BEZIER. DEFINICIÓN

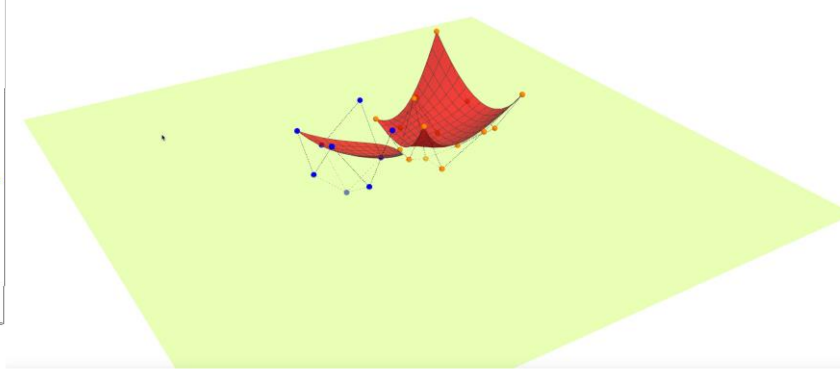
Dado un conjunto finito de puntos de $\mathbb{R}^3$ denominados puntos de control $\{P_{i,j}\}_{(i,j)=0}^{(m,n)}$ se define la superficie de Bezier

$$b: [0,1] \times [0,1] -> \mathbb{R}^3$$

$$b(s,t) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} B_i^m(s) B_j^n(t) P_{i,j}$$







EJERCICIOS

1.Dadas los siguientes polígonos de control, calcular las curvas mediante polinomios de Bernstein:

a) $\{p_0 = (0,0), p_1 = (1,2), p_2 = (2,-1)\}$
b) $\{p_0 = (0,0), p_1 = (1,2), p_2 = (3,0), p_3 = (1,-1)\}$
c) $\{p_0 = (-1,0), p_1 = (1,-1), p_2 = (4,0), p_3 = (2,3)\}$
d) $\{p_0 = (0,0), p_1 = (1,2), p_2 = (2,3), p_3 = (4,1), p_4 = (3,-1)\}$

2. Usando los mismos ejemplos del ejercicio anterior, calcular mediante el algoritmo de Casteljau.

3. ¿Qué ventajas tiene el algoritmo de Casteljau?

4. Calcular las curvas mediante su forma matricial.

EJERCICIOS

5. Dados los puntos $\{p_0 = (1,0), p_1 = (1,2), p_2 = (3,-1)\}$, obtener la curva de Bezier mediante aproximación de grado n que más se aproxime a dichos puntos.

6. Calcular el paraboloide hiperbólico que pasa por los siguientes puntos: $\{p_{00} = (0,0,0), p_{01} = (0,1,1), p_{10} = (1,0,1), p_{11} = (1,1,0)\}$

7. Considerando la superficie de Bézier bicuadrada definida por los siguientes puntos de control, calcular la superficie de Bézier asociada con el algoritmo de Casteljou:
   - $\{p_{00} = (0,0,0), p_{01} = (0,1,1), p_{02} = (0,2,0), p_{10} = (1,0,1), p_{11} = (1,1,0), p_{12} = (1,2,1)\}$
   - $\{p_{00} = (0,0,0), p_{01} = (0,1,0), p_{02} = (0,2,1), p_{10} = (1,0,0), p_{11} = (1,1,1), p_{12} = (1,2,1), p_{20} = (2,0,-1), p_{21} = (2,1,0), p_{22} = (2,2,0)\}$

8. Repetir el ejercicio anterior, pero usando los polinomios de Bernstein.