Interpolación (Matemáticas 2. GII/I2ADE)

In [27]:
```
from sympy import *
from sympy.abc import x,y
import numpy as np
```

Se denomina interpolación a la obtención de nuevos puntos partiendo del conocimiento de un conjunto discreto de puntos:

x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

con x_i todos distintos.

Introducción

Si tenemos N puntos nuestro polinomio tendrá que ser de grado menor o igual que N–1, pero cuando N empieza a ser grande (del orden de 10 o más) a menos que los puntos estén muy cuidadosamente elegidos el polinomio oscilará salvajemente. Esto se conoce como fenómeno de Runge.

Para ver esto podemos estudiar el clásico ejemplo con la función Runge:

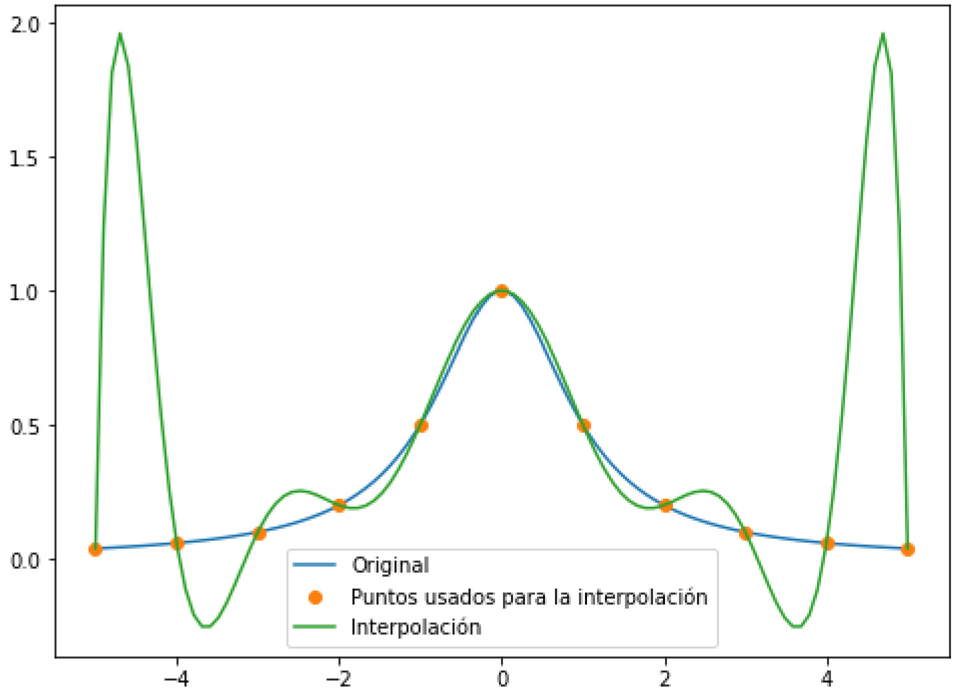
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

veamos qué sucede si la interpolamos en nodos equiespaciados. Para ello vamos a usar la función `barycentric_interpolate` . Según Berrut y Trefethen:

> El método de interpolación baricéntrica merece ser conocido como el método estándar de interpolación polinómica

In [28]:
```
from scipy.interpolate import barycentric_interpolate

xp = np.arange(11) - 5 # -5, -4, -3, …, 3, 4, 5 -> 11 elementos
fp = 1 / (1 + xp ** 2) # Valores de y de la Función de Runge con SOLO 11 el
ementos. Esto es una representación MUY limitada de la función

# Nuevo rango para x para la interpolación
x = np.linspace(-5, 5, 100) # 100 elementos
# Función original
fp2 = 1 / (1 + x ** 2) # 100 elementos - para una visualización suave
# Interpolación
y = barycentric_interpolate(xp, fp, x)

# Ahora comparamos el resultado de la función original con la interpolación

# Visualmente representado
import matplotlib.pyplot as plt
# Crea una figura
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
# Añade los datos de la función original
ax.plot(x, fp2, label='Original')
# Añade los puntos para la interpolación de la función original
ax.plot(xp, fp, 'o', label='Puntos usados para la interpolación')
# Añade los datos de la interpolación
ax.plot(x, y, label='Interpolación')
# Añade la leyenda
ax.legend()
```

Out[28]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7f805de3c520>



Como vemos, la interpolación poco se corresponde con la función original. Existe una forma de mitigar este problema, que es, escogiendo los puntos cuidadosamente y/o el método apropiado.

Polinomio de Taylor

El polinomio de Taylor puede calcularse usando la librería `series` . Por defecto, el punto inicial es 0 (polinomio de Maclaurin) y el grado 6 (orden 5). También incluye el término de Landau, que puede omitirse usando `removeO()` .

In [11]:
```
from sympy.series import series
series(exp(x),x,0).removeO()
```

Out[11]:
$$\frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

In [15]:
```
t1 = series(exp(x),x,0,9).removeO() # Orden 8
t1.subs(x,2) # Computemos para x = 2
```

Out[15]:
$$\frac{2327}{315}$$

In [17]:
```
t1 = series(exp(x),x,n=9).removeO() # Mismo que arriba, solo omitimos el va
lor inicial (0)
t1.subs(x,2)
```

Out[17]:
$$\frac{2327}{315}$$

Teoría: $cos(1)$ con polinomios de Maclaurin de orden 2 y 4

In [23]:
```
tcos = series(cos(x),x,0,3).removeO()
tcos
```

Out[23]:
$$1 - \frac{x^2}{2}$$

In [24]:
```
tcos.subs(x,1)
```

Out[24]:
$$\frac{1}{2}$$

In [25]:
```
tcos = series(cos(x),x,0,5).removeO()
display(tcos)
tcos.subs(x,1)
```

$$\frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1$$

Out[25]:
$$\frac{13}{24}$$

Lagrange

Para un conjunto dado de $n+1$ puntos x_i, los $n+1$ polinomios de Lagrange l_i están definidos por:

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases}$$

Se define el polinomio interpolador de Lagrange como

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

Si cada polinomio de Lagrange es de grado n, entonces p_n también tiene este grado. Además:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_i}{x_i - x_j}$$

En python podemos usar la función `interpolating_poly` de sympy para representar un polinómio de Lagrange.

In [ ]:
```
# Polinomio de Lagrange de grado 3
sympy.polys.specialpolys.interpolating_poly(3,x)
```

$$\frac{y_0 (x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{y_1 (x - x_0)(x - x_2)}{(-x_0 + x_1)(x_1 - x_2)} + \frac{y_2 (x - x_0)(x - x_1)}{(-x_0 + x_2)(-x_1 + x_2)}$$

Al ejemplo anterior faltaría pasar los puntos de x y y para generar una interpolación. Usemos los seguientes valores para x y y para probar su funcionamiento:

$$x = [1, 2, 3]$$
$$y = [3, -10, 2]$$

Los tramos son:

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x-2)(x-3)$$
$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3)$$
$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-3)$$

y construyendo el polinómio manualmente:

$$p_2(x) = \frac{3)}{2}(x-2)(x-3) + 10(x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)$$

Confirmemos con código:

In [ ]:
```
sympy.polys.specialpolys.interpolating_poly(3,x,X=[1,2,3],Y=[3,-10,2]) # ar
gumentos: grado, variable, valores de x, valores de y
```

$$\frac{3(x-3)(x-2)}{2} + 10(x-3)(x-1) + (x-2)(x-1)$$

In [ ]:
```
# Scipy también puede calcular Lagrange pero en este caso obtiene los cocientes
print(lagrange([1,2,3],[3,-10,2]))
```

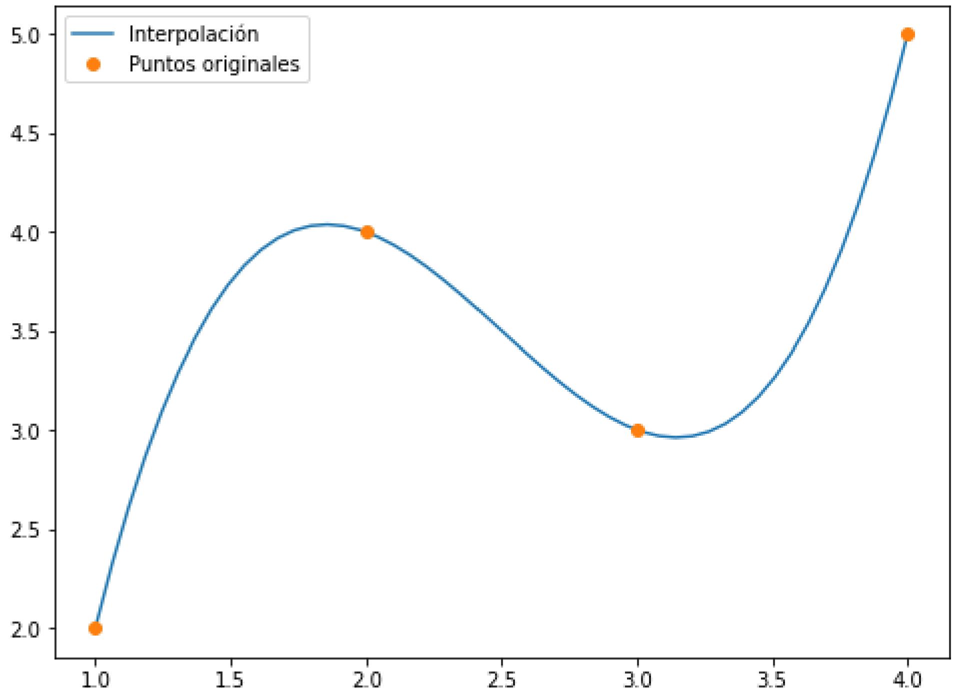
```
      2
12.5 x - 50.5 x + 41
```

Exemplo - sympy

$x = [1, 2, 3, 4]$
$y = [2, 4, 3, 5]$

In [ ]:
```
# Puntos a interpolar
x_ej1 = [1,2,3,4]
y_ej1 = [2,4,3,5]

# Lista de 50 elementos entre 1 y 4 (x_ej1) equidistantes
x_muchos_puntos = np.linspace(1,4)

# Crear el polinomio de Lagrange
poli = sympy.polys.specialpolys.interpolating_poly(4,x,X=x_ej1,Y=y_ej1)

# Valores de poly(x_muchos_puntos)
ypoly = [poli.subs(x,i) for i in x_muchos_puntos]

# Crea una figura
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
# Añade los datos de la función original
ax.plot(x_muchos_puntos, ypoly, label='Interpolación')
# Añade los datos de la interpolación
ax.plot(x_ej1, y_ej1, 'o', label='Puntos originales')
# Añade la leyenda
ax.legend()
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7f3b94717750>
```



Newton

Supongamos que tenemos datos y el polinomio interpolador de Lagrange, si nos dan un nuevo punto (x_{n+1}, y_{n+1}), cada polinomio de Lagrange debe ser actualizado lo que conlleva mucho calculo (especialmente si n es grande).

La alternativa es construir polinomios de forma iterativa. De esta forma, se crean polinomios $p_k(x)$ tal que $p_k(x_i) = y_i$ para $0 \leq i \leq k$. Esto es simple para $k = 0$:

$p_0(x) = a_0 = y_0$

Suponinedo que se tiene $p_k(x)$ se quiere obtener $p_{k+1}(x)$.

Se construye de la seguiente forma:
$p_{k+1}(x) = p_k(x) + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_k)$

para las constantes $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ (que son los coeficientes)

Esto puede ser reescrito como:

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i n_i(x)$$

donde

$$n_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$$

Para $p_1(x)$:

$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) = p_0(x) + a_1(x - x_0) = y_1$

que de otro modo es:

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x - x_0}$$

Si insertamos nuevos puntos (x_2, y_2) obtenemos:

$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) = y_2$

que de otro modo es:

$$a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x - x_0}$$

Ejemplo 1

Obtén el polinomio interpolador de los seguientes datos: $(1,3),(0.5,-10),(3,2)$

$p_0(x) = y_0 = 3$

$p_1(x) = 3 + a_1(x-1) = y_1 \implies p_1(0.5) = -10 \implies -10 = 3 + a_1(-0.5) \implies a_1 = 26 \implies$

$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x-1)(x-0.5) \implies p_2(x) = 3 + 26(x-1) + a_2(x-1)(x-0.5) \implies p_2($
$\implies a_2 = \frac{-53}{5}$

El polinómio final es:

$p_2(x) = 3 + 26(x-1) + \frac{-53}{5}(x-1)(x-0.5)$

comprobamos:

In [ ]:
```
p2 = 3 + 26*(x - 1) + (-53/5)*(x - 1)*(x - 0.5)
print(p2.subs(x,1))
print(p2.subs(x,0.5))
print(p2.subs(x,3))
```

```
3
-10.0000000000000
2.00000000000001
```

Los patrones que se pueden identificar son las **diferencias divididas**. Si definimos:

$$f[x_i] = f(x_i)$$
$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} - \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

y por lo tanto:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Podemos ver que una vez que se determinan los coeficientes, agregar nuevos puntos no cambiará los calculados, solo es necesario calcular las diferencias más altas de la misma manera. Todo el procedimiento para encontrar estos coeficientes se puede resumir en una tabla de diferencias divididas. Veamos un ejemplo usando 5 puntos de datos:

$$\begin{array}{llllll}
x & f[\,] & f[,] & f[,,] & f[,,,] & f[,,,,] \\
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & & \\
x_1 & y_1 & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & f[x_1, x_2] & & f[x_0, x_1, x_2, x_3] & \\
x_2 & y_2 & & f[x_1, x_2, x_3] & & f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \\
 & & f[x_2, x_3] & & f[x_1, x_2, x_3, x_4] & \\
x_3 & y_3 & & f[x_2, x_3, x_4] & & \\
 & & f[x_3, x_4] & & & \\
x_4 & y_4 & & & &
\end{array}$$

que en una tabla se puede representar de la seguiente forma:

$$\begin{array}{ccccc}
f[\,] & f[,] & f[,,] & f[,,,] & f[,,,,] \\
y_0 & f[x_1, x_0] & f[x_2, x_1, x_0] & f[x_3, x_2, x_1, x_0] & f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] \\
y_1 & f[x_2, x_1] & f[x_3, x_2, x_1] & f[x_4, x_3, x_2, x_1] & 0 \\
y_2 & f[x_3, x_2] & f[x_4, x_3, x_2] & 0 & 0 \\
y_3 & f[x_4, x_3] & 0 & 0 & 0 \\
y_4 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Se debe tener en cuenta que la primera fila de la tabla son en realidad todos los coeficientes que necesitamos, es decir, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4**.**

Ejemplo 2

In [ ]:
```
x_puntos = [1, 0.5, 3]
y_puntos = [3, -10, 2]

def diff_div(x_data, y_data):
    # Ver Ejercicio 5

diff_div(x_puntos,y_puntos)
```

```
Calculo de los coeficientes
f[,]
[[  3.    26.     0. ]
 [-10.     4.8    0. ]
 [  2.     0.     0. ]]

f[,,]
[[  3.    26.   -10.6]
 [-10.     4.8    0. ]
 [  2.     0.     0. ]]

Polinómio
```

$$-10.6x^2 + 41.9x - 28.3$$

A la primera vista puede no parecer lo mismo que el ejemplo presentado anteriormente pero si se resuelve la expresión:

$$3 + 26\left(x - 1\right) + \frac{-53}{5}\left(x - 1\right)\left(x - 0.5\right) = 3 + 26\left(x - 1\right) - \frac{53}{5}\left(x - 1\right)\left(x - 0.5\right)$$

$$= 3 + 26\left(x - 1\right) - 10.6\left(x - 1\right)\left(x - 0.5\right)$$

Expandiendo $26(x-1) = 26x - 26$

$$= 3 + 26x - 26 - 10.6\left(x - 1\right)\left(x - 0.5\right)$$

Expandiendo $-10.6(x-1)(x-0.5) = -10.6x^2 + 15.9x - 5.3$

$$= 3 + 26x - 26 - 10.6x^2 + 15.9x - 5.3$$

$$= -10.6x^2 + 41.9x - 28.3$$

Y esto es igual al obtenido arriba.

Ejemplo 3

In [ ]:
```
x_puntos = [-5, -1, 0, 2]
y_puntos = [-2, 6, 1, 3]

poli_dd = diff_div(x_puntos,y_puntos)
poli_dd
```

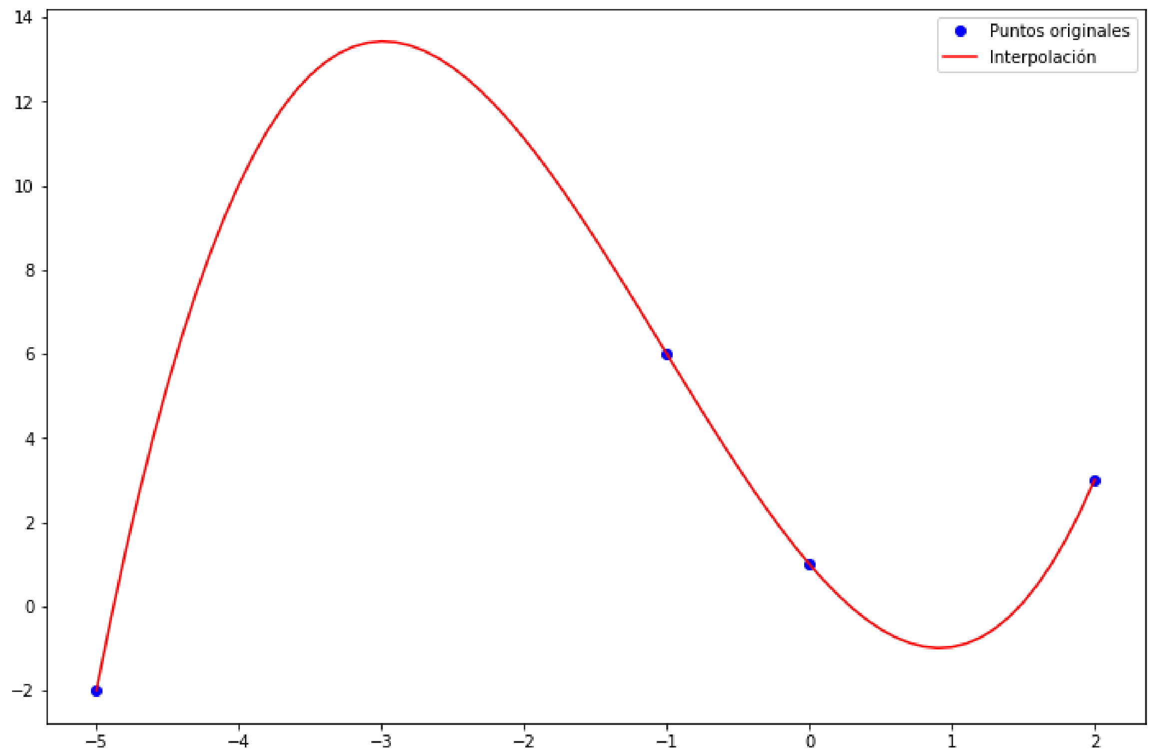
```
Calculo de los coeficientes
f[,]
[[-2.  2.  0.  0.]
 [ 6. -5.  0.  0.]
 [ 1.  1.  0.  0.]
 [ 3.  0.  0.  0.]]

f[,,]
[[-2.   2.  -1.4  0. ]
 [ 6.  -5.   2.   0. ]
 [ 1.   1.   0.   0. ]
 [ 3.   0.   0.   0. ]]

f[,,,]
[[-2.          2.         -1.4         0.48571429]
 [ 6.         -5.          2.          0.        ]
 [ 1.          1.          0.          0.        ]
 [ 3.          0.          0.          0.        ]]
```

$$0.485714285714286x^3 + 1.51428571428571x^2 - 3.97142857142857x + 1.0$$

In [ ]:

```
x_nuevo = np.arange(-5, 2.1, .1)
from sympy import lambdify
# crea una función iterable desde poli_dd
f = lambdify(x, poli_dd, "numpy")

# Enseñar gráfica
fig, ax = plt.subplots(figsize = (12, 8))
ax.plot(x_puntos, y_puntos, 'bo', label="Puntos originales")
ax.plot(x_nuevo, f(x_nuevo), 'r', label="Interpolación")
ax.legend()
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7f49fbfbd750>
```



Splines

Los splines no son más que curvas polinómicas definidas a trozos, normalmente de grado 3 (casi nunca mayor de 5). Al ser cada uno de los trozos de grado pequeño se evita el fenómeno de Runge, y si se "empalman" los trozos inteligentemente la curva resultante será suave (matemáticamente: diferenciable) hasta cierto punto. Cuando queremos una curva que pase por todos los puntos disponibles un spline es justamente lo que necesitamos.

El spline más elemental, el lineal (grado 1), se puede construir rápidamente en NumPy usando `np.interp` .

El más común, el cúbico (grado 3), se puede construir con el método `scipy.interpolate.InterpolatedUnivariateSpline` con el argumento k igual a 3 (acepta entre 1 y 5), o el método `scipy.interpolate.interp1d` con el terceer argumento igual a 'cubic'. Ls diferencia entre estos dos es el algoritmo usado para calcular los nudos.

Para obtener la representación algébrica se puede utilizar el `sympy.interpolating_spline` (ten en atención que este método puede tardar mucho tiempo a calcular).

Veamos ejemplos de cada uno de estos.

Ejemplo 1 - sympy

In [ ]:
```
from sympy import interpolating_spline
from sympy.abc import x
from math import sin
a = list(range(11))
b = list(map(sin,a))
interpolating_spline(3, x, a, b)
```

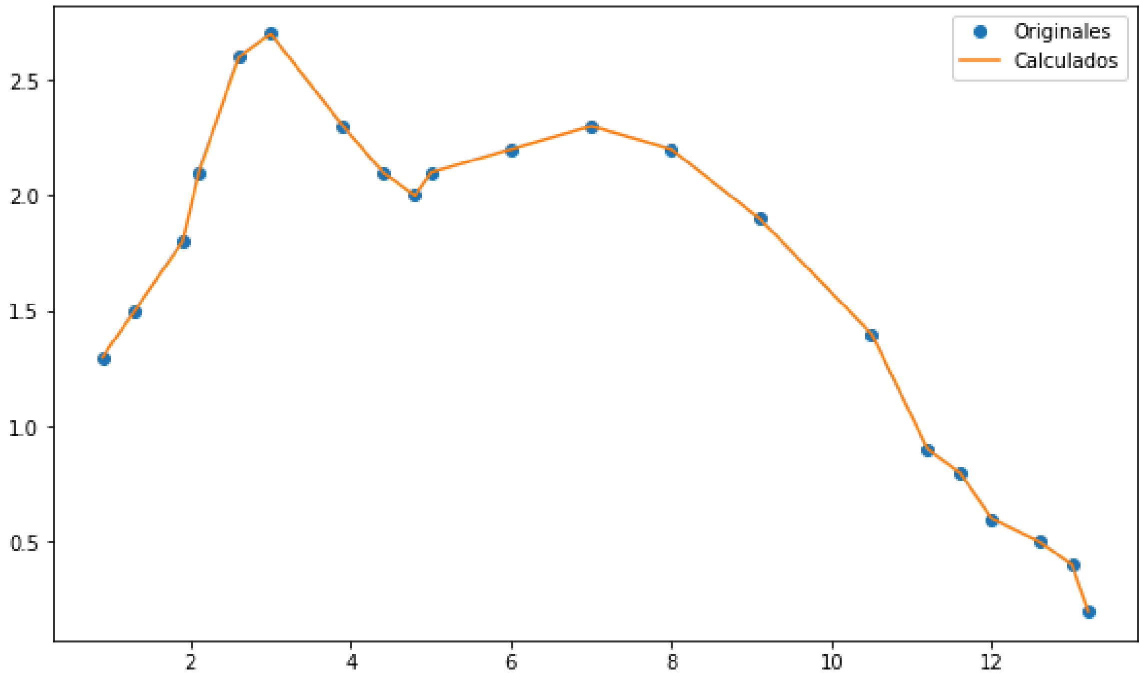
$$\begin{cases} -0.0418605525500531x^3 - 0.261240613744896x^2 + 1.14457215110285x \\ 0.146943444756778x^3 - 1.39406459758589x^2 + 3.41022011878483x - 1.510 \\ 0.160345549704558x^3 - 1.5146835421159x^2 + 3.77207695237487x - 1.8722 \\ 0.0372201650395559x^3 - 0.0371789261358767x^2 - 2.13794151154523x + 6. \\ -0.123396378055944x^3 + 2.37206922029662x^2 - 14.1841822437077x + 26. \\ -0.1683718881817x^3 + 3.18162840256024x^2 - 19.0415373372894x + 35.79 \\ -0.0640398386838786x^3 + 0.990655363105978x^2 - 3.70472606110962x + 0 \\ 0.118950282644119x^3 - 3.40110754876597x^2 + 31.4293772338659x - 93.67 \end{cases}$$

Ejemplo 2 - np.interp

Tomar los datos de la silueta del pato de la clase de teoría.

In [ ]:
```
import numpy as np

# Pato
x_pato = [0.9, 1.3, 1.9, 2.1, 2.6, 3.0, 3.9, 4.4, 4.8, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 
9.1, 10.5, 11.2, 11.6, 12, 12.6, 13, 13.2]
y_pato = [1.3, 1.5, 1.8, 2.1, 2.6, 2.7, 2.3, 2.1, 2.0, 2.1, 2.2, 2.3, 2.2, 
1.9, 1.4, 0.9, 0.8, 0.6, 0.5, 0.4, 0.2]

x_dominio = np.linspace(min(x_pato), max(x_pato), num=1001) # Dominio
y1d = np.interp(x_dominio, x_pato, y_pato)

import matplotlib.pyplot as plt
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10,6))
ax.plot(x_pato, y_pato, 'o', label="Originales")
ax.plot(x_dominio, y1d, '-', label="Calculados")
ax.legend()
```

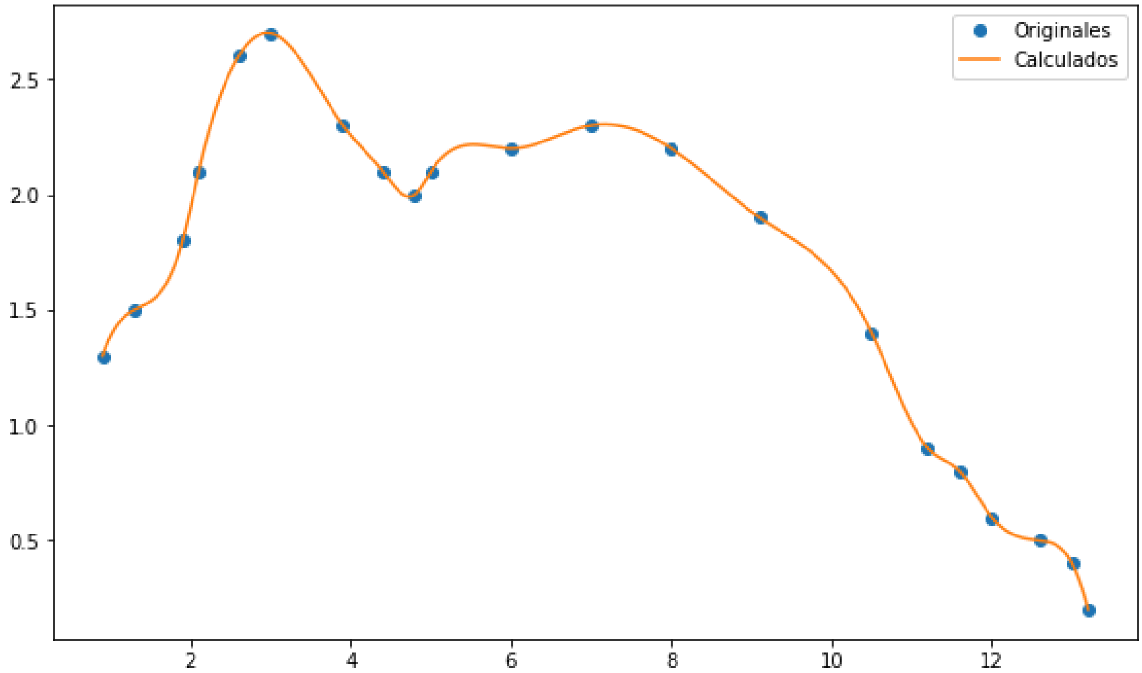
```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7f2e9b8dee10>
```



Ejemplo 3 - scipy.interpolate.interp1d

In [ ]:
```
from scipy import interpolate
x_pato = [0.9, 1.3, 1.9, 2.1, 2.6, 3.0, 3.9, 4.4, 4.8, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0,
9.1, 10.5, 11.2, 11.6, 12, 12.6, 13, 13.2]
y_pato = [1.3, 1.5, 1.8, 2.1, 2.6, 2.7, 2.3, 2.1, 2.0, 2.1, 2.2, 2.3, 2.2,
1.9, 1.4, 0.9, 0.8, 0.6, 0.5, 0.4, 0.2]

x_dominio = np.linspace(min(x_pato), max(x_pato), num=1001) # Dominio

yi1d = interpolate.interp1d(x_pato,y_pato,'cubic')(x_dominio)

import matplotlib.pyplot as plt
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10,6))
ax.plot(x_pato, y_pato, 'o', label="Originales")
ax.plot(x_dominio, yi1d, '-', label="Calculados")
ax.legend()
```

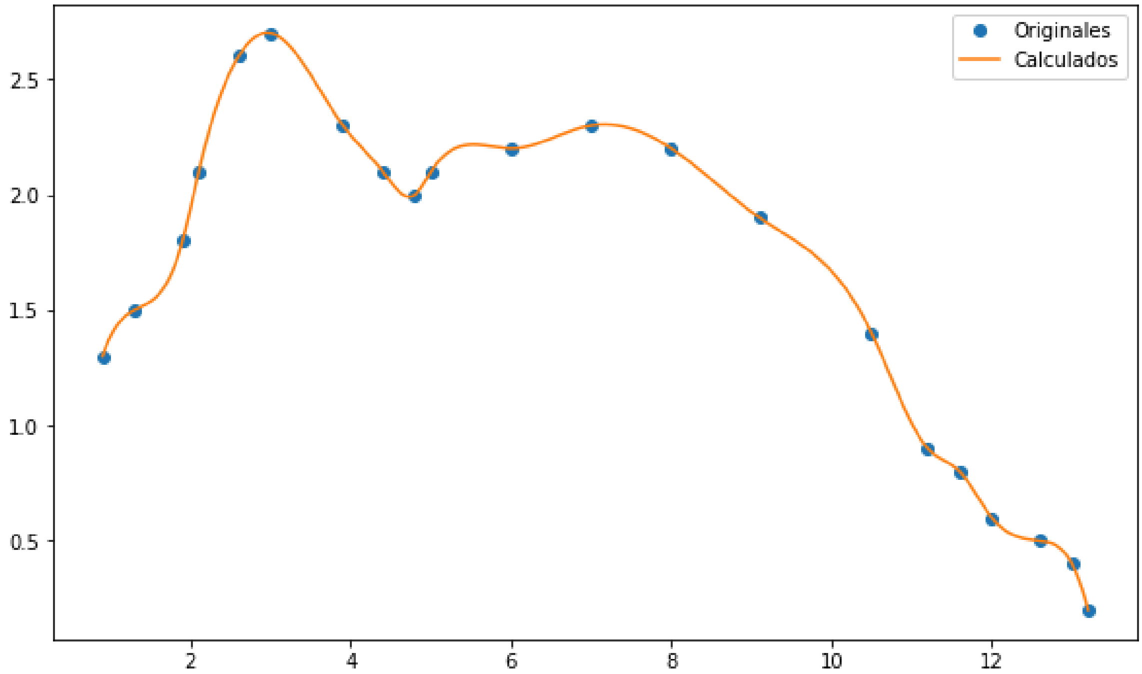
```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7f2e9b39cf90>
```



Ejemplo 4 - scipy.interpolate.InterpolatedUnivariateSpline

In [ ]:
```
# Pato
x_pato = [0.9, 1.3, 1.9, 2.1, 2.6, 3.0, 3.9, 4.4, 4.8, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0,
9.1, 10.5, 11.2, 11.6, 12, 12.6, 13, 13.2]
y_pato = [1.3, 1.5, 1.8, 2.1, 2.6, 2.7, 2.3, 2.1, 2.0, 2.1, 2.2, 2.3, 2.2,
1.9, 1.4, 0.9, 0.8, 0.6, 0.5, 0.4, 0.2]

from scipy.interpolate import InterpolatedUnivariateSpline

x_dominio = np.linspace(min(x_pato), max(x_pato), num=1001) # Dominio

yi1d = InterpolatedUnivariateSpline(x_pato,y_pato,k=3)(x_dominio)

import matplotlib.pyplot as plt
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10,6))
ax.plot(x_pato, y_pato, 'o', label="Originales")
ax.plot(x_dominio, yi1d, '-', label="Calculados")
ax.legend()
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7f2e8fce9e90>
```

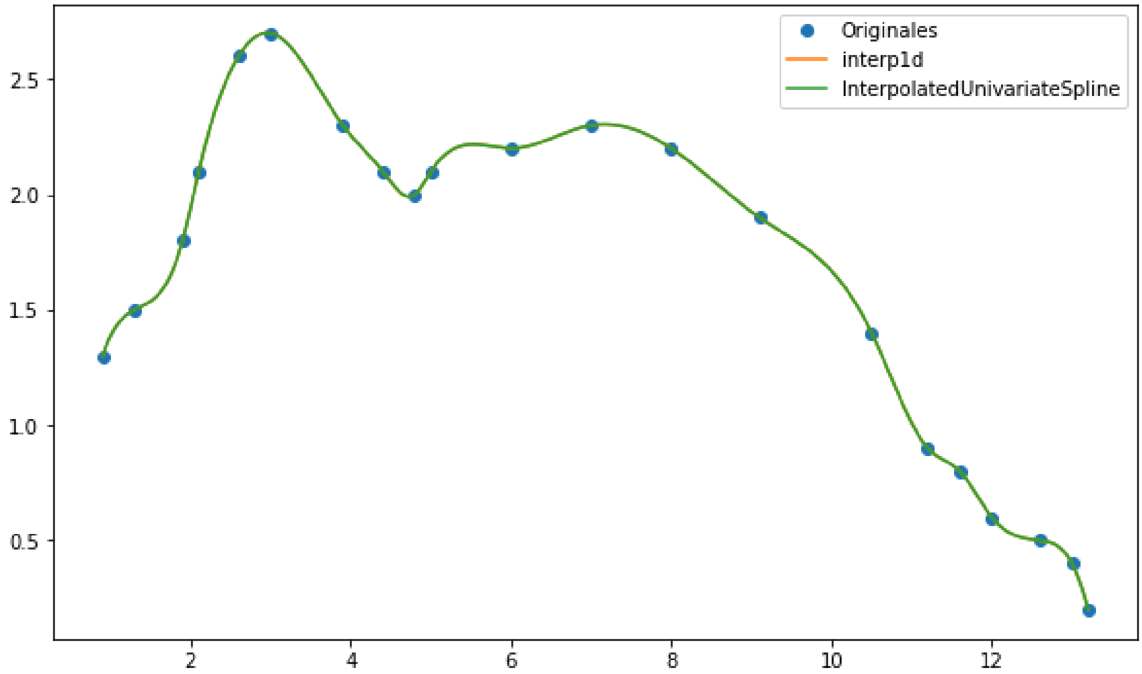


Ejemplo 5 - comparar métodos de scipy

In [ ]:

```
# Comparar interp1d y InterpolatedUnivariateSpline

# Pato
x_pato = [0.9, 1.3, 1.9, 2.1, 2.6, 3.0, 3.9, 4.4, 4.8, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0,
9.1, 10.5, 11.2, 11.6, 12, 12.6, 13, 13.2]
y_pato = [1.3, 1.5, 1.8, 2.1, 2.6, 2.7, 2.3, 2.1, 2.0, 2.1, 2.2, 2.3, 2.2,
1.9, 1.4, 0.9, 0.8, 0.6, 0.5, 0.4, 0.2]

from scipy.interpolate import InterpolatedUnivariateSpline

x_dominio = np.linspace(min(x_pato), max(x_pato), num=1001) # Dominio

yius = InterpolatedUnivariateSpline(x_pato,y_pato,k=3)(x_dominio)
yi1d = interpolate.interp1d(x_pato,y_pato,'cubic')(x_dominio)

import matplotlib.pyplot as plt
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10,6))
ax.plot(x_pato, y_pato, 'o', label="Originales")
ax.plot(x_dominio, yi1d, '-', label="interp1d")
ax.plot(x_dominio, yius, '-', label="InterpolatedUnivariateSpline")
ax.legend()
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7f2e8fc21b90>
```



Ejercicios

Ejercicio 1

Calcula los polinomios de Taylor de grados 1, 2, 5 y 8 de la función $cos(x)$ alrededor del valor $x = \pi/6$. Represéntalos junto con la función coseno en cuatro ventanas gráficas, en el rectángulo $[0, 2\pi] \times [0, 3]$

In [ ]:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

In [ ]:

$$-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

In [ ]:

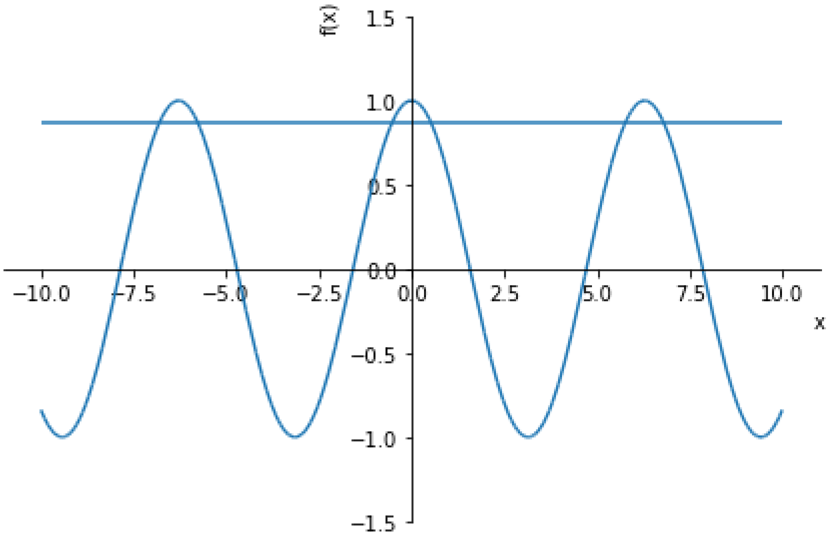
$$-\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4}{48} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3}{12} - \frac{\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2}{4} + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

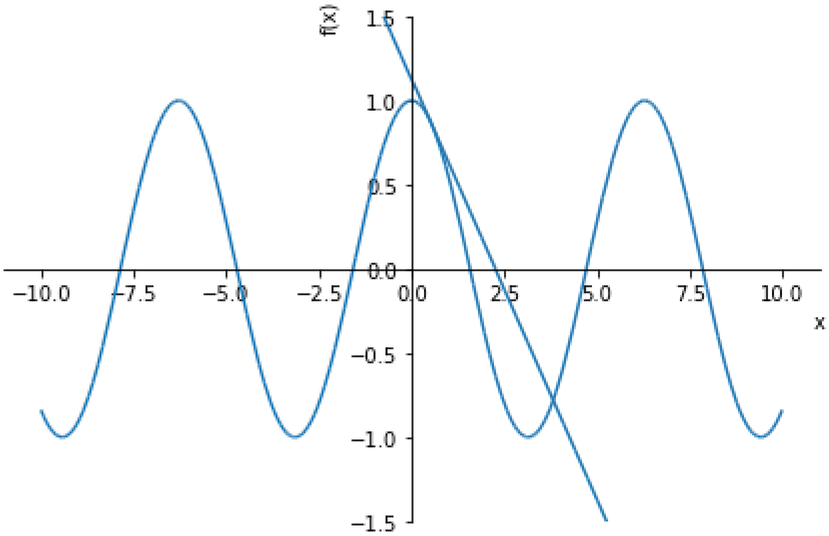
In [ ]:

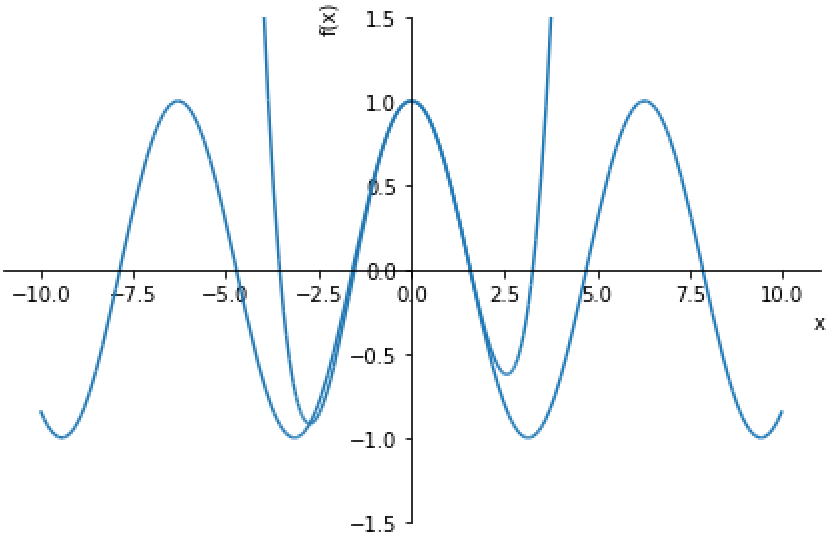
$$-\frac{x}{2} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^7}{10080} - \frac{\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^6}{1440} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^5}{240} + \frac{\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4}{48} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3}{12} - \sqrt{\vphantom{3}}$$

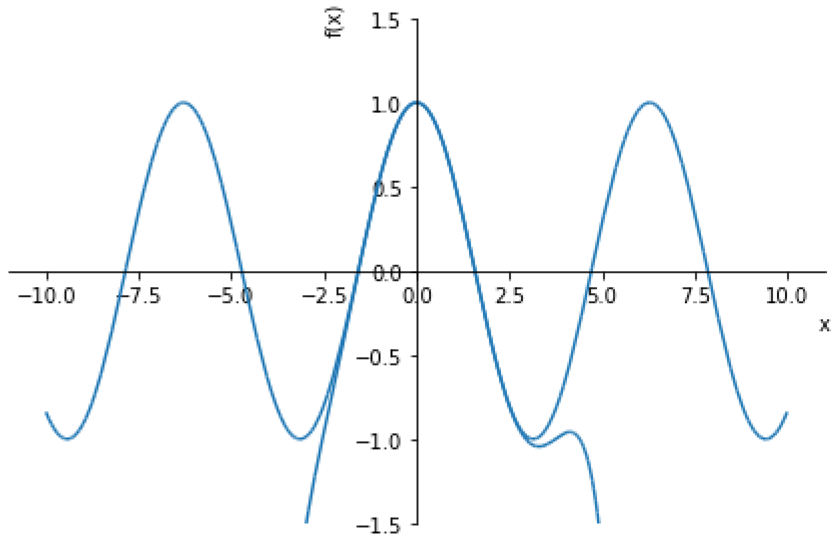
In [ ]:

```

```


f(x)
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−10.0 −7.5 −5.0 −2.5 0.0 2.5 5.0 7.5 10.0
x


f(x)
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−10.0 −7.5 −5.0 −2.5 0.0 2.5 5.0 7.5 10.0
x


f(x)
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−10.0 −7.5 −5.0 −2.5 0.0 2.5 5.0 7.5 10.0
x

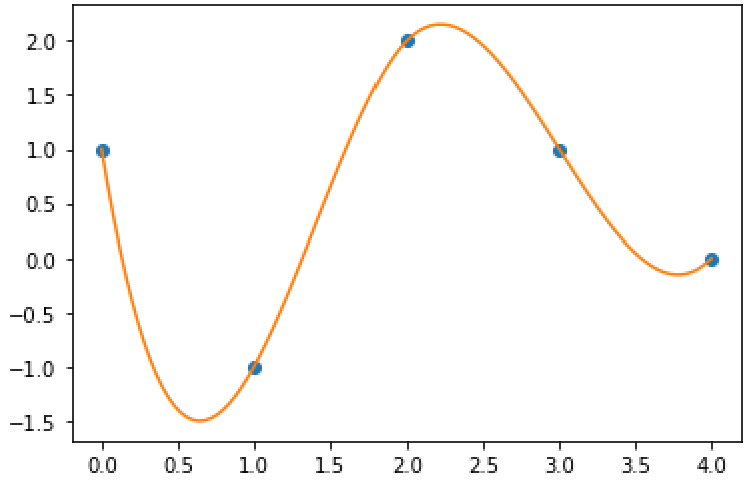



```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fd116155bd0>
```

Ejercicio 2

Obtenga el spline cúbico para los datos
$(0,1),(1,-1),(2,2),(3,1),(4,0)$

In [ ]:



Ejercicio 3

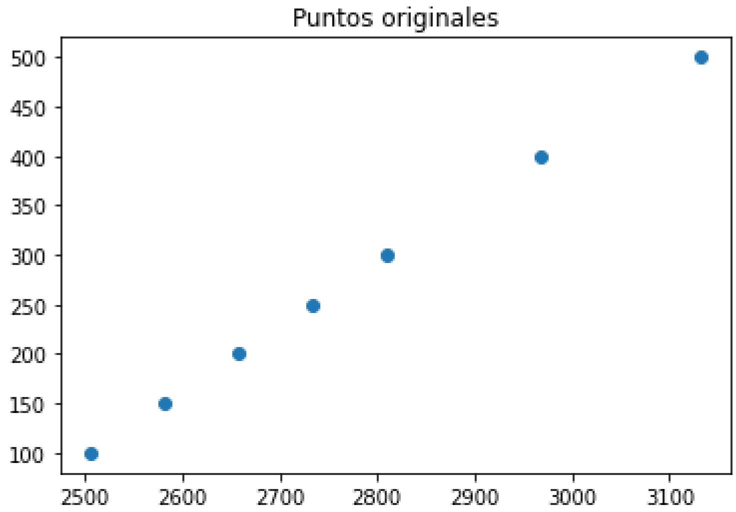
Dado el siguiente conjunto de datos

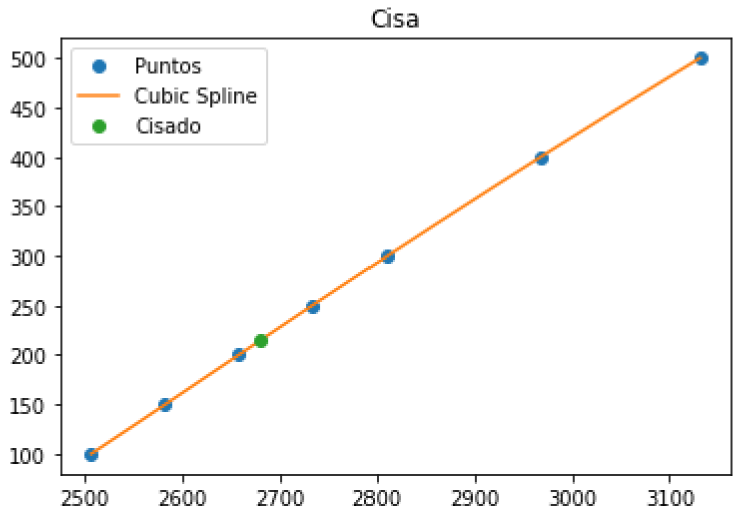
$f(x)$	100	150	200	250	300	400	500
x	2506.7	2582.8	2658.1	2733.7	2810.4	2967.9	3131.6

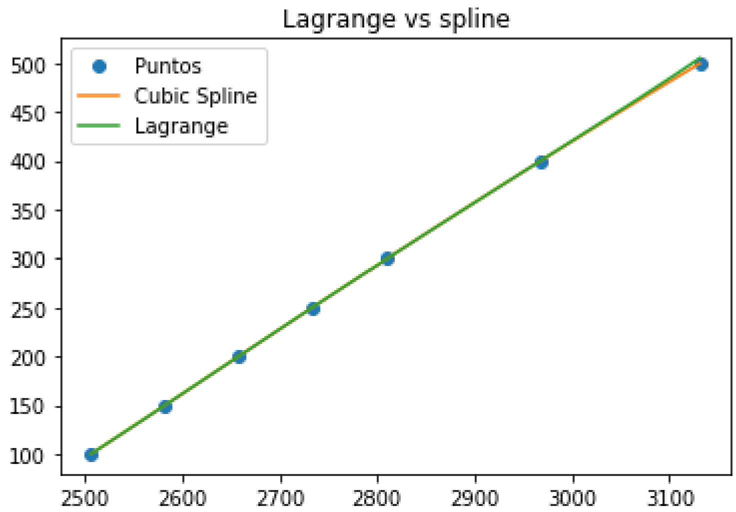
realize:

1. Gráfico de los puntos.
2. Calcule, utilizando el comando interp1d, el valor de $f(x)$ cisando $x = 2680.78$
3. Pruebe con dos tipos de interpolaciones

In [ ]:



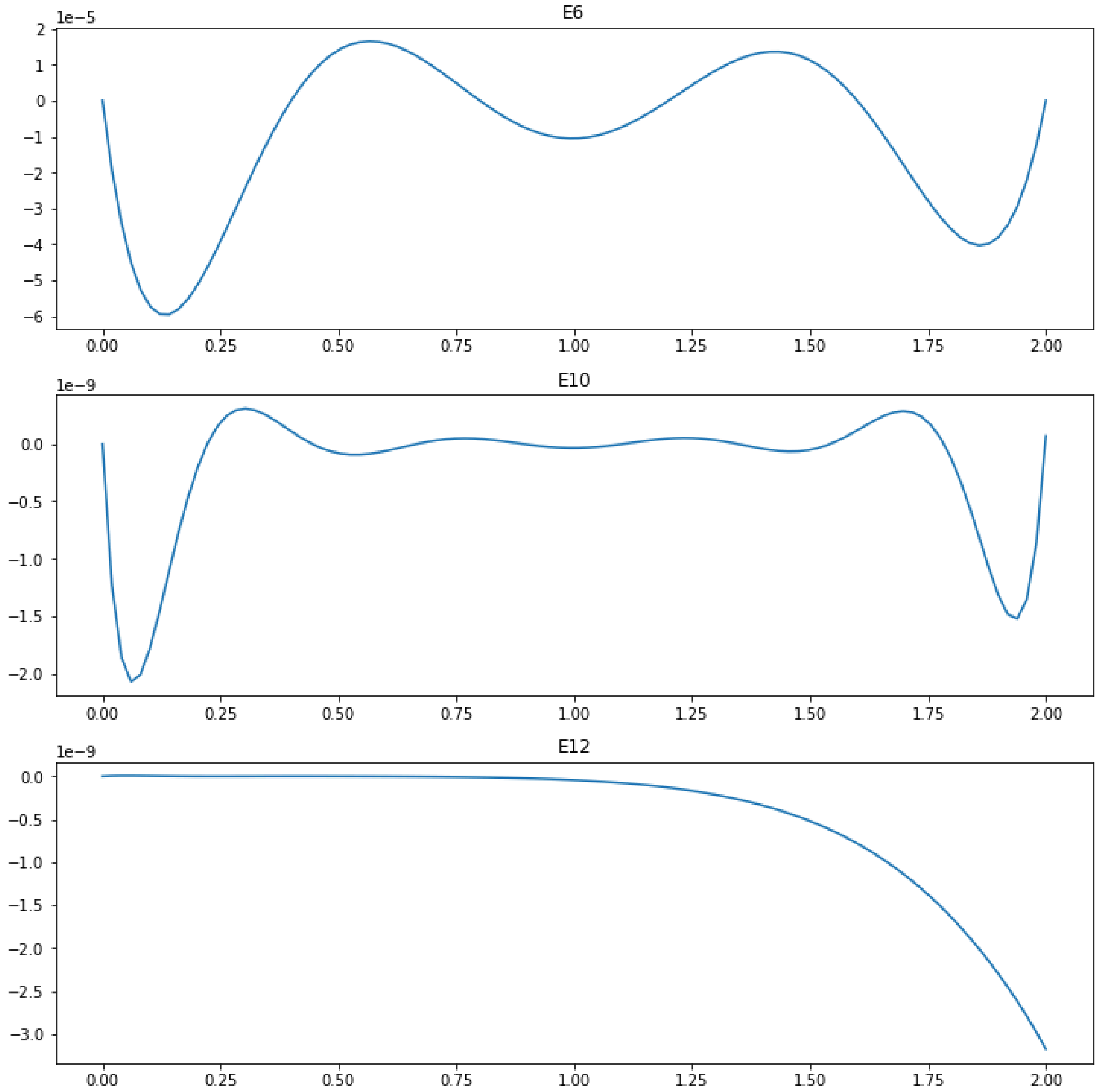




Ejercicio 4

Sea $P(x)$ el polinomio interpolante para la función $y = cos(x)$ en n puntos equidistantes $(x1, y1), \ldots, (xn, yn)$ en el intervalo $[0, 2]$. Considere el error de interpolación como $E(x) = P(x) - cos(x)$. Grafique $E(x)$ para $n = 6, 10, 12$.

In [ ]:



Ejercicio 5

Implementa la función `diff_div(x,y)` del apartado de Newton.