Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

# INTERPOLACIÓN (II)

# INTERPOLACIÓN. HERMITE. INTRODUCCIÓN

En ciertas circunstancias es posible poder determinar no sólo el valor de *f(x)* en los puntos de interpolación, sino también su derivada primera o segunda

Ejemplo: casos relacionados con la cinemática (Espacio-Velocidad-Aceleración)

Hermite adapta la interpolación de Lagrange para poder tener en cuenta también los valores de *f'(x)* en el cálculo del polinomio

# INTERPOLACIÓN. HERMITE.EXPRESION

Se llama polinomio de interpolación de Hermite de grado $2n+1$ a

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)H_{n,i}(x)+\sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\hat{H}_{n,i}(x)$$

donde $$H_{n,i}(x)=\left[1-2(x-x_i)L'_{n,i}(x_i)\right]L^2_{n,i}(x)$$

y $$\hat{H}_{n,i}(x)=(x-x_i)L^2_{n,i}(x)$$

con $L_{n,i}(x)$ el correspondiente multiplicador de Lagrange de grado $n$ para $i$

# INTERPOLACIÓN. HERMITE. EXPRESIÓN

## Observa

Los polinomios de interpolación de Hermite son polinomios de grado $2n+1$ (impar) para cualquier cantidad de $x_0 \ldots x_n$ ($n+1$ puntos)

Para $n+1$ puntos se opera $n+1$ valores de $f(x)$ y $n+1$ de $f'(x)$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

# INTERPOLACIÓN. HERMITE. ERROR

El error en la interpolación de Hermite viene dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!}(x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2$$

donde $\varepsilon$ cumple las mismas condiciones que en el error de la interpolación de Lagrange, pertenece al intervalo de muestreo

$$\varepsilon \in [mín(x_i, x), máx(x_i, x)]$$

# INTERPOLACIÓN. HERMITE CON DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Si pretendemos usar la interpolación de Hermite mediante tablas se dispone de una versión de diferencias divididas para Hermite

# Recordatorio de la diferencias divididas original

| $x_i$ | $f[x_i]$ | $f[x_{i-1},x_i]$ | $f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$ | $f[x_{i-j},\ldots,x_i]$ | $f[x_0,\ldots,x_n]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | | | | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ | | | |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ | $\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$ | $\ldots$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $x_n$ | $f(x_n)$ | $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$ | $\frac{f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]}{x_n-x_{n-2}}$ | | $\frac{f[x_1,\ldots,x_n]-f[x_0,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$ |

# INTERPOLACIÓN. HERMITE CON DIFERENCIAS DIVIDIDAS

El polinomio de interpolación de Hermite coincide con la expresión

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{i=1}^{2n+1} f[z_0, z_1, \ldots, z_i](x - z_0)\ldots(x - z_{i-1})$$

con $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ y $f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(x_i)$ para $i = 0,1,\ldots,n$

y el resto de expresiones coinciden con las de diferencias divididas

$$f[z_{2i}] = f[z_{2i+1}] = f(x_i) \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

$$f[z_{2i+1}, z_{2(i+1)}] = \frac{f[z_{2(i+1)}] - f[z_{2i+1}]}{z_{2(i+1)} - z_{2i+1}} \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

$$f[z_i, \ldots, z_{i+k}] = \frac{f[z_{i+1}, \ldots, z_{i+k}] - f[z_i, \ldots, z_{i+k-1}]}{z_{i+k} - z_i} \qquad i = 0,1,\ldots,2n-1 \quad k = 2,3,\ldots,2n+1$$

# INTERPOLACIÓN. HERMITE CON DIFERENCIAS DIVIDIDAS

| $z_i$ | $f[z_i]$ | $f[z_{i-1},z_i]$ | $f[z_{i-2},z_{i-1},z_i]$ | $f[z_{i-j},\ldots,z_i]$ | $f[z_0,\ldots,z_n]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | | | | |
| | | $f'(x_0)$ | | | |
| $x_0$ | $f(x_0)$ | | $\frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$ | | |
| | | $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ | | | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| | | $f'(x_1)$ | $\vdots$ | | $\frac{f[z_1,\ldots,z_{2n}]-f[z_0,\ldots,z_{2n-1}]}{z_{2n}-z_0}$ |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| | | $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ | | | |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | | $\vdots$ | | |
| | | $f'(x_2)$ | | | |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | | $\vdots$ | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | |
| | | $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$ | | | |
| $x_n$ | $f(x_n)$ | | $\frac{f[z_{2n},z_{2n-1}]-f[z_{2n-1},z_{2n-2}]}{z_{2n}-z_{2n-2}}$ | | |
| | | $f'(x_n)$ | | | |
| $x_n$ | $f(x_n)$ | | | | |

# INTERPOLACIÓN. HERMITE CON DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Las dos primeras columnas ($z_i$ y $f[z_i]$) tienen duplicadas sus celdas

La tercera columna ($f[z_{i-1}, z_i]$) intercala las $f'(x_i)$ con los cálculos de la versión original

Las $f'(x_i)$ sustituyen a las indeterminaciones

$$\frac{f(x_i)-f(x_i)}{x_i-x_i}$$

que producirían los cálculos originales

A partir de la cuarta columna, la tabla se calcula como la original de diferencias divididas

# INTERPOLACIÓN. HERMITE CON DIFERENCIAS DIVIDIDAS

| $z_i$ | $f[z_i]$ | $f[z_{i-1}, z_i]$ | $f[z_{i-2}, z_{i-1}, z_i]$ | $f[z_{i-j}, \ldots, z_i]$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | | | |
| | | $f'(x_0)$ | | |
| $x_0$ | $f(x_0)$ | | $\frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$ | |
| | | $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ | | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | | $f'(x_1)$ | | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | | $\vdots$ | $f[z_0, \ldots, z_n]$ |
| | | $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ | | $\frac{f[z_1,\ldots,z_{2n}]-f[z_0,\ldots,z_{2n-1}]}{z_{2n}-z_0}$ |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | | $f'(x_2)$ | | |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | | $\vdots$ | |
| | | $\vdots$ | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | |
| | | $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$ | | |
| $x_n$ | $f(x_n)$ | | $\frac{f[z_{2n},z_{2n-1}]-f[z_{2n-1},z_{2n-2}]}{z_{2n}-z_{2n-2}}$ | |
| | | $f'(x_n)$ | | |
| $x_n$ | $f(x_n)$ | | | |

# INTERPOLACIÓN. HERMITE CON DIFERENCIAS DIVIDIDAS

| $z_i$ | $f[z_i]$ | $f[z_{i-1},z_i]$ | $f[z_{i-2},z_{i-1},z_i]$ | $f[z_{i-j},\ldots,z_i]$ | $f[z_0,\ldots,z_n]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | | | | |
| $x_0$ | $f(x_0)$ | $f'(x_0)$ | | | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ | $\frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$ | | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | $f'(x_1)$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\frac{f[z_1,\ldots,z_{2n}]-f[z_0,\ldots,z_{2n-1}]}{z_{2n}-z_0}$ |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | $f'(x_2)$ | $\vdots$ | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | |
| $x_n$ | $f(x_n)$ | $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$ | $\vdots$ | | |
| $x_n$ | $f(x_n)$ | $f'(x_n)$ | $\frac{f[z_{2n},z_{2n-1}]-f[z_{2n-1},z_{2n-2}]}{z_{2n}-z_{2n-2}}$ | | |

# INTERPOLACIÓN. HERMITE. EJERCICIO

*Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ y $f'(x)=f(x)((x-2)/x+\ln(x/2))$*

| $z_i$ | $f[z_i]$ | $f[z_{i-1},z_i]$ | $f[z_{i-2},z_{i-1},z_i]$ | $f[z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | |
| | | $f'(x_0)=-3{,}39$ | | | |
| 1 | 2 | | $\frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$ | | |
| | | $\frac{f[z_2]-f[z_1]}{z_2-z_1}$ | | $\frac{f[z_1,z_2,z_3]-f[z_0,z_1,z_2]}{z_3-z_0}$ | |
| 4 | 4 | | $\frac{f[z_2,z_3]-f[z_1,z_2]}{z_3-z_1}$ | | $\vdots$ |
| | | $f'(x_1)=4{,}77$ | | $\frac{f[z_2,z_3,z_4]-f[z_1,z_2,z_3]}{z_4-z_1}$ | $\vdots$ |
| 4 | 4 | | $\frac{f[z_3,z_4]-f[z_2,z_3]}{z_4-z_2}$ | | |
| | | $\frac{f[z_4]-f[z_3]}{z_4-z_3}$ | | $\frac{f[z_3,z_4,z_5]-f[z_2,z_3,z_4]}{z_5-z_2}$ | |
| 2 | 1 | | $\frac{f[z_4,z_5]-f[z_3,z_4]}{z_5-z_3}$ | | |
| | | $f'(x_2)=0$ | | | |
| 2 | 1 | | | | |

# INTERPOLACIÓN. HERMITE. EJERCICIO

*Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ y $f'(x)=f(x)((x-2)/x+\ln(x/2))$*

| $z_i$ | $f[z_i]$ | | | $f[z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$ | $f[z_{i-4},z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | | |
| | | $-3{,}39$ | | | | |
| 1 | 2 | | $\frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$ | | | |
| | | $2/3$ | | $\frac{f[z_1,z_2,z_3]-f[z_0,z_1,z_2]}{z_3-z_0}$ | | |
| 4 | 4 | | $\frac{f[z_2,z_3]-f[z_1,z_2]}{z_3-z_1}$ | | $\frac{f[z_1,z_2,z_3,z_4]-f[z_0,z_1,z_2,z_3]}{z_4-z_0}$ | |
| | | $4{,}77$ | | $\frac{f[z_2,z_3,z_4]-f[z_1,z_2,z_3]}{z_4-z_1}$ | | $\vdots$ |
| 4 | 4 | | $\frac{f[z_3,z_4]-f[z_2,z_3]}{z_4-z_2}$ | | $\frac{f[z_2,z_3,z_4,z_5]-f[z_1,z_2,z_3,z_4]}{z_5-z_1}$ | |
| | | $3/2$ | | $\frac{f[z_3,z_4,z_5]-f[z_2,z_3,z_4]}{z_5-z_2}$ | | |
| 2 | 1 | | $\frac{f[z_4,z_5]-f[z_3,z_4]}{z_5-z_3}$ | | | |
| | | $0$ | | | | |
| 2 | 1 | | | | | |

# INTERPOLACIÓN. HERMITE. EJERCICIO

*Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ y $f'(x)=f(x)((x-2)/x+\ln(x/2))$*

| $z_i$ | $f[z_i]$ | | | $f[z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$ | $f[z_{i-4},z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | | |
| 1 | 2 | $-3{,}39$ | | | | |
| 4 | 4 | $2/3$ | $1{,}35$ | | | |
| 4 | 4 | $4{,}77$ | $1{,}37$ | $\frac{f[z_1,z_2,z_3]-f[z_0,z_1,z_2]}{z_3-z_0}$ | | |
| 2 | 1 | $3/2$ | $18/11$ | $\frac{f[z_2,z_3,z_4]-f[z_1,z_2,z_3]}{z_4-z_1}$ | $\frac{f[z_1,z_2,z_3,z_4]-f[z_0,z_1,z_2,z_3]}{z_4-z_0}$ | |
| 2 | 1 | $0$ | $3/4$ | $\frac{f[z_3,z_4,z_5]-f[z_2,z_3,z_4]}{z_5-z_2}$ | $\frac{f[z_2,z_3,z_4,z_5]-f[z_1,z_2,z_3,z_4]}{z_5-z_1}$ | $\vdots$ |

# INTERPOLACIÓN. HERMITE. EJERCICIO

## *Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ y $f'(x)=f(x)((x-2)/x+\ln(x/2))$*

| $z_i$ | $f[z_i]$ | | | | $f[z_{i-4}, z_{i-3}, z_{i-2}, z_{i-1}, z_i]$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | | |
| | | $-3{,}39$ | | | | |
| 1 | 2 | | 1,35 | | | |
| | | $2/3$ | | 0,006 | | |
| 4 | 4 | | 1,37 | | $\frac{f[z_1,z_2,z_3,z_4]-f[z_0,z_1,z_2,z_3]}{z_4-z_0}$ | |
| | | 4,77 | | 0,268 | | $\frac{f[z_1,\ldots,z_5]-f[z_0,\ldots,z_4]}{z_5-z_0}$ |
| 4 | 4 | | $18/11$ | | $\frac{f[z_2,z_3,z_4,z_5]-f[z_1,z_2,z_3,z_4]}{z_5-z_1}$ | |
| | | $3/2$ | | 0,443 | | |
| 2 | 1 | | $3/4$ | | | |
| | | 0 | | | | |
| 2 | 1 | | | | | |

# INTERPOLACIÓN. HERMITE. EJERCICIO

*Para* $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ *y* $f'(x)=f(x)((x-2)/x+\ln(x/2))$

$f[z_{i-4}, z_{i-3}, z_{i-2}, z_{i-1}, z_i]$

| $z_i$ | $f[z_i]$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | | |
| | | $-3{,}39$ | | | | |
| 1 | 2 | | 1,35 | | | |
| | | $2/3$ | | 0,006 | | |
| 4 | 4 | | 1,37 | | 0,262 | |
| | | 4,77 | | 0,268 | | $\frac{f[z_1,\ldots,z_5]-f[z_0,\ldots,z_4]}{z_5-z_0}$ |
| 4 | 4 | | $18/11$ | | 0,175 | |
| | | $3/2$ | | 0,443 | | |
| 2 | 1 | | $3/4$ | | | |
| | | 0 | | | | |
| 2 | 1 | | | | | |

# INTERPOLACIÓN. HERMITE. EJERCICIO

*Para* $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ *y* $f'(x)=f(x)((x-2)/x+\ln(x/2))$

| $z_i$ | $f[z_i]$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | $-3{,}39$ | 1,35 | 0,006 | 0,262 | $-0{,}086$ |
| 1 | 2 | $2/3$ | 1,37 | 0,268 | 0,175 | |
| 4 | 4 | 4,77 | $18/11$ | 0,443 | | |
| 4 | 4 | $3/2$ | $3/4$ | | | |
| 2 | 1 | 0 | | | | |
| 2 | 1 | | | | | |

# INTERPOLACIÓN. HERMITE. EJERCICIO

*Para f(x)=(x/2)^(x-2) y f'(x)=f(x)((x-2)/x+ln(x/2))*

$$f(x)=(x/2)^{(x-2)} \quad y \quad f'(x)=f(x)((x-2)/x+\ln(x/2))$$

| $z_i$ | $f[z_i]$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | | |
| | | $-3{,}39$ | | | | |
| 1 | 2 | | $1{,}35$ | | | |
| | | $2/3$ | | $0{,}006$ | | |
| 4 | 4 | | $1{,}37$ | | $0{,}262$ | |
| | | $4{,}77$ | | $0{,}268$ | | $-0{,}086$ |
| 4 | 4 | | $18/11$ | | $0{,}175$ | |
| | | $3/2$ | | $0{,}443$ | | |
| 2 | 1 | | $3/4$ | | | |
| | | $0$ | | | | |
| 2 | 1 | | | | | |

$$f(3)=3/2=1{,}5$$

$$H_3(3)=0{,}608$$

$$\Delta H_3(3)=0{,}892$$

$$H_3(x)=2-3{,}39(x-1)+1{,}35(x-1)^2+0{,}006(x-1)^2(x-4)$$

# INTERPOLACIÓN. HERMITE. EJERCICIO

## *Para f(x)=(x/2)^(x-2) y f'(x)=f(x)((x-2)/x+ln(x/2))*

| $z_i$ | $f[z_i]$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | | |
| | | $-3{,}39$ | | | | |
| 1 | 2 | | $1{,}35$ | | | |
| | | $2/3$ | | $0{,}006$ | | |
| 4 | 4 | | $1{,}37$ | | $0{,}262$ | |
| | | $4{,}77$ | | $0{,}268$ | | $-0{,}086$ |
| 4 | 4 | | $18/11$ | | $0{,}175$ | |
| | | $3/2$ | | $0{,}443$ | | |
| 2 | 1 | | $3/4$ | | | |
| | | $0$ | | | | |
| 2 | 1 | | | | | |

$$f(3) = 3/2 = 1{,}5$$

$$H_3(3) = 0{,}608$$

$$\Delta H_3(3) = 0{,}892$$

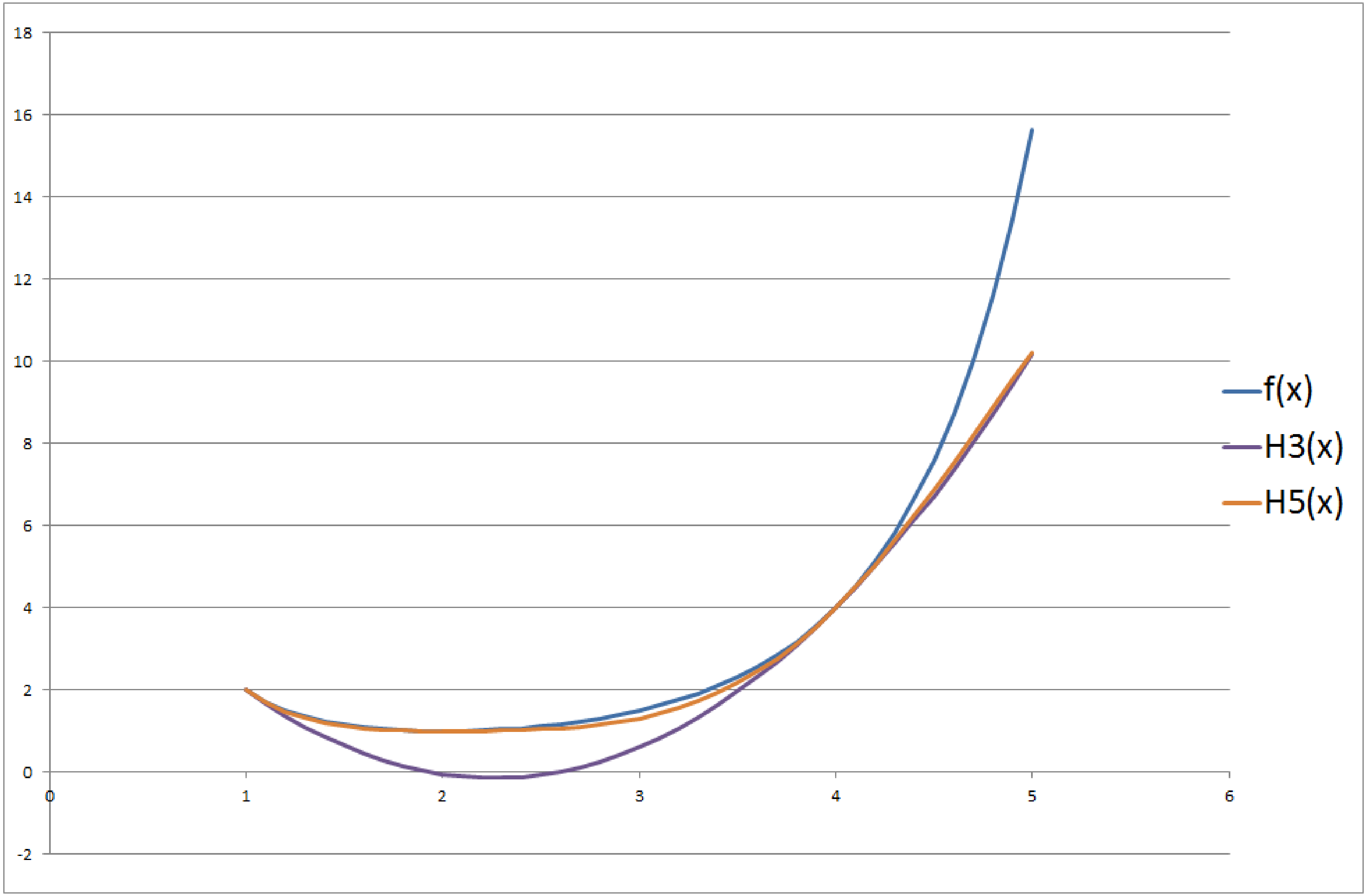
$$H_5(3) = 1{,}31$$

$$\Delta H_5(3) = 0{,}19$$

$$H_3(x) = 2 - 3{,}39(x-1) + 1{,}35(x-1)^2 + 0{,}006(x-1)^2(x-4)$$

$$H_5(x) = H_3(x) + 0{,}262(x-1)^2(x-4)^2 - 0{,}086(x-1)^2(x-4)^2(x-2)$$

# INTERPOLACIÓN. HERMITE. EJERCICIO



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

# INTERPOLACIÓN. HERMITE. EJERCICIO

*De la tabla de diferencias se pueden sacar polinomios de grado par que no coinciden exactamente con los definidos por Hermite pero también interpolan.*

| $z_i$ | $f[z_i]$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | $-3{,}39$ | $1{,}35$ | $0{,}006$ | $0{,}262$ | $-0{,}086$ |
| 1 | 2 | $2/3$ | $1{,}37$ | $0{,}268$ | $0{,}175$ | |
| 4 | 4 | $4{,}77$ | $18/11$ | $0{,}443$ | | |
| 4 | 4 | $3/2$ | $3/4$ | | | |
| 2 | 1 | $0$ | | | | |
| 2 | 1 | | | | | |

$$f(3) = 3/2 = 1{,}5$$

$$H_4(3) = 1{,}655$$

$$H_4(x) = H_3(x) + 0{,}262(x-1)^2(x-4)^2$$

$$\Delta H_4(3) = 0{,}155$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINES

También conocida como interpolación por partes, esta técnica consiste en interpolar por intervalos, evitando así las espurias  oscilaciones en los extremos de la curva interpolada al aumentar el grado

La idea central es que en vez de usar un solo polinomio para interpolar todos los datos, se pueden usar segmentos de polinomios entre pares de datos y unir cada uno de ellos adecuadamente para ajustarlos

# INTERPOLACIÓN. SPLINES

A su vez ha dado nombre a aquellas curvas que, sobre todo en programas de diseño, se modelan mediante puntos de control

Son, pues, un conjunto de curvas polinómicas enlazadas en intervalos consecutivos definidos por una serie de puntos de interpolación

# INTERPOLACIÓN. SPLINES

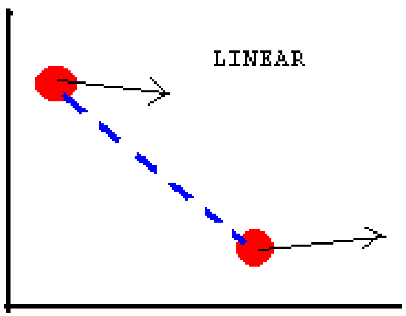
Se puede decir, que una función spline está formada por varios polinomios, cada uno definido en un intervalo y que se unen entre si bajo ciertas condiciones de continuidad

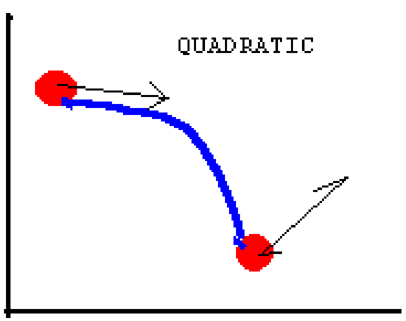
Para un conjunto numeroso de puntos no es muy útil calcular el polinomio interpolante que pasa por estos puntos, pues éste tiende a tener grandes oscilaciones

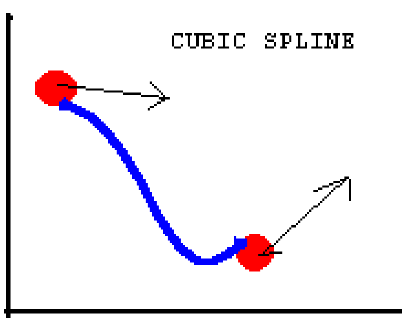
Más aconsejable es hacer una interpolación secuencial de grado bajo sobre subconjuntos más pequeños del total de puntos, definiendo así una función a trozos.

# INTERPOLACIÓN. SPLINES

Los polinomios utilizados pueden ser lineales, cuadráticos o cúbicos ya que los polnomios de grado alto son costosos computacionalmente hablando.



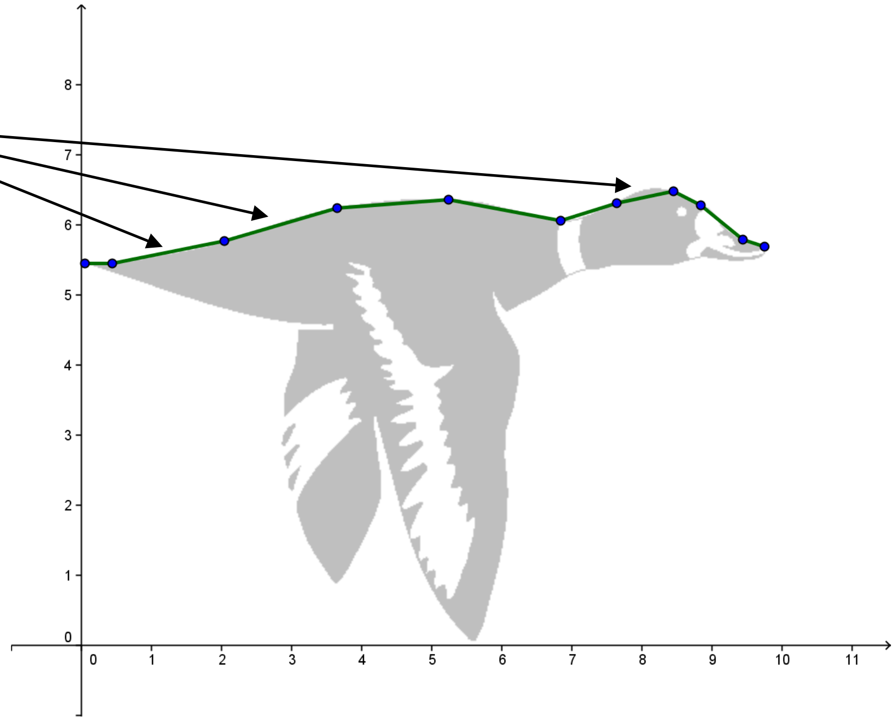



# INTERPOLACIÓN. SPLINES LINEALES

La interpolación mediante splines más sencilla sería la del spline lineal que aproximaría la curva entre cada dos puntos mediante una recta

Rectas

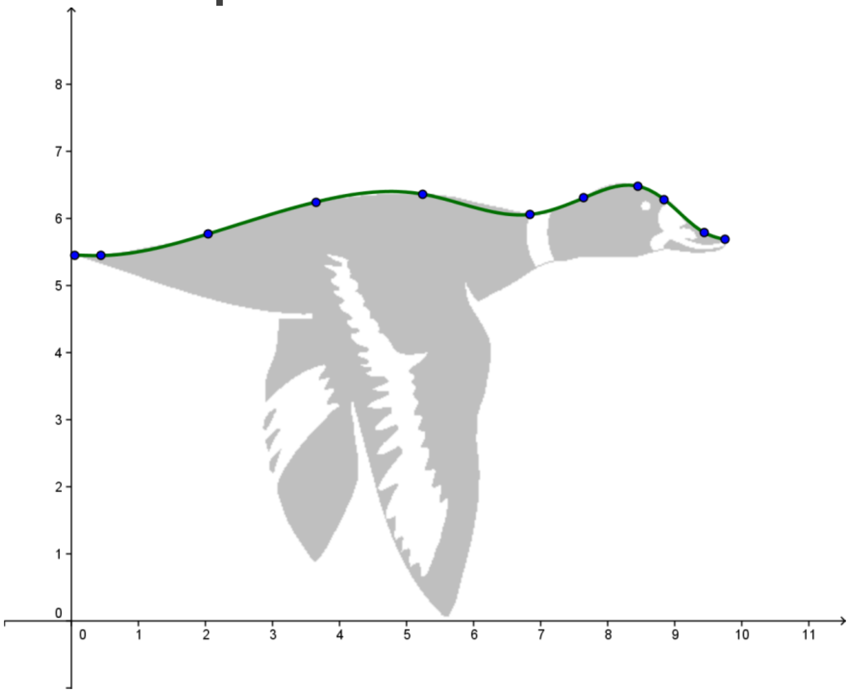


# INTERPOLACIÓN. SPLINES CUADRÁTICOS

La interpolación cuadrática de splines eliminaría la sensación de recta quebrada, al exigir continuidad a la primera derivada, es decir, se exige que la curva de un intervalo termina con la misma pendiente (derivada) que con la que comienza la del siguiente intervalo

# INTERPOLACIÓN. SPLINES CÚBICOS

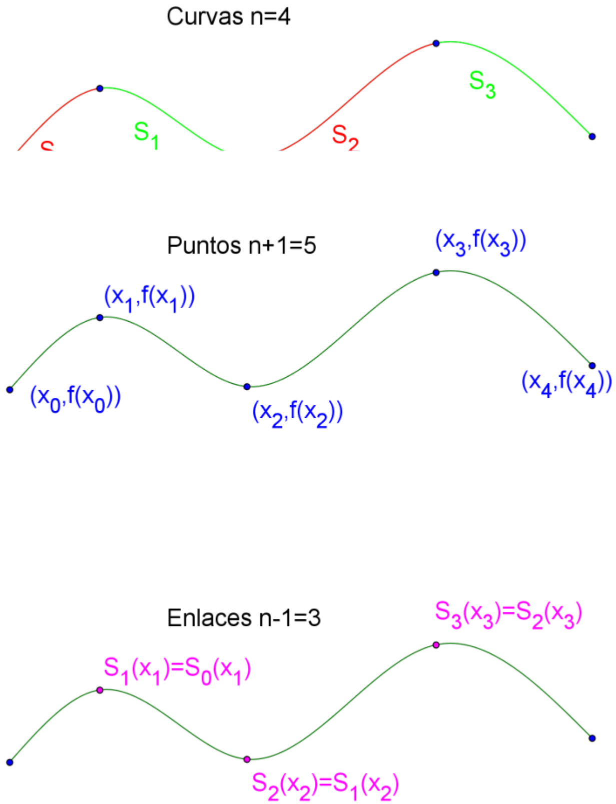
La curva resulta más suave al exigir además la misma condición para la segunda derivada. Es decir, la segunda derivada en los puntos de unión de los polinomios tiene que coincidir. Se trata entonces del spline cúbico



# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO

Dados una $x_0<x_1<\ldots<x_n$, se dice que $S(x)$ es un spline cúbico interpolador de $f(x)$ si cumple

$$S(x)=\begin{cases} \text{si} \quad x\in[x_0,x_1) & S_0(x) \\ \text{si} \quad x\in[x_1,x_2) & S_1(x) \\ \vdots & \\ \text{si} \quad x\in[x_{n-1},x_n) & S_{n-1}(x) \end{cases}$$




$$S(x_i)=f(x_i) \quad i=0,1,\ldots,n$$

$$S_{i+1}(x_{i+1})=S_i(x_{i+1}) \quad i=0,1,\ldots,n-2$$

$$S'_{i+1}(x_{i+1})=S'_i(x_{i+1}) \quad i=0,1,\ldots,n-2$$

$$S''_{i+1}(x_{i+1})=S''_i(x_{i+1}) \quad i=0,1,\ldots,n-2$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO

La forma de los polinomios cúbicos $S_i(x)$ es

$$
\begin{gathered}
S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3 \\
S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3 \\
\vdots \\
S_{n-1}(x) = a_{n-1} + b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x - x_{n-1})^3
\end{gathered}
$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO

Existen diferentes tipos de splines cúbicos según la forma que tomen las curvas de sus extremos, destacamos dos:

Ejemplos

I. Spline cúbico de extremo natural

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$$

II. Spline cúbico de extremo cortado

$$S'(x_0) = f'(x_0) \quad S'(x_n) = f'(x_n)$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO

Nosotros consideramos spline con extremo natural debido a su simplicidad

Para el cálculo de los coeficientes de los polinomios cúbicos hay que resolver un sistema de ecuaciones que nos da las expresiones siguientes

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO NATURAL. FÓRMULAS

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$c_0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 \\ m_{2,1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_{n-1,n-1} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$c_n = 0$$

| $x_i$ | $h_i$ | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $h_0$ | $a_0$ | $b_0$ | $c_0$ | $d_0$ |
| $x_1$ | $h_1$ | $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ | $d_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_{n-1}$ | $h_{n-1}$ | $a_{n-1}$ | $b_{n-1}$ | $c_{n-1}$ | $d_{n-1}$ |
| $x_n$ | | $a_n$ | | $c_n$ | |

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO NATURAL. EJEMPLO

## $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

| $x_i$ | $h_i$ | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $h_0$ | $a_0$ | $b_0$ | $c_0$ | $d_0$ |
| 2 | $h_1$ | $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ | $d_1$ |
| 4 | | $a_2$ | | $c_2$ | |

$$c_0 = 0$$

$$[c_1] = [m_{1,1}]^{-1} \times [v_1]$$

$$c_2 = 0$$

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO NATURAL. EJEMPLO

## f(x)=(x/2)^(x-2)

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

| $x_i$ | $h_i$ | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | $b_0$ | $c_0$ | $d_0$ |
| 2 | 2 | 1 | $b_1$ | $c_1$ | $d_1$ |
| 4 | | 4 | | $c_2$ | |

$$c_0 = 0$$

$$[c_1] = [m_{1,1}]^{-1} \times [v_1]$$

$$c_2 = 0$$

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO NATURAL. EJEMPLO

## $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

| $x_i$ | $h_i$ | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | $b_0$ | $c_0$ | $d_0$ |
| 2 | 2 | 1 | $b_1$ | $c_1$ | $d_1$ |
| 4 | | 4 | | $c_2$ | |

$$c_0 = 0$$

$$[c_1] = [6]^{-1} \times [15/2]$$

$$c_2 = 0$$

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO NATURAL. EJEMPLO

$$f(x)=(x/2)^{(x-2)}$$

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

| $x_i$ | $h_i$ | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | $b_0$ | 0 | $d_0$ |
| 2 | 2 | 1 | $b_1$ | $5/4$ | $d_1$ |
| 4 | | 4 | | 0 | |

$$c_0 = 0$$

$$[5/4] = [6]^{-1} \times [15/2]$$

$$c_2 = 0$$

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO NATURAL. EJEMPLO

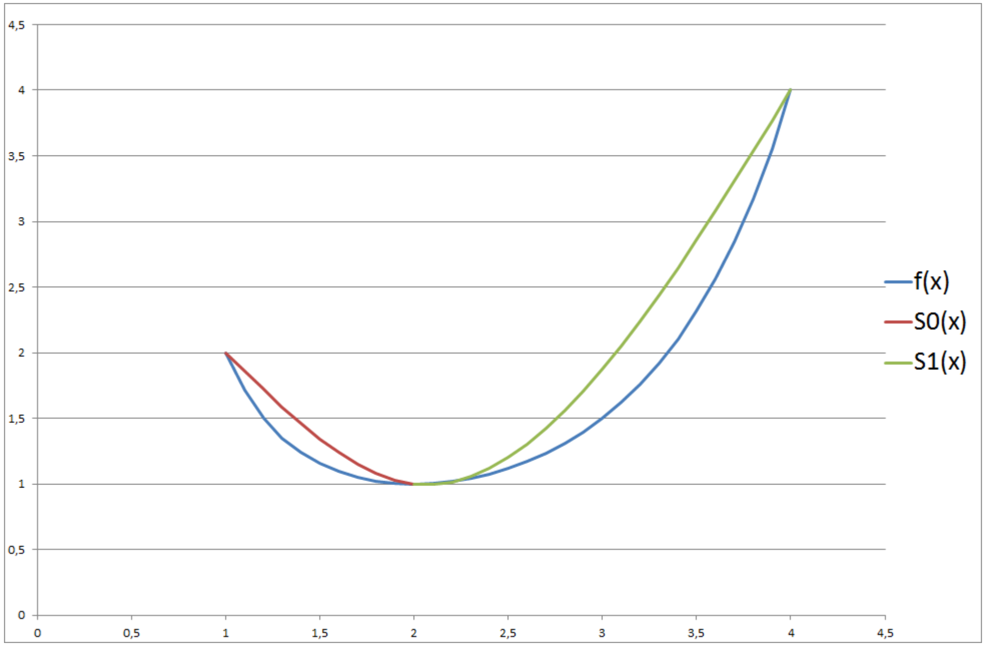
## $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$
$$a_i = f(x_i)$$
$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$
$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

| $x_i$ | $h_i$ | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | $-\frac{17}{12}$ | 0 | $\frac{5}{12}$ |
| 2 | 2 | 1 | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{4}$ | $-\frac{5}{24}$ |
| 4 | | 4 | | 0 | |

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO NATURAL. EJEMPLO




$$f(x)=(x/2)^{(x-2)}$$

| $x_i$ | $h_i$ | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | $-\frac{17}{12}$ | 0 | $\frac{5}{12}$ |
| 2 | 2 | 1 | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{4}$ | $-\frac{5}{24}$ |
| 4 | | 4 | | 0 | |

$$S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3$$

$$S(x)=\begin{cases} \text{si} \quad x\in[1,2) & S_0(x)=2-\dfrac{17}{12}(x-1)+\dfrac{5}{12}(x-1)^3 \\ \text{si} \quad x\in[2,4] & S_1(x)=1-\dfrac{1}{6}(x-2)+\dfrac{5}{4}(x-2)^2-\dfrac{5}{24}(x-2)^3 \end{cases}$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO NATURAL. EJEMPLO

**$f(x)=(x/2)^{(x-2)}$**

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$c_0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 0 & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$c_4 = 0$$

| $x_i$ | $h_i$ | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $h_0$ | $a_0$ | $b_0$ | $c_0$ | $d_0$ |
| 2 | $h_1$ | $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ | $d_1$ |
| 3 | $h_2$ | $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ | $d_2$ |
| 4 | $h_3$ | $a_3$ | $b_3$ | $c_3$ | $d_3$ |
| 5 | | $a_4$ | | $c_4$ | |

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO NATURAL. EJEMPLO

**$f(x)=(x/2)^{(x-2)}$**

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$c_0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 0 & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$c_4 = 0$$

| $x_i$ | $h_i$ | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | $b_0$ | $c_0$ | $d_0$ |
| 2 | 1 | 1 | $b_1$ | $c_1$ | $d_1$ |
| 3 | 1 | $3/2$ | $b_2$ | $c_2$ | $d_2$ |
| 4 | 1 | 4 | $b_3$ | $c_3$ | $d_3$ |
| 5 | | $\frac{125}{8}$ | | $c_4$ | |

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO NATURAL. EJEMPLO

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

**$f(x)=(x/2)^{(x-2)}$**

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$c_0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 9/2 \\ 6 \\ \frac{219}{8} \end{bmatrix}$$

$$c_4 = 0$$

| $x_i$ | $h_i$ | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | $b_0$ | $c_0$ | $d_0$ |
| 2 | 1 | 1 | $b_1$ | $c_1$ | $d_1$ |
| 3 | 1 | $3/2$ | $b_2$ | $c_2$ | $d_2$ |
| 4 | 1 | 4 | $b_3$ | $c_3$ | $d_3$ |
| 5 | | $\frac{125}{8}$ | | $c_4$ | |

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO NATURAL. EJEMPLO

$$f(x)=(x/2)^{(x-2)}$$

$$h_i=(x_{i+1}-x_i)$$

$$d_i=\frac{(c_{i+1}-c_i)}{3h_i} \qquad a_i=f(x_i)$$

$$b_i=\frac{(a_{i+1}-a_i)}{h_i}-\frac{h_i}{3}(2c_i+c_{i+1})$$

$$c_0=0$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{15}{56} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{56} \\ -\frac{1}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} \\ \frac{1}{56} & -\frac{1}{14} & \frac{15}{56} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 6 \\ \frac{219}{8} \end{bmatrix}$$

$$c_4=0$$

| $x_i$ | $h_i$ | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | $b_0$ | $c_0$ | $d_0$ |
| 2 | 1 | 1 | $b_1$ | $c_1$ | $d_1$ |
| 3 | 1 | $3/2$ | $b_2$ | $c_2$ | $d_2$ |
| 4 | 1 | 4 | $b_3$ | $c_3$ | $d_3$ |
| 5 | | $\frac{125}{8}$ | | $c_4$ | |

$$m_{i,i}=2(h_{i-1}+h_i)$$

$$m_{i,i+1}=m_{i+1,i}=h_i$$

$$v_i=(3/h_i)(a_{i+1}-a_i)-(3/h_{i-1})(a_i-a_{i-1})$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO NATURAL. EJEMPLO

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i} \qquad a_i = f(x_i)$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{81}{64} \\ -\frac{9}{16} \\ \frac{447}{64} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{56} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{56} \\ -\frac{1}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} \\ \frac{1}{56} & -\frac{1}{14} & \frac{15}{56} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 6 \\ \frac{219}{8} \end{bmatrix}$$

| $x_i$ | $h_i$ | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | $b_0$ | 0 | $d_0$ |
| 2 | 1 | 1 | $b_1$ | $\frac{81}{64}$ | $d_1$ |
| 3 | 1 | $\frac{3}{2}$ | $b_2$ | $\frac{-9}{16}$ | $d_2$ |
| 4 | 1 | 4 | $b_3$ | $\frac{447}{64}$ | $d_3$ |
| 5 | | $\frac{125}{8}$ | | 0 | |

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO NATURAL. EJEMPLO

| $x_i$ | $h_i$ | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | $-91/64$ | 0 | $27/64$ |
| 2 | 1 | 1 | $-5/32$ | $81/64$ | $-39/64$ |
| 3 | 1 | $3/2$ | $35/64$ | $-9/16$ | $161/64$ |
| 4 | 1 | 4 | $223/32$ | $447/64$ | $-149/64$ |
| 5 | | $125/8$ | | 0 | |

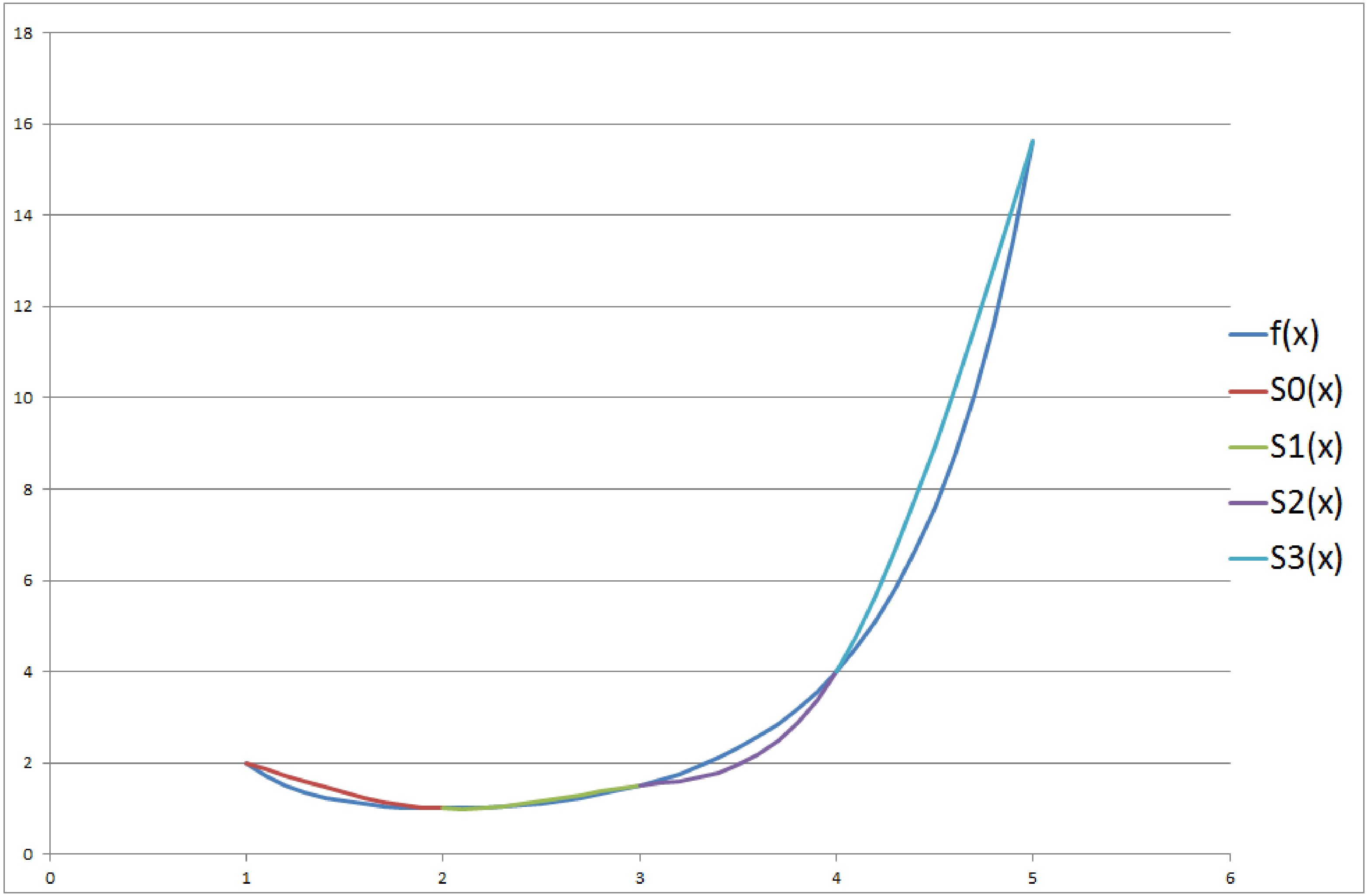
$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO NATURAL. EJEMPLO

$$S(x) =$$

$$\begin{cases}
\text{si} \quad x \in [1,2) & S_0(x) = 2 - \dfrac{91}{64}(x-1) + \dfrac{27}{64}(x-1)^3 \\
\text{si} \quad x \in [2,3) & S_1(x) = 1 - \dfrac{5}{32}(x-2) + \dfrac{81}{64}(x-2)^2 - \dfrac{39}{64}(x-2)^3 \\
\text{si} \quad x \in [3,4) & S_2(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{35}{64}(x-3) - \dfrac{9}{16}(x-3)^2 + \dfrac{161}{64}(x-3)^3 \\
\text{si} \quad x \in [4,5] & S_3(x) = 4 - \dfrac{223}{32}(x-2) + \dfrac{445}{64}(x-2)^2 - \dfrac{149}{64}(x-2)^3
\end{cases}$$

# INTERPOLACIÓN. SPLINE CÚBICO NATURAL. EJEMPLO



# Spline vs Lagrange