Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

INTERPOLACIÓN (I)

INTERPOLACIÓN. INTRODUCCIÓN

Se denomina INTERPOLACIÓN a la obtención de nuevos puntos partiendo del conocimiento de un conjunto discreto de puntos

Para realizar esto, se construye una función que pase por este conjunto de puntos

Otro problema ligado con la interpolación es la APROXIMACIÓN DE UNA FUNCIÓN complicada por otra más simple

INTERPOLACIÓN. INTRODUCCIÓN

Más allá del concepto puramente analítico, las aplicaciones de la interpolación en informática son inmensas utilizándose por ejemplo en compresión de vídeo, cambio de frecuencia de muestreo en sonido, cambio de tamaño de imágenes, animación de parámetros en realidad virtual, etc

INTERPOLACIÓN. INTRODUCCIÓN

A partir de un conjunto conocido de puntos

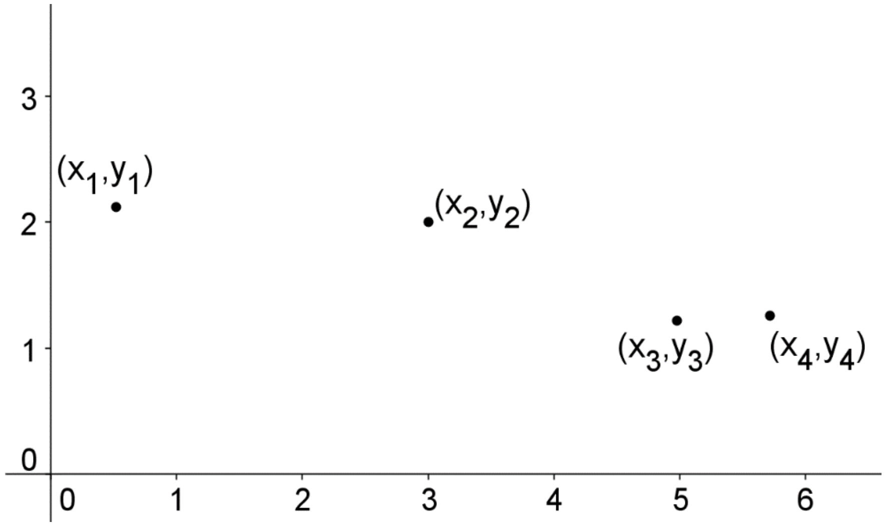
(x_k, y_k) *con* $k = 1, \dots, n$

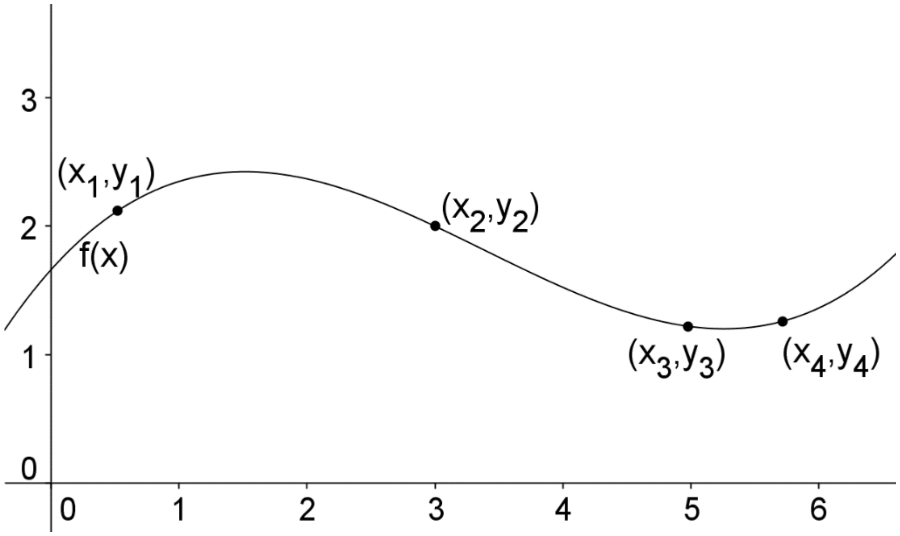
obtener una función

$f(x)$ tal que $f(x_k) = y_k$ con $k = 1, \dots, n$

A los puntos (x_k, y_k) se les denomina NODOS y a la función $f(x)$ FUNCIÓN INTERPOLANTE

INTERPOLACIÓN. INTRODUCCIÓN



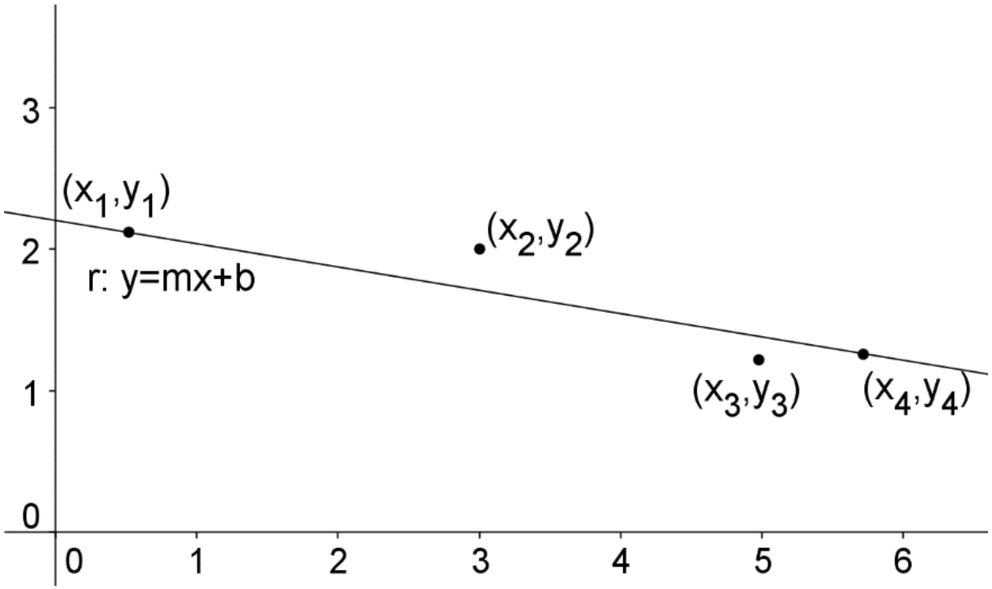


INTERPOLACIÓN. INTRODUCCIÓN

La elección de la función de interpolación se basa en la facilidad con que esta actúa

INTERPOLACIÓN. INTRODUCCIÓN

La interpolación más sencilla sería conectar dos puntos con una recta, se trataría de una interpolación lineal y es poco precisa.



INTERPOLACIÓN. INTRODUCCIÓN

Familias de funciones comúnmente utilizadas para interpolar

1. Polinomios
2. Funciones trigonométricas
3. Funciones exponenciales
4. Funciones racionales

Nosotros vamos a utilizar funciones polinómicas.

INTERPOLACIÓN. INTRODUCCIÓN

Matemáticamente, el problema de INTERPOLACIÓN puede ser propuesto de la siguiente forma

1. Dados $n+1$ puntos $(x_0,y_0), (x_1,y_1), \ldots, (x_n,y_n)$ de R^2 con $x_0 \neq x_1 \neq \ldots x_n$
   se desea encontrar un polinomio $p_n(x)$ de grado ≤ n tal que
   $$p_n(x_i) = y_i\ ,\ i = 0,1, \ldots,n$$
   ó
2. Dados una función continua $f(x)$ y $n+1$ puntos $(x_0,f(x_0)), (x_1,f(x_1)), \ldots, (x_n,f(x_n))$ de R^2 con $x_0 \neq x_1 \neq \ldots x_n$, y se desea encontrar un polinomio $p_n(x)$ de grado ≤ n tal que
   $$p_n(x_i) = f(x_i)\ ,\ i = 0,1, \ldots,n$$

INTERPOLACIÓN. INTRODUCCIÓN

Es decir una de las interpretaciones de Interpolar es aproximar una función mediante un polinomio

Para esto es conveniente empezar por conocer la definición de polinomio de Taylor

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

INTERPOLACIÓN. POLINOMIOS DE TAYLOR

A veces, para estudiar el comportamiento de una función en las proximidades de un punto a, se sustituye la función dada por otra mas sencilla.

Si la función objeto de estudio tiene las propiedades adecuadas, se podrá aproximar, para un x cercano a un valor a, mediante polinomios expresados como potencias de x-a.
A estos polinomios se les denomina Polinomios de Taylor y el objetivo es que al aumentar el grado del polinomio mejore la aproximación a la función.

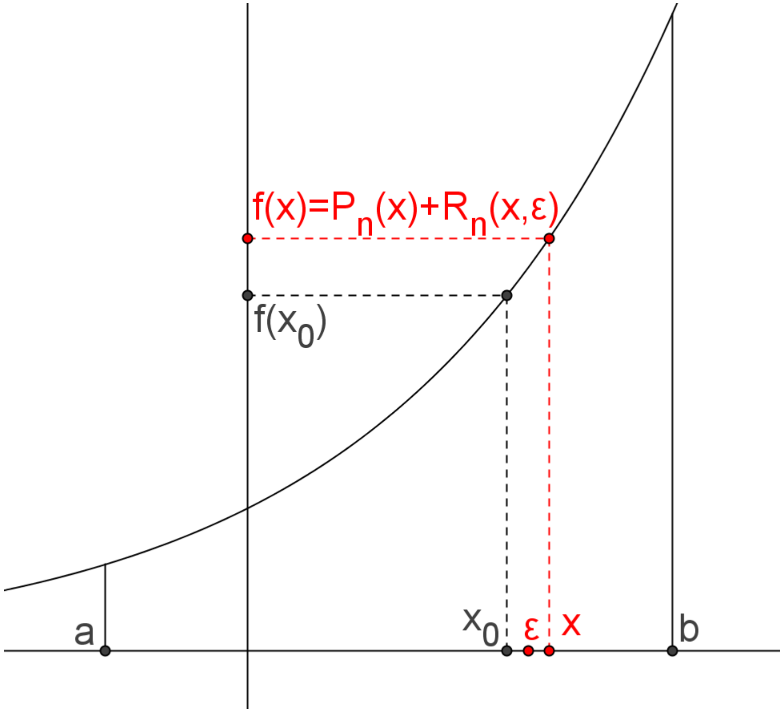
Definición

Sea f y sus $f^{(n+1)}$ derivadas continuas en $[a,b]$. Si $x_0 \epsilon [a,b]$ entonces para todo $x \epsilon [a,b]$ existe un ε entre x_0 y x tal que

$$\boldsymbol{f(x)=P_n(x)+R_n(x,\varepsilon)}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$R_n(x,\varepsilon) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$



Definición

El polinomio $P_n(x)$ se llama **polinomio de Taylor** de orden n

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

A $R_n(x,\varepsilon)$ se le llama **resto de Taylor** o **error de truncamiento** y tiende a 0 para valores de x próximos a x_0 conforme n tiende a infinito

INTERPOLACIÓN. POLINOMIOS DE TAYLOR

Los polinomios de Taylor son entonces aproximaciones al valor de la función f en un punto x cercano a otro x_0 y se crean con valores de las sucesivas derivadas de f en x_0

$$f(x) \approx P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \Delta f(x) = R_1(x, \varepsilon)$$

$$f(x) \approx P_2(x) = P_1(x) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \qquad \Delta f(x) = R_2(x, \varepsilon)$$

$$f(x) \approx P_3(x) = P_2(x) + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 \qquad \Delta f(x) = R_3(x, \varepsilon)$$

$$f(x) \approx P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \Delta f(x) = R_n(x, \varepsilon)$$

INTERPOLACIÓN. POLINOMIOS DE TAYLOR

Se puede demostrar que cuanto mayor es es el grado del polinomio *n,* mejor es la aproximación, disminuyendo el error *Δf(x)*

$$R_1(x,\varepsilon) \geq R_2(x,\varepsilon) \geq R_3(x,\varepsilon) \geq \ldots \geq R_n(x,\varepsilon)$$

$$\left| f(x) - P_1(x) \right| \geq \left| f(x) - P_2(x) \right| \geq \ldots \geq \left| f(x) - P_n(x) \right|$$

Polinomios de Taylor

Si x_0=0 entonces $P_n(x)$ se llama **polinomio de Maclaurin**

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x$$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Ejemplo

Aproxima $cos(1)$ con polinomios de Maclaurin de orden 2 y 4

Ejemplo

Aproxima *cos(1)* con polinomios de Maclaurin de orden *2* y *4*

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$P_2(x) = f(0) + f^{I}(0)x + \frac{f^{II}(0)}{2!}x^2$$

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f^{I}(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

$$f^{II}(x) = -\cos(x)$$

$$f^{III}(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$f^{IV}(x) = \cos(x)$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

$$P_4(x) = f(0) + f^{I}(0)x + \frac{f^{II}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{III}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4$$

Ejemplo

Aproxima *cos(1)* con polinomios de Maclaurin de orden *2* y *4*

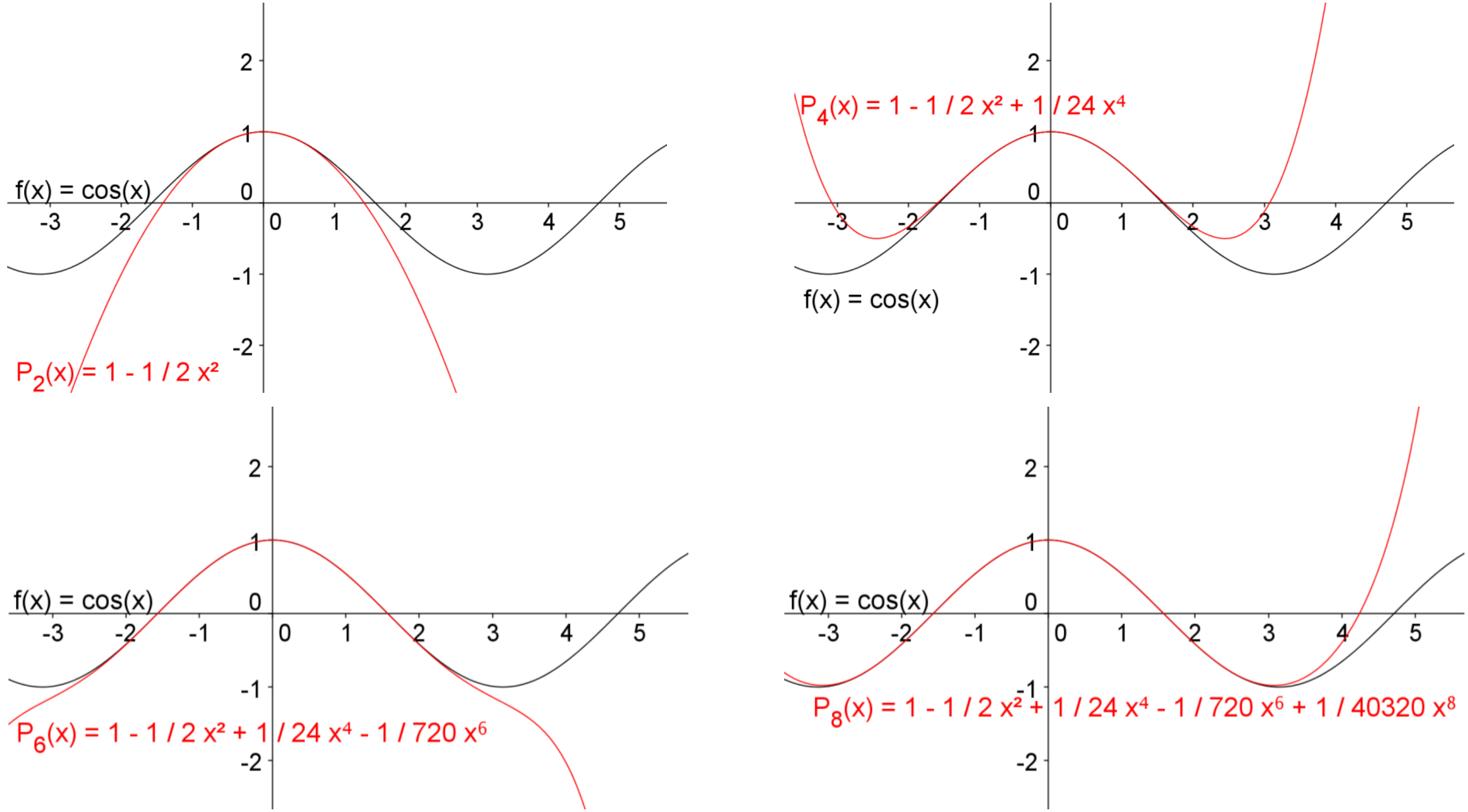
$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 \qquad \cos(1) \approx P_2(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

$$\cos(1) \approx P_4(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{24 - 12 + 1}{24} = \frac{13}{24}$$

Ejemplo

Polinomios de Maclaurin de orden *2, 4, 6* y *8* para *cos(x)*:



INTERPOLACIÓN. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Teorema: Si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son números reales distintos, entonces para valores arbitrarios $y_0, y_1, \ldots, y_n$ $\exists$ un polinomio p_n de grado n tal que

$$p_n(x_i) = f(x_i) \text{ , con } i = 0, 1, \ldots, n$$

El teorema garantiza que siempre existirá un polinomio con el que poder interpolar cualquier conjunto de puntos

El problema es encontrarlo

INTERPOLACIÓN. TEOREMA DE APROXIMACIÓN DE WEIERSTRASS

Teorema: Sea $f(x)$ definida y continua en $[a,b]$. Para todo $\varepsilon>0$ existe un polinomio $P(x)$ tal que

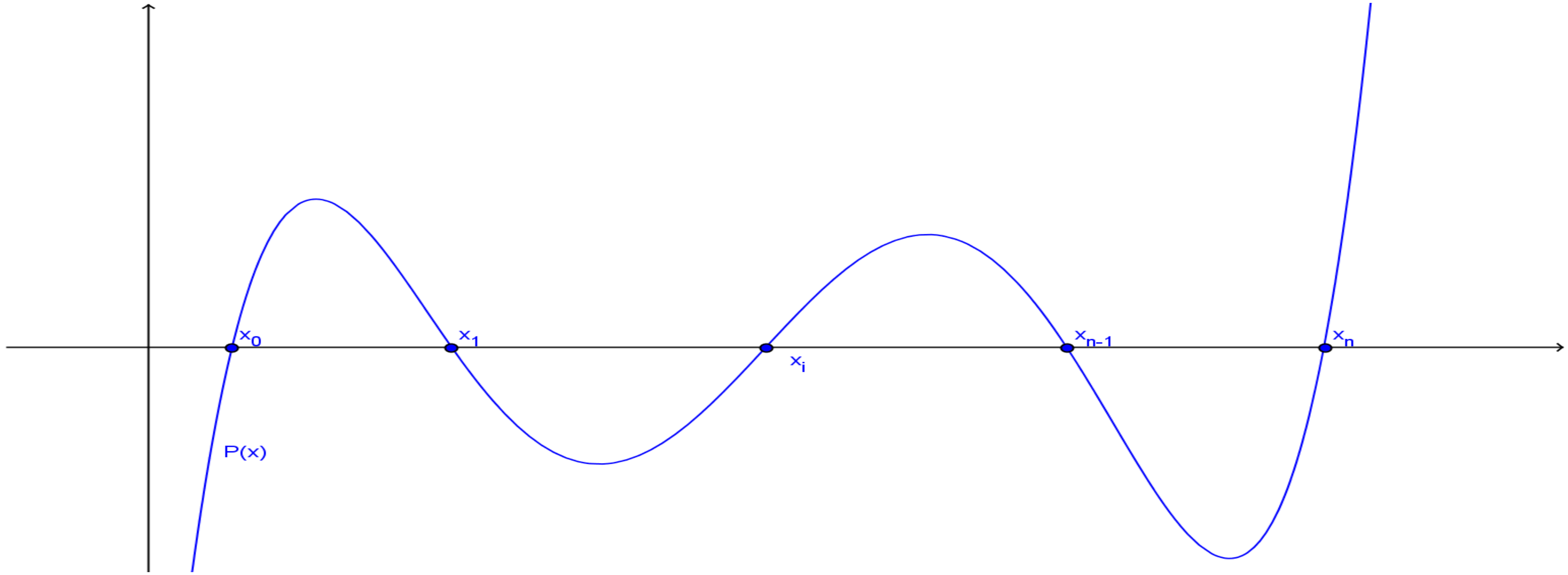
$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon \text{ para todo } x\in[a,b]$$

El teorema nos garantiza que siempre existirá un polinomio con el que poder interpolar cualquier función, con la precisión que se quiera

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Para que un polinomio tenga una raíz en x_i debe tener un factor $(x-x_i)$

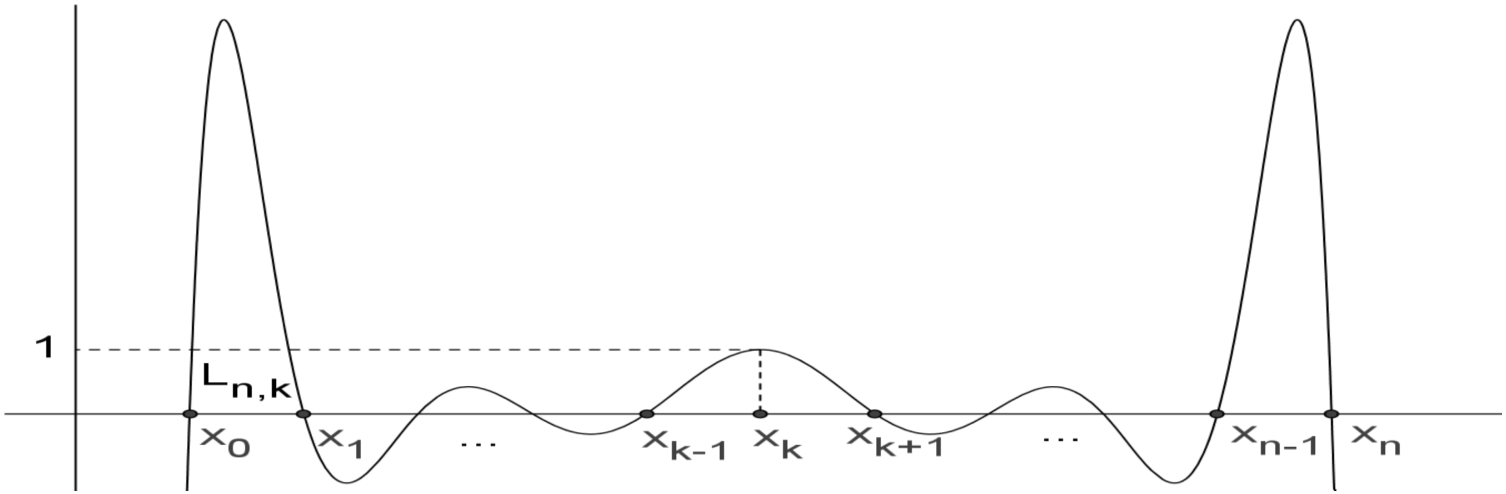
El polinomio con raíces en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ debe tener la forma $P(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$



INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Dado los valores $x_0, x_1, \ldots, x_n$, llamamos multiplicadores de Lagrange $L_{n,k}(x)$ de grado n para k a los polinomios que tienen n raíces en $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ y cumplen que $L_{n,k}(x_k)=1$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$



INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Se llama polinomio de interpolación de Lagrange de grado *n* a

$$P_n(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \ldots + f(x_n)L_{n,n}(x)$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)$$

donde

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Por ejemplo, conocidos *2* valores: x_0 y x_1 y $f(x_0)$ y $f(x_1)$ se puede interpolar *f(x)* mediante el polinomio de interpolación de Lagrange de grado *1* $P_1(x)$

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^{1} f(x_k) L_{1,k}(x) = f(x_0) L_{1,0}(x) + f(x_1) L_{1,1}(x)$$

$$L_{1,0}(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \qquad L_{1,1}(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$P_1(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Es una interpolación lineal.

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Conocidos x_0, x_1, x_2, $f(x_0)$, $f(x_1)$ y $f(x_2)$ el polinomio interpolador de Lagrange de grado *2*

$$\sum_{k=0}^{2} f(x_k)L_{2,k}(x) = f(x_0)L_{2,0}(x) + f(x_1)L_{2,1}(x) + f(x_2)L_{2,2}(x)$$

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \qquad L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + $$

$$+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Comparación $P_1(x)$ con $P_2(x)$:

Los $L_{2,k}(x)$ incorporan una raíz más que los $L_{1,k}(X)$
y el polinomio $P_1(x)$ suma un término más que $P_2(x)$

$$P_1(x) = \boxed{f(x_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}} + \boxed{f(x_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}}$$

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

Calcula con un polinomio de interpolación de Lagrange de grado *1* (lineal) la función $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ para $x=5/2$ conocidos los valores $f(2)=1$ y $f(3)=3/2$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=2$	1
$x_1=3$	3/2

$$L_{n,k}(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

Calcula con un polinomio de interpolación de Lagrange de grado *1* (lineal) la función $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ para $x=5/2$ conocidos los valores $f(2)=1$ y $f(3)=3/2$

$$L_{1,0}(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}=\frac{(x-3)}{(2-3)}=-(x-3)$$

$$L_{1,1}(x)=\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}=\frac{(x-2)}{(3-2)}=(x-2)$$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=2$	1
$x_1=3$	3/2

$$L_{n,k}(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

Calcula con un polinomio de interpolación de Lagrange de grado *1* (lineal) la función $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ para $x=5/2$ conocidos los valores $f(2)=1$ y $f(3)=3/2$

$$L_{1,0}(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}=\frac{(x-3)}{(2-3)}=-(x-3)$$

$$L_{1,1}(x)=\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}=\frac{(x-2)}{(3-2)}=(x-2)$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=2$	1
$x_1=3$	3/2

$$P_1(x)=f(x_0)L_{1,0}(x)+f(x_1)L_{1,1}(x)=$$

$$P_1(x)=-\frac{2(x-3)}{2}+\frac{3(x-2)}{2}=\frac{x}{2}$$

$$P_1(5/2)=\frac{5}{4}=1{,}25$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

Calcula con un polinomio de interpolación de Lagrange de grado *1* (lineal) la función $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ para $x=5/2$ conocidos los valores $f(2)=1$ y $f(3)=3/2$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=2$	1
$x_1=3$	3/2

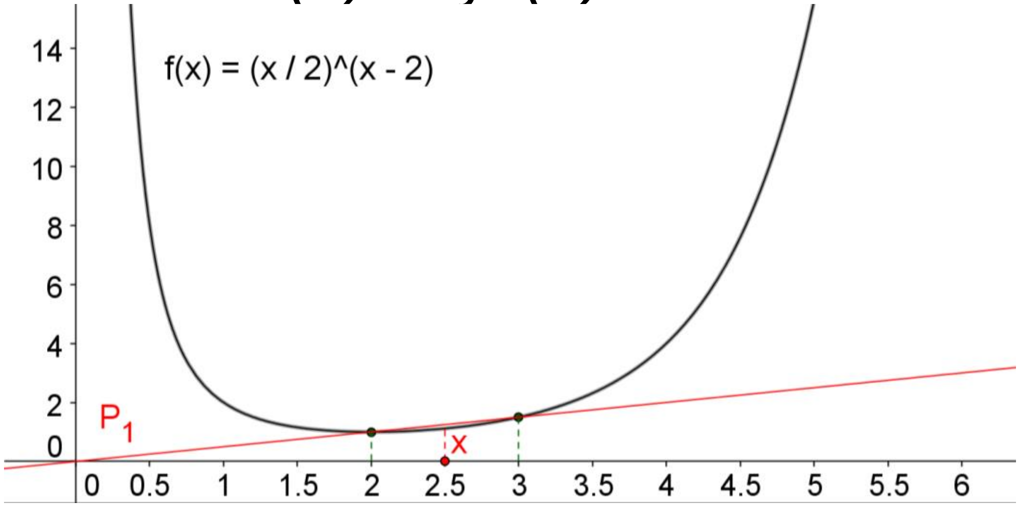
$$f(5/2)=\left(\frac{5/2}{2}\right)^{\left(\frac{5}{2}-2\right)}=\frac{\sqrt{5}}{2}=1{,}118$$

$$P_1(x)=-\frac{2(x-3)}{2}+\frac{3(x-2)}{2}=\frac{x}{2}$$

$$P_1(5/2)=\frac{5}{4}=1{,}25$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

Calcula con un polinomio de interpolación de Lagrange de grado *1* (lineal) la función $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ para $x=5/2$ conocidos los valores $f(2)=1$ y $f(3)=3/2$



x_i	$f(x_i)$
$x_0=2$	1
$x_1=3$	3/2

$$f(5/2)=\left(\frac{5/2}{2}\right)^{\left(\frac{5}{2}-2\right)}=\frac{\sqrt{5}}{2}=1{,}118$$

$$\Delta P_1(5/2)=0{,}148$$

$$P_1(x)=-\frac{2(x-3)}{2}+\frac{3(x-2)}{2}=\frac{x}{2}$$

$$P_1(5/2)=\frac{5}{4}=1{,}25$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

Añade el valor *f(1)=2* y recalcula con el polinomio de grado *2*

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2

$$L_{n,k}(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

Añade el valor *f(1)=2* y recalcula con el polinomio de grado *2*

$$L_{2,0}(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$$

$$L_{2,1}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$$

$$L_{2,2}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)$$

$$L_{n,k}(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

Añade el valor *f(1)=2* y recalcula con el polinomio de grado *2*

$$L_{2,0}(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$$

$$L_{2,1}(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$$

$$L_{2,2}(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)$$

$$P_2(x)=f(x_0)L_{2,0}(x)+f(x_1)L_{2,1}(x)+f(x_2)L_{2,2}(x)$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

Añade el valor *f(1)=2* y recalcula con el polinomio de grado *2*

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + f(x_1)\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + f(x_2)\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2

$$P_2(x) = f(x_0)L_{2,0}(x) + f(x_1)L_{2,1}(x) + f(x_2)L_{2,2}(x)$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

Añade el valor *f(1)=2* y recalcula con el polinomio de grado *2*

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + $$
$$+ f(x_1)\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + $$
$$+ f(x_2)\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

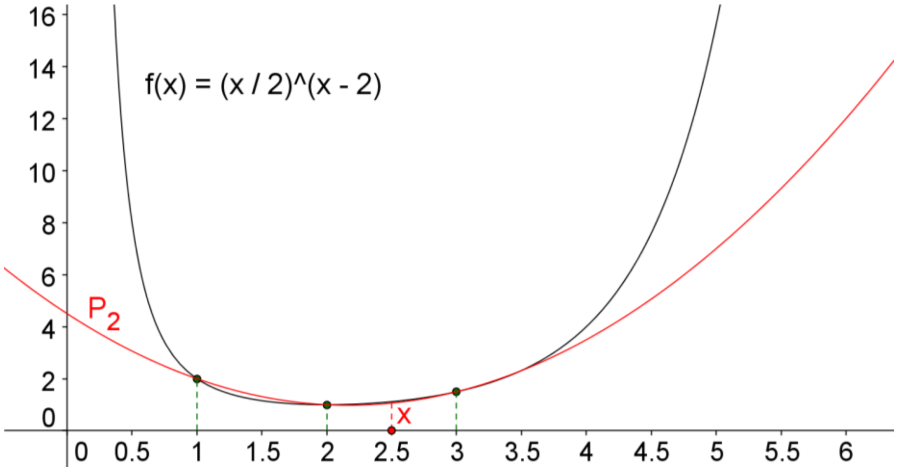
x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2

$$P_2(5/2) = 2\frac{(1/2)(-1/2)}{2} + \frac{(3/2)(-1/2)}{-1} + \frac{3}{2}\frac{(3/2)(1/2)}{2}$$

$$P_2(5/2) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} = \frac{8}{16} + \frac{9}{16} = 17/16 = 1{,}0625$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

Añade el valor *f(1)=2* y recalcula con el polinomio de grado *2*



x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2

$$f(5/2)=\left(\frac{5/2}{2}\right)^{\left(\frac{5}{2}-2\right)}=\frac{\sqrt{5}}{2}=1{,}118$$

$$\Delta P_2(5/2)=0{,}0555$$

$$P_2(5/2)=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}=\frac{8}{16}+\frac{9}{16}=17/16=1{,}0625$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

Añade el valor *f(4)=4* y recalcula *f(x)* en *x=5/2* con grado *3*

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4

$$L_{n,k}(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

Añade el valor *f(4)=4* y recalcula *f(x)* en *x=5/2* con grado *3*

$$L_{3,0}(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$

$$L_{3,1}(x)=\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

$$L_{3,2}(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$

$$L_{3,2}(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4

$$L_{n,k}(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

Añade el valor *f(4)=4* y recalcula *f(x)* en *x=5/2* con grado *3*

$$L_{3,0}(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$

$$L_{3,1}(x)=\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

$$L_{3,2}(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$

$$L_{3,2}(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4

Si sólo queremos aproximar un valor, lo mejor es, en vez de obtener el polinomio, establecer una matriz del cálculo.

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

Añade el valor *f(4)=4* y recalcula *f(x)* en *x=5/2* con grado *3*

x_i	$f(x_i)$	$L_{3,i}(x)$
$x_0=1$	2	$\dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$
$x_1=2$	1	$\dfrac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$
$x_2=3$	$3/2$	$\dfrac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$
$x_3=4$	4	$\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4

$$P_3(x)=$$
$$=\sum_{i=0}^{3} f(x_k)L_{3,i}(x)$$
$$= f(x_0)L_{3,0}(x)+f(x_1)L_{3,1}(x)+f(x_2)L_{3,2}(x)+f(x_3)L_{3,3}(x)$$

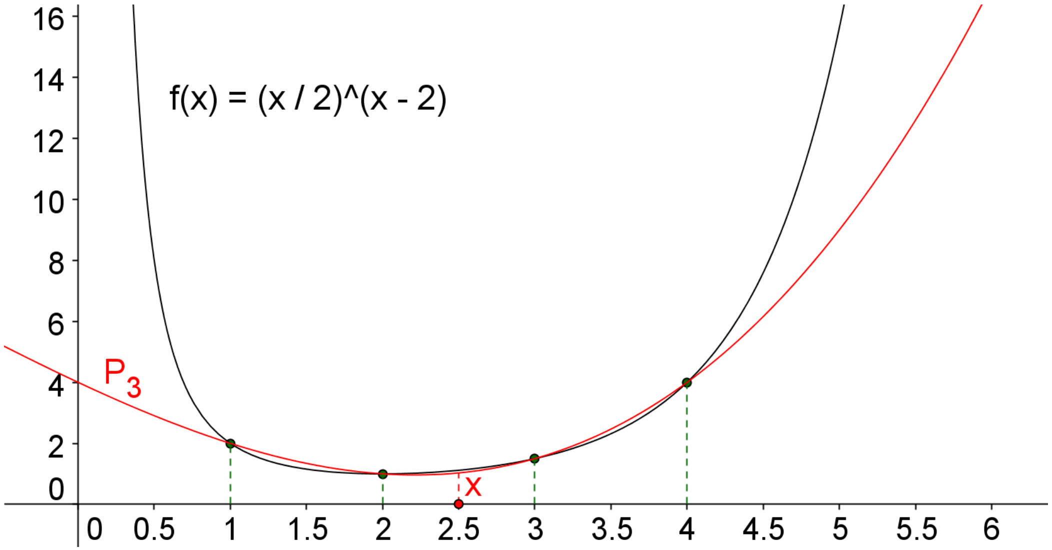
INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

x_i	$f(x_i)$	$L_{3,i}(x)$	$f(x_i)L_{3.i}(5/2)$
$x_0=1$	2	$\dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$	$2\cdot\dfrac{3/8}{-6}=-\dfrac{3}{24}$
$x_1=2$	1	$\dfrac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$	$1\cdot\dfrac{9/8}{2}=\dfrac{9}{16}$
$x_2=3$	$3/2$	$\dfrac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$	$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{-9/8}{-2}=\dfrac{27}{32}$
$x_3=4$	4	$\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$	$4\cdot\dfrac{-3/8}{6}=\dfrac{-3}{12}$

$$P_3(5/2)=\sum_{i=0}^{3} f(x_i)L_{3.i}(5/2)=-\frac{12}{96}+\frac{54}{96}+\frac{81}{96}-\frac{24}{96}=\frac{33}{32}$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

Añade el valor *f(4)=4* y recalcula *f(x)* en *x=5/2* con grado *3*



x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4

$$f(5/2)=\frac{\sqrt{5}}{2}=1{,}118$$

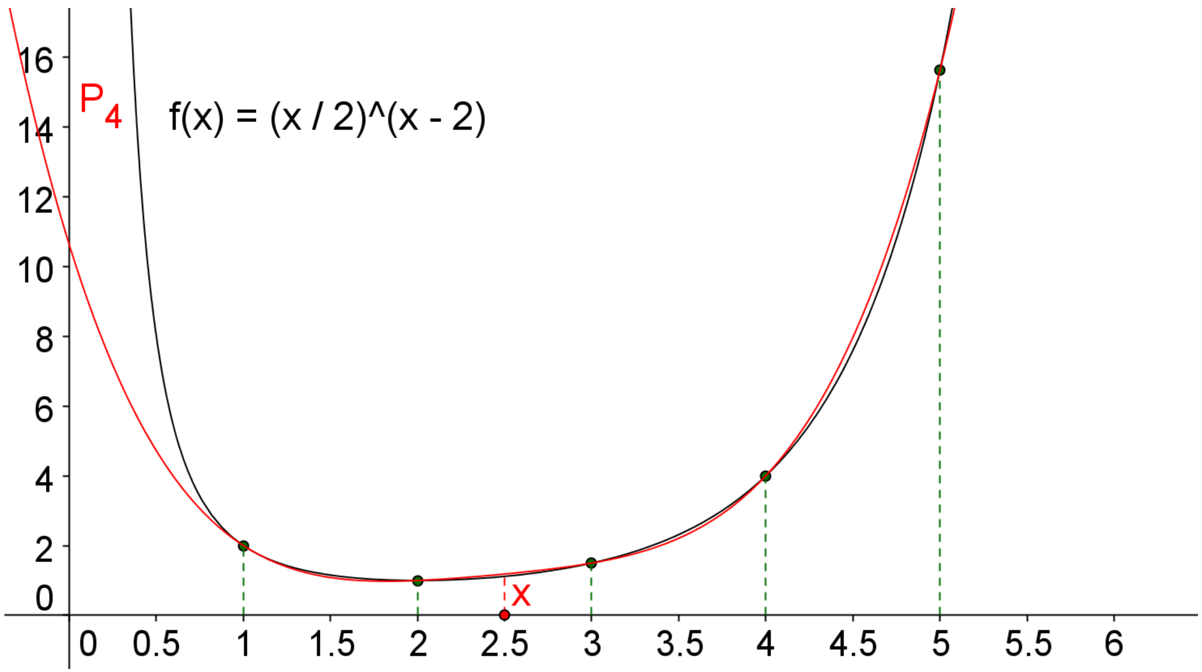
$$\Delta P_3(5/2)=0{,}0868$$

$$P_3(5/2)=\sum_{i=0}^{3} f(x_i)L_{3.i}(5/2)=\frac{33}{32}=1{,}03125$$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

… con grado *4*



x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4
$x_4=5$	$\frac{125}{8}$

$$P_4(5/2) = \frac{15}{192} + \frac{15}{32} + \frac{135}{128} \quad \frac{5}{8} + \frac{375}{1024} = 1.1865$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

… con grado *4*

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4
$x_4=5$	$\frac{125}{8}$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

x_i	$f(x_i)$	$L_{4,i}(x)$
$x_0=1$	2	$\dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)}$
$x_1=2$	1	$\dfrac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}$
$x_2=3$	$3/2$	$\dfrac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)}$
$x_3=4$	4	$\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)}$
$x_4=5$	$\dfrac{125}{8}$	$\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}$

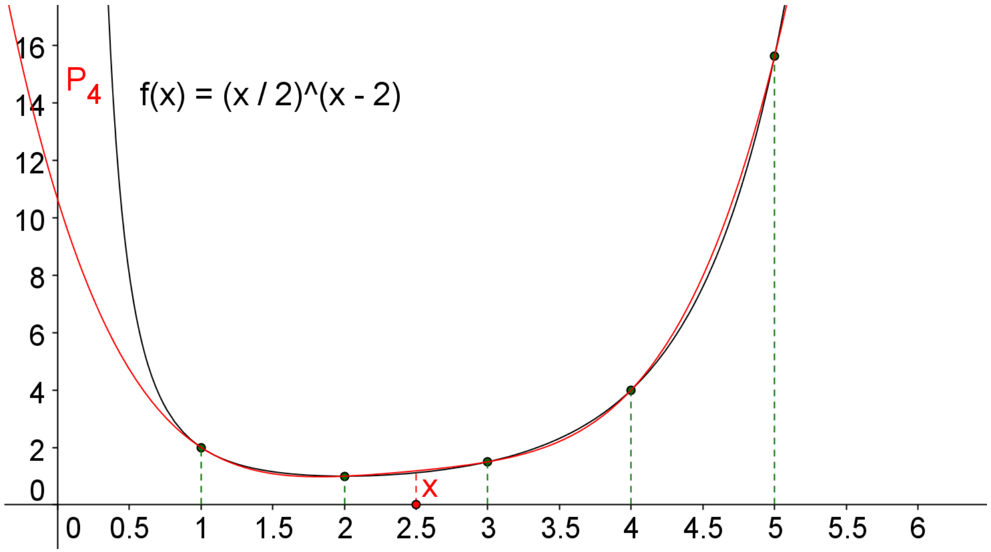
… con grado *4*

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4
$x_4=5$	$\frac{125}{8}$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

x_i	$f(x_i)$	$L_{4,i}(x)$	$f(x_i)L_{4.i}(5/2)$
1	2	$\dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)}$	$2\cdot\dfrac{-15/16}{24}=-\dfrac{15}{192}$
2	1	$\dfrac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}$	$1\cdot\dfrac{-45/16}{-6}=\dfrac{15}{32}$
3	$3/2$	$\dfrac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)}$	$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{45/16}{4}=\dfrac{135}{128}$
4	4	$\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)}$	$4\cdot\dfrac{15/16}{-6}=-\dfrac{5}{8}$
5	$\dfrac{125}{8}$	$\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}$	$\dfrac{125}{8}\cdot\dfrac{9/16}{24}=\dfrac{375}{1024}$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO



… con grado *4*

x_i	$f(x_i)$
$x_0=1$	2
$x_1=2$	1
$x_2=3$	3/2
$x_3=4$	4
$x_4=5$	$\frac{125}{8}$

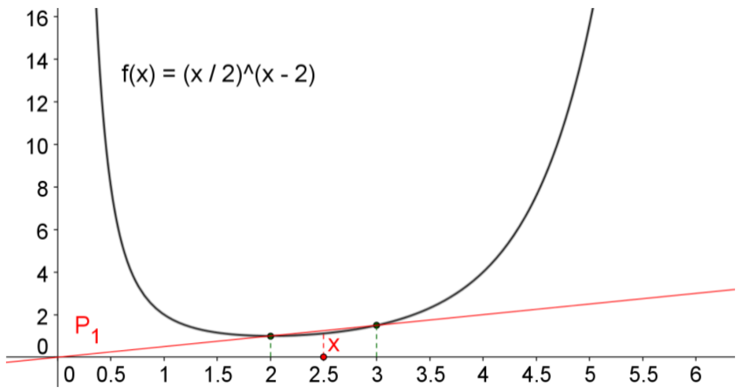
$$f(5/2)=1{,}118 \qquad \Delta P_3(5/2)=0{,}0684$$

$$P_4(5/2)=-\frac{15}{192}+\frac{15}{32}+\frac{135}{128}-\frac{5}{8}+\frac{375}{1024}=$$

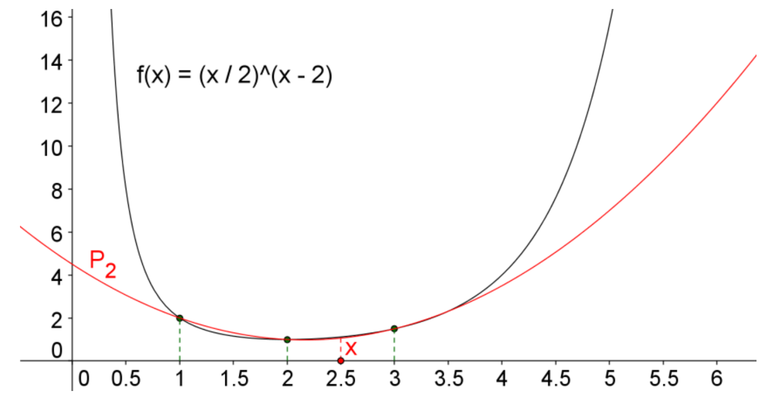
$$\frac{-240+1440+3240-1920+1125}{3072}=\frac{3645}{3072}=1{,}1865$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. EJEMPLO

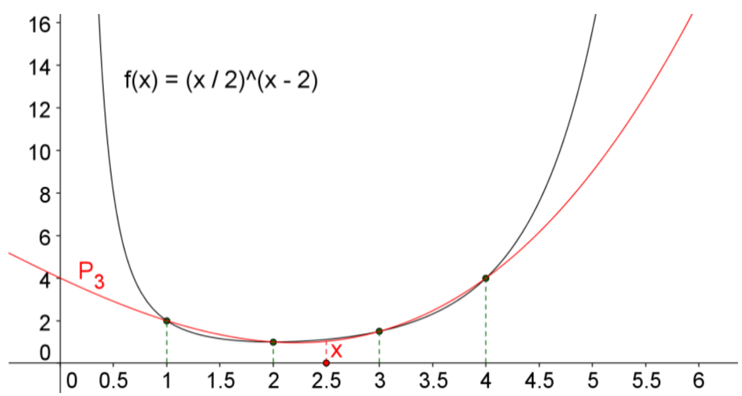
Los grados *3* y *4* no mejoran el error del grado *2* en *x=5/2*



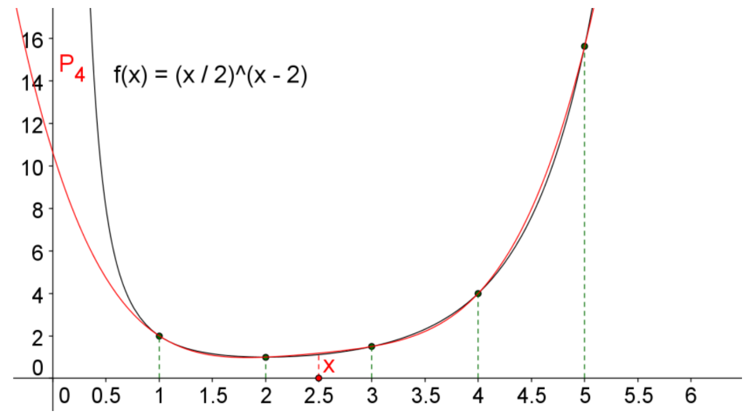
$$\Delta P_1(5/2) = 0{,}148$$



$$\Delta P_2(5/2) = 0{,}0555$$



$$\Delta P_3(5/2) = 0{,}0868$$



$$\Delta P_4(5/2) = 0{,}0684$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE MEDIANTE TABLAS

En el ejemplo anterior con $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, se ha visto que se pueden aplicar tablas para calcular el valor de la interpolación en un x concreto, en el ejemplo $x=5/2$.

Cada vez que añadimos un punto (un grado más al polinomio de interpolación) podemos crear una nueva columna en la tabla a partir de la columna anterior, salvo el último elemento de la columna, el de la nueva fila, que se calcula completamente.

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE MEDIANTE TABLAS

Crear la columna $L_{2,i}(x)$ para el polinomio $P_2(x)$ a partir de la columna $L_{1,i}(x)$ del polinomio $P_1(x)$:

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(x)$
x_0	$f(x_0)$	$\dfrac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}$
x_1	$f(x_1)$	$\dfrac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$

$$P_1(x) =$$

$$= f(x_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE MEDIANTE TABLAS

Crear la columna $L_{2,i}(x)$ para el polinomio $P_2(x)$ a partir de la columna $L_{1,i}(x)$ del polinomio $P_1(x)$:

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(x)$
x_0	$f(x_0)$	$\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}$
x_1	$f(x_1)$	$\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$

$$P_1(x) = f(x_0)\boxed{\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}} + f(x_1)\boxed{\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}}$$

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{\boxed{(x-x_1)}(x-x_2)}{\boxed{(x_0-x_1)}(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{\boxed{(x-x_0)}(x-x_2)}{\boxed{(x_1-x_0)}(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE MEDIANTE TABLAS

Crear la columna $L_{2,i}(x)$ para el polinomio $P_2(x)$ a partir de la columna $L_{1,i}(x)$ del polinomio $P_1(x)$:

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(x)$	$L_{2,i}(x)$
x_0	$f(x_0)$	$\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}$	$L_{1,0}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}$
x_1	$f(x_1)$	$\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$	$L_{1,1}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$
x_2	$f(x_2)$		$\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE MEDIANTE TABLAS

Calcular los $L_{3,i}(x)$ para el polinomio $P_3(x)$:

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(x)$	$L_{2,i}(x)$
x_0	$f(x_0)$	$\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}$	$L_{1,0}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}$
x_1	$f(x_1)$	$\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$	$L_{1,1}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$
x_2	$f(x_2)$		$\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

Si el calculo lo hacemos para un x en concreto, los $L_{n,i}$ se pueden calcular de los anteriores sin arrastrar la variable x, y el calculo se simplifica.

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE MEDIANTE TABLAS

Calcular los $L_{3,i}(x)$ para el polinomio $P_3(x)$:

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(x)$	$L_{2,i}(x)$	$L_{3,i}(x)$
x_0	$f(x_0)$	$\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}$	$L_{1,0}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}$	$L_{2,0}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)}$
x_1	$f(x_1)$	$\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$	$L_{1,1}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$	$L_{2,1}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)}$
x_2	$f(x_2)$		$\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$	$L_{2,2}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)}$
x_3	$f(x_3)$			$\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdots(x_3-x_2)}$

$$P_3(x)=f(x_0)L_{3,0}(x)+f(x_1)L_{3,1}(x)+f(x_2)L_{3,2}(x)+f(x_3)L_{3,3}(x)$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE MEDIANTE TABLAS

Calcula $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ en $x=5/2$ a partir del polinomio de interpolación de grado 1 para $x_0=1$ y $x_1=2$

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(x)$	$L_{2,i}(x)$	$L_{3,i}(x)$
x_0	$f(x_0)$	$\dfrac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}$	$L_{1,0}(x)\dfrac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}$	$L_{2,0}(x)\dfrac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)}$
x_1	$f(x_1)$	$\dfrac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$	$L_{1,1}(x)\dfrac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$	$L_{2,1}(x)\dfrac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)}$
x_2	$f(x_2)$		$\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$	$L_{2,2}(x)\dfrac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)}$
x_3	$f(x_3)$			$\dfrac{(x-x_0)\cdots(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdots(x_3-x_2)}$

$$P_1(x)=f(x_0)L_{1,0}(x)+f(x_1)L_{1,1}(x)$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE MEDIANTE TABLAS

Calcula $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ en $x=5/2$ a partir del polinomio de interpolación de grado 1 para $x_0=1$ y $x_1=2$

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(5/2)$	$L_{2,i}(x)$	$L_{3,i}(x)$
1	2	$-\frac{1}{2}$	$L_{1,0}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}$	$L_{2,0}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)}$
2	1	$\frac{3}{2}$	$L_{1,1}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$	$L_{2,1}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)}$
x_2	$f(x_2)$		$\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$	$L_{2,2}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)}$
x_3	$f(x_3)$			$\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdots(x_3-x_2)}$

$$P_1(x)=2(-1/2)+1(3/2)=1/2$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE MEDIANTE TABLAS

Calcula $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ en $x=5/2$ a partir de los valores para $x_0=1$, $x_1=2$ y $x_2=3/2$

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(5/2)$	$L_{2,i}(x)$	$L_{3,i}(x)$
1	2	$-\frac{1}{2}$	$L_{1,0}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}$	$L_{2,0}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)}$
2	1	$\frac{3}{2}$	$L_{1,1}(x)\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$	$L_{2,1}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)}$
x_2	$f(x_2)$		$\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$	$L_{2,2}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)}$
x_3	$f(x_3)$			$\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdots(x_3-x_2)}$

$P_1(x)=1/2$ $\qquad$ $P_2(x)=f(x_0)L_{2,0}+f(x_1)L_{2,1}+f(x_2)L_{2,2}$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE MEDIANTE TABLAS

Calcula $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ en $x=5/2$ a partir de los valores para $x_0=1$, $x_1=2$ y $x_2=3/2$

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(5/2)$	$L_{2,i}(5/2)$	$L_{3,i}(x)$
1	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$L_{2,0}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)}$
2	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$L_{2,1}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)}$
3	$\frac{3}{2}$		$\frac{3}{8}$	$L_{2,2}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)}$
x_3	$f(x_3)$			$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x-x_1)(x_3-x_2)}$

$P_1(x)=1/2$

$P_2(x)=2(-1/8)+1(3/4)+(3/2)(3/8)=17/16$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE MEDIANTE TABLAS

Calcula $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ en $x=5/2$ a partir de los valores para $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(5/2)$	$L_{2,i}(5/2)$	$L_{3,i}(x)$
1	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$L_{2,0}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)}$
2	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$L_{2,1}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)}$
3	$\frac{3}{2}$		$\frac{3}{8}$	$L_{2,2}(x)\frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)}$
x_3	$f(x_3)$			$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x-x_1)(x_3-x_2)}$

$$P_3(x)=f(x_0)L_{3,0}(x)+f(x_1)L_{3,1}(x)+f(x_2)L_{3,2}(x)+f(x_3)L_{3,3}(x)$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE MEDIANTE TABLAS

Calcula $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ en x=$5/2$ a partir de los valores para $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(5/2)$	$L_{2,i}(5/2)$	$L_{3,i}(5/2)$
1	2	$-1/2$	$-1/8$	$-1/16$
2	1	$3/2$	$3/4$	$9/16$
3	$3/2$		$3/8$	$9/16$
x_3	4			$-1/16$

$$P_1(x) = 2(-1/2) + 1(3/2) = 1/2$$

$$P_2(x) = 2(-1/8) + 1(3/4) + (3/2)(3/8) = 17/16$$

$$P_3(x) = 2(-1/16) + 1(9/16) + (3/2)(9/16) + 4(-1/16) = 33/32$$

INTERPOLACIÓN. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. TABLAS INTERPOLADORAS

Calcular los $L_{3,i}(x)$ para el polinomio $P_3(x)$

x_i	$f(x_i)$	$L_{1,i}(x)$	$L_{2,i}(x)$	$L_{3,i}(x)$
x_0	$f(x_0)$	$\dfrac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}$	$L_{1,0}(x)\dfrac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}$	$L_{2,0}(x)\dfrac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)}$
x_1	$f(x_1)$	$\dfrac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$	$L_{1,1}(x)\dfrac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$	$L_{2,1}(x)\dfrac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)}$
x_2	$f(x_2)$		$\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$	$L_{2,2}(x)\dfrac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)}$
x_3	$f(x_3)$			$\dfrac{(x-x_0)\cdots(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdots(x_3-x_2)}$

$$P_3(x) = f(x_0)L_{3,0}(x) + f(x_1)L_{3,1}(x) + f(x_2)L_{3,2}(x) + f(x_3)L_{3,3}(x)$$

Problemas

- No necesariamente gana precisión aumentando de orden

- Es complicado su cálculo manual

INTERPOLACIÓN. TABLAS DE NEVILLE

A veces no es necesario obtener la forma explícita del polinomio interpolador y basta con obtener su valor numérico en un punto dado. Además en este caso nos gustaría el poder aumentar el orden del polinomio interpolador a voluntad y parar cuando el error sea suficientemente pequeño. Para estos propósitos el algoritmo de Neville está especialmente indicado.

INTERPOLACIÓN. TABLAS DE NEVILLE

Algoritmo de Neville:

Sea $p_{i,j}(x)$ el valor en x del polinomio de grado $j-i$ que pasa por los puntos (x_k,y_k) con $k=i,i+1,\ldots,j$

$p_{i,j}(x)$ satisface la siguiente relación de recurrencia:

$$p_{i,i}(x) = y_i \qquad 0 \le i \le n$$

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x - x_j)\,p_{i,j-1}(x) + (x_i - x)\,p_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j}$$

de forma que $p_{0,n}(x)$ es el valor del polinomio de Lagrange $P_n(x)$ en x.

INTERPOLACIÓN. TABLAS DE NEVILLE

Por ejemplo, $p_{1,2}(x)$ será

$$p_{i,i}(x) = y_i \qquad 0 \le i \le n$$

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x - x_j)\,p_{i,j-1}(x) + (x_i - x)\,p_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j}$$

INTERPOLACIÓN. TABLAS DE NEVILLE

Por ejemplo, $p_{1,2}(x)$ será

$$p_{1,2}(x) = \frac{(x - x_2)\,p_{1,1}(x) + (x_1 - x)\,p_{2,2}(x)}{x_1 - x_2}$$

$$p_{i,i}(x) = y_i \qquad 0 \le i \le n$$

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x - x_j)\,p_{i,j-1}(x) + (x_i - x)\,p_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j}$$

INTERPOLACIÓN. TABLAS DE NEVILLE

Por ejemplo, $p_{1,2}(x)$ será

$$p_{1,2}(x)=\frac{(x-x_2)p_{1,1}(x)+(x_1-x)p_{2,2}(x)}{x_1-x_2}=$$

$$=\frac{(x-x_2)y_1+(x_1-x)y_2}{x_1-x_2}$$

$$p_{i,i}(x)=y_i \qquad 0\le i\le n$$

$$p_{i,j}(x)=\frac{(x-x_j)p_{i,j-1}(x)+(x_i-x)p_{i+1,j}(x)}{x_i-x_j}$$

INTERPOLACIÓN. TABLAS DE NEVILLE

Por ejemplo, $p_{1,2}(x)$ será

$$p_{1,2}(x) = \frac{(x - x_2)\,p_{1,1}(x) + (x_1 - x)\,p_{2,2}(x)}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{(x - x_2)\,y_1 + (x_1 - x)\,y_2}{x_1 - x_2}$$

Como se puede ver,

se trata de una recta pasa por los puntos

(x_1, y_1) y (x_2, y_2)

INTERPOLACIÓN. TABLAS DE NEVILLE

Los valores de $P_n(x)$ están en la diagonal superior

x_i	$y_i = f(x_i)$			
x_0	$p_{0,0}(x) = y_0$	$p_{0,1}(x)$	$p_{0,2}(x)$	$p_{0,3}(x)$
x_1	$p_{1,1}(x) = y_1$	$p_{1,2}(x)$	$p_{1,3}(x)$	
x_2	$p_{2,2}(x) = y_2$	$p_{2,3}(x)$		
x_3	$p_{3,3}(x) = y_3$			

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x - x_j)\,p_{i,j-1}(x) + (x_i - x)\,p_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j}$$

INTERPOLACIÓN. TABLAS DE NEVILLE

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ en $x=5/2$ con $x_0=1$ y $x_1=2$

x_i	$y_i = f(x_i)$			
x_0	$p_{0,0}(x) = y_0$			
		$p_{0,1}(x)$		
x_1	$p_{1,1}(x) = y_1$		$p_{0,2}(x)$	
		$p_{1,2}(x)$		$p_{0,3}(x)$
x_2	$p_{2,2}(x) = y_2$		$p_{1,3}(x)$	
		$p_{2,3}(x)$		
x_3	$p_{3,3}(x) = y_3$			

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x - x_j)\,p_{i,j-1}(x) + (x_i - x)\,p_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j}$$

INTERPOLACIÓN. TABLAS DE NEVILLE

Para *f(x)=(x/2)*$^{(x-2)}$ en x=*5/2* con x_0*=1* y x_1*=2*

x_i	$y_i = f(x_i)$
$x_0 = 1$	$p_{0,0}(x) = 2$
$x_1 = 2$	$p_{1,1}(x) = 1$
x_2	$p_{2,2}(x) = y_2$
x_3	$p_{3,3}(x) = y_3$

$$P_1(x) = \frac{1}{2}$$

$p_{0,1}(x) = \frac{1}{2}$	$p_{0,2}(x)$	$p_{0,3}(x)$
$p_{1,2}(x)$	$p_{1,3}(x)$	
$p_{2,3}(x)$		

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x - x_j)\,p_{i,j-1}(x) + (x_i - x)\,p_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j}$$

INTERPOLACIÓN. TABLAS DE NEVILLE

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, $x=5/2$, $x_0=1$, $x_1=2$ y $x_2=3$

$$P_1(x)=\frac{1}{2} \qquad P_2(x)=\frac{17}{16}$$

x_i	$y_i=f(x_i)$			
$x_0=1$	$p_{0,0}(x)=2$	$p_{0,1}(x)=\frac{1}{2}$	$p_{0,2}(x)=\frac{17}{16}$	$p_{0,3}(x)$
$x_1=2$	$p_{1,1}(x)=1$	$p_{1,2}(x)=\frac{5}{4}$	$p_{1,3}(x)$	
$x_2=3$	$p_{2,2}(x)=\frac{3}{2}$	$p_{2,3}(x)$		
x_3	$p_{3,3}(x)$			

$$p_{i,j}(x)=\frac{(x-x_j)\,p_{i,j-1}(x)+(x_i-x)\,p_{i+1,j}(x)}{x_i-x_j}$$

INTERPOLACIÓN. TABLAS DE NEVILLE

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, $x=5/2$, $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

$$P_1(x)=\frac{1}{2} \qquad P_2(x)=\frac{17}{16} \qquad P_3(x)=\frac{33}{32}$$

x_i	$y_i = f(x_i)$			
$x_0=1$	$p_{0,0}(x)=2$			
		$p_{0,1}(x)=\frac{1}{2}$		
$x_1=2$	$p_{1,1}(x)=1$		$p_{0,2}(x)=\frac{17}{16}$	
		$p_{1,2}(x)=\frac{5}{4}$		$p_{0,3}(x)=\frac{33}{32}$
$x_2=3$	$p_{2,2}(x)=\frac{3}{2}$		$p_{1,3}(x)=1$	
		$p_{2,3}(x)=\frac{1}{4}$		
$x_3=4$	$p_{3,3}(x)=4$			

$$p_{i,j}(x)=\frac{(x-x_j)\,p_{i,j-1}(x)+(x_i-x)\,p_{i+1,j}(x)}{x_i-x_j}$$

Si con las tablas de interpolación se intenta obtener una expresión del polinomio $P_n(x)$, va a resultar compleja y difícil de manejar.

El siguiente método permite obtener la expresión explícita del polinomio de interpolación

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS

El siguiente método permite obtener la expresión explícita del polinomio de interpolación, y por eso resulta el más útil cuando luego se pretende derivar, integrar u operar en general con el polinomio

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS

En el método de Diferencias divididas, el polinomio se obtiene mediante la siguiente expresión

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$$

donde

$$\begin{aligned}
f[x_i] &= f(x_i) \\
f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \\
&\vdots \\
f[x_i, \ldots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}
\end{aligned}$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$

x_i	$f[x_i]$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$

$$f[x_i] = f(x_i)$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$
x_0	$f(x_0)$	
		$f[x_0, x_1]$
x_1	$f(x_1)$	
		$f[x_1, x_2]$
x_2	$f(x_2)$	
		$f[x_2, x_3]$
x_3	$f(x_3)$	

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Pirámide para calcular *$P_n(x)$* para *$n=3$*

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$
x_0	$f(x_0)$	
		$f[x_0, x_1]$
x_1	$f(x_1)$	
		$f[x_1, x_2]$
x_2	$f(x_2)$	
		$f[x_2, x_3]$
x_3	$f(x_3)$	

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$
x_0	$f(x_0)$	
		$f[x_0,x_1]$
x_1	$f(x_1)$	
		$f[x_1,x_2]$
x_2	$f(x_2)$	
		$f[x_2,x_3]$
x_3	$f(x_3)$	

$$f[x_i,x_{i+1}]=\frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i}$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$
x_0	$f(x_0)$	
		$f[x_0,x_1]$
x_1	$f(x_1)$	
		$f[x_1,x_2]$
x_2	$f(x_2)$	
		$f[x_2,x_3]$
x_3	$f(x_3)$	

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$f[x_2,x_3]=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$$f[x_i,x_{i+1}]=\frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i}$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	...	$f[x_{i-3},\ldots,x_i]$
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$			
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$		
		$f[x_2,x_3]$			
x_3	$f(x_3)$				

$$f[x_i,\ldots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]-f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$\ldots$	$f[x_{i-3},\ldots,x_i$
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$			

$$f[x_i,\ldots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]-f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} \qquad f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	...	$f[x_{i-3},\ldots,x_i]$
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$			$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$		
		$f[x_2,x_3]$			
x_3	$f(x_3)$				

$$f[x_i,\ldots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]-f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$

Los valores para calcular $P_n(x)$ son los de la diagonal superior

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	...	$f[x_{i-3},\ldots,x_i]$
x_0	$\boxed{f(x_0)}$				
		$\boxed{f[x_0,x_1]}$			
x_1	$f(x_1)$		$\boxed{f[x_0,x_1,x_2]}$		
		$f[x_1,x_2]$			$\boxed{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$		
		$f[x_2,x_3]$			
x_3	$f(x_3)$				

$$P_n(x)=f[x_0]+\sum_{k=1}^{n} f[x_0,x_1,\ldots,x_k](x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})$$

$$P_3(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+$$
$$+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS. EJEMPLO

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, $x=5/2$, $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

x_i	$f[x_i]$
$x_0=1$	
$x_1=2$	
$x_2=3$	
$x_3=4$	

$$f[x_i,\ldots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]-f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS. EJEMPLO

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, x=$5/2$, $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

x_i	$f[x_i]$	
$x_0=1$	2	
		$\left(\dfrac{1-2}{2-1}\right)=-1$
$x_1=2$	1	
		$\left(\dfrac{3/2-1}{3-2}\right)=\dfrac{1}{2}$
$x_2=3$	$\dfrac{3}{2}$	
		$\left(\dfrac{4-3/2}{4-3}\right)=\dfrac{5}{2}$
$x_3=4$	4	

$$f[x_i,\ldots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]-f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS. EJEMPLO

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, x=$5/2$, $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

x_i	$f[x_i]$		
$x_0=1$	2		
		$\left(\frac{1-2}{2-1}\right)=-1$	
$x_1=2$	1		$\left(\frac{1/2+1}{3-1}\right)=\frac{3}{4}$
		$\left(\frac{3/2-1}{3-2}\right)=\frac{1}{2}$	
$x_2=3$	$\frac{3}{2}$		$\left(\frac{5/2-1/2}{4-2}\right)=1$
		$\left(\frac{4-3/2}{4-3}\right)=\frac{5}{2}$	
$x_3=4$	4		

$$f[x_i,\ldots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]-f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS. EJEMPLO

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, x=$5/2$, $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

x_i	$f[x_i]$			
$x_0=1$	2			
		$\left(\frac{1-2}{2-1}\right)=-1$		
$x_1=2$	1		$\left(\frac{1/2+1}{3-1}\right)=\frac{3}{4}$	
		$\left(\frac{3/2-1}{3-2}\right)=\frac{1}{2}$		$\left(\frac{1-3/4}{4-1}\right)=\frac{1}{12}$
$x_2=3$	$\frac{3}{2}$		$\left(\frac{5/2-1/2}{4-2}\right)=1$	
		$\left(\frac{4-3/2}{4-3}\right)=\frac{5}{2}$		
$x_3=4$	4			

$$f[x_i,\dots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},\dots,x_{i+k}]-f[x_i,\dots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS. EJEMPLO

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, $x=5/2$, $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$
$x_0 = 1$	2	-1	$3/4$	$1/12$
$x_1 = 2$	1	$1/2$	1	
$x_2 = 3$	$3/2$	$5/2$		
$x_3 = 4$	4			

$$P_1(x) = 2 - 1(x-1)$$

$$P_1(5/2) = 2 - (5/2 - 1) = 1/2$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS. EJEMPLO

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, $x=5/2$, $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$
$x_0 = 1$	2			
$x_1 = 2$	1	-1		
$x_2 = 3$	$3/2$	$1/2$	$3/4$	
$x_3 = 4$	4	$5/2$	1	$1/12$

$$P_2(x) = \boxed{2 - 1(x-1)} + (3/4)(x-1)(x-2)$$

$$P_2(x) = \boxed{P_1(x)} + (3/4)(x-1)(x-2)$$

$$P_2(5/2) = 1/2 + (3/4)(3/2)(1/2) = 8/16 + 9/16 = 17/16$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS.EJEMPLO

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$, $x=5/2$, $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ y $x_3=4$

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k](x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \dots, x_i]$
$x_0 = 1$	2			
$x_1 = 2$	1	-1		
$x_2 = 3$	$3/2$	$1/2$	$3/4$	
$x_3 = 4$	4	$5/2$	1	$1/12$

$$P_3(x) = \boxed{2 - 1(x-1) + (3/4)(x-1)(x-2)} + (1/12)(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$P_3(x) = \boxed{P_2(x)} + (1/12)(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$P_3(5/2) = 17/16 + (1/12)(3/2)(1/2)(-1/2) = 17/16 - 1/32 = 33/32$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS.EJEMPLO

Obtén el polinomio de interpolación de una función de la que se sabe la siguiente tabla de valores

x	$f(x)$
-1	15
0	8
3	-1

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS.EJEMPLO

Obtén el polinomio de interpolación de una función de la que se sabe la siguiente tabla de valores

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$
-1	15	
		-7
0	8	
		-3
3	-1	

$$f[x_0, x_1] = \frac{8-15}{0+1}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{-1-8}{3-0}$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS.EJEMPLO

Obtén el polinomio de interpolación de una función de la que se sabe la siguiente tabla de valores

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
-1	15		
		-7	
0	8		1
		-3	
3	-1		

$$f[x_0, x_1] = \frac{8-15}{0+1}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{-1-8}{3-0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-3+7}{3+1}$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS.EJEMPLO

Obtén el polinomio de interpolación de una función de la que se sabe la siguiente tabla de valores

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$
-1	15		
		-7	
0	8		1
		-3	
3	-1		

$$f[x_0,x_1]=\frac{8-15}{0+1}$$

$$f[x_1,x_2]=\frac{-1-8}{3-0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{-3+7}{3+1}$$

$$P_2(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$P_2(x)=15-7(x+1)+1(x+1)(x-0)=x^2-6x+8$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS.EJEMPLO

Amplía el polinomio de interpolación un grado con un nuevo valor para x_3 y $f(x_3)$

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
-1	15			
0	8	-7		
3	-1	-3	1	
5	-5			

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS.EJEMPLO

Amplía el polinomio de interpolación un grado con un nuevo valor para x_3 y $f(x_3)$

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
-1	15			
0	8	-7		
3	-1	-3	1	
5	-5	-2		

$$f[x_2, x_3] = \frac{-5+1}{5-3}$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS.EJEMPLO

Amplía el polinomio de interpolación un grado con un nuevo valor para x_3 y $f(x_3)$

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
-1	15			
0	8	-7		
3	-1	-3	1	
5	-5	-2	$1/5$	

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-2+3}{5-0}$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS.EJEMPLO

Amplía el polinomio de interpolación un grado con un nuevo valor para x_3 y $f(x_3)$

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
-1	15			
		-7		
0	8		1	
		-3		$-2/15$
3	-1		$1/5$	
		-2		
5	-5			

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{1/5 - 1}{5 + 1}$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS.EJEMPLO

Amplía el polinomio de interpolación un grado con un nuevo valor para x_3 y $f(x_3)$

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
-1	15			
0	8	-7		
3	-1	-3	1	
5	-5	-2	$1/5$	$-2/15$

$$P_3(x) = P_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P_3(x) = x^2 - 6x + 8 - 2/15(x+1)x(x-3) =$$

$$= x^2 - 6x + 8 - 2/15(x^3 + 2x^2 - 3x)$$

INTERPOLACIÓN. DIFERENCIAS DIVIDIDAS.EJEMPLO

Amplía el polinomio de interpolación un grado con un nuevo valor para x_3 y $f(x_3)$

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
-1	15			
0	8	-7		
3	-1	-3	1	
5	-5	-2	$1/5$	$-2/15$

$$P_3(x) = P_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P_3(x) = \frac{-2x^3}{15} + \frac{3x^2}{5} - \frac{28x}{5} + 8$$