Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES (I)

NOCIÓN DE DERIVADA

Definición de Derivada

La derivada de f en x viene dada por la expresión

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Para todos los valores de x para los que exista este límite f' es una función de x

Notaciones $\quad f'(x) \quad \frac{dy}{dx} \quad y' \quad \frac{d}{dx}[f(x)] \quad D_x[y]$

REGLAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN

Reglas generales de derivación			
Producto por un número	$\frac{d}{dx}[cf] = cf'$		
Suma	$\frac{d}{dx}[f+g] = f'+g'$	Diferencia	$\frac{d}{dx}[f-g] = f'-g'$
Producto	$\frac{d}{dx}[fg] = f'g+fg'$	Cociente	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{f'g-fg'}{g^2}$
Derivadas de funciones algebraicas			
Regla de la constante	$\frac{d}{dx}[c] = 0$	Regla simple de la potencia	$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$, $\frac{d}{dx}[x] = 1$
Derivadas de funciones trigonométricas			
Seno	$\frac{d}{dx}[sen\ x] = cos\ x$	Coseno	$\frac{d}{dx}[cos\ x] = -sen\ x$
Tangente	$\frac{d}{dx}[tan\ x] = sec^2\ x$	Cotangente	$\frac{d}{dx}[cot\ x] = -csc^2\ x$
Secante	$\frac{d}{dx}[sec\ x] = sec\ x\ tan\ x$	Cosecante	$\frac{d}{dx}[csc\ x] = -csc\ x\ cot\ x$
Regla de la cadena			
Regla de la cadena	$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\ u'$	Regla general de la potencia	$\frac{d}{dx}[u^n] = n\ u^{n-1}\ u'$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo

Obtener la derivada de y respecto a x de $y^3+y^2-5y-x^2=-4$

Paso 1)

Derivar ambos lados de la ecuación respecto de x

$$\frac{d}{dx}[y^3+y^2-5y-x^2]=\frac{d}{dx}[-4]$$

$$\frac{d}{dx}[y^3]+\frac{d}{dx}[y^2]-\frac{d}{dx}[5y]-\frac{d}{dx}[x^2]=\frac{d}{dx}[-4]$$

$$3y^2\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}-5\frac{dy}{dx}-2x=0$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo

Obtener la derivada de *y* respecto a *x* de $y^3+y^2-5y-x^2=-4$

Paso 2)

Agrupar todos los términos en los que aparezca *dy/dx* en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha

$$3y^2\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}-5\frac{dy}{dx}=2x$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo

Obtener la derivada de y respecto a x de $y^3+y^2-5y-x^2=-4$

Paso 3)

Sacar factor común dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación

$$\frac{dy}{dx}(3y^2+2y-5)=2x$$

Paso 4)

Despejar la derivada de y respecto a x

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+2y-5}$$

Ejercicio

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 = 6xy$ en el punto *(3,3).*

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Llamamos derivada de segundo orden de una función a la derivada de la función derivada

$$f(x) \;\Rightarrow\; \frac{df}{dx}(x) = f'(x) \;\Rightarrow\; \frac{d^2 f}{dx}(x) = f''(x)$$

La derivada tercera es la derivada de la función derivada segunda

$$f(x) \;\Rightarrow\; \frac{df}{dx}(x) \;\Rightarrow\; \frac{d^2 f}{dx}(x) \;\Rightarrow\; \frac{d^3 f}{dx}(x)$$

Y así sucesivamente se da origen a las derivadas de orden superior

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Ejemplo

Obtener todas las derivadas de orden superior de *f(x)=x⁵*

$$f(x) = x^5$$

$$\frac{d(x^5)}{dx} = 5x^4$$

$$\frac{d^2(x^5)}{dx^2} = \frac{d(5x^4)}{dx} = 20x^3$$

$$\frac{d^3(x^5)}{dx^3} = \frac{d^2(5x^4)}{d^2x} = \frac{d(20x^3)}{dx} = 60x^2$$

$$\frac{d^4(x^5)}{dx^4} = \frac{d^3(5x^4)}{d^3x} = \frac{d^2(20x^3)}{d^2x} = \frac{d(60x^2)}{dx} = 120x$$

$$\frac{d^5(x^5)}{dx^5} = \frac{d^4(5x^4)}{d^4x} = \frac{d^3(20x^3)}{d^3x} = \frac{d^2(60x^2)}{d^2x} = \frac{d(120x)}{dx} = 120$$

$$\frac{d^6(x^5)}{dx^6} = \frac{d^5(5x^4)}{d^5x} = \frac{d^4(20x^3)}{d^4x} = \frac{d^3(60x^2)}{d^3x} = \frac{d^2(120x)}{d^2x} = \frac{d(120)}{dx} = 0$$

Ejercicio

Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, determine $f^{(n)}(x)$.

Máximos y mínimos relativos

Sea f una función definida sobre un intervalo abierto (a, b) que contiene a c

- Si $f(c)$ es un máximo de f en (a,b) entonces $f(c)$ es un máximo relativo
- Si $f(c)$, es un mínimo de f en (a,b) entonces $f(c)$ es un mínimo relativo

VALORES EXTREMOS EN IN INTERVALO

Puntos críticos

Sea f definida en c. Si $f'(c) = 0$ o si f no es derivable en c, entonces c es un punto crítico de f

Los extremos relativos ocurren sólo en los puntos críticos

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Teorema

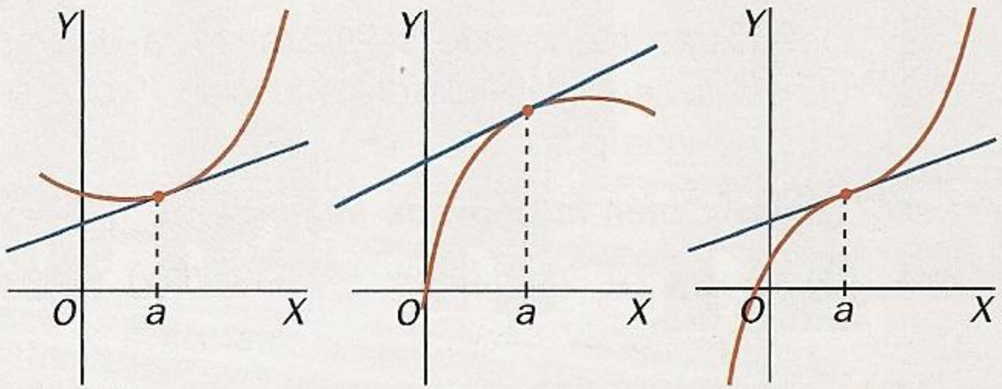
Sea f una función que es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces

1. Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), f es creciente en $[a,b]$

En concreto, se verifican los siguientes resultados:

Si $\mathbf{f'(a) > 0}$, entonces f es **creciente** en a.

Si la derivada en un punto es positiva, la recta tangente en ese punto tiene pendiente positiva. Entonces, la función presenta aproximadamente alguna de estas situaciones, y será creciente en a.



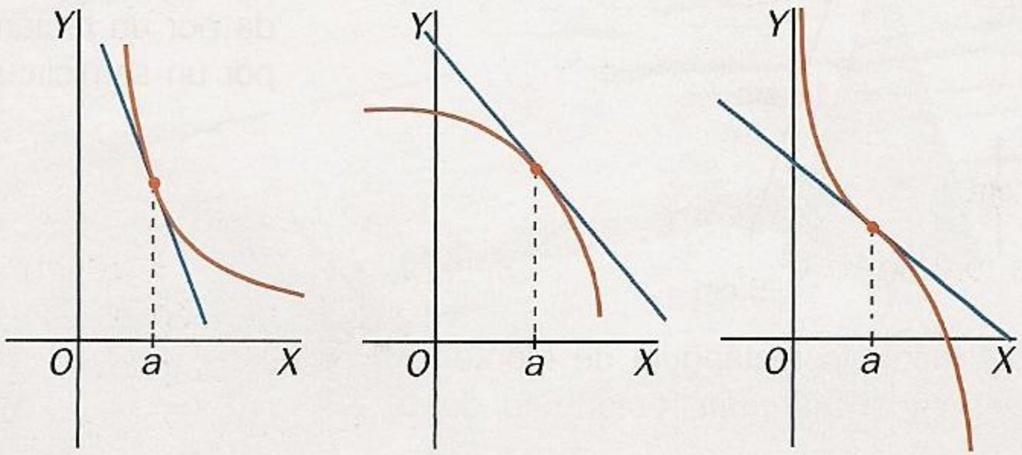
FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Teorema

Sea f una función que es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces

2. Si $f'(x)<0$ para todo x en (a, b), f es decreciente en $[a,b]$

Si $f'(a) < 0$, f es **decreciente** en a.



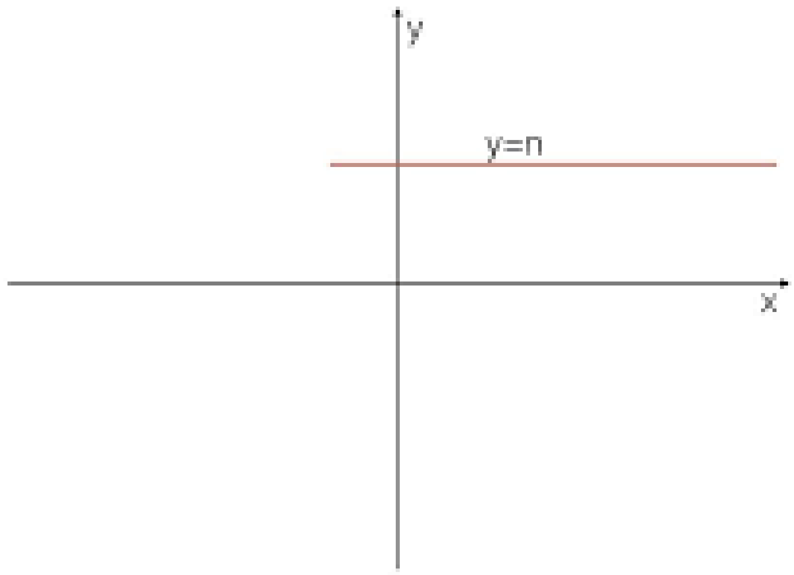
Si la derivada en un punto es negativa, la recta tangente en ese punto tiene pendiente negativa. Entonces, la función presenta aproximadamente alguna de estas situaciones, y será decreciente en a.

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

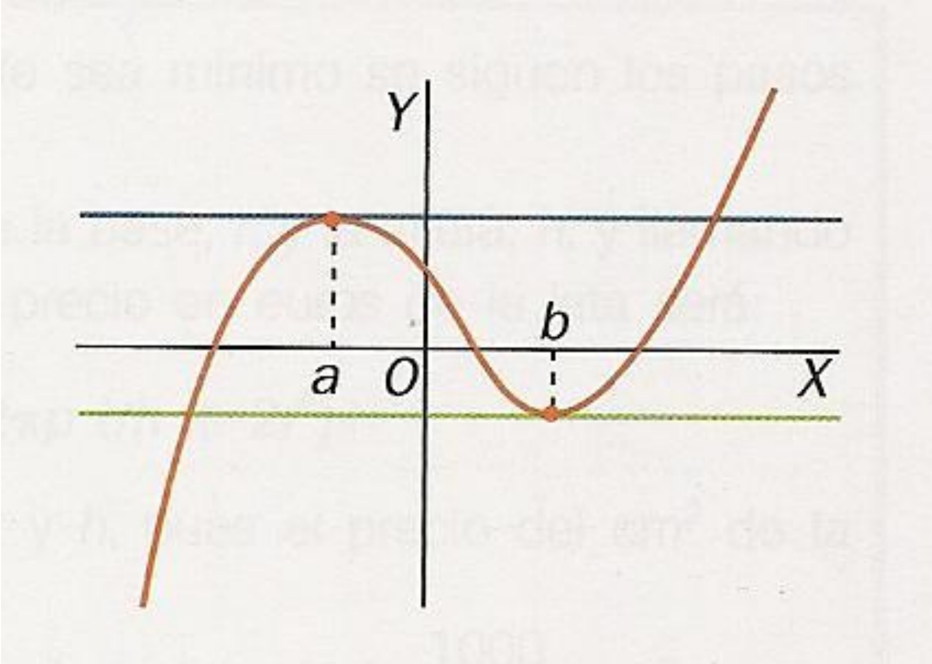
Teorema

Sea f una función que es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces

3. Si $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b), f es constante en $[a,b]$



FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES



Si f presenta un máximo o un mínimo relativo en a, y existe $f'(a)$, entonces $f'(a) = 0$.

En los máximos o mínimos relativos, la tangente (si existe) es horizontal, y, por tanto, su derivada en ellos será cero.

También se puede argumentar diciendo que, si existiera $f'(x)$ y no fuera cero, sería positiva o negativa, con lo que por los resultados anteriores sería creciente o decreciente en ese punto.

Criterio de la primera derivada

Teorema

Sea c un punto crítico de una función f continua en (a,b), y derivable en al menos los puntos $x \neq c$, entonces

1. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, f tiene un mínimo relativo en $f(c)$

2. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, f tiene un máximo relativo en $f(c)$

3. Si $f'(x)$ es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c, $f(c)$ no es ni mínimo ni máximo relativo

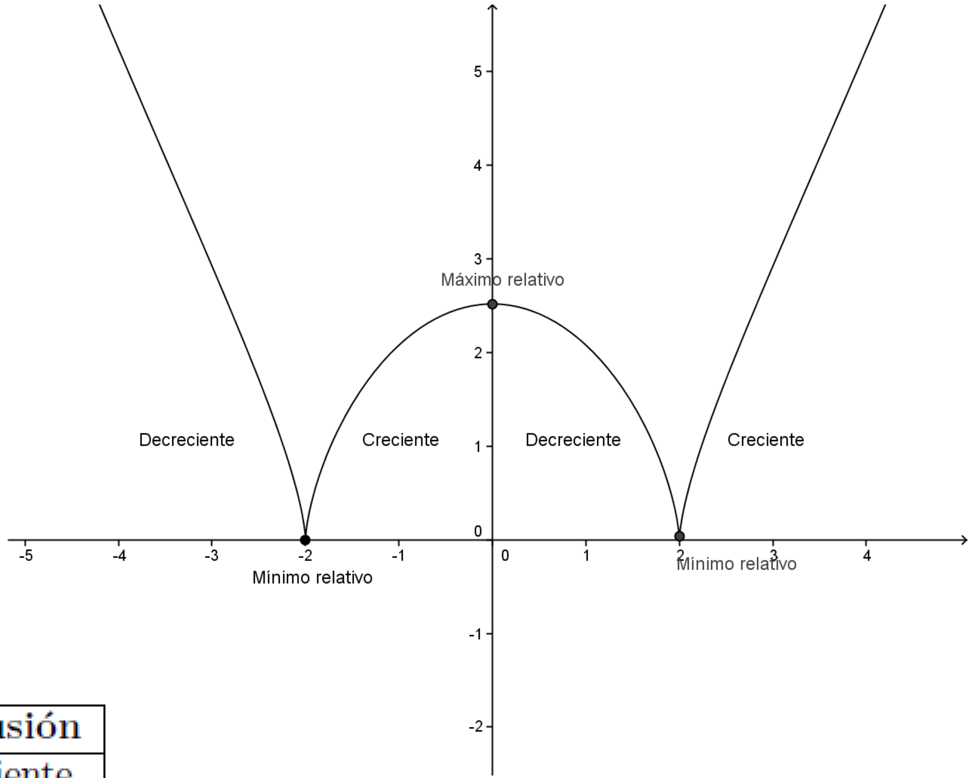
FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Ejemplo

$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{-1/3}(2x)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{3(x^2 - 4)^{1/3}}$$



Intervalo	Valor	Signo	Conclusión
$-\infty < x < -2$	$x = -3$	$f'(-3) < 0$	Decreciente
$-2 < x < 0$	$x = -1$	$f'(-1) > 0$	Creciente
$0 < x < 2$	$x = 1$	$f'(1) < 0$	Decreciente
$2 < x < \infty$	$x = 3$	$f'(3) > 0$	Creciente

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Teorema

Sea f una función tal que en un punto c, del dominio D, la derivada es cero $f'(c) = 0$ y, además, la segunda derivada de f existe en un intervalo (a, b) que contiene a c, entonces

1. Si $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un mínimo relativo

2. Si $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un máximo relativo

3. Si $f''(c) = 0$, $f(c)$ puede o no ser un valor extremo. Se dice entonces que el criterio de la segunda derivada falla y sólo es aplicable el de la primera derivada

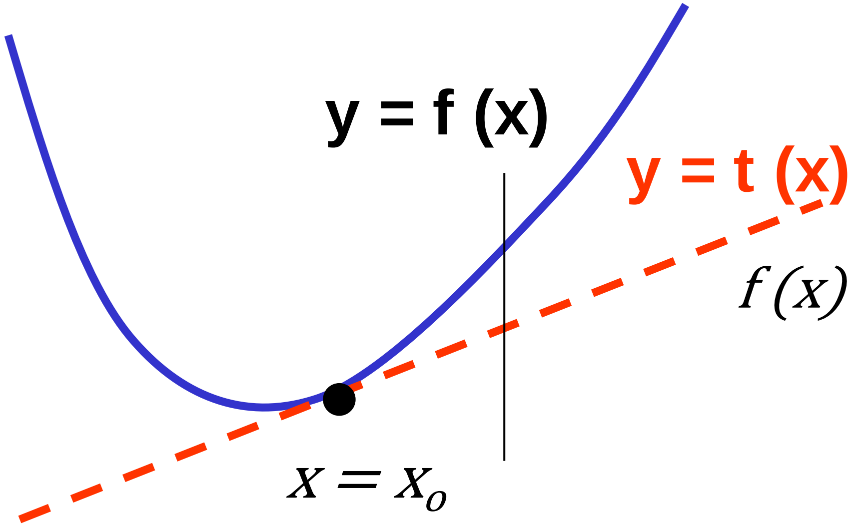
CONCAVIDAD

Sea f derivable en un intervalo (a, b)

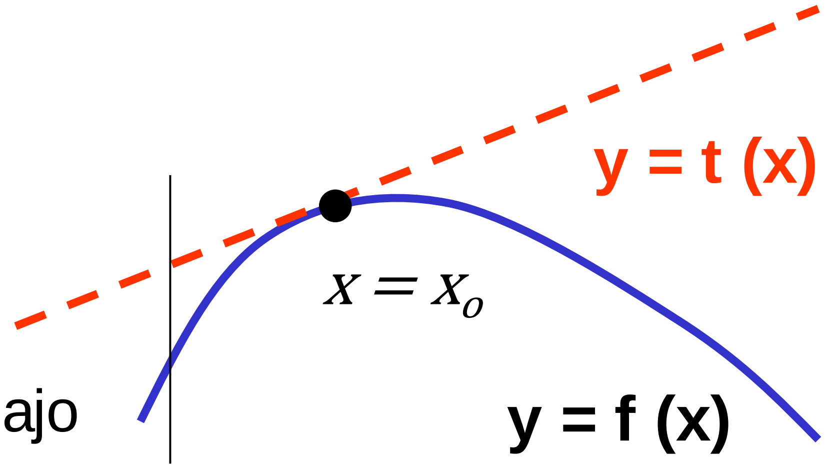
Su gráfica es cóncava hacia arriba (convexa) si la gráfica está por encima de todas sus tangentes

Su gráfica es cóncava hacia abajo (sólo cóncava) si la gráfica está por debajo de todas sus tangentes

CONCAVIDAD



$f(x) > t(x)$ → Cóncava hacia arriba



$f(x) < t(x)$ → Cóncava hacia abajo

Criterio de concavidad

Teorema

Sea f una función cuya segunda derivada existe en el intervalo abierto (a, b), entonces

1. Si $f''(x) > 0$ para todo x en (a, b), f es cóncava hacia arriba en (a, b)

2. Si $f''(x) < 0$ para todo x en (a, b), f es cóncava hacia abajo en (a, b)

Punto de inflexión

Sea f una función que es continua en un intervalo (a, b) y sea c un punto en ese intervalo

Si la gráfica de f tiene una recta tangente en este punto $(c, f(c))$, entonces este punto es un punto de inflexión de la gráfica de la función f si la concavidad de f cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa en ese punto

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

La resolución y cálculo del problema implica la determinación de los valores Máximo y Mínimo.

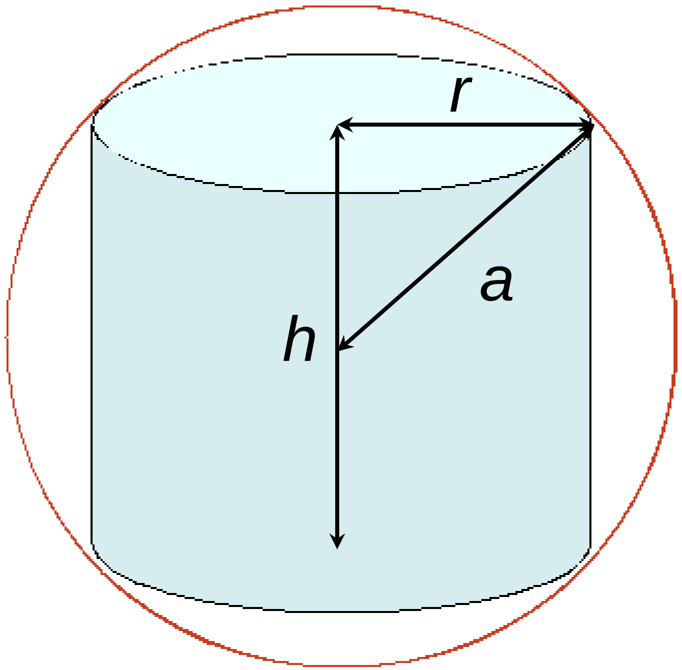
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Estrategia para resolución

1. Identificar todas las cantidades dadas (datos) y las que se van a determinar (variables). Elaborar dibujo.
2. Escribir la ecuación a optimizar.
3. Reducir la ecuación en una variable independiente.
4. Determinar el dominio admisible de la ecuación (intervalos de valores que tienen sentido).
5. Determinar el valor máximo o mínimo (aplicar las técnicas de cálculo vistas).
6. Interpretar los resultados y rechazar los absurdos.

Ejemplo

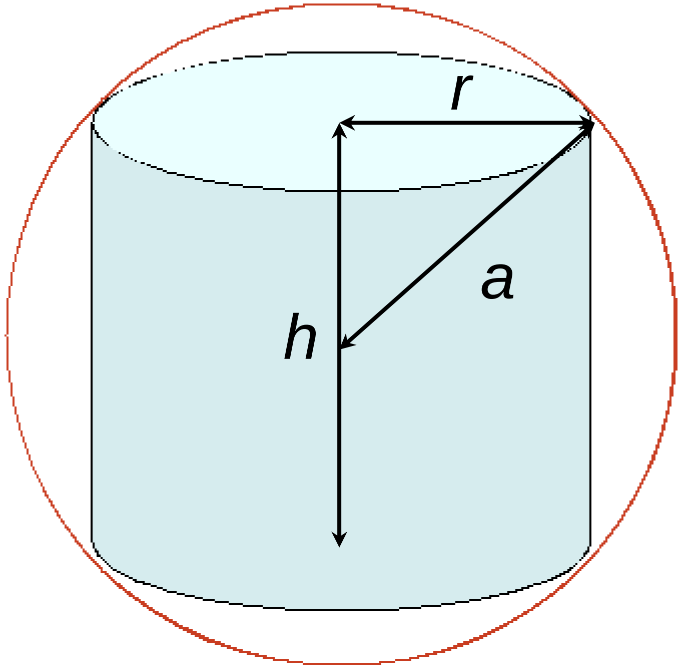
Determinar la altura h y radio r del cilindro con mayor volumen posible circunscrito en una esfera de radio *a*:



Ejemplo

Relación entre la altura h, radio r de la base del cilindro y el radio a de la esfera al estar circunscrito el cilindro a la esfera

$$r^2 = a^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$$



Volumen del cilindro

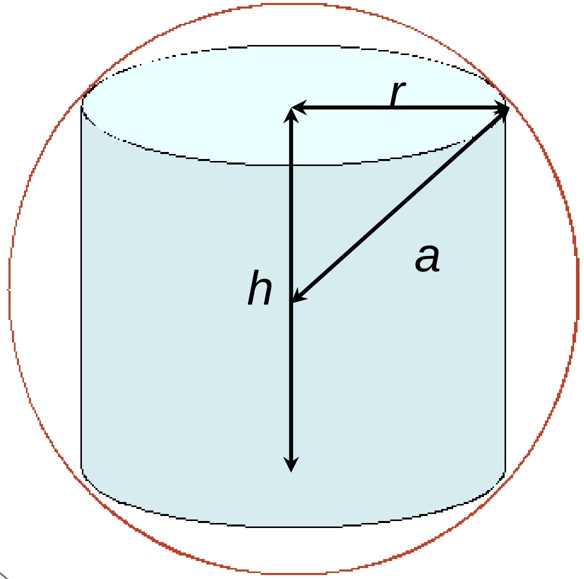
$$V = \pi \cdot r^2 h$$

$$V(h) = \pi \cdot \left(a^2 - \frac{h^2}{4}\right) h$$

Ejemplo

La función *V(h)* tiene sentido solo de *0* a *2a*

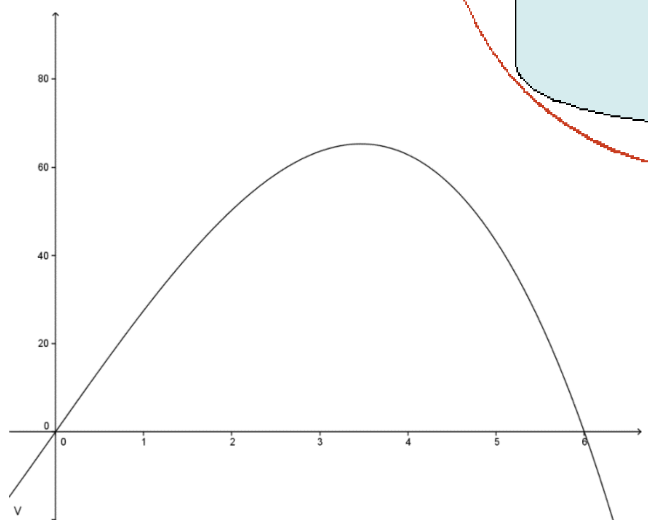
$$V(h) = \pi \cdot \left(a^2 - \frac{h^2}{4} \right) h \qquad h \in [0, 2a]$$



Ejemplo con *a=3*

$$V(h) = \pi \cdot \left(9 - \frac{h^2}{4} \right) h$$

$$h \in [0, 6]$$



Ejemplo

Localización de los puntos críticos

$$V(h) = \pi \cdot \left(a^2 - \frac{h^2}{4} \right) h \qquad h \in [0, 2a]$$

$$V'(h) = \pi \left(a^2 - \frac{3}{4} h^2 \right) \qquad \left(a^2 - \frac{3}{4} h^2 \right) = 0 \Rightarrow h = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$h = 0 \qquad h = \frac{2a}{\sqrt{3}} \qquad h = 2a$$

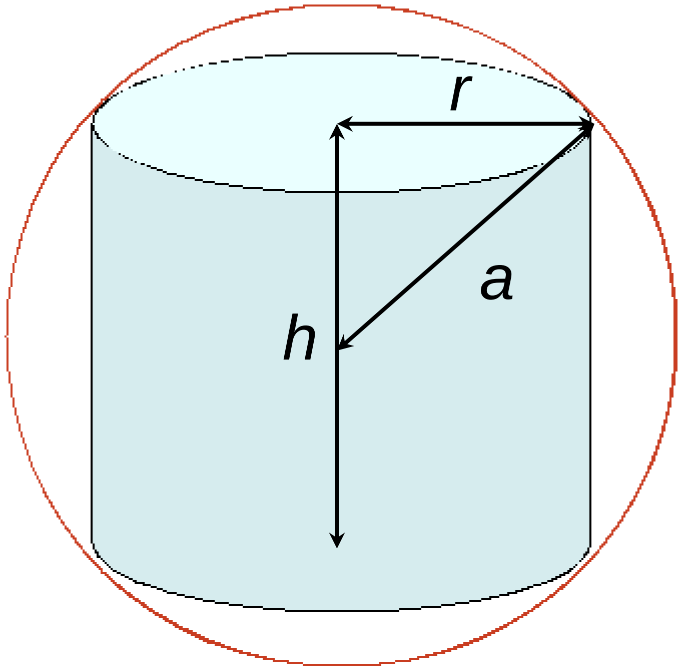
$$V(h) = 0 \qquad V(h) = \frac{4}{3\sqrt{3}} a\pi \qquad V(h) = 0$$

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Ejemplo

Sustituimos el h que proporciona el $V(h)$ máximo para obtener r

$$r^2 = a^2 - \frac{h^2}{4} = a^2 - \frac{4a^2}{4 \cdot 3} = \frac{3a^2 - a^2}{3}$$



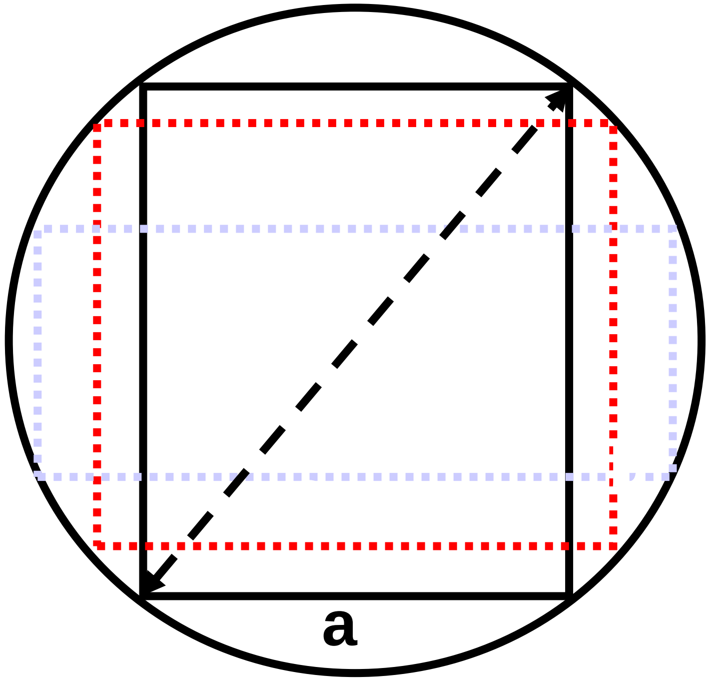
El radio es $r = \sqrt{\frac{2}{3}}a$

Su altura es $h = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

Y su volumen $V = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi a^3$

Ejercicio

Hallar las dimensiones que debe tener un rectángulo inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio para que el área del mismo sea la mayor posible.



Ejercicios del tema

1) Un fondo de inversión genera una rentabilidad $R(x)$ que depende de la cantidad de dinero invertida (x) según la función

$R(x)=-0.002x^2+0.8x-5$. Si tenemos 500€ calcula

a) Cuando aumenta y cuando disminuye la rentabilidad (Sol: ($0, 200$) aumenta y ($200, 500$) disminuye).

b) Cuanto dinero debemos invertir para obtener la máxima rentabilidad y cual será el valor de dicha rentabilidad. (Sol: 200€ con rentabilidad 75€)

2) Determina los extremos locales y globales de la funcuón

$f(x)=3x^4-16x^3+18x^2$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 4$.

3) Halla los valores máximos y mínimos locales de la función

$g(x) = x + 2\,\mathrm{sen}\,x \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES (I)

4) Determina la derivada segunda de la función $x^4 + y^4 = 16$

5) Una empresa de fabricación de puertas de madera utiliza un tablón rectangular para la hoja y tres listones de *10* cm de ancho para el marco (lados laterales y lado superior). El precio del tablón es de *128* € por metro cuadrado y el de los listones es de *87* € por metro lineal. Calcular:

1. Las dimensiones de una puerta de *2* m^2 de superficie de hoja para que el coste sea mínimo. ¿Cuál será su precio? (Sol: *2 x1*, precio=*621.4*)
2. Si la puerta es de *2.5* metros de ancho y *0.8* metros de alto, ¿cuál es su precio? (*2.5* con precio *630.1*)