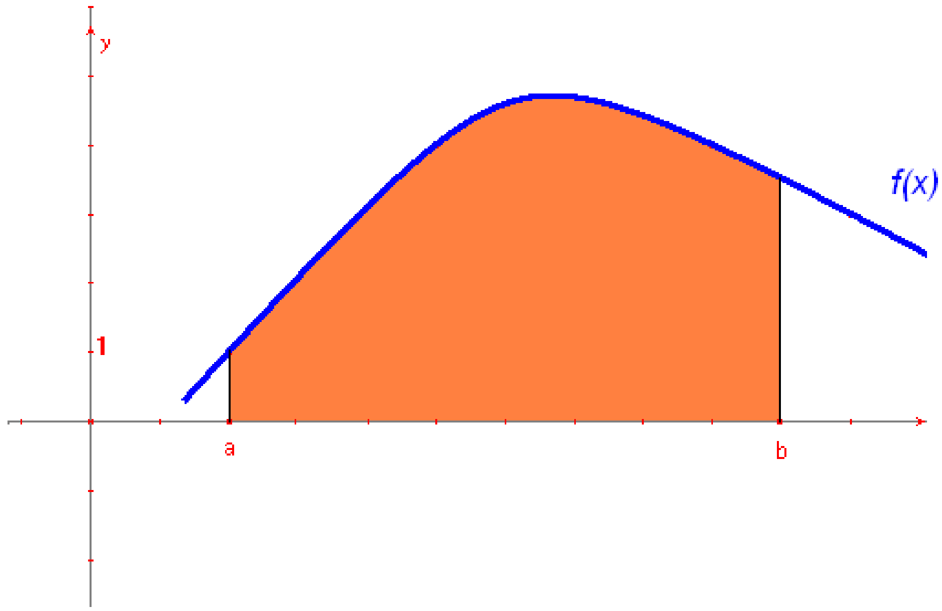
Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CÁLCULO INTEGRAL. APLICACIONES (I)

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

Dada una función f que es continua y no negativa en un intervalo $[a, b]$, encontrar el área entre la gráfica de f y en eje x en el intervalo $[a, b]$ consiste en calcular el área coloreada



CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

Vamos a intentar aproximar el área bajo una curva mediante la suma de áreas de polígonos

En concreto se va a utilizar rectángulos por su sencillez

FORMALIZACIÓN MATEMÁTICA

Dado un intervalo $[a, b]$ donde $a < b$, el conjunto de puntos

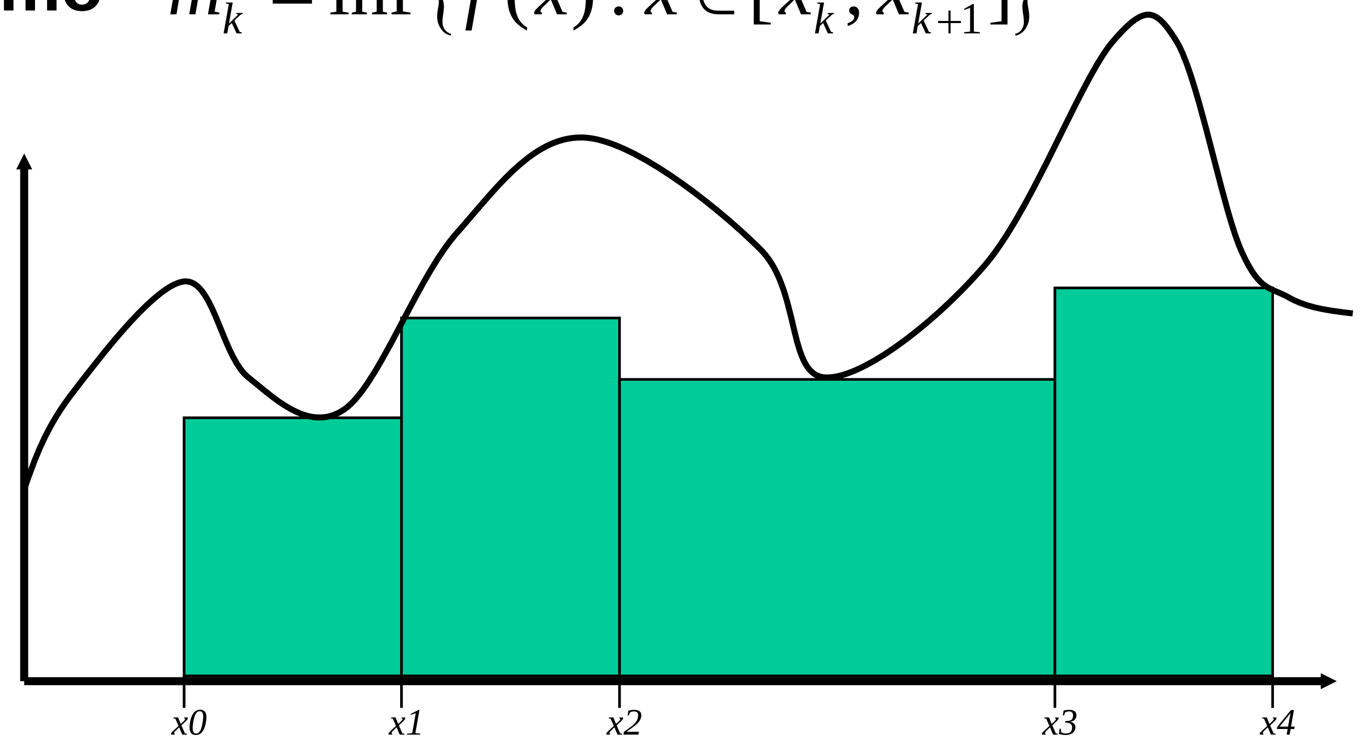
$$P = \{x_k \in [a, b] / \ \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

recibe el nombre de partición del intervalo dado. Toda partición P de un intervalo $[a, b]$, divide a este en n subintervalos $[x_k, x_{k+1}], i = 0, \ldots n - 1,$ no necesariamente de igual longitud.

La longitud de cada intervalo es $x_{k+1} - x_k$

FORMALIZACIÓN MATEMÁTICA

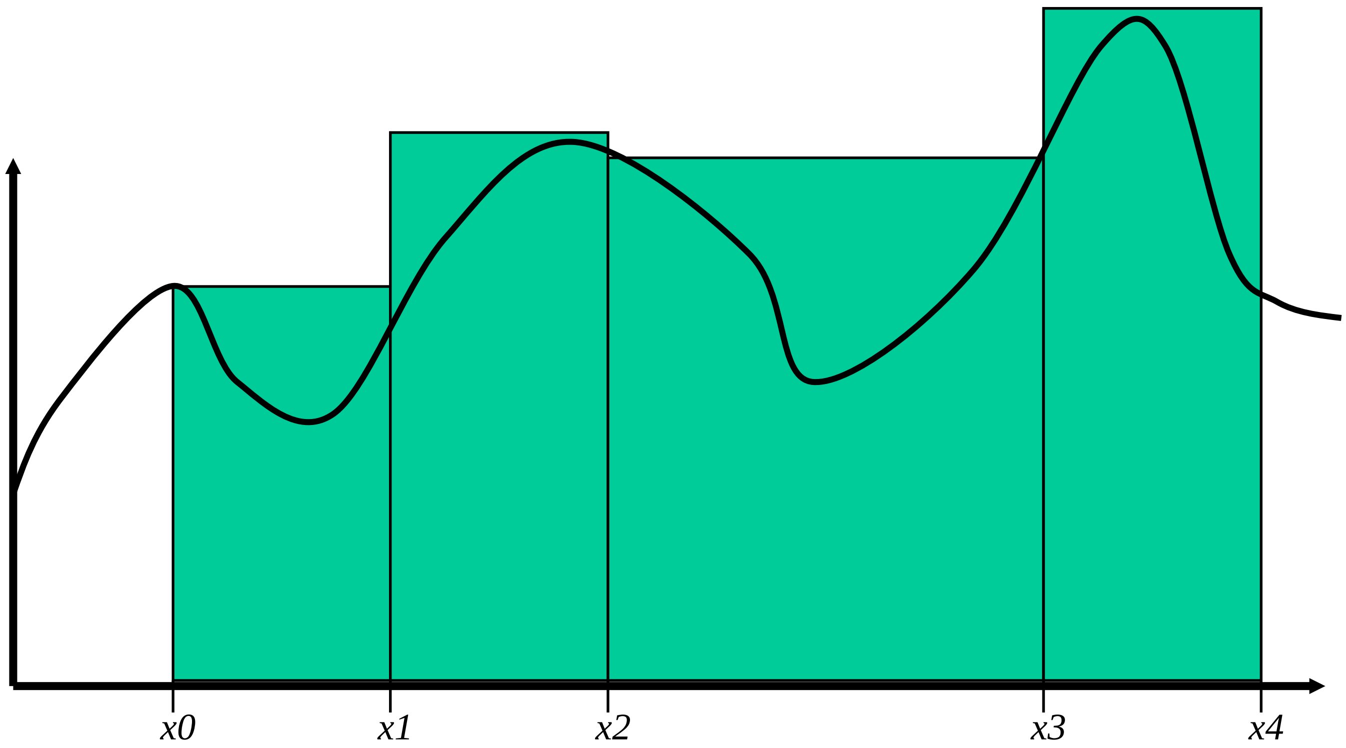
Si en cada subintervalo definido por una partición se puede encontrar el valor mínimo entonces a este valore se les denomina **ínfimo** $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$



Donde el área de cada rectángulo es $m_k(x_{k+1} - x_k),\ k = 0 \ldots n-1$

FORMALIZACIÓN MATEMÁTICA

Si en cada subintervalo definido por una partición se puede encontrar el valor máximo entonces a este valore se les denomina **supremo** $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$

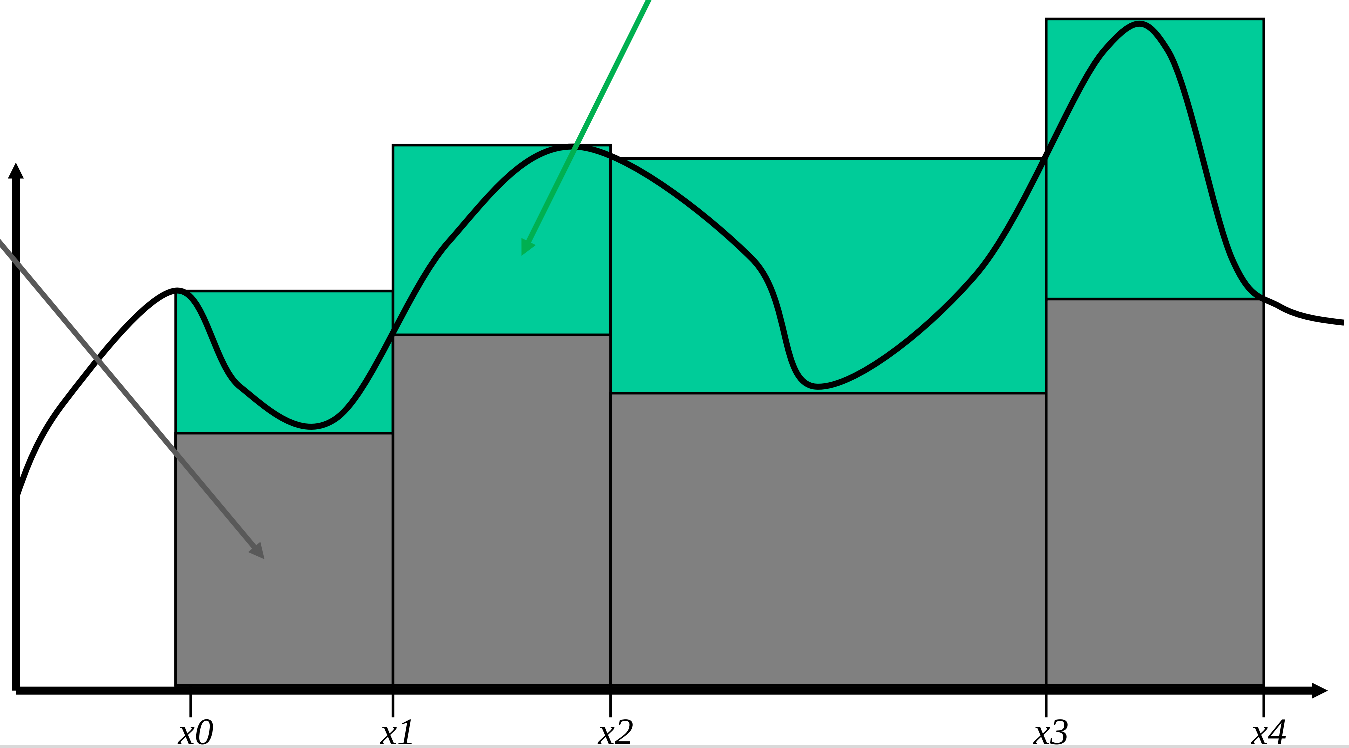


Donde el área de cada rectángulo es $M_k(x_{k+1} - x_k),\ k = 0 \ldots n-1$

FORMALIZACIÓN MATEMÁTICA

Sumando las áreas de todos los rectángulos se obtienen las sumas inferior y superior

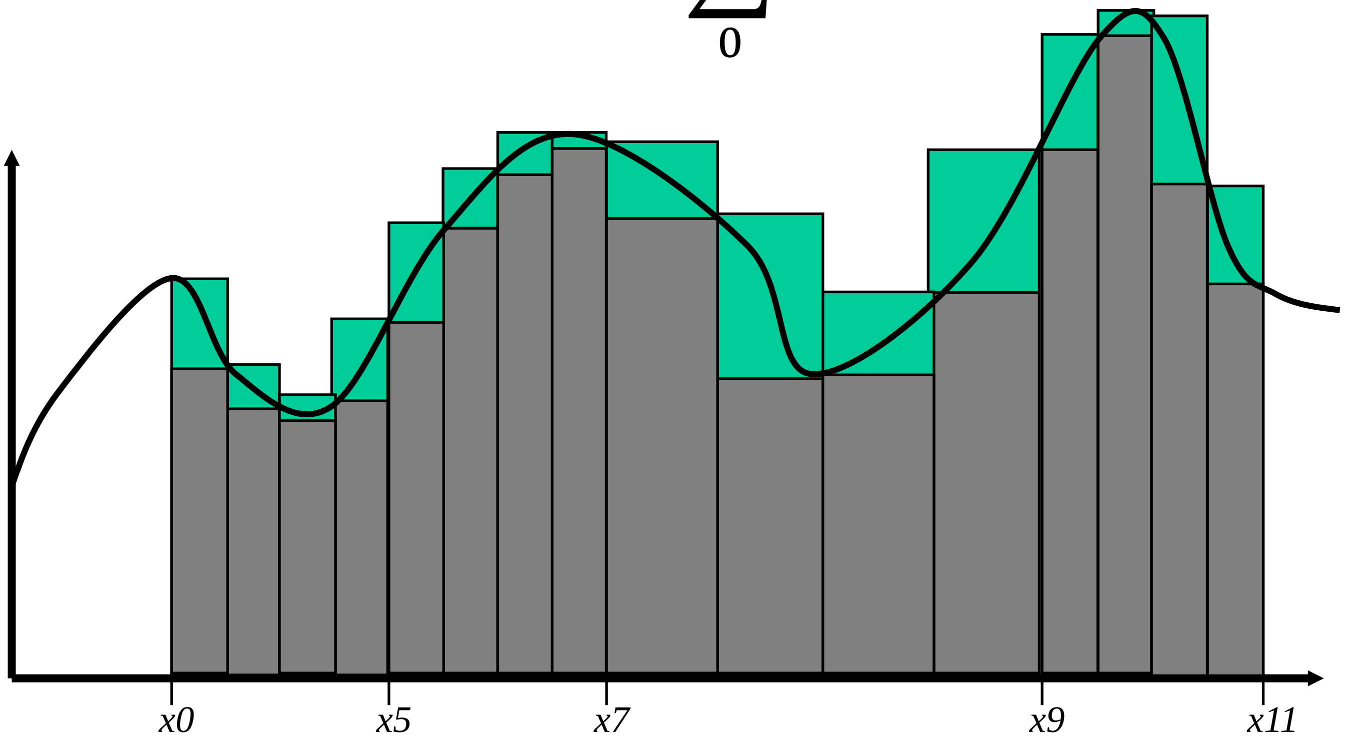
$$L(f,P) = \sum_{0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k), \qquad U(f,P) = \sum_{0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$$



FORMALIZACIÓN MATEMÁTICA

Al aumentar el número de rectángulos ($n \to \infty$), la suma de las áreas de los rectángulos definidos por la partición de aproxima más al área bajo la curva

$$L(f,P) = \sum_{0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \quad \mathrm{U}(f,P) = \sum_{0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$



FORMALIZACIÓN MATEMÁTICA

Para simplificar el cálculo, vamos a utilizar particiones equiespaciadas, es decir, cada subintervalo tiene la misma longitud

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} = \Delta x$$

SUMAS INFERIOR Y SUPERIOR

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

$$L(f,P) = \sum_{0}^{n-1} m_k \Delta x \rightarrow$$

Cuando $n \rightarrow \infty$ esta suma inferior se acerca al área bajo la curva f entre $x = a$ y $x = b$

$$U(f,P) = \sum_{0}^{n-1} M_k \Delta x \rightarrow$$

Cuando $n \rightarrow \infty$ esta suma superior se acerca al área bajo la curva f entre $x = a$ y $x = b$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Además se cumple

$$L(f,P) = L_n \leq \text{Área bajo la curva} \leq U(f,P) = U_n$$

SUMAS INFERIOR Y SUPERIOR

Cuando $n \rightarrow \infty$ entonces $\Delta x \rightarrow 0$, y si L_n y U_n son el mismo límite, se dice que la función f es integrable en $[a, b]$ y a ese límite se le denomina **integral definida** de f entre los límites a y b y se denota por

$$\int_a^b f(x)dx$$

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

Físicamente la integral definida es un sumatorio, geométricamente es el área bajo una curva entre dos límites y algebraicamente es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos cuando el número de estos tiende a infinito

$$\int_a^b f(x)dx$$

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

La integral definida es un número y no una función.

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

Integrar $f(x)=x^2$ para $x \in [0,1]$

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

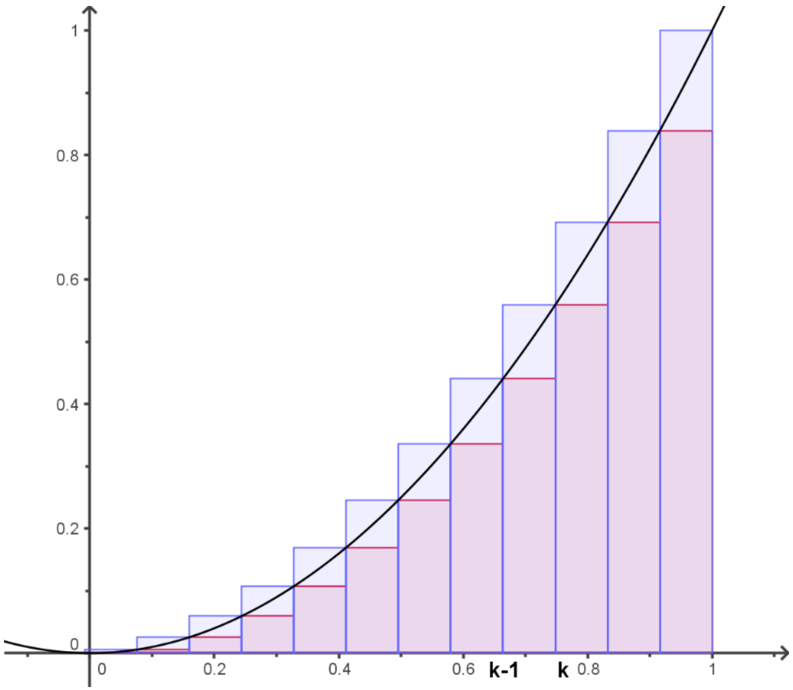
Ejemplo. Integrar *f(x)=x²* para *x є [0,1]*

$$L_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2}\frac{1}{n}$$

$$L_n(f) = \frac{1}{n^3}\left[0^2 + \ldots + (n-1)^2\right]$$

$$U_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\frac{1}{n}$$

$$U_n(f) = \frac{1}{n^3}\left[1^2 + \ldots + n^2\right]$$



Usando $$1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$L_n(f) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

$$U_n(f) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

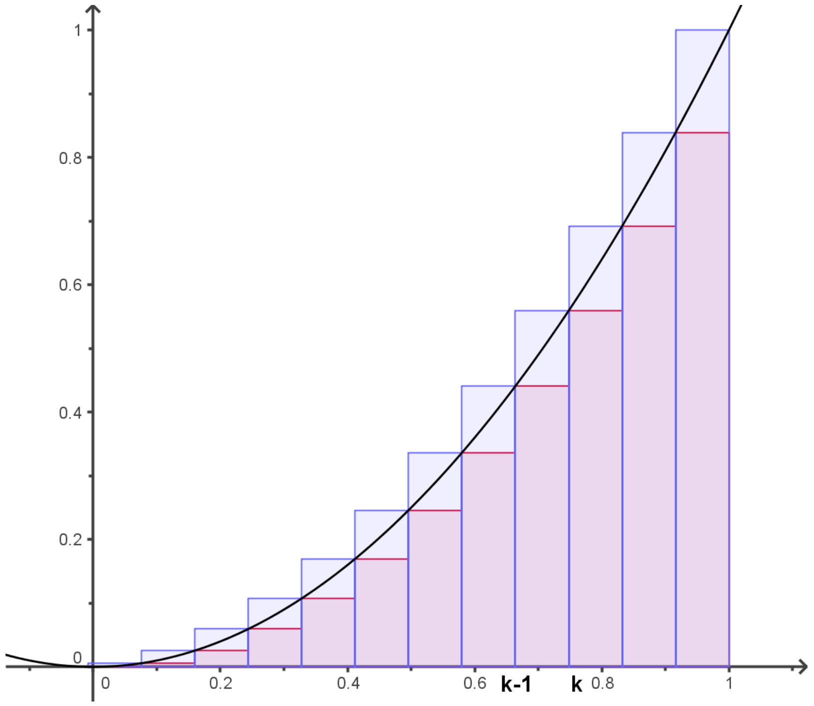
Ejemplo. Integrar *f(x)=x²* para *x ϵ [0,1]*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \frac{2}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f) = \frac{2}{6}$$



$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

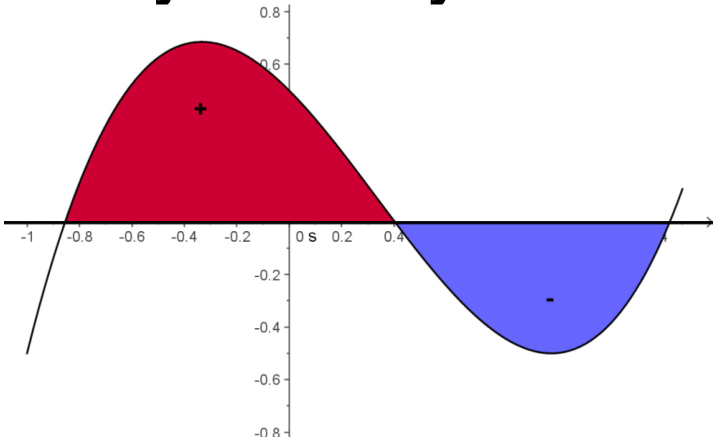
Corte con el eje X

Si $f(x)$ es positiva y negativa, la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

representa la diferencia entre las áreas de las regiones que queden por encima y las áreas de las que queden por debajo del eje x

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

INTEGRAL DEFINIDA. PROPIEDADES

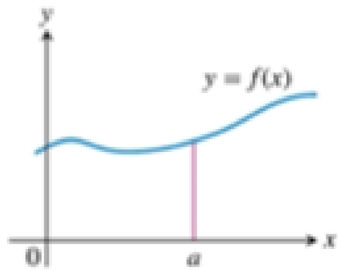
1.	*Order of Integration:*	$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$	A Definition
2.	*Zero Width Interval:*	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$	Definition when $f(a)$ exists
3.	*Constant Multiple:*	$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$	Any Number k
		$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$	$k = -1$
4.	*Sum and Difference:*	$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$	
5.	*Additivity:*	$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$	
6.	*Max-Min Inequality:*	If f has maximum value max f and minimum value min f on $[a, b]$, then	

$$\min f \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f \cdot (b-a).$$

7.	*Domination:*	$f(x) \ge g(x)$ on $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$	
		$f(x) \ge 0$ on $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$	(Special Case)

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

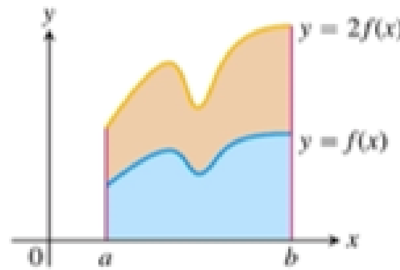
INTEGRAL DEFINIDA. PROPIEDADES



(a) *Zero Width Interval:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

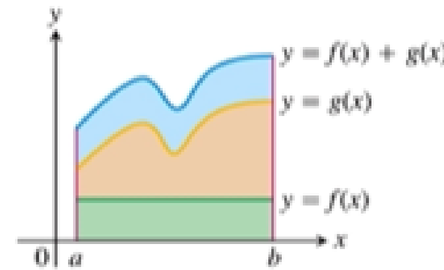
(The area under a point is 0.)



(b) *Constant Multiple:*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

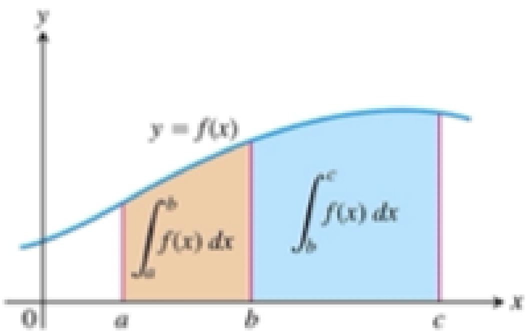
(Shown for $k = 2$.)



(c) *Sum:*

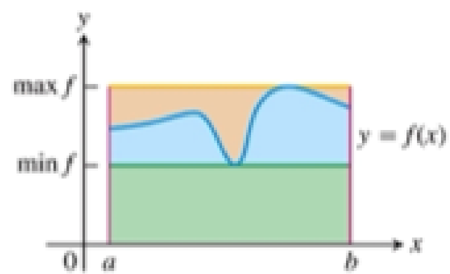
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(Areas add)



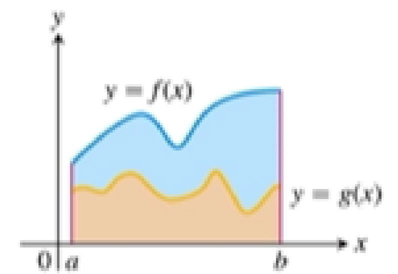
(d) *Additivity for definite integrals:*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



(e) *Max-Min Inequality:*

$$\min f \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx$$
$$\le \max f \cdot (b-a)$$



(f) *Domination:*

$f(x) \ge g(x)$ on $[a, b]$

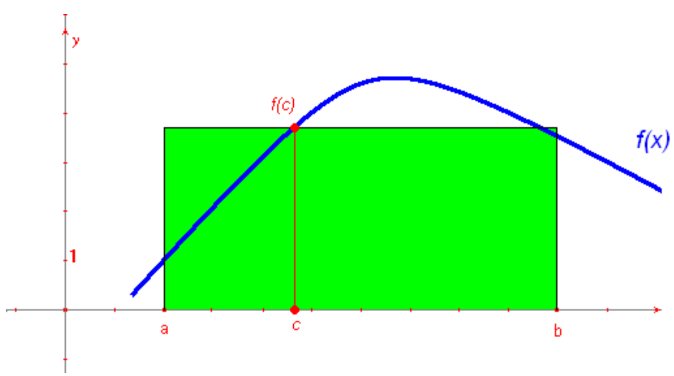
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

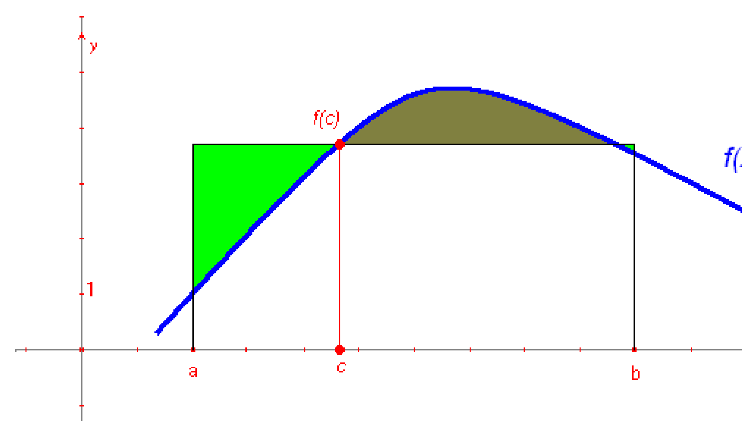
CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

TEOREMA DE LA MEDIA (INTEGRAL)

Si una función $f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces existe un $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$





CÁLCULO INTEGRAL. APLICACIONES

- El problema del área. Concepto de integral definida
- Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$ entonces

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es continua en $[a, b]$.

Si además $f(x)$ es continua en $c \in [a, b]$, entonces $F(x)$ es derivable en c y

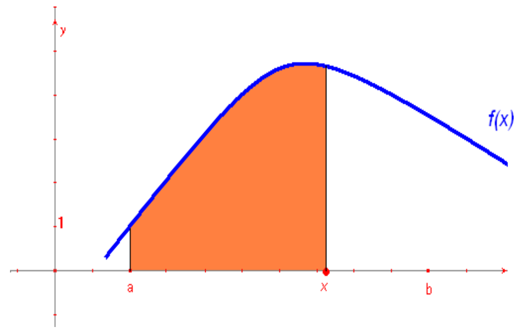
$$F'(x) = f(x)$$

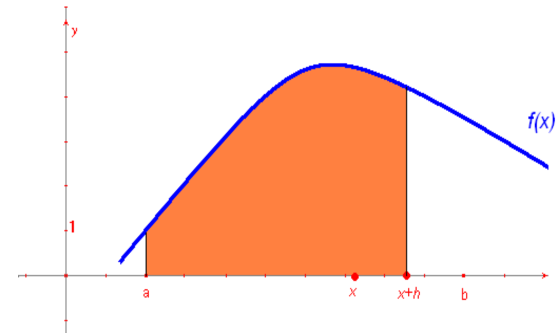
PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Demostración

Si

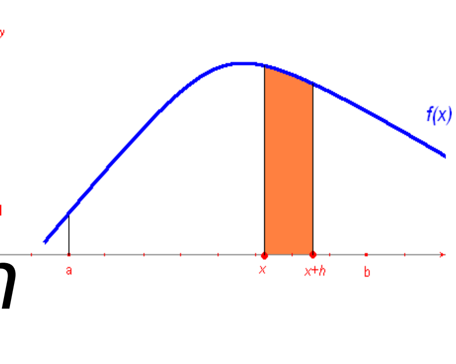
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$





por teorema valor medio

$$F(x+h) - F(x) = h \cdot f(c)$$



donde $c \in [x, x+h]$ y *por definición*

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot f(c)}{h} = f(c)$$

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y $f(x) = g'(x)$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a) = g(x)]_a^b$$

Demostración:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad F'(x) = f(x) \qquad F(x) = g(x) + k$$

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = g(a) + k = 0 \qquad k = -g(a)$$

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt = g(b) + k = g(b) - g(a) = g(t)]_a^b$$

REGLA DE BARROW

Se dice que $g(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si $f(x) = g'(x)$

$F(x) = g(x) + k$ nos sirve para representar cualquier elemento del conjunto de todas las primitivas de $f(x)$

Y el segundo teorema fundamental se conoce como regla de Barrow

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

INTEGRAL INDEFINIDA

Es el conjunto de todas las infinitas primitivas de una función y se denota por

$$\int f(x)dx$$

Se resuelve como $\int f(x)dx = F(x) + C$

donde *C* es la constante de integración.

Podemos considerar, pues, la integral indefinida como la operación inversa a la deriva, lo que se denomina antiderivada.

INTEGRAL INDEFINIDA

Sirven para resolver integrales definidas mediante la regla de Barrow

El sistema consiste en establecer tablas de primitivas o aplicar reglas para el cálculo de las no conocidas, y así poder resolver las integrales.

Integrales elementales

$$\int 0dx = c \qquad \int adx = ax + c \qquad \int xdx = \frac{x^2}{2} + c$$

INTEGRAL INDEFINIDA

Tablas de primitivas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Como $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$ entonces $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

INTEGRAL INDEFINIDA

Tablas de primitivas

Como

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

entonces

$$\int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x) + c$$

INTEGRAL INDEFINIDA

Tablas de primitivas

Como $$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Entonces $$\int e^x dx = e^x + c$$

Y más … (ver tablas de primitivas).

INTEGRAL INDEFINIDA

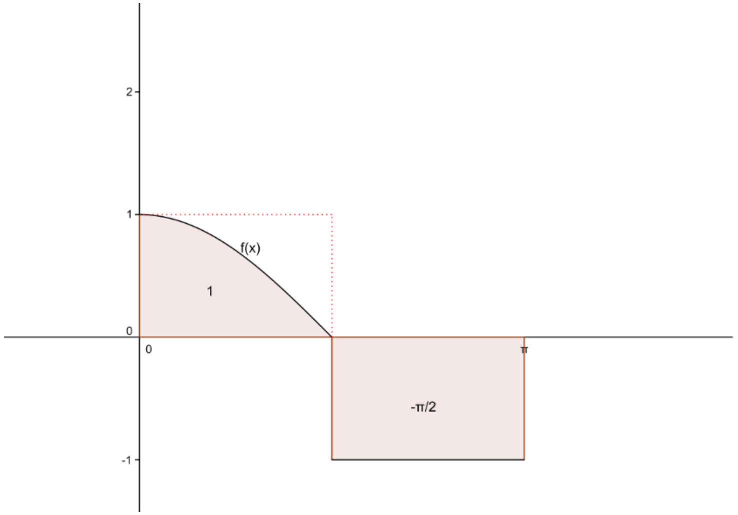
Ejercicio

$$\int_0^{\pi} f(x)dx \text{ si } \quad f(x)=\begin{cases}\cos(x) & para \quad 0\le x\le \pi/2\\ -1 & para \quad \pi/2< x\le \pi\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi/2}\cos(x)dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(-1)dx=$$

$$=\operatorname{sen}(x)\Big]_0^{\pi/2}+(-x)\Big]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$=1-\pi/2$$



INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Como la regla de la cadena deriva

$$\frac{d}{dx} f[g(x)] = f'[g(x)]g'(x)$$

entonces

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = F[g(x)] + c$$

Hacemos el cambio de variable *u=g(x)* para sustituir *du* por *g'(x)dx*

$$\int f(u)du = F(u) + c$$

INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Ejemplo

$$\int x\cos(x^2)dx$$

Se hace el cambio *u=x*[2] y *du=2xdx*

$$\int x\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int 2x\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)du$$

$$\frac{1}{2}\int \cos(u)du = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(u) + c = \frac{\mathrm{sen}(x^2)}{2} + c$$

INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Ejemplo

Se realiza el cambio $u = \ln(x) \to du = dx/x$, y también e y 5

$$\int_e^5 \frac{dx}{x\ln(x)}$$

$$u(e) = \ln(e) = 1$$
$$u(5) = \ln(5)$$

$$\int_e^5 \frac{dx}{x\ln(x)} = \int_1^{\ln(5)} \frac{du}{u} = \ln(u)\Big]_1^{\ln(5)}$$

$$\ln(\ln(5)) - \ln(1) = \ln(\ln(5))$$

INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Ejercicio

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Si $$\frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

entonces

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

de donde

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Si se cambia a la nomenclatura *df=f'(x)dx*, y u=f(x), v=g(x), la regla queda

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

<u>**S**</u>entado <u>**u**</u>n <u>**d**</u>ía <u>**v**</u>i <u>**u**</u>n <u>**v**</u>aliente <u>**S**</u>oldado <u>**v**</u>estido <u>**d**</u>e <u>**u**</u>niforme

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Prioridad para escoger la función **u**

Inversas: arcsen, arccos, arctag
Logarítmicas: log
Aritméticas: x^n
Trigonométricas: sen, cos, tag
Exponenciales: e^x

INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo

$$\int \ln(x)dx \qquad\qquad \int udv = uv - \int vdu$$

Tomamos $u = \ln(x)$ y $dv = dx$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo

$$\int \ln(x)dx \qquad \int udv = uv - \int vdu$$

Tomamos $u = \ln(x)$ y $dv = dx$

Calculamos $du = dx/x$ y $v = x$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo

$$\int \ln(x)dx \qquad\qquad \int udv = uv - \int vdu$$

Tomamos $u = \ln(x)$ y $dv = dx$

Calculamos $du = dx/x$ y $v = x$

$$\int \ln(x)dx = \ln(x)x - \int x\frac{dx}{x} =$$

$$= x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + c = x(\ln(x) - 1) + c$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo

$$\int e^x \mathrm{sen}(x)dx \qquad\qquad \int udv = uv - \int vdu$$

Tomamos $u = sen(x)$ y $dv = e^x dx$

Calculamos $du = \cos(x)dx$ y $v = ex$

Sustituimos

$$\int e^x \,\mathrm{sen}(x)dx = e^x \,\mathrm{sen}(x) - \int e^x \cos(x)dx$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo

$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx$ $\qquad$ $\int udv = uv - \int vdu$

Tomamos $\quad u=sen(x) \quad$ y $\quad dv=e^x dx$

Calculamos $\quad du=cos(x)dx \quad$ y $\quad v=e^x$

Sustituimos

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \cos(x)dx$$

Tomamos $\quad u=cos(x) \quad$ y $\quad dv=e^x dx$

Calculamos $\quad du=-sen(x)dx \quad$ y $\quad v=e^x$

Sustituimos

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = e^x \operatorname{sen}(x) - \left(e^x \cos(x) - \int -e^x sen(x)dx\right)$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx$$

Integral por partes cíclica

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = e^x \operatorname{sen}(x) - \left(e^x \cos(x) - \int -e^x sen(x)dx\right)$$

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = e^x \operatorname{sen}(x) - e^x \cos(x) - \int e^x sen(x)dx$$

$$2\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = e^x\left(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\right)$$

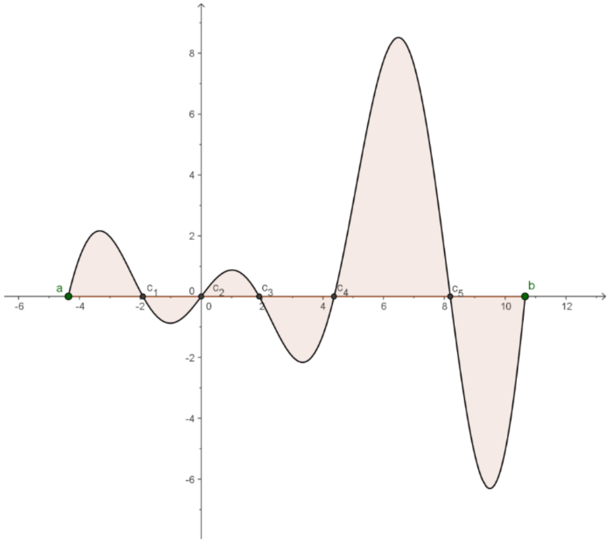
$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = e^x\left(\frac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{2}\right) + c$$

APLICACIONES. ÁREAS

Áreas comprendidas en la curva y el eje x

Se deben buscar los puntos de corte de la función con el eje *x* para integrar por intervalos:

$$C_1, C_2, \ldots, Cn_{-1}, C_n$$



Se suman las partes, en valor absoluto, de la integral por intervalos

$$\left|\int_a^{c_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \ldots + \left|\int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_n}^{b} f(x)dx\right|$$

APLICACIONES. ÁREAS - EJEMPLO

Calcula el área comprendida entre $x^4 - 5x^2 + 4$ y el eje x en el intervalo $[-2,2]$

APLICACIONES. ÁREAS - EJEMPLO

Área comprendida entre x^4-5x^2+4 y el eje x en $[-2,2]$

$$x^4-5x^2+4=(x^2)^2-5(x^2)+4$$

$$(x^2)=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\begin{matrix}4\\1\end{matrix}$$

$$x=\begin{matrix}\pm\sqrt{4}=\begin{matrix}+2\\-2\end{matrix}\\\pm\sqrt{1}=\begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}\end{matrix}$$

Al ser función par

$$A=2\left(\left|\int_0^1(x^4-5x^2+4)dx\right|+\left|\int_1^2(x^4-5x^2+4)dx\right|\right)=$$

$$=2\left(\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x\right]_0^1\right|+\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x\right]_1^2\right|\right)=$$

APLICACIONES. ÁREAS – EJEMPLO

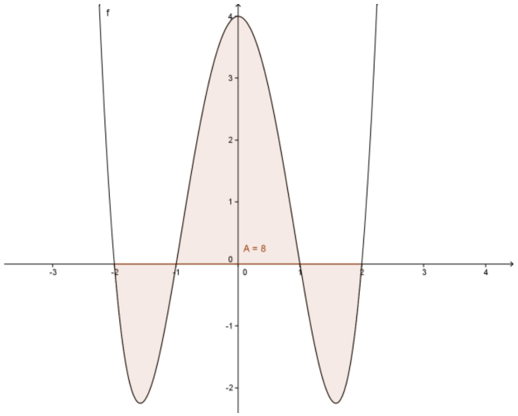
Área comprendida entre $x^4 - 5x^2 + 4$ y el eje x en $[-2,2]$

$$A = 2\left(\left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x\right]_1^2\right|\right) =$$

$$= \frac{2}{15}\left(\left|\left[3x^5 - 25x^3 + 60x\right]_0^1\right| + \left|\left[3x^5 - 25x^3 + 60x\right]_1^2\right|\right)$$

$$= \frac{2}{15}\left(\left|38 - 0\right| + \left|\left[96 - 200 + 120\right] - 38\right|\right) =$$

$$= \frac{2}{15}(38 + |16 - 38|) = \frac{2 \cdot 60}{15} = 8$$

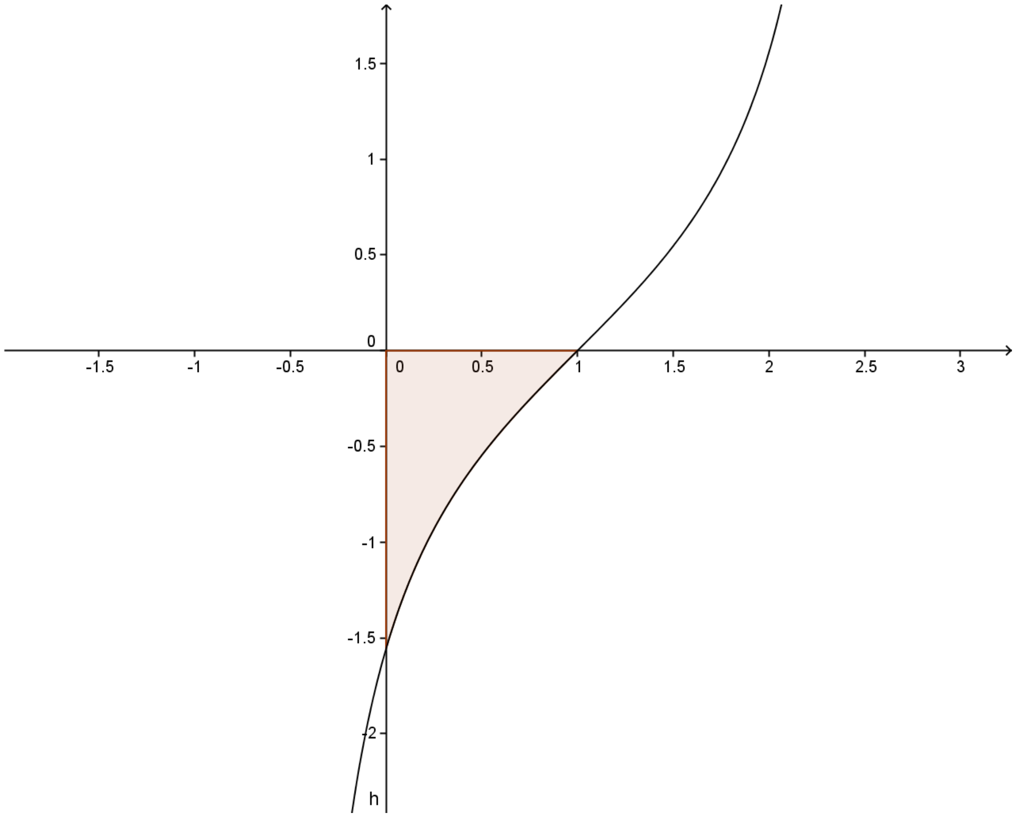


APLICACIONES. ÁREAS

Área comprendida entre la curva y los dos ejes

Se busca b más próximo a 0 tal que $f(b) = 0$ y

$$A = \left| \int_0^b f(x)dx \right|$$



APLICACIONES. ÁREAS - EJEMPLO

Calcular el área comprendida entre $f(x) = \tan(x-1)$ y ambos ejes

APLICACIONES. ÁREAS – EJEMPLO

Área comprendida entre $f(x) = \tan(x-1)$ y ambos ejes $\tan(x-1)=0$

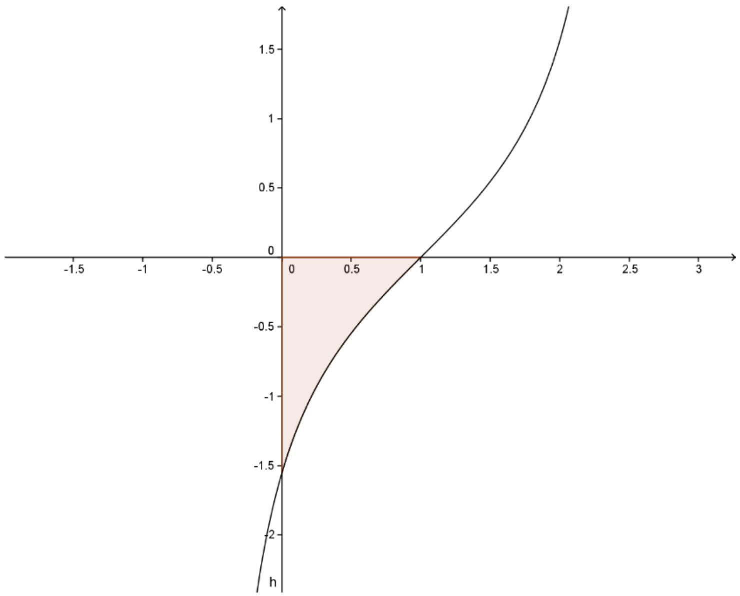
Corte con el eje *y* en $x = 1$

$$A = \left| \int_0^1 \tan(x-1)\,dx \right|$$

$$= \left| \left[-\ln(\cos(x-1)) \right]_0^1 \right|$$

$$= \left| \left[0 + \ln(\cos(-1)) \right] \right|$$

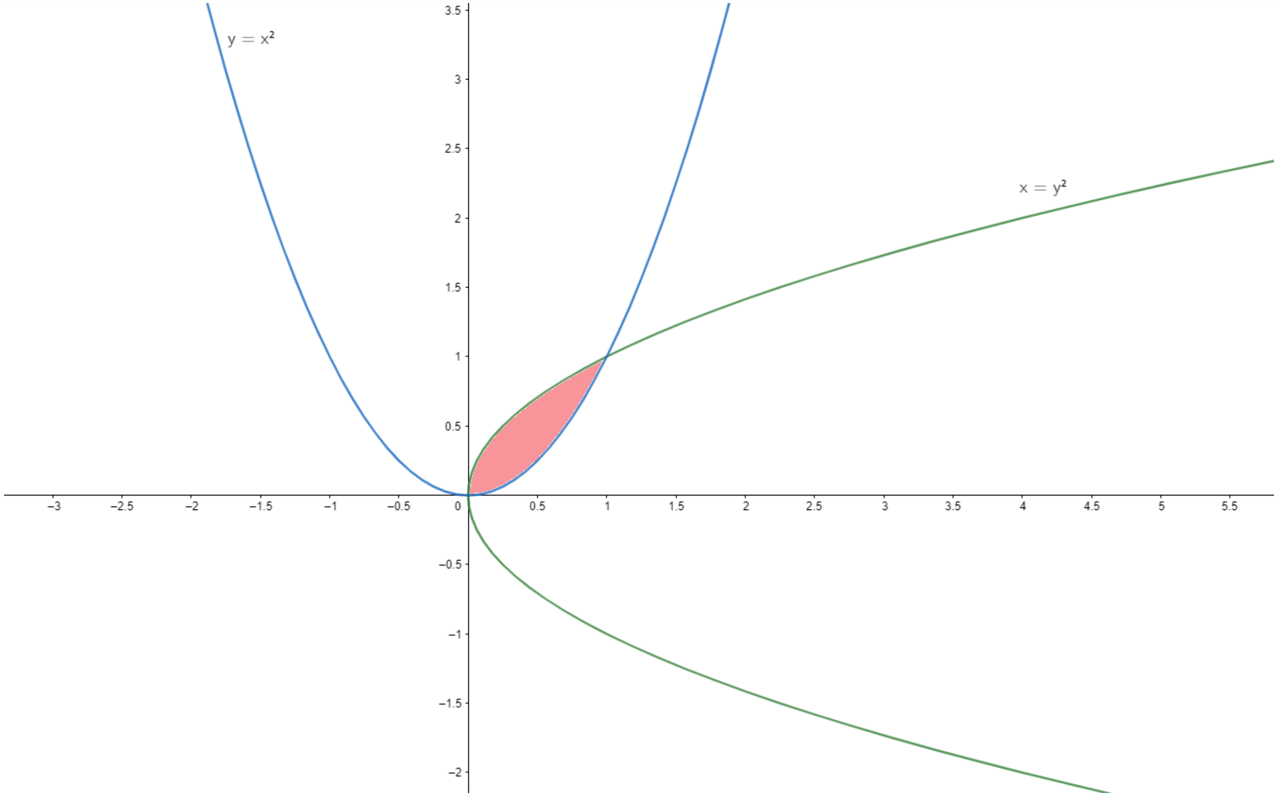
$$= -\ln(\cos(1))$$



APLICACIONES. ÁREAS – EJERCICIO

Calcular el área comprendida entre las curvas

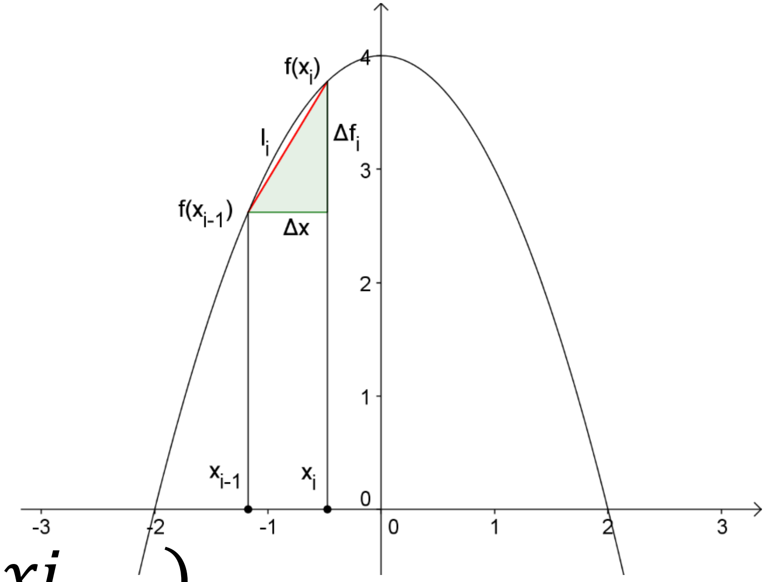
$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = x^2 \end{cases}$$



Longitud de una gráfica

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos donde $f(x)$ es continua y de igual longitud $\Delta x = (b - a)/n$

En cada subintervalo, una hipotenusa l_i que va de $f(xi_{-1})$ a $f(xi)$ se aproxima a la longitud de la gráfica en ese subintervalo. Los catetos son Δx y



$$\Delta f_i = f(xi) - f(xi_{-1})$$

$$l_i = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta f_i^{\,2}} = \sqrt{\Delta x^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

APLICACIONES. LONGITUDES

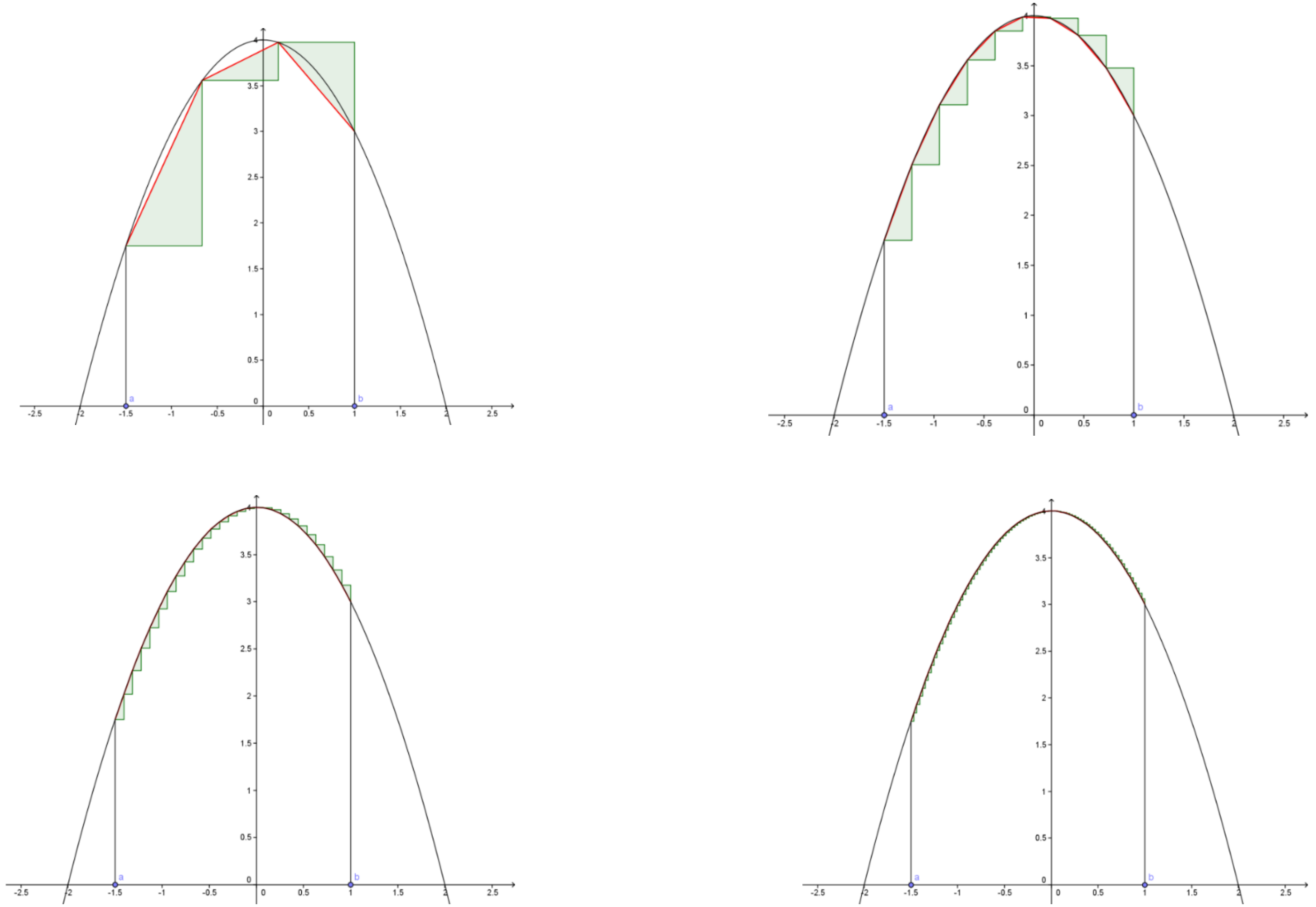
Longitud de una gráfica

$$l_i = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta f_i^{\,2}} = \sqrt{\Delta x^2 + \frac{\Delta f_i^{\,2} \cdot \Delta x^2}{\Delta x^2}} =$$

$$= \sqrt{\Delta x^2 \left(1 + \frac{\Delta f_i^{\,2}}{\Delta x^2}\right)} = \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta f_i^{\,2}}{\Delta x^2}\right)}\Delta x =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x}\right)^2}\Delta x = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}\right)^2}\Delta x$$

Longitud de una gráfica



APLICACIONES. LONGITUDES

Longitud de una gráfica

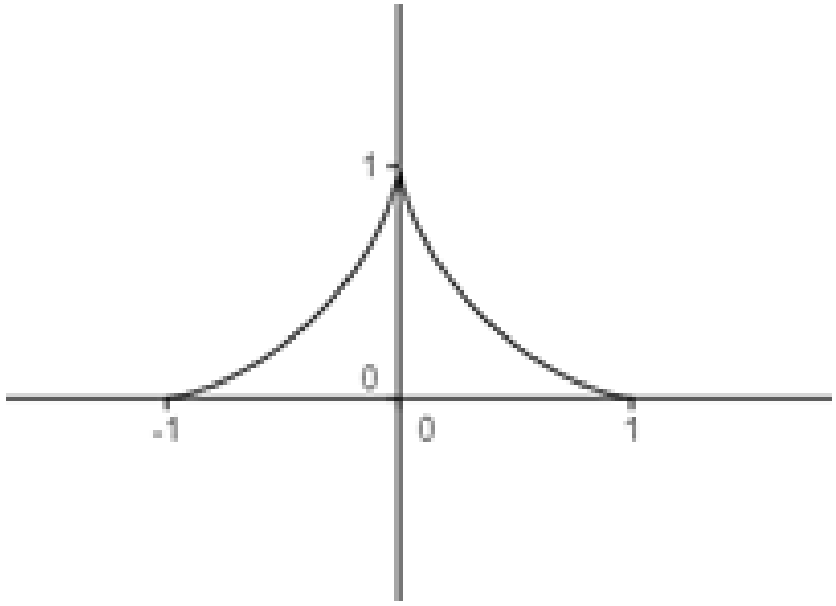
$$L = \sum_{n\to\infty} l_i = \sum_{n\to\infty} \sqrt{1+\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\Delta x}\right)^2}\,dx$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

APLICACIONES. LONGITUDES – EJEMPLO

Calcula la longitud de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$



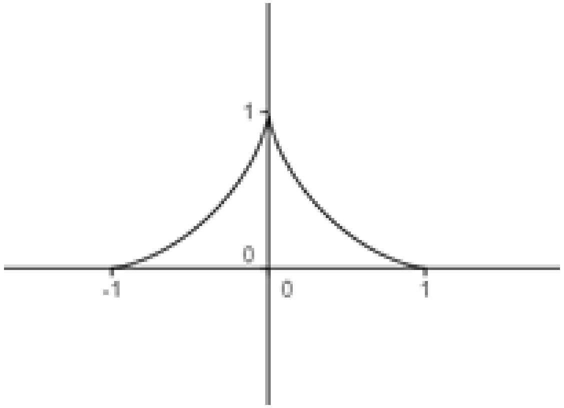
APLICACIONES. LONGITUDES – EJEMPLO

Calcula la longitud de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

Derivada implícita

$$\frac{2x^{-1/3}}{3} + \frac{2y^{-1/3}}{3}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

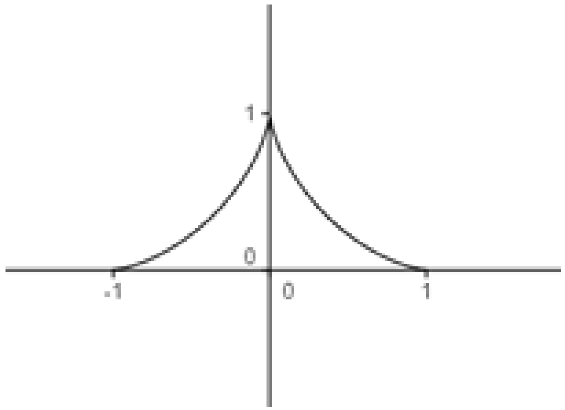


APLICACIONES. LONGITUDES - EJEMPLO

Calcula la longitud de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

Derivada implícita

$$\frac{2x^{-1/3}}{3} + \frac{2y^{-1/3}}{3}\frac{dy}{dx} = 0$$



$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

$$y^{2/3} = 1 - x^{2/3}$$

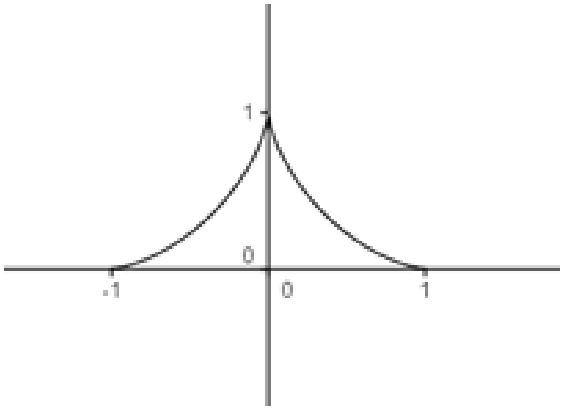
$$f'(x)^2 = \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}} = \frac{1 - x^{2/3}}{x^{2/3}} = x^{-2/3} - 1$$

APLICACIONES. LONGITUDES - EJEMPLO

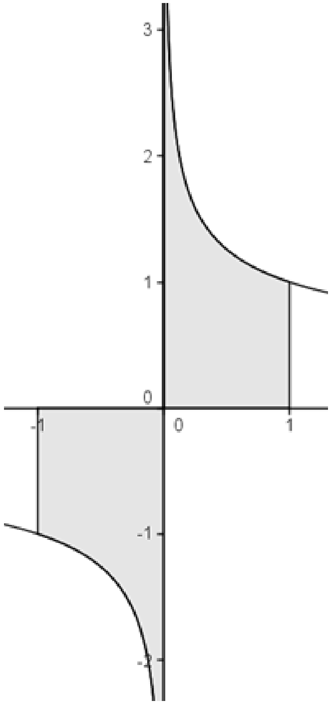
Calcula la longitud de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

$$f'(x)^2 = \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}} = x^{-2/3} - 1$$



Longitud de -1 a 1 $L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$



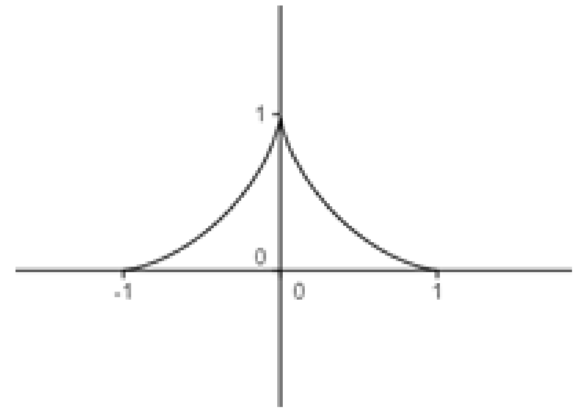
$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + x^{-2/3} - 1} = \sqrt{x^{-2/3}} = x^{-1/3}$$

APLICACIONES. LONGITUDES – EJEMPLO

Calcula la longitud de la curva $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

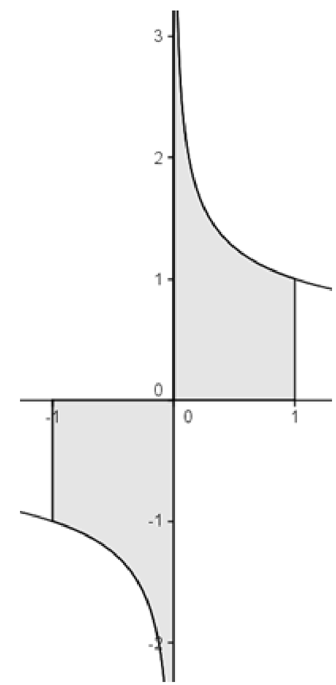
$$f'(x)^2=\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}=x^{-2/3}-1$$



Longitud de -1 a 1

$$L=2\int_0^1\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=2\int_0^1 x^{-1/3}=$$

$$=2\frac{3}{2}x^{2/3}\Big]_0^1=3x^{2/3}\Big]_0^1=3-0=3$$

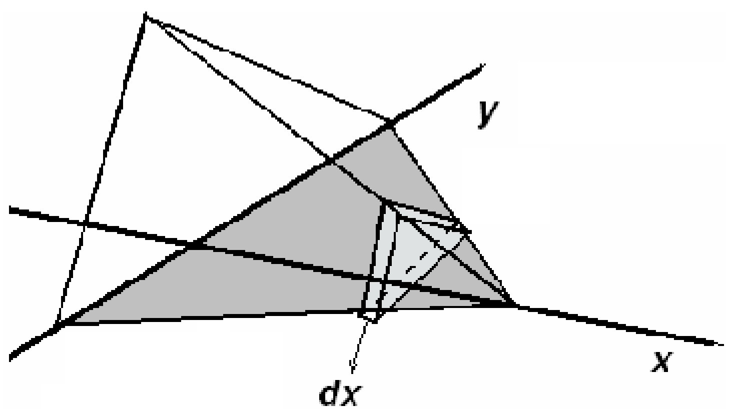


APLICACIONES. LONGITUDES – EJERCICIO

Calcula la longitud de la curva $y = x^{3/2}$ para $0 \leq x \leq 4$

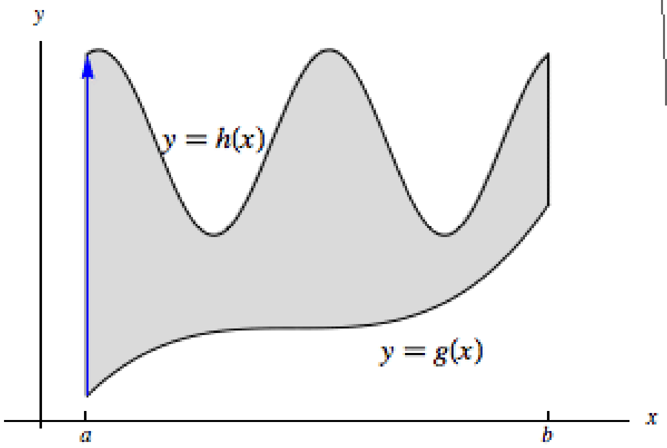
Volumen por secciones planas

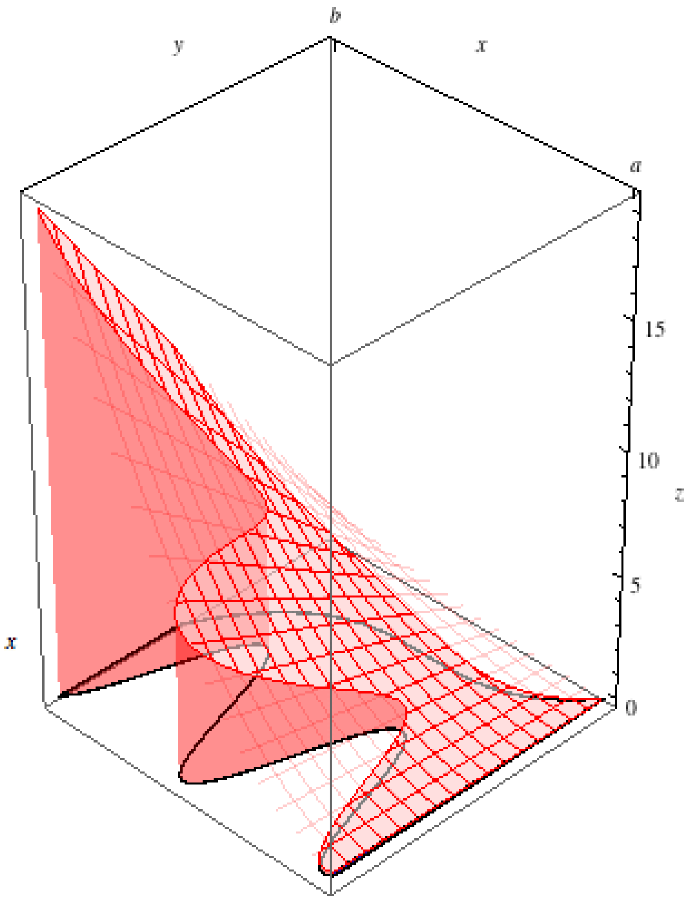
El volumen de un sólido que se extiende desde $x = a$ a $x = b$ (intervalo $[a, b]$) y cuya sección en un punto x tenga un área dada por una función $A(x)$ se calcula con la integral



$$V = \int_a^b A(x)dx$$

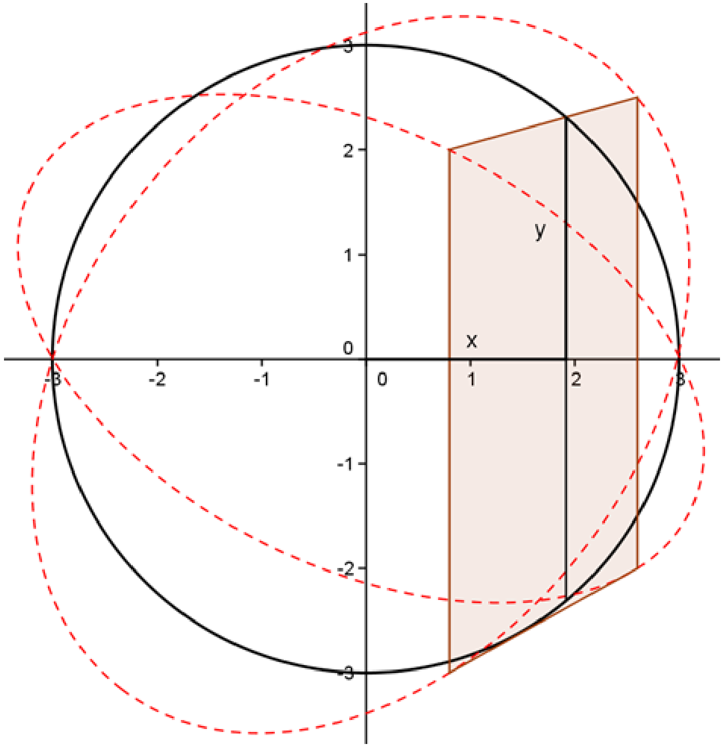
Volumen por secciones planas





APLICACIONES. VOLÚMENES - EJEMPLO

Calcula el volumen de un sólido cuyas secciones transversales a lo largo del eje x son cuadrados de lado igual a la longitud de la cuerda vertical que pasa por x en una circunferencia de radio 3 y centro en el origen de coordenadas.



APLICACIONES. VOLÚMENES – EJEMPLO

Calcula el volumen de un sólido cuyas secciones transversales a lo largo del eje x son cuadrados de lado igual a la longitud de la cuerda vertical que pasa por x en una circunferencia de radio 3 y centro en el origen de coordenadas

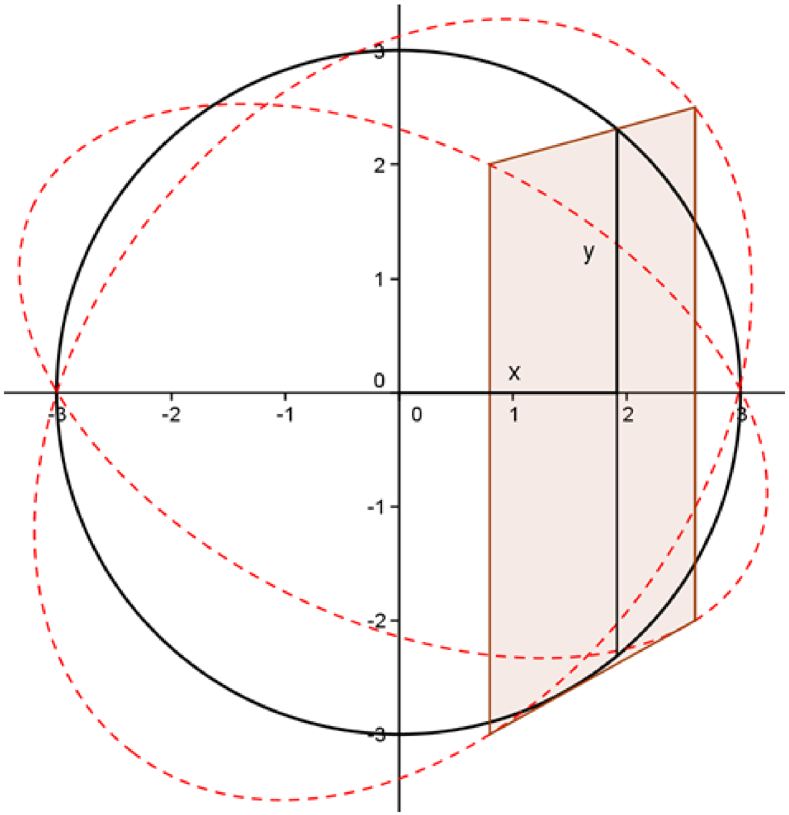
$$y^2 + x^2 = 3^2$$

$$A(x) = (2y)^2 = 4(9 - x^2)$$

$$V = 2\int_0^3 A(x)dx =$$

$$= 8\int_0^3 (9 - x^2)dx =$$

$$= 8\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^3 = 144$$



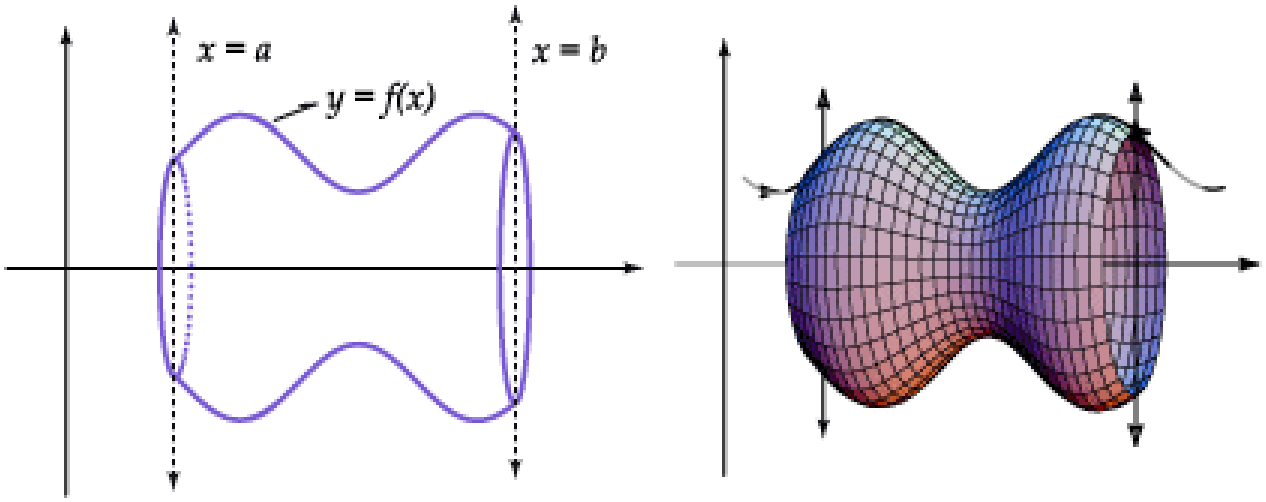
APLICACIONES. VOLÚMENES - EJERCICIO

Calcula el volumen de una esfera de radio r

APLICACIONES. VOLÚMENES

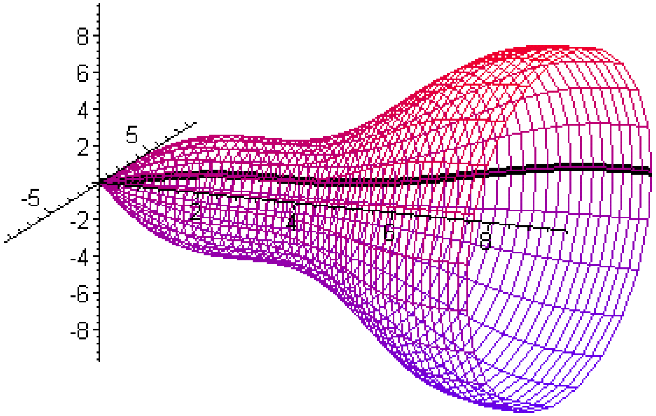
Volumen de revolución

El volumen obtenido al girar sobre el eje *x* la gráfica de una $f(x) \geq 0$ en un intervalo $[a, b]$



Volumen de revolución

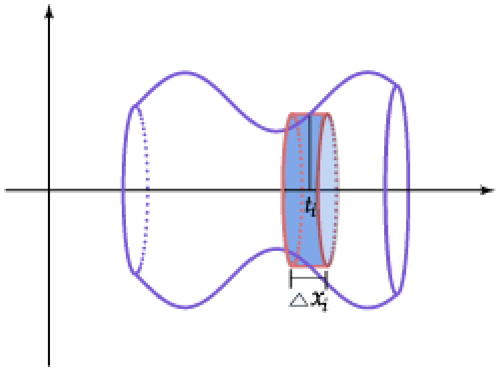
El volumen obtenido al girar sobre el eje *x* la gráfica de una $f(x) \geq 0$ en un intervalo $[a,b]$



APLICACIONES. VOLÚMENES

Volumen de revolución

Se subdivide $[a, b]$ en *n* intervalos donde $f(x)$ es continua y con ancho $\Delta x = (b - a)/n$



$f(x)$ es el radio de la base del disco e Δx su altura. El volumen de cada disco será

$$v_i = (\pi \cdot f(x_i)^2) \cdot \Delta x$$

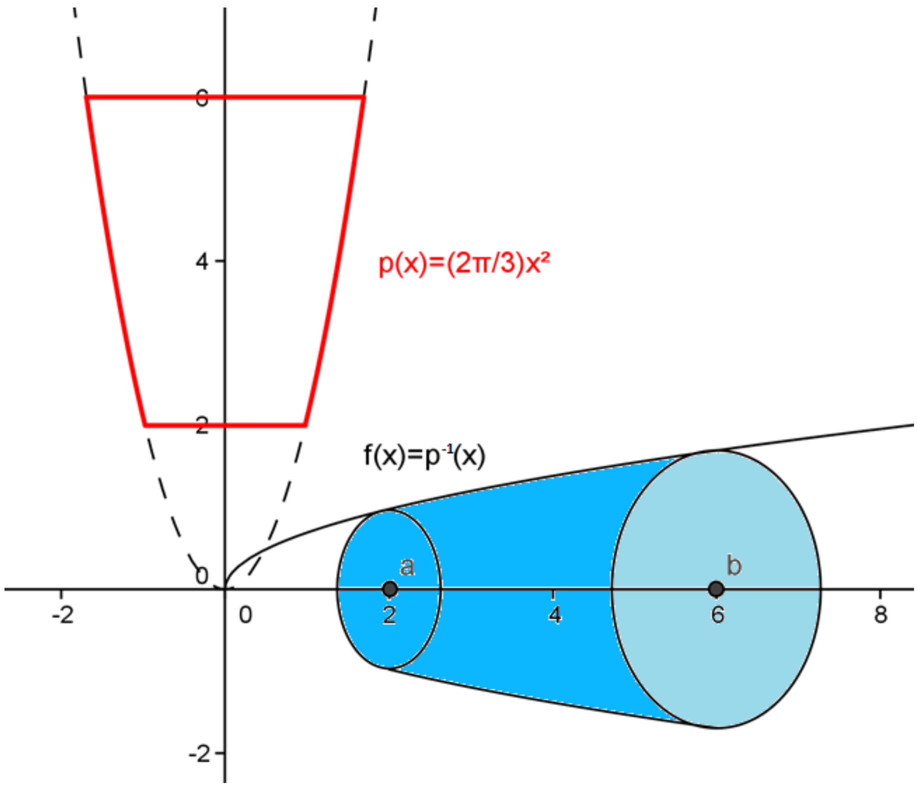
Volumen de revolución

La suma de los volúmenes de los discos se se aproximará al volumen de la figura cuando n→ ∞. El volumen de la figura de revolución es entonces la integral

$$V = \sum_{n\to\infty} (\pi \cdot f(x_i)^2 \Delta x) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

APLICACIONES. VOLÚMENES – EJEMPLO

Calcula el volumen de un vaso cuyo perfil viene determinado por el polinomio $P(x) = (2\pi/3)x^2$ y las rectas $y = 2$ e $y = 6$



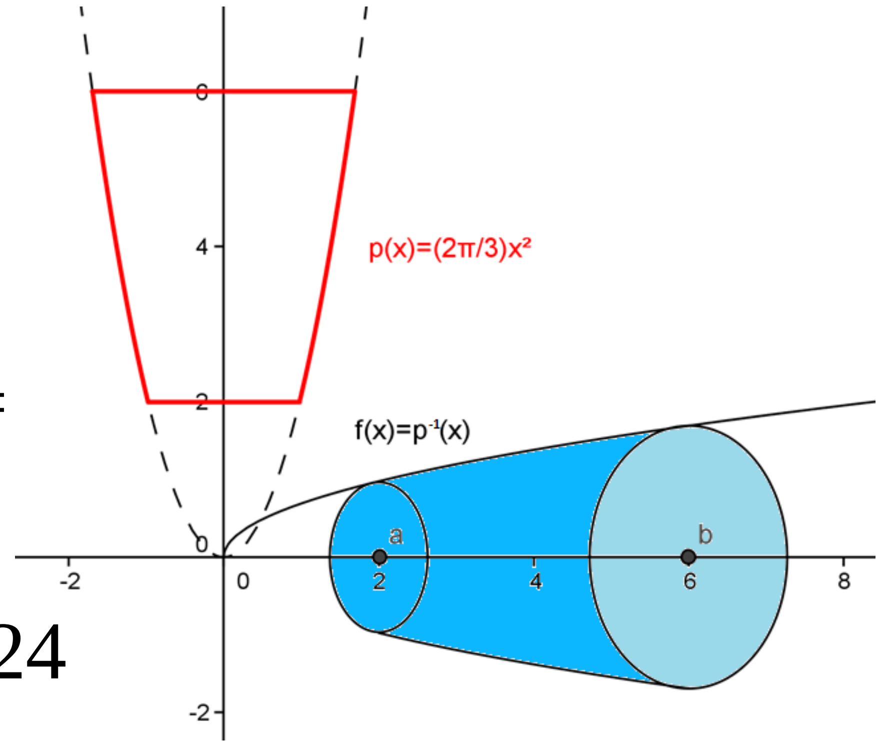
APLICACIONES. VOLÚMENES - EJEMPLO

Calcula el volumen de un vaso cuyo perfil viene determinado por el polinomio $P(x) = (2\pi/3)x^2$ y las rectas $y = 2$ e $y = 6$

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x}{2\pi}}$$

$$V = \pi \int_2^6 f(x)^2\,dx = \pi \int_2^6 \frac{3x}{2\pi}\,dx =$$

$$\int_2^6 \frac{3x}{2}\,dx = \left.\frac{3x^2}{4}\right]_2^6 = \frac{108}{4} - \frac{12}{4} = 24$$



APLICACIONES. VOLÚMENES

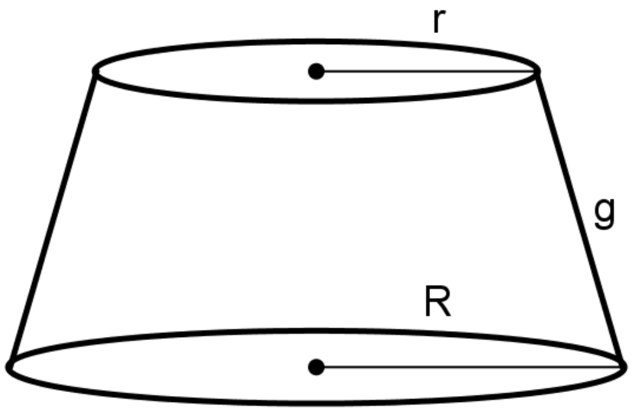
Superficie de revolución

Se sigue una estrategia similar a la de la suma de volúmenes, solo que esta vez con la superficie lateral de un tronco de cono

La superficie de un tronco de cono es la semisuma de los perímetros de las bases por la generatriz

$$S = \frac{2\pi r + 2\pi R}{2} g$$

$$S = \pi(r + R)g$$



Superficie de revolución

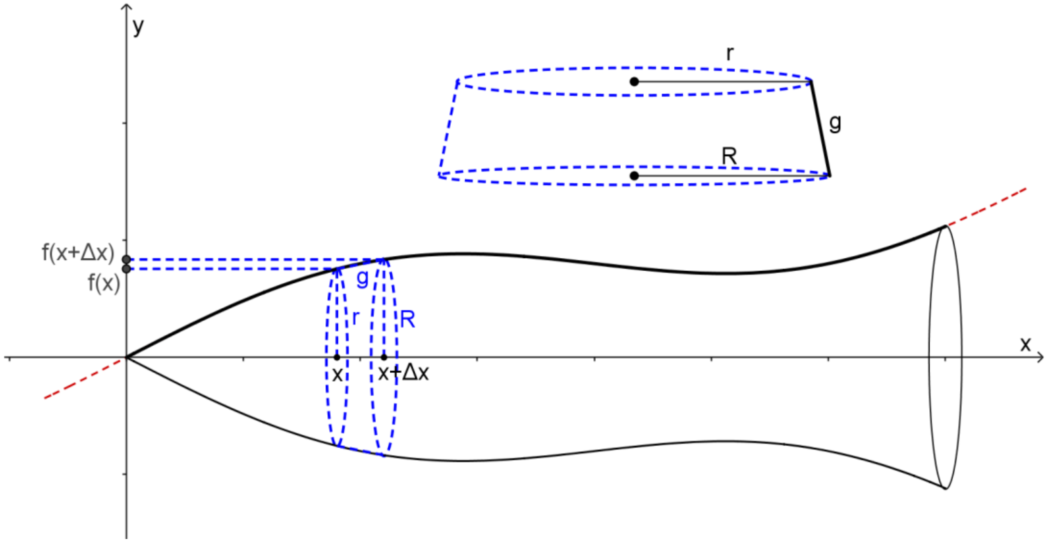
Para la rotación sobre el eje X, los radios y la generatriz son

$$r = f(x)$$

$$R = f(x + \Delta x)$$

$$g = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta f(x)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

donde $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$

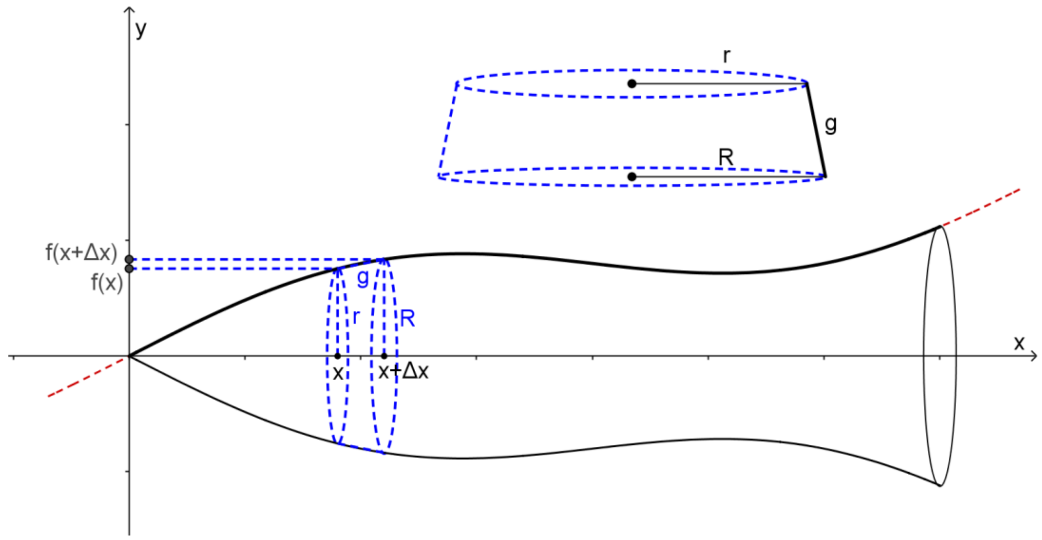


Superficie de revolución

La superficie total será el límite del sumatorio de las superficies S_i cuando $n \to \infty$

$$S_i = \pi(r + R)g$$

$$S_i = \pi\big(f(x) + f(x + \Delta x)\big)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

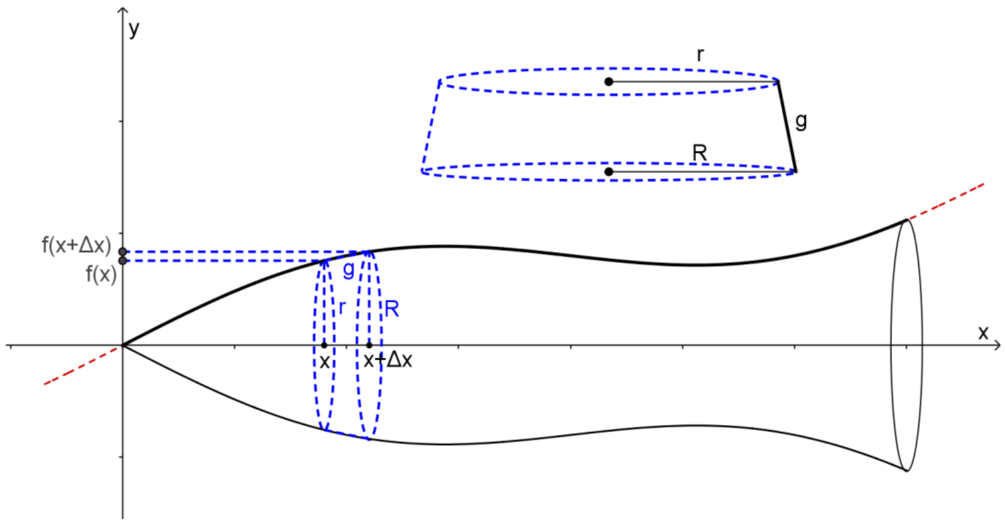


Superficie de revolución

$n \to \infty$ cuando $\Delta x \to 0$ y el límite del sumatorio es la integral

$$S_i = \pi\left(f(x) + f(x+\Delta x)\right)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum S_i = \int \pi\, 2\, f(x)\, \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

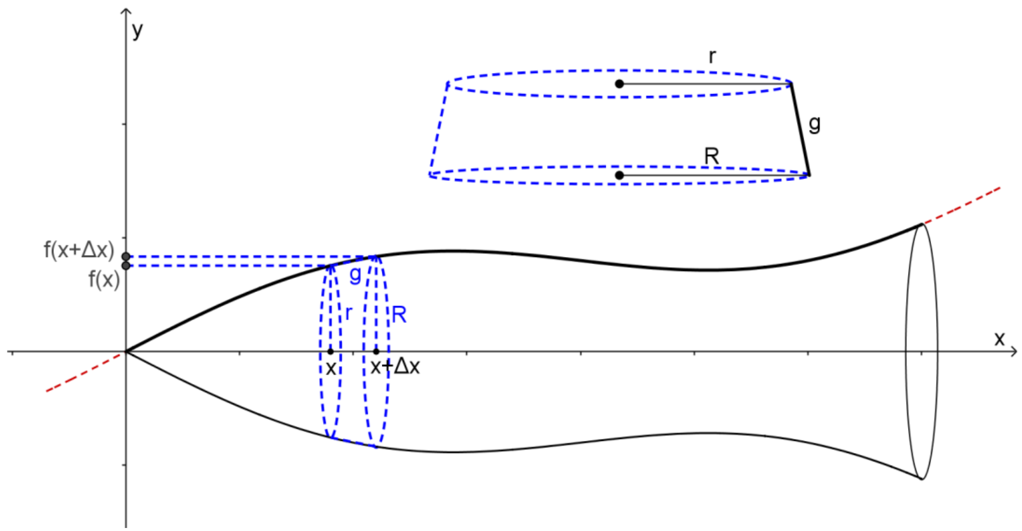


APLICACIONES. VOLÚMENES

Superficie de revolución

La superficie de revolución sobre el eje X que genera la gráfica de una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ es

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$



EJERCICIOS

1. $\int_0^1 f(x)dx$ si $f(x)=\begin{cases} x & para \quad 0 \le x \le t \\ t\dfrac{1-x}{1-t} & para \quad t < x \le 1 \end{cases}$

2. Calcular la derivada de la función $\int_{x^2}^{x^3} \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

3. Calcular la derivada de la función $\int_{\sin(x)}^{\cos(x)} \cos(\pi \cdot t^2)dt$

4. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos(x)dx$

5. $\int \left(3 - x^2\right)^3 dx$

6. $\int \dfrac{dx}{x+a}$

EJERCICIOS - SOLUCIONES

1. $\dfrac{5}{6}$

2. $\dfrac{3\mathrm{x}^2}{\sqrt{1+\mathrm{x}^{12}}} - \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^3}}$

3. $\left(\sin(\mathrm{x}) - \cos(\mathrm{x})\right)\cos(\pi \cdot \sin^2(x))$

4. 4π

5. $27\mathrm{x} - 9\mathrm{x}^3 + \dfrac{9}{5}x^5 - \dfrac{1}{7}x^7$

6. $\ln(\mathrm{x}+\mathrm{a})$