Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES-II

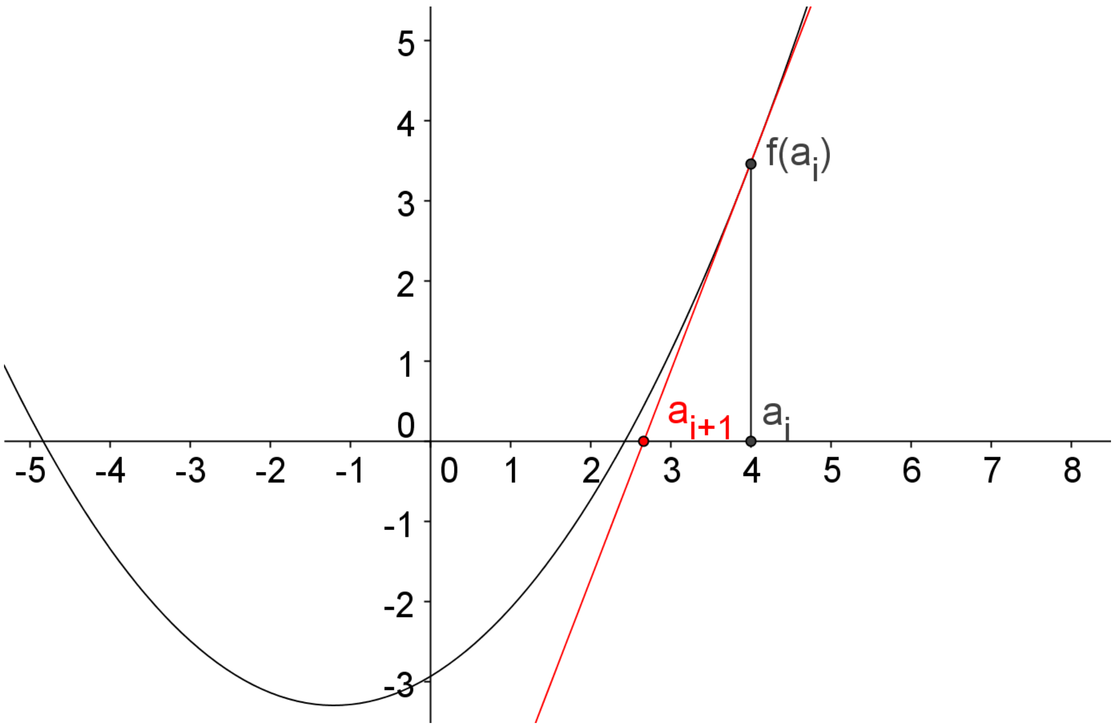
RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. MÉTODO DE NEWTON

Resulta similar al método de la secante pero usando, en lugar de la secante, la recta tangente cuya pendiente es la derivada f'

$$\frac{y - f(a_i)}{x - a_i} = f'(a_i)$$

$$\frac{0 - f(a_i)}{a_{i+1} - a_i} = f'(a_i)$$

$$a_{i+1} = a_i - \frac{f(a_i)}{f'(a_i)}$$



Pseudocódigo

```
BúsquedaPorNewton (f(x),a,ε,Δ,n)
     f'(x)::=df(x)/dx
     i:=0
    repetir
          i:=i+1
          h:=f(a)/f'(a)
          c:=a-h
          a:=c
    hasta (abs(f(c))≤ε) ó (abs(h)≤Δ) ó (i=n)
devolver c
```

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. MÉTODO DE NEWTON. EJEMPLO

Buscar una raíz desde *a=-1* en $f(x) = x^2 + 4x - 5$ con *n=6*, *ε=0,05* y *Δ=0,01*

	=n		Δ=			ε=	
i	a	b	c	h	f(a)	f(b)	f(c)

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. MÉTODO DE NEWTON. EJEMPLO

Buscar una raíz desde *a=-1* en $f(x)=x^2+4x-5$ con *n=6*, *ε=0,05* y *Δ=0,01*

	=n	Δ=			ε=	
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. MÉTODO DE NEWTON. EJEMPLO

Buscar una raíz desde *a=-1* en con *n=6*, *ε=0,05* y *Δ=0,01*

$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

$$f'(x) = 2x + 4$$

6	=n	Δ=	0,01		ε=	0,05
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	-1	3	-4	-8	2	16

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. MÉTODO DE NEWTON. EJEMPLO

Buscar una raíz desde *a=-1* en con *n=6*, *ε=0,05* y *Δ=0,01*

$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

$$f'(x) = 2x + 4$$

6	=n	Δ=	0,01		ε=	0,05
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	-1	3	-4	-8	2	16
2	3	1,4	1,6	16	10	2,56

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. MÉTODO DE NEWTON. EJEMPLO

Buscar una raíz desde *a=-1* en con *n=6*, *ε=0,05* y *Δ=0,01*

$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

$$f'(x) = 2x + 4$$

6	=n	Δ=	0,01		ε=	0,05
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	-1	3	-4	-8	2	16
2	3	1,4	1,6	16	10	2,56
3	1,4	1,02	0,38	2,56	6,8	0,14

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. MÉTODO DE NEWTON. EJEMPLO

Buscar una raíz desde *a=-1* en con *n=6*, *ε=0,05* y *Δ=0,01*

$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

$$f'(x) = 2x + 4$$

6	**=n**	**Δ=**	0,01		**ε=**	0,05
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	-1	3	-4	-8	2	16
2	3	1,4	1,6	16	10	2,56
3	1,4	1,02	0,38	2,56	6,8	0,14
4	1,02	**1**	0,02	0,14	6,05	0

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. MÉTODO DE NEWTON. EJEMPLO

Buscar una raíz con error absoluto $\Delta \leq 1 \cdot 10^{-3}$ para $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38$

		Δ=				
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. MÉTODO DE NEWTON. EJEMPLO

Buscar una raíz con error absoluto *Δ ≤ 1·10⁻³*

para $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38$ $\quad f'(x) = 9x^2 - 9.4x$

Partimos de *a=0*

		Δ=	0,001			
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. MÉTODO DE NEWTON. EJEMPLO

Buscar una raíz con error absoluto $\Delta \leq 1 \cdot 10^{-3}$

para $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38$ $\quad f'(x) = 9x^2 - 9.4x$

Partimos de *a=0* **FALLO**

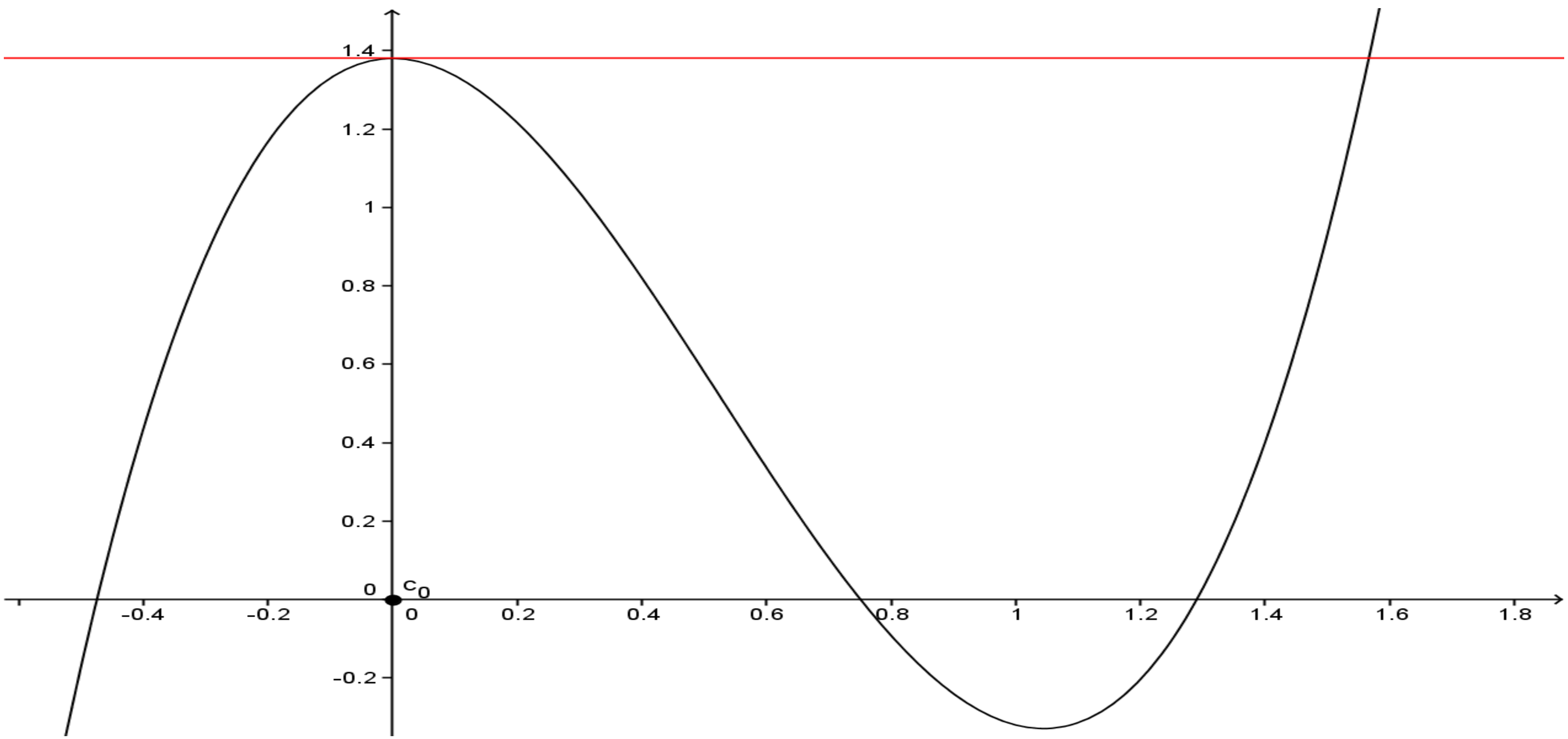
		Δ=	0,001			
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	0		**error**	1,38	0	

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. MÉTODO DE NEWTON. EJEMPLO

Buscar una raíz con error absoluto *Δ ≤ 1·10*$^{-3}$

para $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38$ $\quad f'(x) = 9x^2 - 9.4x$

Partimos de *a=0* **FALLO**



Buscar una raíz con error absoluto $\Delta \leq 1 \cdot 10^{-3}$

para $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38$ $\quad f'(x) = 9x^2 - 9.4x$

Partimos de *a=1*

		Δ=	0,001			
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. MÉTODO DE NEWTON. EJEMPLO

Buscar una raíz con error absoluto $\Delta \leq 1 \cdot 10^{-3}$

para $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38$ $\quad f'(x) = 9x^2 - 9.4x$

Partimos de *a=1*

		Δ=	0,001			
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	1	0,2	0,8	-0,32	-0,4	1,216

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. MÉTODO DE NEWTON. EJEMPLO

Buscar una raíz con error absoluto $\Delta \leq 1 \cdot 10^{-3}$

para $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38$ $\quad f'(x) = 9x^2 - 9.4x$

Partimos de *a=1*

		Δ=	0,001			
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	1	0,2	0,8	-0,32	-0,4	1,216
2	0,2	1	-0,8	1,216	-1,52	-0,32

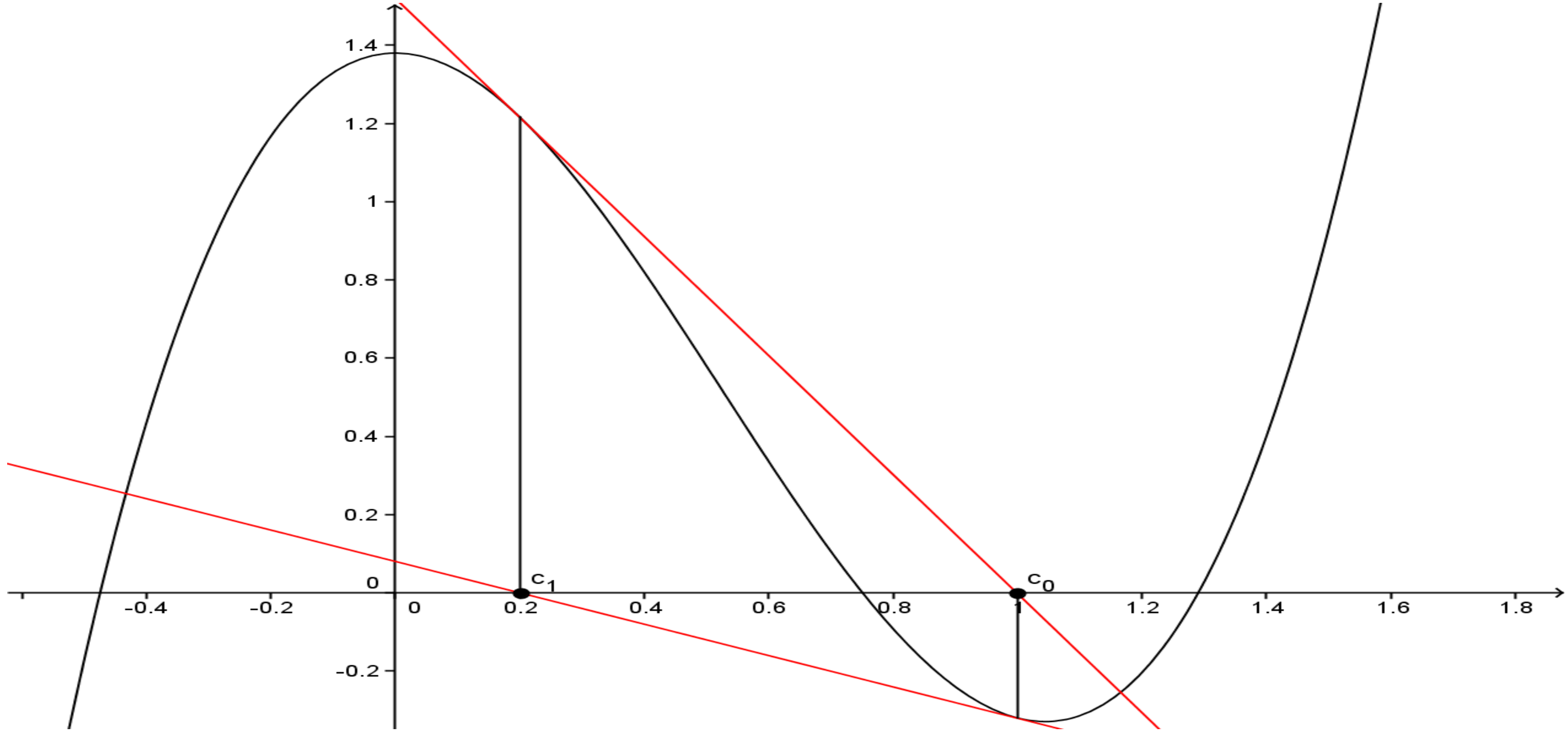
RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. MÉTODO DE NEWTON. EJEMPLO

Buscar una raíz con error absoluto $\Delta \leq 1 \cdot 10^{-3}$
para $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38$ $\quad f'(x) = 9x^2 - 9.4x$
Partimos de *a=1* **FALLO 2**

		Δ=	0,001			
i	**a**	**c**	**h**	**f(a)**	**f'(a)**	**f(c)**
1	1	0,2	0,8	-0,32	-0,4	1,216
2	0,2	1	-0,8	1,216	-1,52	-0,32
3	1		**ciclo**			

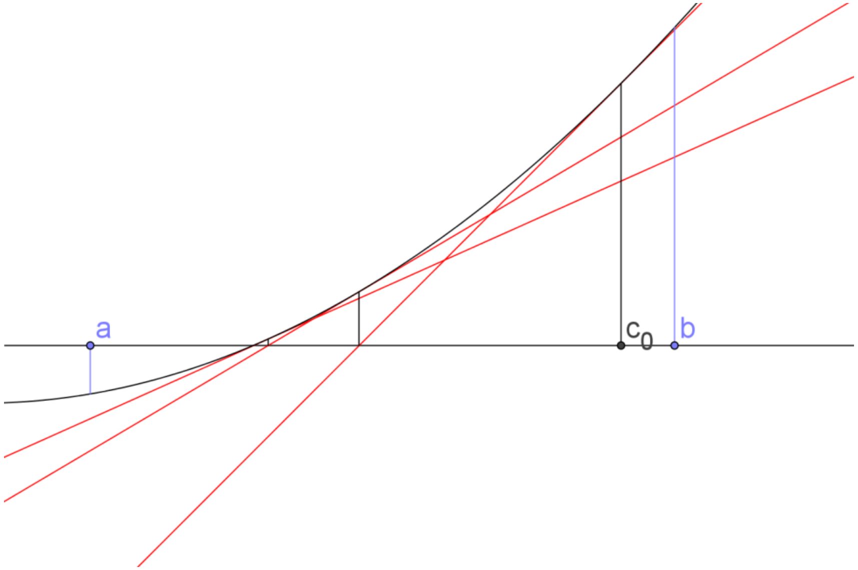
RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. MÉTODO DE NEWTON. EJEMPLO

Buscar una raíz con error absoluto *Δ ≤ 1·10*$^{-3}$
para $f(x) = 3x^3 - 4.7x^2 + 1.38$ $\quad f'(x) = 9x^2 - 9.4x$
Partimos de *a=1* **FALLO 2**



RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. TEOREMA DE CONVERGENCIA DEL MÉTODO DE NEWTON.

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$ y $f'(x)$ y $f''(x)$ mantienen su signo sin anularse en ningún punto en $[a,b]$, entonces si el punto inicial $c_0 \epsilon [a,b]$ escogido cumple que $f(c_0) \cdot f''(c_0) > 0$, el método de converge



RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. TEOREMA DE CONVERGENCIA DEL MÉTODO DE NEWTON.

Interpretación:

1. Con $f(a)\cdot f(b)<0$ se asegura que hay una raíz
2. Que $f'(x)$ y $f''(x)$ no sean nulos asegura que no hay inflexiones, máximos o mínimos
3. Si además $f'(x)$ y $f''(x)$ tienen siempre el mismo signo hacen que la gráfica sea toda creciente o toda decreciente y toda con el mismo tipo de concavidad (hacia arriba o hacia abajo)
4. Escoger c_0 para que $f(c_0)\cdot f''(c_0)>0$ asegura que los siguientes $f(c_i)$ tendrán el mismo signo que $f(c_0)$ y serán cada vez más pequeños hasta hacerse $f(c_i)=0$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. RESUMEN

MÉTODOS	**Pros**	**Contras**
Bisección	- Fácil, Confiable, Convergente - Se evalua una función por iteración - No se necesitan derivadas	- Lento - Necesita un intervalo [a,b] que contenga la raíz, $f(a)f(b)<0$
Newton	- Fast (cerca de la raíz) - Se evaluan dos funciones por iteración	- Puede diverger - Necesita derivar y un valor inicial x_0 tal que $f'(x_0)$ no sea cero
Secante	- Rápido (+ lento que Newton) - Se evalua una función por iteración - No se necesitan derivadas	- Puede diverger - Necesita dos valores iniciales x_0, x_1 tales que $f(x_0)- f(x_1)$ no sea cero

MÚLTIPLES VARIABLES. DESCENSO POR GRADIENTE

Supongamos que una persona está en la cima de una montaña y tiene que llegar a un lago que se encuentra en el punto más bajo de la montaña. Tiene los ojos vendados y no tiene visibilidad para ver a dónde va. Entonces,

¿qué enfoque tomarás para llegar al lago?

MÚLTIPLES VARIABLES. DESCENSO POR GRADIENTE

Supongamos que una persona está en una montaña y tiene que llegar a un punto seguro situado en la parte más baja de la montaña.

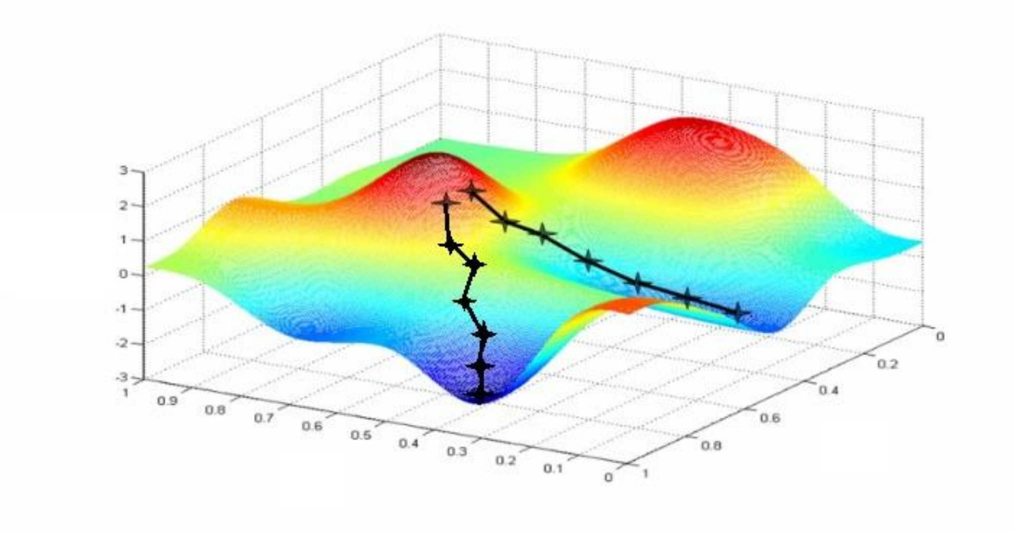
Supongamos que su visibilidad es nula y no puede ver más allá de 10 cm de distancia. Entonces,

¿qué enfoque tomarás para llegar al lago?

MÚLTIPLES VARIABLES. DESCENSO POR GRADIENTE

Un forma de lograrlo es dar un paso en cada una las cuatro orientaciones (este, oeste, norte y sur) y escoger aquella en la que se baje más, para dar un paso en esa dirección. Así hasta encontrar un punto en dónde al mirar todas las direcciones ya no se baje mas.

Si se sigue el camino descendente, es muy probable que se alcance el punto más bajo.



MÚLTIPLES VARIABLES. DESCENSO POR GRADIENTE

Desafortunadamente este método tiene varias desventajas como avanzar en una sola orientación o que el paso que se da siempre es del mismo tamaño o que se tiene que dar cuatro pasos (cuatro operaciones) para averiguar en que orientación se baja más.

DIRECCIÓN DE MÁXIMO/MÍNIMO CRECIMIENTO

Así pues, encontrar la dirección de máxima /mínima variación de la función es fundamental.
Hay que recordar que la dirección de máximo crecimiento de una función la proporciona el vector gradiente, por tanto el opuesto de este vector proporcionará la dirección de mínimo crecimiento.

Máximo crecimiento -> ∇f

Mínimo crecimiento -> $-\nabla f$

MÚLTIPLES VARIABLES. DESCENSO POR GRADIENTE

Ya sabemos en que dirección avanzar para descender, ahora la pregunta es

¿Cuánto se desciende?

Es decir, el paso tiene que ser proporcional al opuesto del gradiente que es el que nos da la dirección de mínimo crecimiento.

Para poder controlar la proporción del paso se utiliza un parámetro γ de tal forma que el paso a dar se cuantifica:

$$- \gamma \nabla f$$

MÚLTIPLES VARIABLES. DESCENSO POR GRADIENTE

El siguiente paso es calcular a donde llegamos

Dada una posición x_i, se puede avanzar a una nueva posición x_{i+1} que depende del paso que se de, del tamaño y la dirección:

$$x_{i+1} = x_i - \gamma \nabla f$$

Para cada nueva posición podemos medir la diferencia entre x_{i+1} y x_i.
Si es menor que cierto umbral (tolerancia) o si se alcanza un máximo de iteraciones, se dice que se ha alcanzado un punto mínimo.

MÚLTIPLES VARIABLES. DESCENSO POR GRADIENTE

Así pues, dada una función f, los pasos a seguir en el método de optimización de Descenso por Gradiente son:

1) Se elige un valor arbitrario inicial x_0
2) Se calcula ∇f es decir, la dirección de mayor descenso de la función.
3) Se calcula una variación del valor inicial

$$x_1 = x_0 - \gamma \, \nabla f$$

4) Repetir hasta que que la diferencia entre dos valores sea menor que la tolerancia o hasta alcanzar un número determinado de iteraciones $\|x_{i+1} - x_i\| < \varepsilon$

MÚLTIPLES VARIABLES. DESCENSO POR GRADIENTE

Para aplicar este algoritmo iterativo es necesario fijar la tolerancia, el número de iteraciones y el valor de γ (conocido como *tasa de aprendizaje*). Se dirá que el algoritmo converge si la sucesión de soluciones en el proceso iterativo se acerca a la solución óptima (esto es, el mínimo global).

MÚLTIPLES VARIABLES. DESCENSO POR GRADIENTE

La cantidad de iteraciones que se necesita para que el método converja puede variar mucho (dependiendo del problema, desde unas pocas iteraciones hasta miles de ellas). En cualquier caso, la tasa de aprendizaje condicionará el número mínimo de iteraciones necesario para la convergencia.

MÚLTIPLES VARIABLES. DESCENSO POR GRADIENTE

La tasa de aprendizaje es una constante que varía entre 0 y 1, y que afecta de forma significativa la efectividad del algoritmo: un valor demasiado pequeño puede llevar a que el algoritmo precise un número elevado de iteraciones antes de converger; mientras que si el valor asignado es demasiado grande, puede saltarse el mínimo global (pasando a tomar valores mayores) y no proporcionar una buena solución.

MÚLTIPLES VARIABLES. DESCENSO POR GRADIENTE

En el caso de una función de dos variables $f(x,y)$ hay que encontrar el **valor óptimo**, es decir, el punto (x^*,y^*) tal que el **vector gradiente se anula:**

$$\nabla f(x^*,y^*) = \left(f_x(x^*,y^*), f_y(x^*,y^*)\right) = (0,0)$$

Dados: $a_o = (x_0, y_0);\ \ \gamma$

Iterar: $a_{i+1} = a_i - \gamma \nabla(a_i)$

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} - \gamma \begin{bmatrix} f_x(x_i, y_i) \\ f_y(x_i, y_i) \end{bmatrix}$$

Hasta que $\|a_{i+1} - a_i\| < \varepsilon$

MÚLTIPLES VARIABLES. DESCENSO POR GRADIENTE

Ejemplo:

$$f(x,y) = x^2 + xy + 3y^2$$
$$\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 6y)$$

$a_o = (3,3);\ \ \gamma = 0.1$

$a_1 = (3,3) - 0.1 \cdot (2 \cdot 3 + 3, 3 + 6 \cdot 3) = (2.1, 0.9)$

$a_2 = (2.1,0.9) - 0.1 \cdot (2 \cdot 2.1 + 0.9, 2.1 + 6 \cdot 0.9)$

....

$a_5 = (0.8289,-0.1677)$

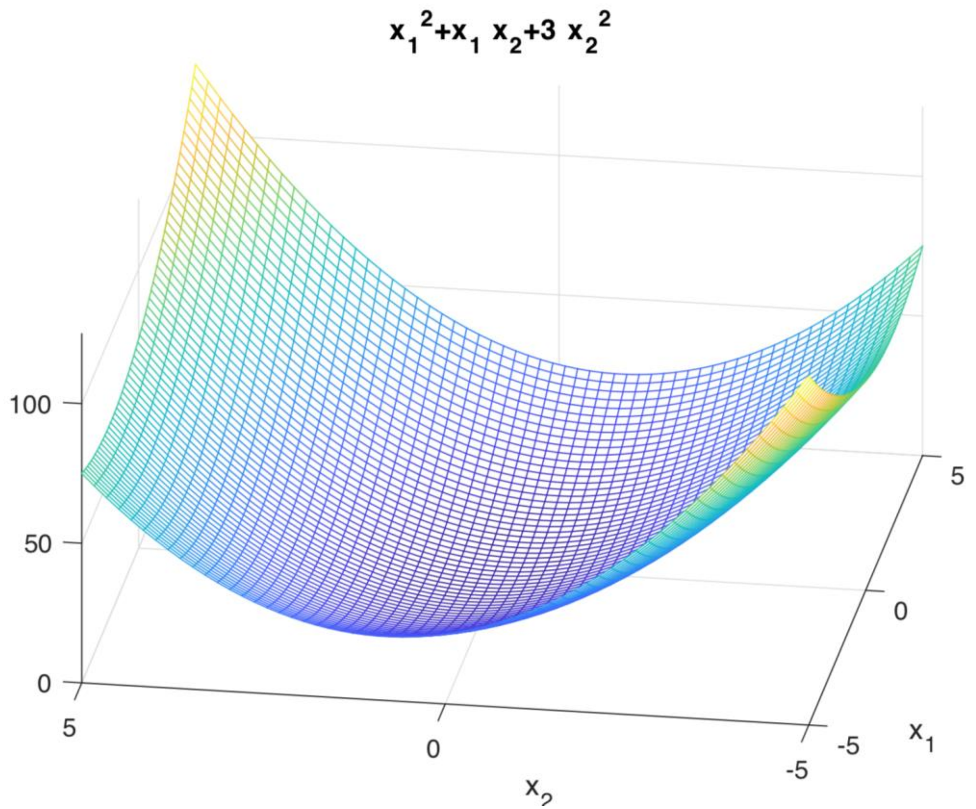
$a_6 = (0.6799,-0.15)$

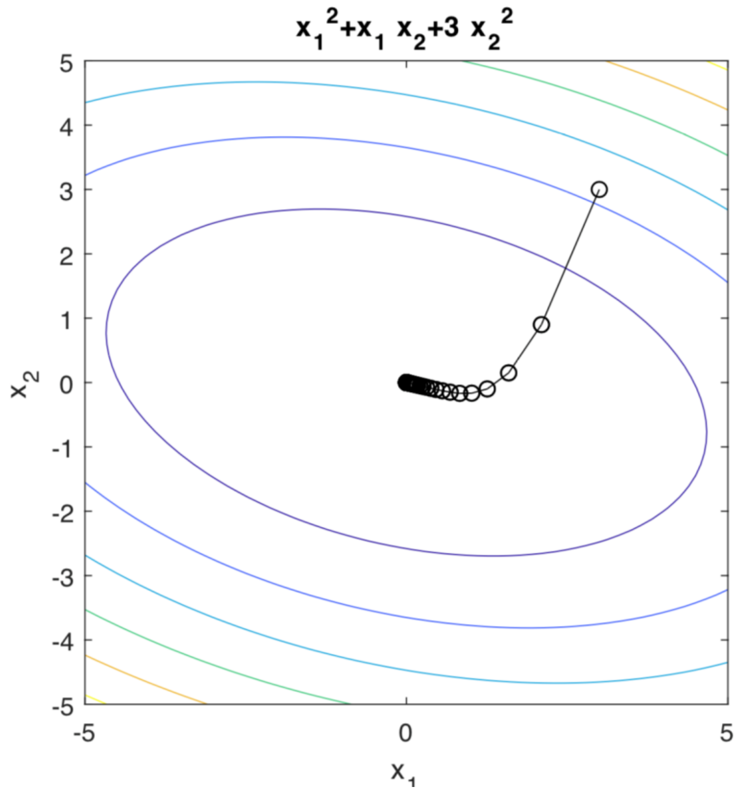
$\|a_6 - a_5\| = \|(0.8289, -0.1677) - (0.6799, -0.15)\| = 0.1501$

Ejemplo:

$$f(x,y) = x^2 + xy + 3y^2$$

$$\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 6y)$$





PROBLEMAS DE CONVERGENCIA:

En el ejemplo anterior el descenso por gradiente (DG) **siempre converge** (a (0,0)), si γ es pequeño, **independientemente** del punto de inicio $\mathbf{a_0}$. Esto se debe a que se trata de una función convexa en la que det(Hessiana)>=0

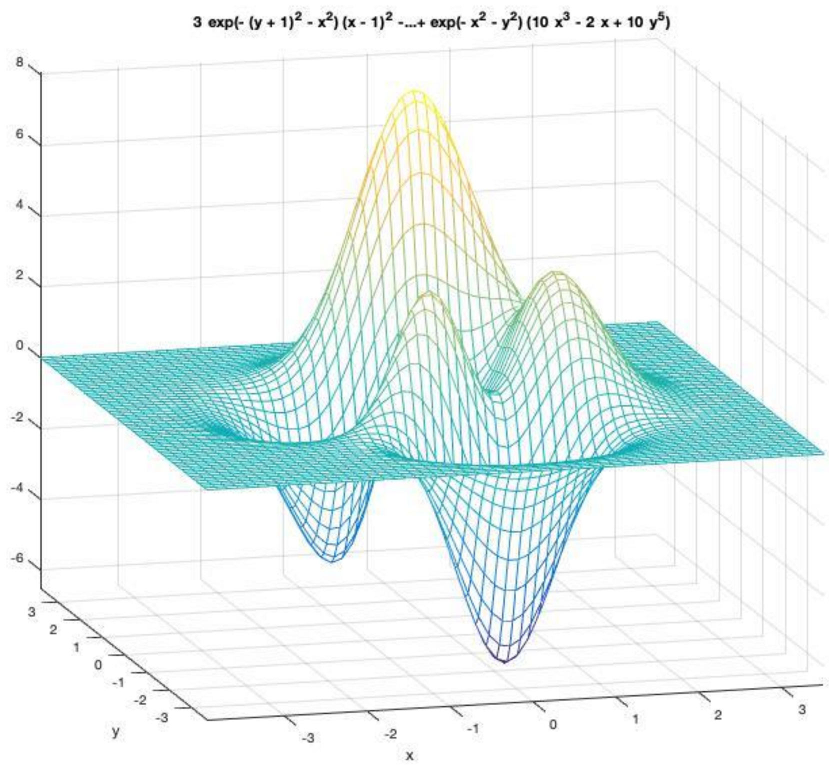
En general el método del DG convergerá al mínimo más cercano al punto de inicio $\mathbf{a_0}$ **siempre y cuando el parámetro** γ sea "adecuado" (p.e. si es muy alto perderemos el óptimo y si es muy pequeño necesitaremos muchas iteraciones).

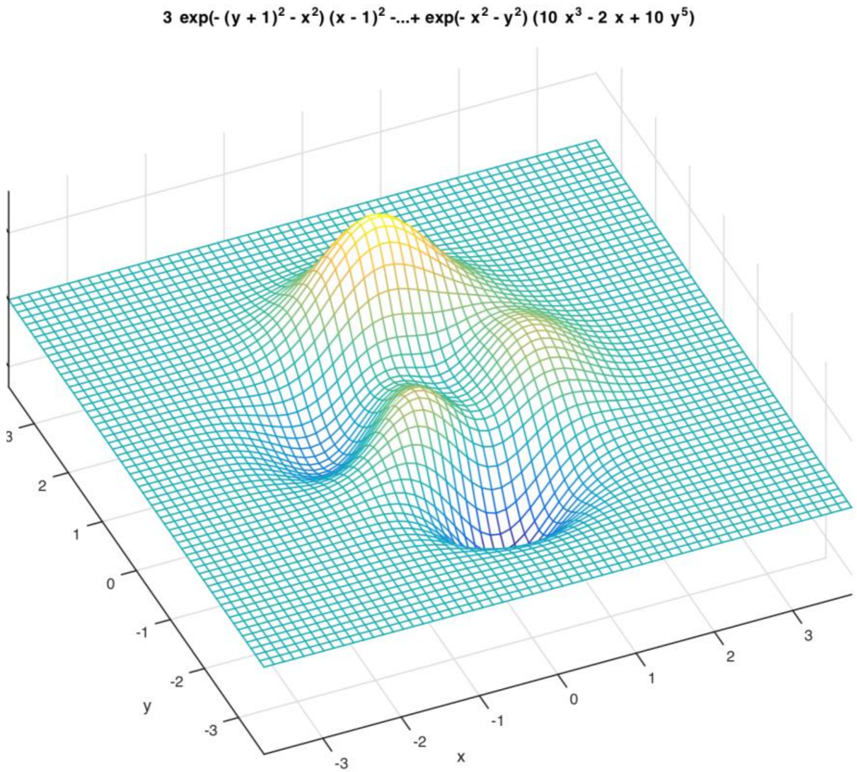
PROBLEMAS DE CONVERGENCIA:

Por ejemplo, unas funciones típicas en informática (clustering) con varios mínimos son las funciones formadas por la suma de exponenciales moduladas por polinomios (peaks)

$$f(x,y) = 3e^{-[(y+1)^2 - x^2]}(x-1)^2 - \frac{1}{3}e^{-[(x+1)^2 - y^2]}$$
$$+e^{-[x^2+y^2]}(10x^3 - 2x + 10y^5)$$

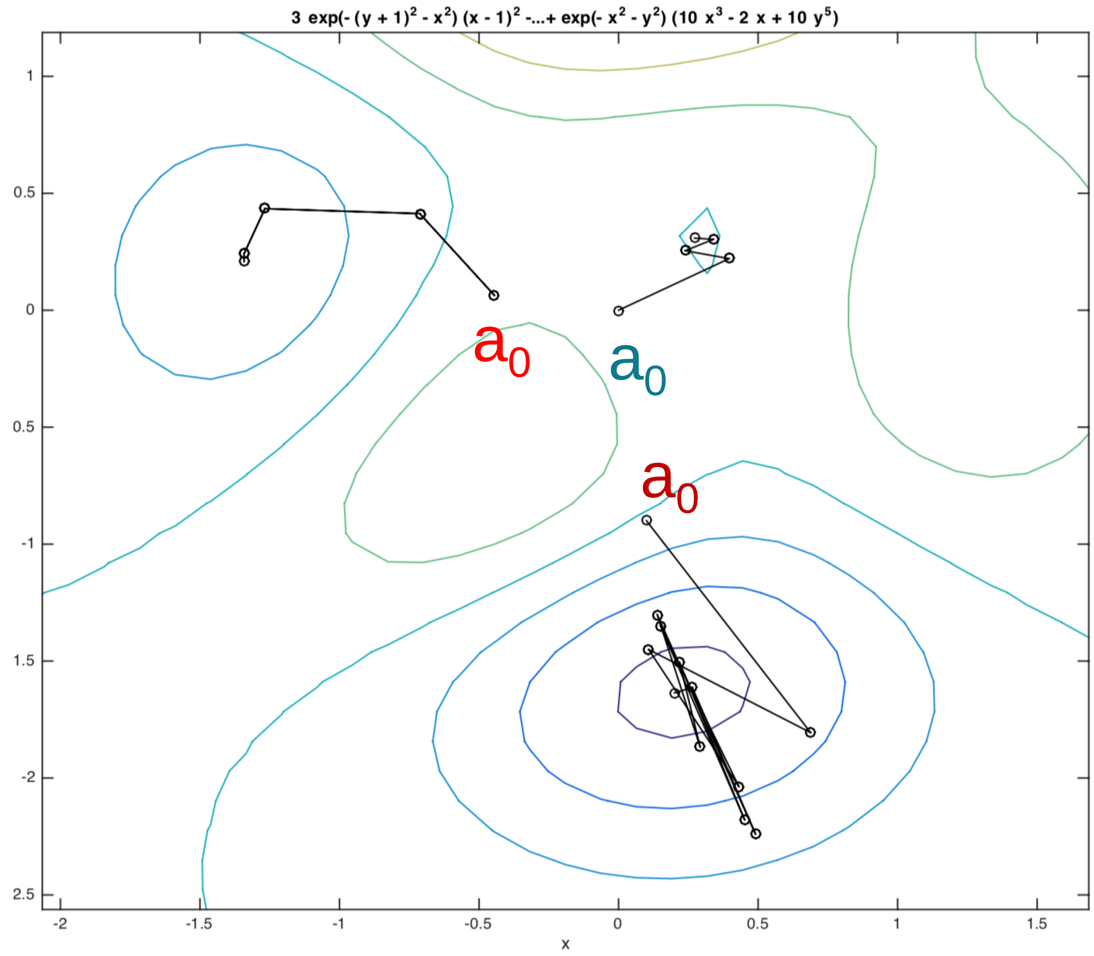
Ejemplo: peaks





MÚLTIPLES VARIABLES. DESCENSO POR GRADIENTE

Ejemplo: peaks



Dependiendo del punto inicial, nos lleva a un mínimo u otro

a_0=(-0.4449,0.0637)
Lleva al segundo mínimo más importante

a_0=(0,0)
Lleva al tercer mínimo más importante

a_0=(0.1,-0.9)
Lleva al óptimo global!

MÚLTIPLES VARIABLES. DESCENSO POR GRADIENTE

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS NO-LINEALES

Vamos aplicar el descenso por gradiente para resolver un sistema de M ecuaciones de N variables cada una. Se trataría de resolver el siguiente sistema de ecuaciones,

$$
\begin{gathered}
g_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0 \\
g_2(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0 \\
\\
\ldots \\
g_M(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0
\end{gathered}
$$

Donde las ecuaciones g_1 pueden ser combinaciones de polinomios, exponeciales, funciones trigonométricas y constantes.

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS NO-LINEALES

Como el método de descenso por gradiente optimiza una función, tenemos que convertir las M ecuaciones en una sola. Para eso, se construye una matriz G de tamaño Mx1 que contenga a todas las ecuaciones:

$$G = \begin{bmatrix} g_1(x_1,\ x_2, \ldots., x_N) \\ g_2(x_1,\ x_2, \ldots., x_N) \\ \ldots \\ g_M(x_1,\ x_2, \ldots., x_N) \end{bmatrix}$$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS NO-LINEALES:

El segundo paso es construir la función objetivo $F(x_1, x_2, \ldots., x_N)$ a partir de la matriz G. Para ello hacemos el producto matricial

$$\frac{1}{2} G^T G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} g_i(x_1,\ x_2, \ldots., x_N)^2 = F(x_1,\ x_2, \ldots., x_N)$$

De esta forma, expresamos la función objetivo como la la suma de los errores cuadráticos de cada una de las ecuaciones del sistema.

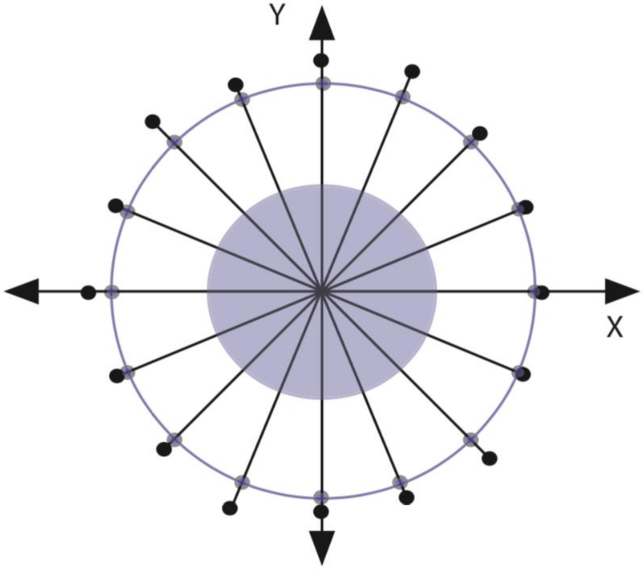
MÚLTIPLES VARIABLES. DESCENSO POR GRADIENTE

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS NO-LINEALES:

Ahora ya se tiene una sola función de N variables F a la que podemos aplicar el método del descenso por gradiente.

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS NO-LINEALES: EJEMPLO

Dado un conjunto de M puntos en el plano, $S = \{(x_i,\ y_i), i = 1,2, \dots, M\}$ se trata de encontrar la ecuación de una forma que mejor se aproxime a esos puntos.
Por ejemplo, para simplificar podemos intentar encontrar la ecuación del círculo que mejor se adapte a una serie de puntos dados.



RESOLUCIÓN DE SISTEMAS NO-LINEALES: AJUSTE

Hay que determinar el centro $(x_c,\ y_c)$, y el radio r cuya ecuación se ajuste globalmente mejor al conjunto de M puntos $(x_i,\ y_i)$, es decir, todos estos puntos deberían satisfacer lo mejor posible la ecuación:

$$(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 = r^2$$

Como tenemos M puntos dados, al sustituir tenemos M ecuaciones. Hay que remarcar que son ecuaciones de tres incógnitas x_c, y_c y r. Para cada punto tenemos una ecuación del tipo:

Dado (x_i, y_i) se obtiene

$$g_i(x_c, y_c, r) \equiv (x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 - r^2 = 0$$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS NO-LINEALES: AJUSTE

$$g_i(x_c, y_c, r) \equiv (x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 - r^2 = 0$$

Estas ecuaciones cuantifican las desviaciones (positivas o negativas) de cada punto con respecto a un mismo círculo propuesto por el algoritmo.

Es decir, estas ecuaciones nos dan un error respecto al circulo que mejor se adapte a los puntos. El objetivo es minimizar el error que se produce y para ello hay que obtener una función a minimizar.

Si sumamos todos los errores podemos obtener la función objetivo a minimizar.

Así pues, la función objetivo es la suma de los errores cuadráticos (cuadrados de cada desviación)

$$F(x_c, x_c, r) = \frac{1}{2} G^T G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} g_i(x_c, y_c, r)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} \left((x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 - r^2 \right)^2$$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS NO-LINEALES: AJUSTE

Se puede ver claramente que el gradiente $\nabla F(x_c, x_c, r)$ es la suma de los gradientes de cada punto.

$$\nabla F(x_c, x_c, r) = \frac{1}{2}\nabla(G^T G) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} \nabla g_i(x_c, y_c, r)^2 = \nabla F = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{M} g_i \frac{\partial g_i}{\partial x_c} \\ \sum_{i=1}^{M} g_i \frac{\partial g_i}{\partial y_c} \\ \sum_{i=1}^{M} g_i \frac{\partial g_i}{\partial r} \end{bmatrix}$$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS NO-LINEALES: AJUSTE

Así, el descenso por gradiente queda como sigue:

$$\begin{bmatrix} x_{c,i+1} \\ y_{c,i+1} \\ r_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{c,i} \\ y_{c,i} \\ r_i \end{bmatrix} - \gamma \sum_{k=1}^{M} \begin{bmatrix} 2(x_k - x_{c.i})(-1) \\ 2(y_k - y_{c,i})(-1) \\ -2r_i \end{bmatrix} g_k(x_{c,i}, y_{c,i}, r_i)$$

$$g_k(x_{c,i}, y_{c,i}, r_i) \equiv (x_k - x_{c,i})^2 + (y_k - y_{c,i})^2 - r_i^2$$

Es decir, se actualiza el centro y el radio a partir de la suma de gradientes con respecto a cada punto.

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS NO-LINEALES: AJUSTE

Ahora bien, existen algunos aspectos abiertos que se deben tratar, por ejemplo como el punto inicial del centro y del radio o el parámetro γ

Para el punto inicial del centro se suele utilizar la media de los puntos y para el radio inicial se suele utilizar el radio aproximado de los puntos.

Respecto al parámetro la pregunta es
¿Un único parámetro γ de actualización?, ¿uno por cada variable?, ¿se actualiza el parámetro en cada paso?

Nosotros utilizaremos un único parámetro fijo para todas las variables

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS NO-LINEALES: AJUSTE

Dados los 8 puntos que aparecen en la tabla, vamos a obtener el punto y radio inicial:

x'_i	y'_i
5.9575	0.0000
4.2178	4.2178
0.0000	5.1576
−4.2218	4.2218
−5.9572	0.0000
−3.8787	−3.8787
−0.0000	−5.8003
3.6359	−3.6359

Inicializar centro: media de puntos

$$(x_c^0, y_c^0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i, y_i)$$

$$(x_c^0, y_c^0) = (-0.0308, 0.0353).$$

Inicializar radio: entre 5 y 6 por las fórmulas:

$$x_i = x_c + r\cos\theta,\ y_i = y_c + r\sin\theta$$

Solución: para un parámetro único γ=0.001, con 3 iteraciones y se obtiene un error de = 0.5)

$$(-0.0514, 0.0890, 5.3112).$$

EJERCICIOS

1. Usar 3 iteraciones, del método de Newton-Raphson, para encontrar una solución de $\sqrt{10}$. Utilizar el número 3 como punto de partida.
2. Usando el método de la bisección, obtener la mayor raíz positiva de $f(x) = x^2 – 6x + 7$ con cuatro tres cifras decimales exactas.
3. Sea $f(x) = -x^3 - \cos x$ y $p_0 = -1$. Usar el método de Newton's para encontrar p_2. ¿Se podría usar $p_0 = 0$?
4. Sea $f(x)=-x^3-\cos x$. Utilizando el método de la secante en [-1, 0], encontrar una raíz de la ecuación con 2 cifras decimales significativas.

EJERCICIOS

5. Una compañía gasta $C(g)=1000 + 2q + 3q^{2/3}$ euros en producir *g* gramos al día de un producto químico. Si la empresa vende el producto a 4€ el gramo. Calcula cuanto debe producir al día para no tener ni pérdidas ni ganancias. Usar el método de Newton y dar una respuesta con una precisión de 10^{-3}.

6. Encontrar con 4 cifras decimales exactas, la coordenada x del punto de la curva y = ln x más cercano al origen. Usar el método de Newton.

7. Comprobar que el método de ajuste de círculos para el ejemplo dado diverge rápidamente para un radio inicial r0=1 y $\gamma = 0.01$. Explicar porqué.