Типы распределений случайных величин

Высшая школа цифровой культуры
Университет ИТМО
dc@itmo.ru

Содержание

1 Распределения случайных величин

В предыдущей лекции мы познакомились с понятиями общего вероятностного пространства, случайной величины и ее функции распределения. В этой лекции мы познакомимся с различными типами распределений случайных величин. Начнем с более простого и практически полностью знакомого нам случая.

1.1 Дискретное распределение

Определение 1.1.1 *Говорят, что случайная величина ξ, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$, имеет дискретное распределение, если множество ее значений не более чем счетно.*

Пусть множество значений случайной величины есть множество чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Тогда, очевидно,

$$\sum_i \mathsf{P}(\xi = a_i) = 1,$$

где верхний индекс суммирования может быть как конечным (если множество значений случайной величины конечно, что мы видели ранее), так и бесконечным. Как и в простейшем случае, с дискретной случайной величиной часто связывают таблицу (теперь, может быть, бесконечную) или ряд распределения

ξ	a_1	a_2	$\dots$	a_n	$\dots$
P	$\mathsf{P}(\xi = a_1)$	$\mathsf{P}(\xi = a_2)$	$\dots$	$\mathsf{P}(\xi = a_n)$	$\dots$

.

Легко понять, что вероятность того, что случайная величина ξ, имеющая дискретное распределение, попадет в некоторое множество $A \subset \mathbb{R}$, может быть вычислена, как

$$\mathsf{P}(\xi \in A) = \sum_{i:\ a_i \in A} \mathsf{P}(\xi = a_i).$$

Пример 1.1.1 *В лотерее на каждые* 100 *билетов в среднем приходится* 15 *выигрышных. Данные о количестве билетов и размере выигрышей (в рублях) приведены в таблице*

размер выигрыша	0	100	500	2000
количество билетов	85	10	4	1

.

Пусть ξ – случайная величина, показывающая размер выигрыша на один случайно выбранный билет. Тогда ее распределение задается следующей таблицей

ξ	0	100	500	2000
P	0.85	0.1	0.04	0.01

Построим функцию распределения $F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x)$ данной случайной величины. Ясно, что ключевыми точками построения являются точки-значения случайной величины: $0,\ 100,\ 500,\ 2000$. *Тогда*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0.85, & 0 < x \le 100 \\ 0.95, & 100 < x \le 500 \\ 0.96, & 500 < x \le 1000 \\ 1, & x > 1000 \end{cases}.$$

График функции распределения представлен на рисунке 1. Как получилась

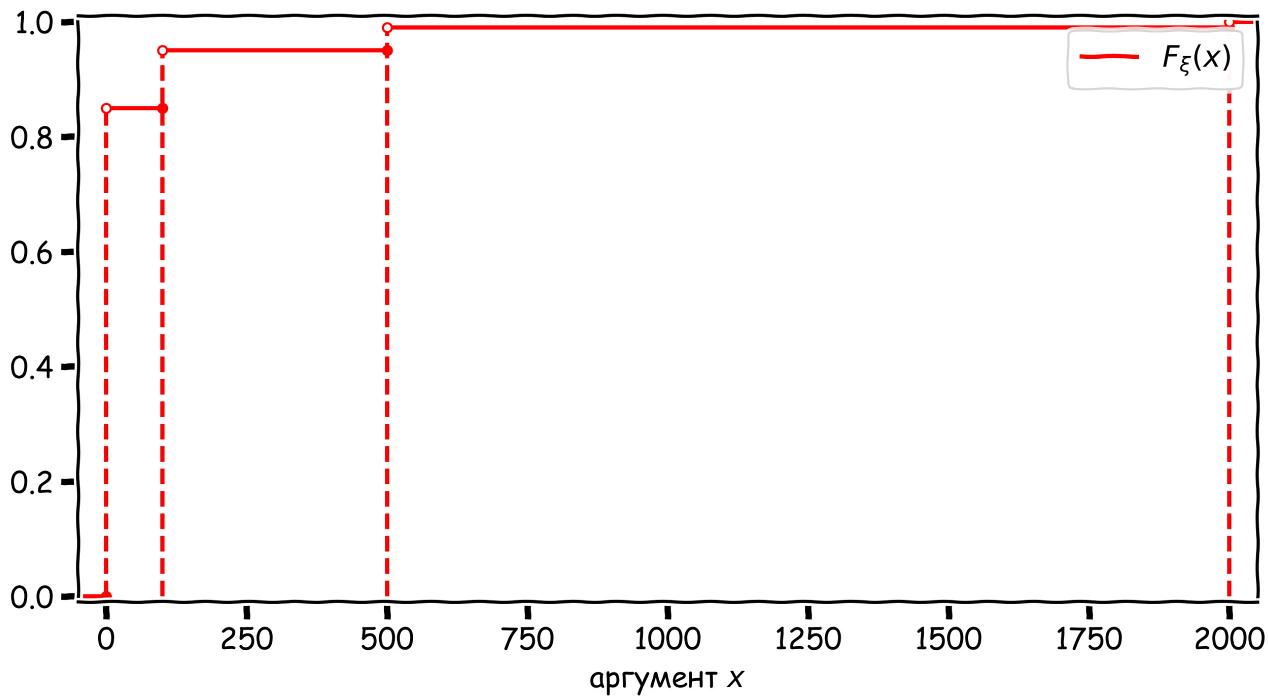

Рис. 1: Функция распределения $F_\xi(t)$

такая функция распределения? Ну смотрите, что происходит при $x \le 0$? Нас интересует вероятность события, что случайная величина меньше, чем x. Но наша случайная величина ξ не принимает отрицательных значений, а значит вероятность события $\{\xi(\omega) < x,\ x \le 0\}$ равна 0, тогда и значение функции распределения равно 0.

Теперь рассмотрим промежуток $0 < x \leq 100$*. При каждом* x *из такого промежутка событие* $\{\xi < x\}$ *состоит ровно из одного значения случайной величины, нулевого, его вероятность равна* 0.85*, что и записано в функции распределения.*

Пусть теперь $100 < x \leq 500$*. Теперь для каждого* x *из рассматриваемого промежутка событие* $\{\xi < x\}$ *включает в себя только два значения случайной величины* ξ *– это значения* 0 *и* 100*. Значит, вероятность рассматриваемого события равна* $0.85+0.1 = 0.95$*, что и отражено в функции распределения. И так далее. Знаки неравенств расставлены в силу свойства непрерывности слева.*

В заключении ответим на вопрос: какова вероятность события, что случайный билет принесет выигрыш более 100 *рублей? На этот вопрос можно ответить и непосредственно, ведь, как мы отмечали перед примером,*

$$\mathsf{P}(\xi \in A) = \sum_{i:\ a_i \in A} \mathsf{P}(\xi = a_i).$$

В нашем случае

$$\mathsf{P}\left(\xi > 100\right) = \sum_{i:\ a_i > 100} \mathsf{P}(\xi = a_i)$$

Так как значения случайной величины, превышающие 100 *– это* 500 *и* 2000*, то последняя сумма состоит из двух слагаемых:*

$$\mathsf{P}\left(\xi > 100\right) = \mathsf{P}\left(\xi = 500\right) + \mathsf{P}\left(\xi = 2000\right) = 0.04 + 0.01 = 0.05.$$

Значит, искомая вероятность равна 0.05*.*

Используя функцию распределения, на тот же самый вопрос можно ответить несколько иначе, смотрите:

$$\mathsf{P}\left(\xi > 100\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\xi \leq 100\right) = 1 - \left(\mathsf{P}\left(\xi < 100\right) + \left(\xi = 100\right)\right) =$$

$$1 - (F_\xi(100) + F_\xi(100+0) - F_\xi(100)) = 1 - F_\xi(100+0) = 1 - 0.95 = 0.05.$$

Рассмотрим некоторые стандартные распределения, встречавшиеся нам и ранее, а также найдем функцию распределения для них.

Пример 1.1.2 (Вырожденное распределение) *Говорят, что случайная величина* ξ *имеет вырожденное распределение, и пишут* $\xi \sim \mathsf{I}_{x_0}$*, если существует число* $x_0 \in \mathbb{R}$ *такое, что* $\mathsf{P}(\xi = x_0) = 1$*. Ряд распределения такой случайной величины имеет вид*

ξ	x_0
P	1

Какой вид имеет функция распределения? Вспомнив ее определение, легко понять, что

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_0 \\ 1, & x > x_0 \end{cases}$$

График функции распределения представлен на рисунке 2

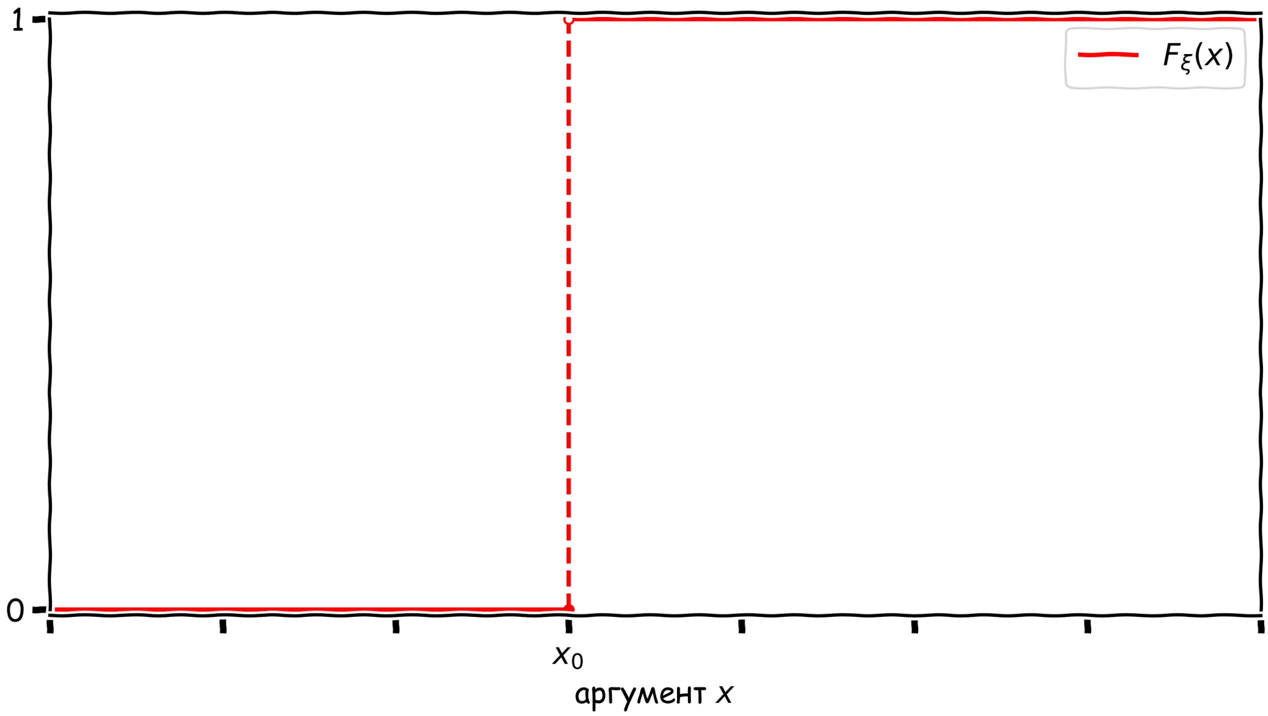

Рис. 2: Функция распределения случайной величины с вырожденным распределением

Пример 1.1.3 (Распределение Бернулли) *Говорят, что случайная величина ξ имеет распределение Бернулли, и пишут $\xi \sim \mathsf{B}_p$, если она принимает всего два значения 0 и 1, причем $\mathsf{P}(\xi = 1) = p$, $\mathsf{P}(\xi = 0) = 1 - p = q$. Выпишем ряд распределения:*

ξ	0	1
P	$1-p$	p

Функция распределения имеет следующий вид

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1-p, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

а ее график представлен на рисунке 3.

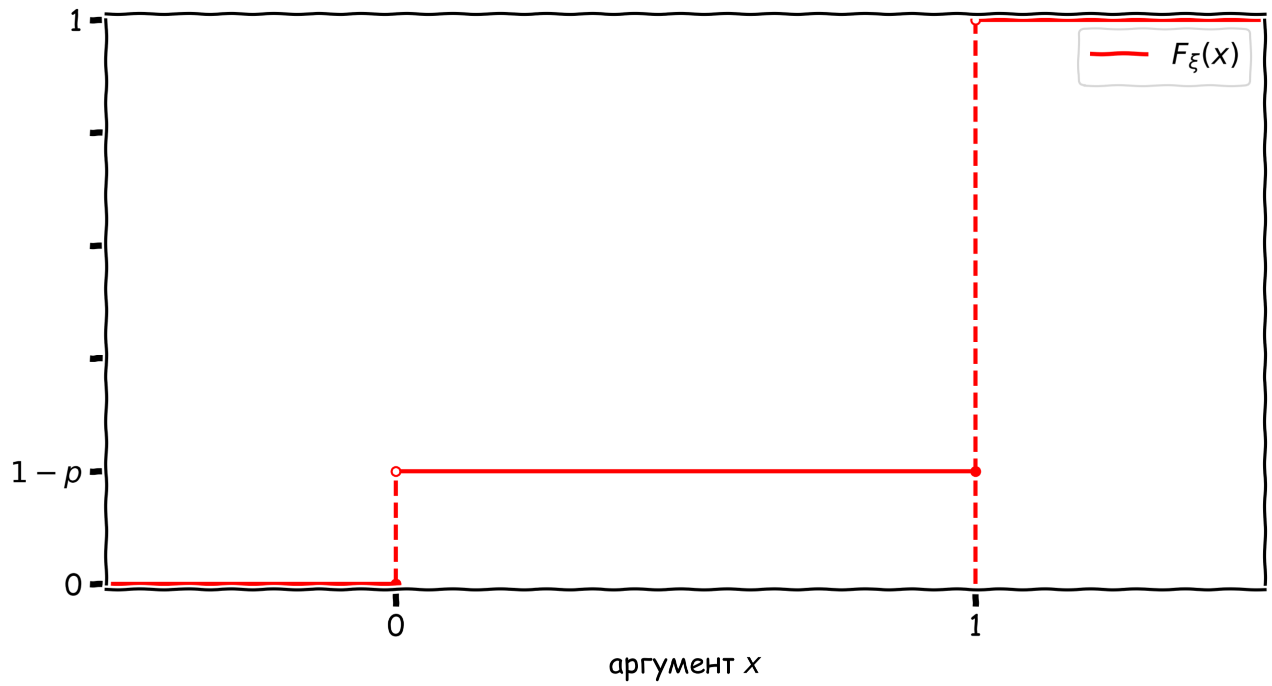

Рис. 3: Функция распределения случайной величины, имеющей распределение Бернулли

Из описанных примеров виден общий принцип построения функции распределения для дискретной случайной величины ξ. Пусть случайная величина задана своим рядом распределения

ξ	a_1	a_2	$\dots$	a_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Как формируется функция распределения? Она имеет скачки в точках a_i, причем величина скачка равна p_i. Учитывая свойство непрерывности слева, получаем

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le a_1 \\ p_1, & a_1 < x \le a_2 \\ p_1 + p_2, & a_2 < x \le a_3 \\ p_1 + p_2 + p_3, & a_3 < x \le a_4 \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + ... + p_n, & a_n < x \le a_{n+1} \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Последнее равенство можно переписать следующим образом (это будет полезно в дальнейшем для проведения аналогии с абсолютно непрерывным случаем)

$$F_\xi(x) = \sum_{i:\ a_i < x} \mathsf{P}(\xi = a_i),$$

то есть значение функции распределения в точке x равно сумме вероятностей $\mathsf{P}(\xi = a_i)$ для тех значений a_i, которые меньше, чем x. Еще раз отметим, что функция распределения дискретной случайной величины кусочно-постоянна, имеет разрывы первого рода в точках a_i, причем величина скачка в точке a_i равна $\mathsf{P}(\xi = a_i)$.

Приведем еще примеры дискретных распределений. Биномиальное распределение было мотивировано и тщательно нами изучено в предыдущих лекциях.

Пример 1.1.4 (Биномиальное распределение) *Говорят, что случайная величина ξ имеет биномиальное распределение, и пишут $\xi \sim \mathsf{Bin}(n,p)$, $p \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$, если она принимает значения $0, 1, 2, ..., n$ с вероятностями*

$$\mathsf{P}(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Таблица распределения для случайной величины, имеющей биномиальное распределение, имеет вид

ξ	0	1	$\ldots$	$n-1$	n
P	$(1-p)^n$	$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$	$\ldots$	$C_n^{n-1} p^{n-1}(1-p)$	p^n

Пример 1.1.5 *Студент выполняет тест, содержащий 8 вопросов с четырьмя вариантами ответа каждый, из которых только один верный. Построим ожидаемое распределение количества правильно решенных заданий, если ответы выбираются наугад.*

Ясно, что рассматриваемая случайная величина имеет биномиальное распределение $\mathsf{Bin}(8, 0.25)$. Таблица распределения (округленная до тысячных так, чтобы и правда получилось распределение, то есть чтобы сумма чисел, стоящих во второй строке, равнялась единице), имеет следующий вид

ξ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0.1	0.267	0.311	0.208	0.087	0.023	0.004	0	0

Вероятности соответствующих значений случайной величины вычисляются по формулам $\mathsf{P}(\xi = k) = C_8^k \cdot 0.25^k \cdot 0.75^{8-k}$, $k \in \{0, 1, 2, ..., 8\}$.

Ответим на вопрос: какова вероятность сдать тест, если для этого необходимо ответить не менее, чем на 5 вопросов.

$$\mathsf{P}(\xi \geq 5) = 0.023 + 0.004 = 0.027.$$

Все описанные до этого момента примеры распределений основаны на конечном пространстве элементарных исходов Ω. Конечно, это не обязательно. Следующий пример основан на ранее обсуждаемом нами эксперименте подбрасывания монеты до первого выпадения орла.

Пример 1.1.6 (Геометрическое распределение) *Говорят, что случайная величина имеет геометрическое распределение, и пишут $\xi \sim \mathsf{G}_p$, $p \in (0, 1)$, если она принимает значения $1, 2, 3, ..., n, ...$ с вероятностями*

$$\mathsf{P}(\xi = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Таблица распределения имеет вид

ξ	1	2	$\ldots$	n	$\ldots$
P	p	$(1-p)p$	$\ldots$	$(1-p)^{n-1}p$	$\ldots$

Отметим, что свое название геометрическое распределение получило из-за того, что значения вероятностей представляют собой геометрическую прогрессию со знаменателем $(1-p)$ и первым членом p. Кроме того, совершенно ясно, что случайная величина, имеющая геометрическое распределение, показывает номер первого успешного испытания в схеме Бернулли.

Пример 1.1.7 *В среднем 7 процентов людей страдают сахарным диабетом. Допустим, что проводится опрос населения города для выявления людей с данной патологией. Пусть случайная величина ξ – количество опрошенных людей до первого выявления больного этим заболеванием. Ясно, что ξ – случайная величина, имеющая геометрическое распределение $\mathsf{G}_{0.07}$. При этом $\mathsf{P}\left(\xi = k\right) = (1-p)^{k-1}p$, $k \in \mathbb{N}$.*

Давайте посчитаем, какое минимальное количество людей нужно опросить, чтобы с вероятностью большей, чем 0.5 найти человека, больного сахарным диабетом.

$$\mathsf{P}(\xi = 1) + \mathsf{P}(\xi = 2) + ... + \mathsf{P}(\xi = k) = p\left(1 + (1-p) + (1-p)^2 + ... + (1-p)^{k-1}\right).$$

Перед нами – сумма геометрической прогрессии, которая равна

$$p\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^k > 0.5.$$

Осталось решить неравенство $(1-p)^k < 0.5$, откуда, так как $p = 0.07$, имеем $0.93^k < 0.5$ и $k > log_{0.93}0.5 = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.93} \approx 9.55$. Значит, нужно опросить как минимум 10 человек.

Следующее распределение для нас будет тоже не новым. Это так называемое распределение Пуассона, возникающее в предельной теореме Пуассона для схемы Бернулли.

Пример 1.1.8 (Распределение Пуассона) *Говорят, что случайная величина имеет распределение Пуассона, и пишут $\xi \sim \Pi_\lambda$, $\lambda > 0$, если она принимает значения $0, 1, 2, 3, ..., n, ...$ с вероятностями*

$$\mathsf{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}.$$

Проверим, что введенное нами «распределение» действительно является распределением, а именно покажем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(\xi = k) = 1.$$

Имеем,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1,$$

так как получившийся ряд – нее что иное, как ряд Маклорена для экспоненты

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}.$$

Распределение Пуассона, будучи предельным для схемы Бернулли, хорошо описывает так называемые «редкие явления», когда при достаточно большом числе испытаний, которое заранее неизвестно, событие наступает редко, то есть имеет маленькую вероятность. Например, число покупателей, посетивших магазин за неделю, число пострадавших в ДТП за год, число рекламных сообщений, пришедших на телефон, за месяц, число забитых мячей на чемпионате мира. Во всех этих ситуациях число n можно считать достаточно большим, события редкими, откуда и возникает приближение пуассоновским распределением.

Непременно постарайтесь написать выражения и построить графики для функции распределения случайных величин, имеющих распределение Бернулли, геометрическое распределение и распределение Пуассона.

1.2 Абсолютно непрерывные распределения, примеры

До сих пор мы рассматривали исключительно дискретные случайные величины, и у слушателя может возникнуть неверное представление о том, что других распределений в природе нет. На самом деле, дискретное распределение – это одна из двух крайностей в распределениях. Другая крайность – это так называемое абсолютно непрерывное распределение, которое мы и рассмотрим.

Определение 1.2.1 *Говорят, что случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует такая неотрицательная функция $f_\xi(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что*

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t) dt.$$

Определение 1.2.2 *Функция $f_\xi(x)$ называется плотностью вероятности случайной величины ξ.*

Проведем аналогию со случаем дискретной случайной величины. Ясно, что абсолютно непрерывная величина получена в некотором смысле «предельным переходом» от дискретной, что особенно хорошо видно из рассмотрения пары соотношений (как обычно, сумма меняется на интеграл):

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt \quad \leftrightarrow \quad F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \sum_{i:\ a_i < x} \mathsf{P}(\xi = a_i).$$

Кроме того, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)dt = 1$. В дискретном случае было равенство вида $\sum\limits_i \mathsf{P}(\xi = a_i) = 1$. Тем самым, мы снова получаем пару «связанных» соотношений

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)dt = 1 \quad \leftrightarrow \quad \sum_i \mathsf{P}(\xi = a_i) = 1.$$

Отметим некоторые важные свойства, присущие абсолютно непрерывной случайной величине.

Лемма 1.2.1 *Пусть ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, тогда:*

1. *Интеграл от плотности по всей оси равен единице, то есть*
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)dt = 1.$$
2. *Плотность у случайной величины ξ не единственна: при изменении ее значений в конечном или счетном числе точек, результат интегрирования не изменится.*
3. *Функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$.*
4. *Если $f_\xi(x)$ непрерывна в точке x_0, то $F'_\xi(x_0) = f_\xi(x_0)$.*
5. *Вероятность того, что случайная величина примет какое-либо конкретное значение x_0 равна нулю, то есть $\mathsf{P}(\xi = x_0) = 0$.*

6. *Вероятность попадания случайной величины ξ в произвольный промежуток I (отрезок, интервал, полуинтервал, луч) вычисляется по формуле*
$$\mathsf{P}(\xi \in I) = \int\limits_I f_\xi(t)dt.$$

7. *В терминах функции распределения последнее свойство может быть записано, как*
$$\mathsf{P}(a < \xi < b) = \mathsf{P}(a \le \xi < b) = \mathsf{P}(a < \xi \le b) = \mathsf{P}(a \le \xi \le b) =$$
$$= F_\xi(b) - F_\xi(a), \quad -\infty \le a < b \le +\infty.$$
Конечно, в случаях, когда a, b – не числа, понимается соответствующий предел.

Доказательство. 1. Действительно, ведь
$$1 = \lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = \lim_{x\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)dt.$$
2. Это свойство интеграла, известное из курса математического анализа.
3. Это свойство интеграла с переменным верхним пределом, известное из курса математического анализа.
4. Это свойство интеграла с переменным верхним пределом, известное из курса математического анализа.
5. Это следует из того, что интеграл по «точке» равен нулю.
6. Это следует из общего свойства функции распределения и предыдущего свойства. □

Ясно, в частности из геометрических соображений, что любая функция $f(x) \ge 0$ такая, что
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$
является плотностью распределения f_ξ некоторой абсолютно непрерывной случайной величины ξ. Мы не будем строго говорить о вероятностном пространстве, на котором она задана, сославшись на геометрические соображения.

Замечание 1.2.1 *Четвертый пункт теоремы, говорящий, что в случае непрерывности f_ξ выполняется равенство $F'_\xi = f_\xi$, в том числе устанавливает способ нахождения плотности, если случайная величина имеет абсолютно непрерывное распределение. Если же последнее заранее неизвестно, то нужно быть аккуратным.*

Пример 1.2.1 *Пусть функция распределения случайной величины имеет вид*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Дифференцируя функцию распределения (это возможно всюду, кроме точки $x = 1$), получаем, что

$$F'_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

В точке $x = 1$ значение написанной функции можно положить любым, так как, в случае успеха (то есть в случае того, что написанная функция является плотностью случайной величины ξ), это не повлияет на результат за счет свойства 2. Положим $F'_\xi(1) = 2$.

Написанная функция неотрицательна, причем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F'_\xi(t)dt = \int\limits_0^1 2tdt = t^2\Big|_0^1 = 1,$$

а значит является плотностью распределения случайной величины ξ. Тем самым, ξ имеет абсолютно непрерывное распределение.

Немного изменим функцию распределения. Рассмотрим функцию

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Найдем производную, это можно сделать снова всюду, кроме как в точке $x = 1$, а в точке $x = 1$, аргументируя как и ранее, значение можно взять любым, получим

$$F'_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}.$$

Последняя функция неотрицательна, однако

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F'_\xi(t)dt = \int\limits_0^1 tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = 0.5 \neq 1,$$

то есть плотностью не является. Значит, случайная величина ξ имеет не абсолютно непрерывное (в прочем, и не дискретное) распределение.

Вывод тут один: дифференцируя функцию распределения всегда нужно проверить: получили ли мы плотность.

Пример 1.2.2 *Известно, что годовой доход случайно выбранного налогоплательщика (в сотнях тысяч рублей) описывается случайной величиной ξ с плотностью распределения*

$$f_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \frac{c}{t^4}, & t \geq 1 \end{cases}.$$

Найдем значение c из условия, что интеграл по всей оси равен 1:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)dt = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{c}{t^4}dt = -\frac{c}{3t^3}\Big|_1^{+\infty} = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 3.$$

Найдем функцию распределения этой случайной величины. Ясно, что если $x \leq 1$, то $F_\xi(x) = 0$, так как плотность на участке $(-\infty, 1)$ равна нулю. Если же $x > 1$, то

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt = \int\limits_{1}^{x} \frac{3}{t^4}dt = -\frac{3}{3t^3}\Big|_1^{x} = 1 - \frac{1}{x^3}.$$

Таким образом,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^3}, & x > 1 \end{cases}$$

Вычислим минимальный размер $x_{\min}$ годового дохода, не ниже которого с вероятностью 0.6 окажется годовой доход случайно выбранного налогоплательщика.

$$\mathsf{P}(\xi \geq x_{\min}) = 1 - \mathsf{P}(\xi < x_{\min}) = 1 - F_\xi(x_{\min}) = 0.6,$$

откуда

$$F_\xi(x_{\min}) = 0.4 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^3} = 0.4 \Rightarrow x_{\min}^3 = \frac{1}{0.6},$$

а значит $x_{\min} = \sqrt[3]{\frac{1}{0.6}} \approx 1.19$, то есть примерно 119000 рублей.

Приведем некоторые примеры часто встречающихся важных распределений. Дальнейшие примеры будут возникать в соответствующих задачах математической статистики, изучаемой в дальнейшем.

1.2.1 Равномерное распределение

Определение 1.2.3 *Говорят, что случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$ и пишут $\xi \sim \mathsf{U}_{a,b}$, если ее плотность имеет вид*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

График плотности представлен на рисунке 4.

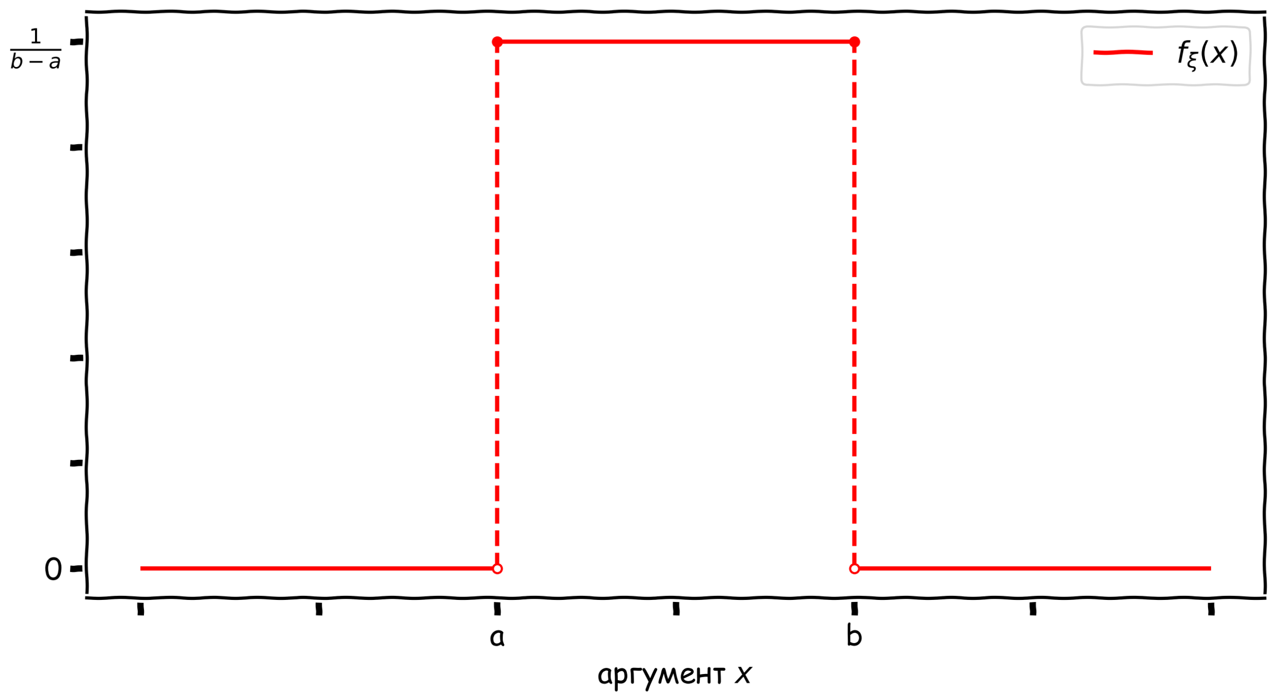

Рис. 4: Функция распределения случайной величины, имеющей равномерное распределение

Легко видеть, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)dt = \int\limits_a^b \frac{dt}{b-a} = 1,$$

а значит, согласно сделанному ранее замечанию, введенная выше функция $f_\xi(x)$ и правда является плотностью.

Если говорить о смысле такого распределения, то можно считать, что рассматриваемая случайная величина есть не что иное, как координата точки, случайно брошенной на отрезок $[a,b]$. Плотность такой величины одинаково «размазана» по отрезку, поэтому и попадание в любую точку этого отрезка «равновозможно».

Вычислим функцию распределения такой величины. Так как плотность задана кусочно, то резонно рассмотреть три случая:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt, & x \le a \\ \int\limits_{-\infty}^{a} f_\xi(t)dt + \int\limits_{a}^{x} f_\xi(t)dt, & x \in (a, b] \\ \int\limits_{-\infty}^{a} f_\xi(t)dt + \int\limits_{a}^{b} f_\xi(t)dt + \int\limits_{b}^{x} f_\xi(t)dt, & x > b \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt, & x \le a \\ \int\limits_{-\infty}^{a} 0(t)dt + \int\limits_{a}^{x} \frac{dt}{b-a}, & x \in (a, b] \\ \int\limits_{-\infty}^{a} 0dt + \int\limits_{a}^{b} \frac{dt}{b-a} + \int\limits_{b}^{x} 0dt, & x > b \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b] \\ 1, & x > b \end{cases}.$$

График функции распределения показан на рисунке 5.

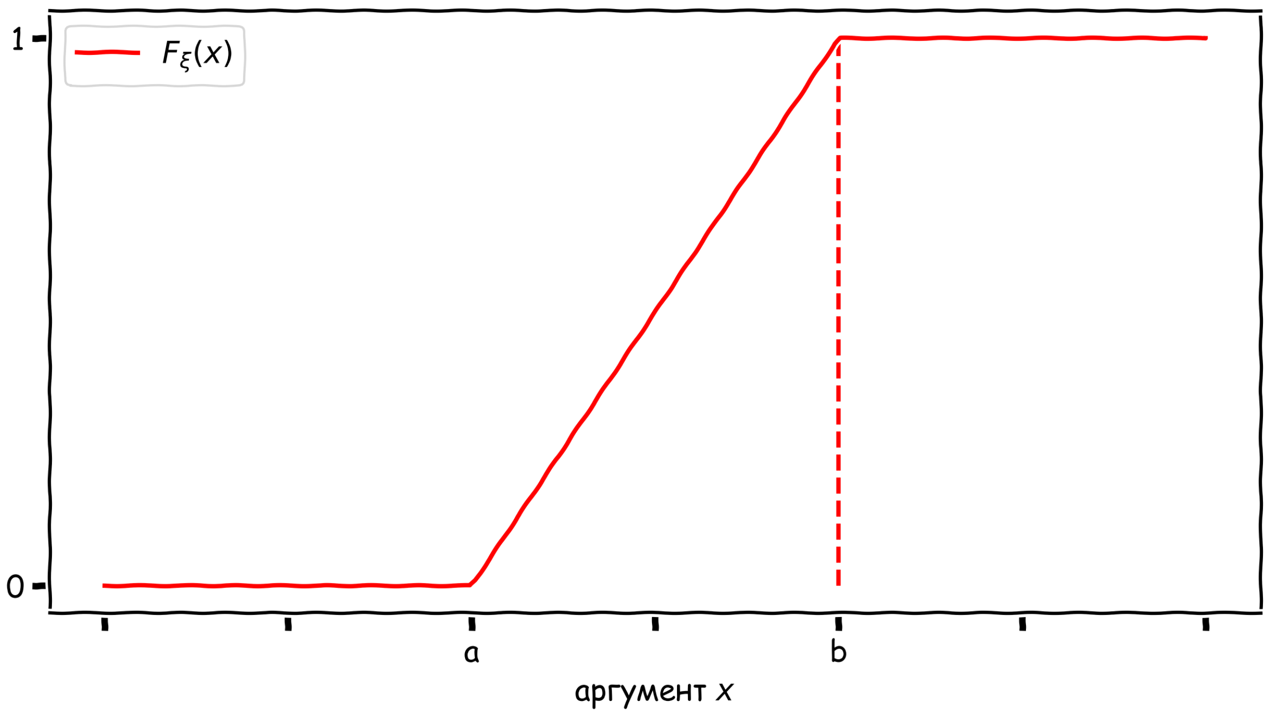

Рис. 5: Функция распределения случайной величины, имеющей равномерное распределение

Замечание 1.2.2 *Из вида функции распределения равномерно распределенной случайной величины ξ еще раз следует аналогия рассматриваемого распределения и геометрической вероятности. Если x попадает в отрезок*

$[a,b]$, *то вероятность попасть в отрезок* $A = [a,x]$ *(то есть* $F_\xi(x)$, *так как вероятность оказаться на луче* $(-\infty, a)$ *равна нулю) пропорциональна длине этого отрезка, и равна*

$$\mathsf{P}(\cdot \in A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda([a,b])} = \frac{x-a}{b-a}.$$

1.2.2 Показательное распределение

Следующее распределение в некотором смысле является непрерывным аналогом распределения Пуассона.

Определение 1.2.4 *Говорят, что случайная величина* ξ *имеет показательное распределение с параметром* $\lambda > 0$ *и пишут* $\xi \sim \mathsf{Exp}_\lambda$, *если ее плотность имеет вид*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

График плотности показательного распределения представлен на рисунке 6. Легко видеть, что интеграл от функции $f_\xi(x)$ по всей оси равен 1, а значит

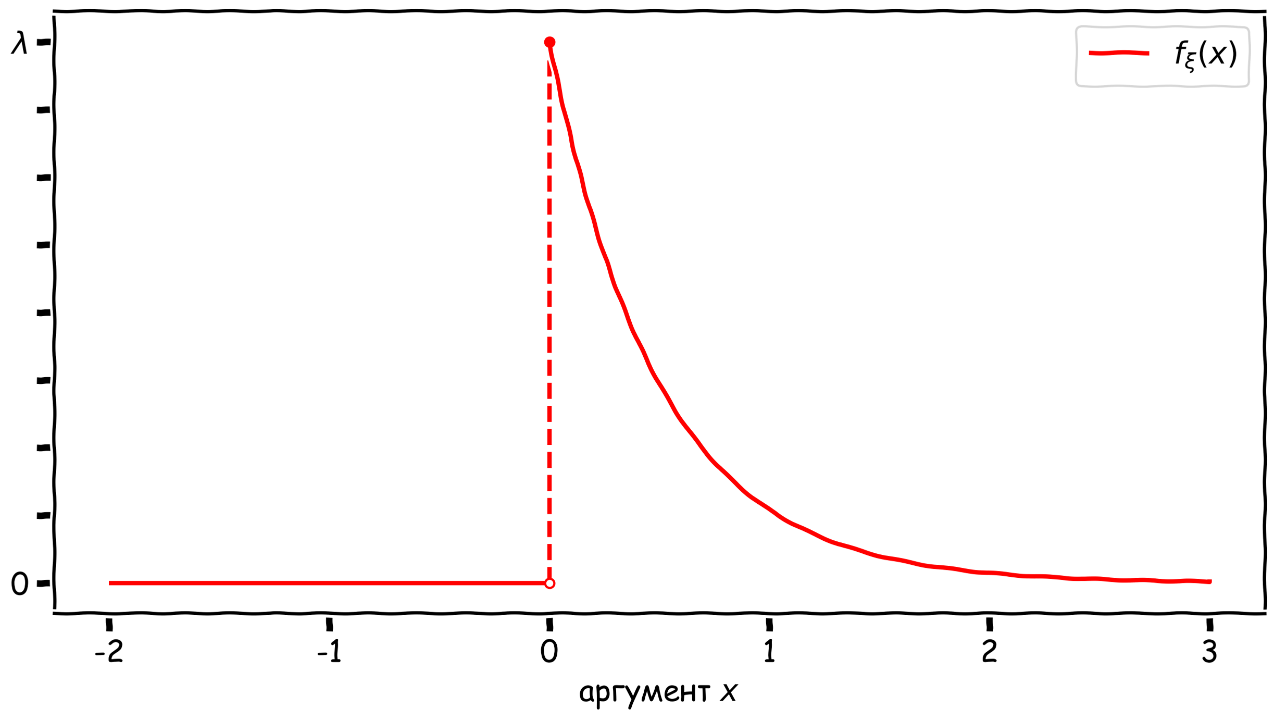

Рис. 6: Плотность случайной величины, имеющей показательное распределение

данная функция может рассматриваться, как плотность некоторого распределения. Функция распределения случайной величины ξ легко вычисляется и задается соотношением

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

График последней функции представлен на рисунке 7. Оказывается, что дли-

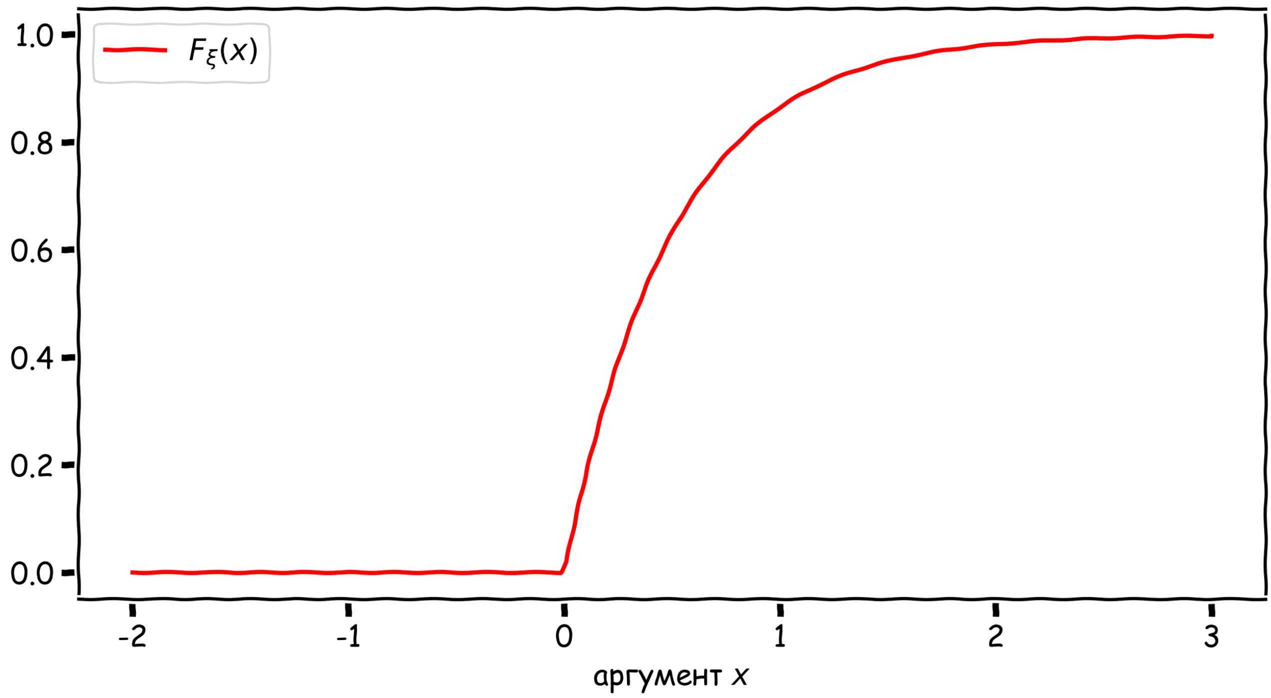

Рис. 7: Функция распределения случайной величины, имеющей показательное распределение

тельности телефонных разговоров, промежутки времени между последовательными приходами клиентов на обслуживание, длительности обслуживания клиентов, время безотказной работы прибора и многое другое имеют показательное распределение.

1.2.3 Нормальное распределение

Следующий пример распределения является одним из важнейших.

Определение 1.2.5 *Говорят, что случайная величина ξ имеет нормальное (гауссовское) распределение с параметрами $a \in \mathbb{R}$, σ^2, и пишут $\xi \sim \mathsf{N}_{a,\sigma^2}$, если ее плотность имеет вид*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

График плотности нормального распределения при разных значениях a, σ^2 представлен на рисунке 8. Нормальное распределение используется очень ча-

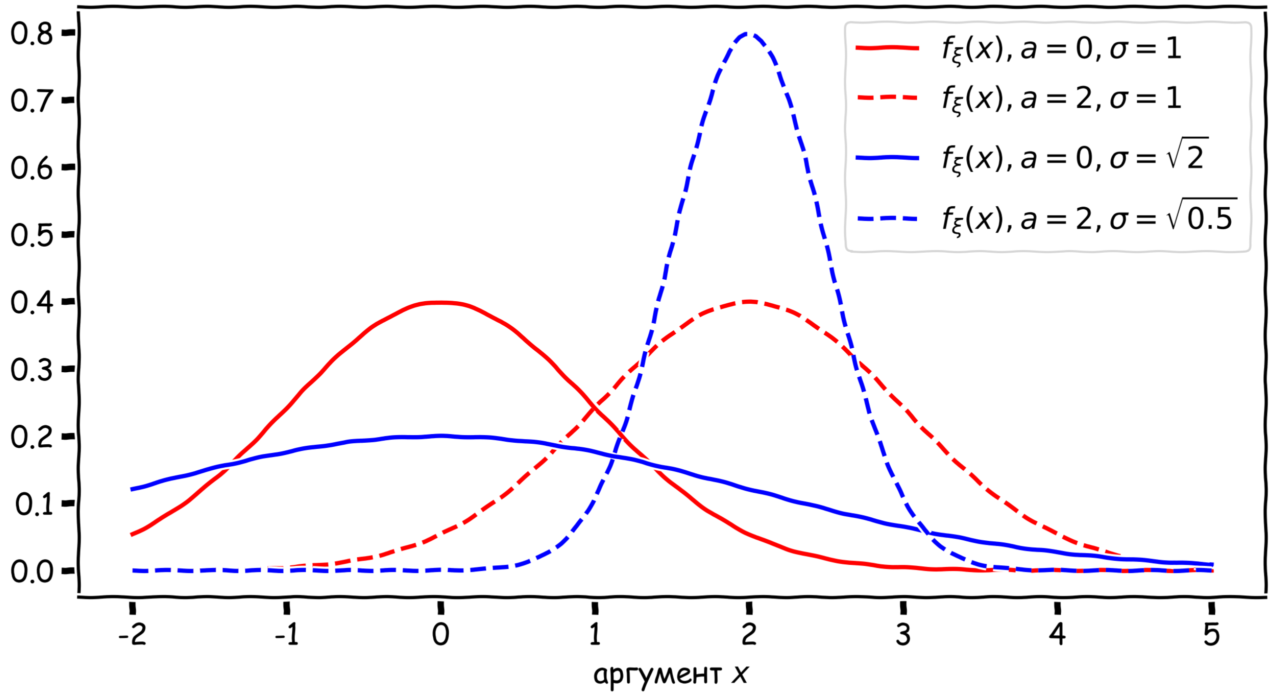

Рис. 8: Плотность случайной величины, имеющей нормальное распределение

сто – в нашем мире очень многое «нормально». С точки зрения теории, важность этого распределения следует прямиком из центральной предельной теоремы, которую в частном случае (интегральная теорема Муавра-Лапласа) мы уже встречали. Покажем эту связь, но сначала введем важно понятие стандартного нормального распределения.

Определение 1.2.6 *Нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma^2 = 1$, то есть распределение $\mathsf{N}_{0,1}$, называют стандартным нормальным.*

Ясно, что плотность стандартного нормального распределения имеет вид

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Напомним, что согласно интегральной теореме Муавра-Лапласа, если S_n обозначает количество успехов в n испытаниях схемы Бернулли, то при больших значениях n

$$\mathsf{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad n \to +\infty.$$

Обратите внимание, что слева стоит не что иное, как функция распределения случайной величины $\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}$. Иными словами, интегральная теорема Муавра-Лапласа говорит, что функция распределения так называемой центрированной (ведь np – это математическое ожидание $\mathsf{E}S_n$ случайной величины S_n) и нормированной (ведь $\sqrt{npq}$ – это $\sqrt{\mathsf{D}S_n}$) случайной величины S_n, при большом числе испытаний – то же самое, что функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

В отличие от предыдущих примеров, далеко не очевидно, что определенная выше «плотность» и правда является плотностью некоторого распределения (то есть что интеграл от нее по всей оси равен 1). Проверим это.

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left| \begin{array}{c} t = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} \\ dt = \frac{dx}{\sigma\sqrt{2}} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t^2}dt,$$

где последнее равенство верно в силу четности подынтегральной функции. Последний интеграл (часто называемый интегралом Пуассона или интегралом Эйлера-Пуассона) равен $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, что часто доказывают в курсе математического анализа. Не проводя обоснований возможности замены переменной, проведем лаконичные формальные манипуляции. Пусть $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$, тогда

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy = \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right| =$$

$$\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{+\infty} re^{-r^2}drd\varphi = -\frac{\pi}{2}\cdot\left.\frac{e^{-r^2}}{2}\right|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4},$$

откуда и следует, что $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Функция распределения нормального распределения, ввиду важности последнего, обозначается особым образом:

$$F_\xi(x) = \Phi_{a,\sigma^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt,$$

не выражается в элементарных функциях и затабулирована (ее значения можно найти в таблицах). Точнее, затабулирована функция распределения стандартного нормального распределения, но с помощью замены переменной в интеграле легко убедиться, что

$$\Phi_{a,\sigma^2}(x) = \Phi_{0,1}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

График функции распределения нормального закона представлен на рисунке 9. Отметим несколько важных свойств функции распределения

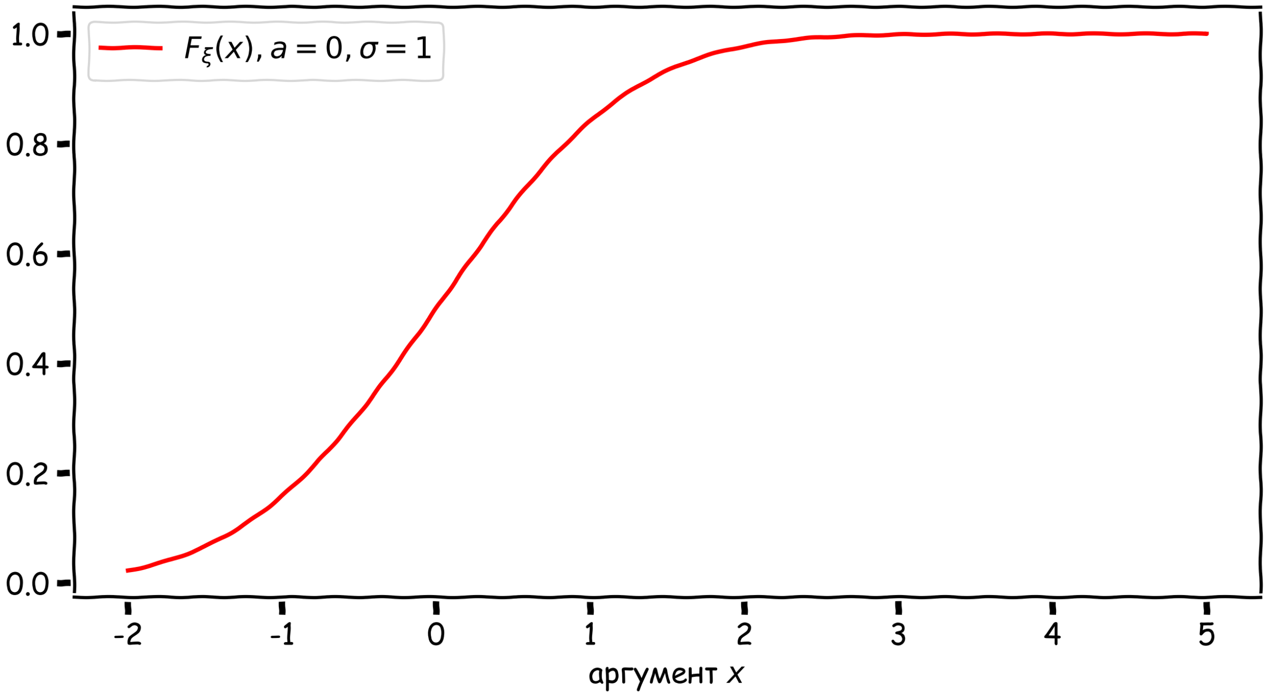

Рис. 9: Функция распределения случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение

Лемма 1.2.2 *Функция распределения стандартного нормального распределения обладает следующими свойствами:*

1. $\Phi_{0,1}(0) = \frac{1}{2}$;
2. $\Phi_{0,1}(-x) = 1 - \Phi_{0,1}(x)$;

Доказательство. 1. Так как плотность стандартного нормального распределения четна, а

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1,$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}.$$

2. Следует из цепочки равенств

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int\limits_{-x}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) =$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \Phi_{0,1}(x).$$

Последнее равенство получается путем замены x на $-x$ под интегралом. $\square$

1.3 Другие виды распределений

Ошибочно считать, что все имеющиеся распределения исчерпываются дискретными и абсолютно непрерывными. Оказывается, есть еще так называемые сингулярные распределения (интересующийся слушатель может почитать про, например, лестницу Кантора). Лебегом доказано, что любая случайная величина либо имеет распределение, подчиненное одному из трех типов, либо является линейной комбинацией (максимум – трех) таких случайных величин.

Сингулярные (одномерные!) распределения носят больше фундаментальный математический характер, и в природе встречаются редко, поэтому в нашем курсе мы даже не будем давать строгого определения обсуждаемому понятию. В природе встречаются дискретные величины, абсолютно непрерывные величины и их линейные комбинации. Кстати, как можно будет показать далее, сумма независимых (а что это такое мы пока что не знаем) случайных величин, одна из которых имеет дискретное распределение, а вторая – абсолютно непрерывное распределение, имеет абсолютно непрерывное распределение. В то же время сумма двух независимых абсолютно непрерывных случайных величин может иметь дискретное распределение.

2 Многомерные распределения

2.1 Совместное распределение случайных величин

Как мы уже видели в первых лекциях, в задачах (и, конечно же, в природе) бывает необходимо отслеживать поведение не только одной, но и нескольких случайных величин. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ заданы на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$. Введем в рассмотрение так называемый случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

Определение 2.1.1 *Функцией распределения случайного вектора $\vec{\xi}$ называется функция*

$$F_{\vec{\xi}}(x) = F_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1, ..., x_n) = \mathsf{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n).$$

На языке событий ясно, что $F_{\vec{\xi}}(x)$ – это вероятность события, что одновременно и $\xi_1 < x_1$, и $\xi_2 < x_2$, и так далее, и $\xi_n < x_n$:

$$\mathsf{P}\left(\{\xi_1 < x_1\} \cap \{\xi_2 < x_2\} \cap \ldots \cap \{\xi_n < x_n\}\right).$$

Конечно, введенное понятие обобщает понятие функции распределения случайной величины ξ. Сразу отметим очевидные (объясняемые аналогично одномерному случаю) свойства функции распределения случайного вектора. Для простоты, будем рассматривать вектор из двух компонент (ξ_1, ξ_2), общий случай рассматривается аналогично.

Лемма 2.1.1 *Функция распределения случайного вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ обладает следующими свойствами:*

1. $F_{\vec{\xi}} \in [0, 1]$.
2. $F_{\vec{\xi}}(x)$ *не убывает по каждой координате.*
3. *При $i \in \{1, 2\}$ справедливы равенства:*
$$\lim_{x_i \to -\infty} F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2) = 0, \qquad \lim_{x_1, x_2 \to +\infty} F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2) = 1.$$
4. $F_{\vec{\xi}}$ *непрерывна слева по каждой координате.*
5. *По функции распределения случайного вектора восстанавливаются функции распределения компонент ξ_i, а именно при $i \in \{1, 2\}$*
$$F_{\xi_i}(x) = \lim_{x_i \to +\infty} F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2).$$

Первое свойство следует из того, что функция распределения – это вероятность, а вероятность находится в пределах от 0 до 1. Второе свойство следует из монотонности вероятности, так как, если, например, $x_1^1 \leq x_1^2$, то

$$\left(\{\xi_1 < x_1^1\} \cap \{\xi_2 < x_2\}\right) \subset \left(\{\xi_1 < x_1^2\} \cap \{\xi_2 < x_2\}\right).$$

Первая часть третьего свойства следует, грубо говоря, из того, что $\{\xi_i < -\infty\} = \varnothing$, а пересечение с таким событием дает тоже пустое множество, вероятность которого равна нулю. Вторая часть, как и в одномерном случае, следует из того, что каждая случайная величина принимает свои значения в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Из геометрических соображений легко видеть, что

$$P(a_1 \leq \xi_1 < b_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2) = F_{\vec{\xi}}(b_1, b_2) + F_{\vec{\xi}}(a_1, a_2) - F_{\vec{\xi}}(b_1, a_2) - F_{\vec{\xi}}(a_1, b_2).$$

Важно отметить, что свойства 1–4 в многомерном случае не являются характеристическими для функции распределения. Для того, чтобы они были характеристическими, к ним нужно добавить требование, чтобы выражение

$$F_{\vec{\xi}}(b_1, b_2) + F_{\vec{\xi}}(a_1, a_2) - F_{\vec{\xi}}(b_1, a_2) - F_{\vec{\xi}}(a_1, b_2)$$

было неотрицательно при любых $a_1 < b_1$ и $a_2 < b_2$.

Пример 2.1.1 *Проверить, что функция*

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{5} + \frac{1}{2}\right)$$

является функцией распределения некоторого случайного вектора $\vec{\xi}$.

Пройдемся по пунктам. То, что написанная функция не убывает по каждой координате следует из того, что arctg *– неубывающая функция. Вычислим пределы на минус бесконечности:*

$$\lim_{x\to-\infty} F(x, y) = \left(-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{5} + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\lim_{y\to-\infty} F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

так как на минус бесконечности предел арктангенса равен $-\frac{\pi}{2}$. Теперь вычислим предел на $+\infty$.

$$\lim_{x,y\to+\infty} F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1,$$

так как на $+\infty$ предел арктангенса равен $\frac{\pi}{2}$.

Непрерывность слева по каждой переменной следует из непрерывности арктангенса.

Осталось проверить неотрицательность выражения

$$F(b_1, b_2) + F(a_1, a_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2), \quad a_1 < b_1, \quad a_2 < b_2.$$

Давайте рассмотрим разность первого и третьего слагаемых, тогда получим

$$F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{b_1}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{b_2}{5} + \frac{1}{2}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{b_1}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{a_2}{5} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{b_1}{4} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{b_2}{5} - \operatorname{arctg}\frac{a_2}{5}\right).$$

Первый сомножитель неотрицателен, а второй неотрицателен в силу монотонности арктангенса. Аналогично рассматриваются и оставшиеся два слагаемых. Итого, написанная функция и правда является функцией распределения какого-то вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$.

Кстати, из наших вычислений, согласно свойству 5 мы видим, что функция распределения компоненты ξ_i задается соотношением

$$F_{\xi_1}(y) = \lim_{x\to+\infty} F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{5} + \frac{1}{2}\right)$$

и

$$F_{\xi_2}(x) = \lim_{y\to+\infty} F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{5} + \frac{1}{2}\right).$$

Обсудим, как и в одномерном случае, отдельно дискретное и абсолютно непрерывное многомерные распределения.

2.2 Дискретное и абсолютно непрерывное многомерные распределения

Не нарушая общности, для простоты снова будем рассматривать вектор, состоящий лишь из двух компонент (ξ_1, ξ_2). Аналогично тому, как было сделано в первых лекциях, введем определение.

Определение 2.2.1 *Говорят что случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ имеет дискретное распределение, если существует конечный или счетный набор чисел $\{a_i, b_j\}$, что*

$$\sum_{i,\ j} \mathsf{P}(\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j\} = 1.$$

Распределение случайного вектора, как и раньше, часто записывают в виде таблицы (возможно бесконечной).

$\xi_1 \setminus \xi_2$	b_1	b_2	...	b_k	...
a_1	$\mathsf{P}(\xi_1 = a_1, \xi_2 = b_1)$	$\mathsf{P}(\xi_1 = a_1, \xi_2 = b_2)$	...	$\mathsf{P}(\xi_1 = a_1, \xi_2 = b_k)$	...
a_2	$\mathsf{P}(\xi_1 = a_2, \xi_2 = b_1)$	$\mathsf{P}(\xi_1 = a_2, \xi_2 = b_2)$	...	$\mathsf{P}(\xi_1 = a_2, \xi_2 = b_k)$	...
...	...	...	...	...	...
a_n	$\mathsf{P}(\xi_1 = a_n, \xi_2 = b_1)$	$\mathsf{P}(\xi_1 = a_n, \xi_2 = b_2)$	...	$\mathsf{P}(\xi_1 = a_n, \xi_2 = b_k)$	...
...	...	...	...	...	...

Как и ранее, по совместному распределению восстанавливаются распределения компонент, или маргинальные распределения по формулам

$$\mathsf{P}(\xi_1 = a_i) = \sum_j \mathsf{P}(\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j),$$

$$\mathsf{P}(\xi_2 = b_j) = \sum_i \mathsf{P}(\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j).$$

Тем самым, компоненты дискретно распределенного случайного вектора имеют дискретное распределение. Простейшие примеры многомерных дискретных распределений были нами рассмотрены в предыдущих лекциях, поэтому подробно на этом мы не останавливаемся, ведь существенных отличий никаких.

Теперь перейдем к многомерным абсолютно непрерывным распределениям.

Определение 2.2.2 *Говорят что случайный вектор* $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ *имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует такая неотрицательная функция* $f_{\vec{\xi}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *что*

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} f_{\vec{\xi}}(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Свойства, присущие абсолютно непрерывному распределению в одномерном случае, присущи и многомерному абсолютно непрерывному распределению. предлагаем вам их сформулировать самостоятельно. Отдельно отметим, что в точках непрерывности плотности справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f_{\vec{\xi}}(x_1, x_2).$$

Пример 2.2.1 *Мы уже рассматривали пример, где установили, что функция*

$$F_\xi(x, y) = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{5} + \frac{1}{2}\right)$$

является функцией распределения некоторого случайного вектора $\vec{\xi}$. *Покажем, что эта случайная величина имеет абсолютно непрерывное распределение, а для этого попробуем найти плотность:*

$$\frac{\partial F_\xi(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{4}{x^2 + 16}\left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{5} + \frac{1}{2}\right).$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 F_\xi(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{20}{(x^2 + 16)(y^2 + 25)}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 F_\xi(x,y)}{\partial y \partial x} dxdy = 1,$$

а значит написанная функция и правда является плотностью, а случайный вектор $\vec{\xi}$ тем самым имеет абсолютно непрерывное распределение.

Аналогично дискретному случаю, в случае абсолютно непрерывного распределения можно получить распределения компонент (или маргинальные распределения), зная распределение случайного вектора. Более того, теорема устанавливает, что компоненты абсолютно непрерывного распределения тоже имеют абсолютно непрерывное распределение, итак.

Теорема 2.2.1 *Пусть случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_{\vec{\xi}}(x_1, x_2)$. Тогда*

$$f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,t)dt,$$

$$f_{\xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(t,x)dt.$$

При $n > 2$ для нахождения маргинального распределения компоненты ξ_i, плотность случайного вектора интегрируется по всем координатам, кроме i-ой.

Доказательство. Доказательство немедленно следует, например, из свойств функции распределения. Ведь

$$F_{\xi_1}(x) = \lim_{x_2 \to +\infty} F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \to +\infty} \int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{x_2} f_{\vec{\xi}}(t_1,t_2)dt_1 dt_2 =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(t_1,t_2)dt_1 dt_2 = \int\limits_{-\infty}^{x_1} f_{\xi_1}(t_1)dt_1.$$

$\square$

Пример 2.2.2 *В предыдущем примере мы по функции распределения случайного вектора ξ нашли плотность:*

$$f_\xi(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\frac{20}{(x^2+16)(y^2+25)}.$$

Найдем распределения компонент.

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{20}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{(x^2+16)(y^2+25)} = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{4}{x^2+16}\operatorname{arctg}\frac{y}{5}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4}{x^2+16}.$$

Аналогично,

$$f_{\xi_2}(y) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{5}{y^2+25}.$$

Пример 2.2.3 (Равномерное многомерное распределение) *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – множество на плоскости, имеющее конечную площадь $\lambda(D) > 0$. Говорят, что случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в D, если его плотность имеет вид*

$$f_{\vec{\xi}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda(D)}, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

Если говорить о смысле такого распределения, то можно считать, что рассматриваемый случайный вектор – это координаты точки, случайно брошенной в множество D. Плотность такого вектора одинаково «размазана» по множеству, поэтому и попадание в любую точку этого множества «равновозможно». Прямая аналогия с геометрической вероятностью.

Пример 2.2.4 *Точка $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, изображающая объект на круглом экране радиолокатора, распределена с постоянной плотностью (равномерно) в пределах круга K радиуса r с центром в начале координат.*

Ясно, что, в силу условия нормировки, или согласно определению равномерного многомерного распределения,

$$f_{\vec{\xi}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & (x,y) \in K \\ 0, & (x,y) \notin K. \end{cases}$$

Найдем одномерные плотности. Пусть $x \in [-r, r]$, тогда

$$f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dy = \int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{dy}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}$$

и ноль иначе. Абсолютно аналогично, при $y \in [-r, r]$

$$f_{\xi_2}(y) = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - y^2}$$

и ноль иначе.

Напоследок найдем вероятность события A*, что точка на экране радиолокатора будет находиться от центра не дальше, чем на расстоянии* $r_1 < r$*. Из геометрической вероятности ясно, что*

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\pi r_1^2}{\pi r^2} = \frac{r_1^2}{r^2}.$$

Эту вероятность можно вычислить и непосредственно, интегрируя плотность.

Еще раз отметим, что в многомерном случае сингулярные распределения встречаются часто и являются достаточно естественными. Например, если случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, то случайный вектор (ξ, ξ) имеет сингулярное распределение (он не имеет плотности, так как он распределен только на прямой (или на отрезке)).

2.3 Независимость случайных величин

Как мы уже неоднократно отмечали, в теории вероятностей играют важную роль так называемые независимые события и независимые случайные величины. В случае произвольного вероятностного пространства, чтобы не вводить дополнительных определений, введем определение, отличающееся (по виду), от введенного нами в случае конечного пространства элементарных исходов.

Определение 2.3.1 (Независимость случайных величин) *Случайные величины* $\xi_1, ..., \xi_n$ *называются независимыми (или независимыми в совокупности), если равенство*

$$F_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1, ..., x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot ... \cdot F_{\xi_n}(x_n)$$

справедливо для любых $x_1, ..., x_n$.

Иными словами, функция распределения случайного вектора в случае, когда его компоненты независимы, распадается в произведение функций распределений компонент.

Это определение, конечно, имеет тесную связь с определением независимых событий, ведь оно говорит, что события $\{\omega \in \Omega : \xi_i(\omega) < x_i\}$ независимы. И правда, согласно определению,

$$F_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1, ..., x_n) = \mathsf{P}(\{\xi_1 < x_1\} \cap ... \cap \{\xi_n < x_n\}) =$$

$$= F_{\xi_1}(x_1) \cdot ... \cdot F_{\xi_n}(x_n) = \mathsf{P}(\{\xi_1 < x_1\}) \cdot ... \cdot \mathsf{P}(\{\xi_n < x_n\}).$$

Иногда бывает полезным понятие попарной независимости.

Определение 2.3.2 *Случайные величины $\xi_1, ..., \xi_n$ называются попарно независимыми, если независимы любые две из них.*

Как уже показывалось на примере с бросанием тетраэдра, попарная независимость событий не влечет независимость событий в совокупности. Аналогичный пример (с индикаторами) годится и для случайных величин.

На самом деле, в случае, когда случайные величины имеют дискретное распределение, введенное выше определение независимости в совокупности равносильно рассмотренному ранее, а именно.

Определение 2.3.3 (Независимость дискретных случайных величин) *Случайные величины $\xi_1, ..., \xi_n$, имеющие дискретное совместное распределение, называются независимыми (или независимыми в совокупности), если равенство*

$$\mathsf{P}(\xi_1 = a_1, ..., \xi_n = a_n) = \mathsf{P}(\xi_1 = a_1) \cdot ... \cdot \mathsf{P}(\xi_n = a_n)$$

справедливо для любых чисел $a_1, ..., a_n$.

В случае, когда случайные величины имеют абсолютно непрерывное распределение, их независимость может быть охарактеризована в терминах плотностей следующим образом.

Определение 2.3.4 *Случайные величины $\xi_1, ..., \xi_n$, имеющие абсолютно непрерывное совместное распределение, называются независимыми (или независимыми в совокупности), если равенство*

$$f_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1, ..., x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot ... \cdot f_{\xi_n}(x_n)$$

справедливо для любых $x_1, ..., x_n$.

Тем самым, в абсолютно непрерывном случае плотность системы случайных величин распадается на произведение плотностей компонент. Доказательства эквивалентности определений выходят за рамки данного курса, их можно посмотреть в дополнительной литературе.

Пример 2.3.1 *В примере с функцией распределения*

$$F_\xi(x, y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{5} + \frac{1}{2}\right)$$

мы нашли плотность совместного распределения

$$f_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\frac{20}{(x^2+16)(y^2+25)}$$

и маргинальные плотности

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4}{x^2+16},$$

$$f_{\xi_2}(y) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{5}{y^2+25}.$$

Видно, что

$$f_{\vec{\xi}}(x,y) = f_{\xi_1}(x)f_{\xi_2}(y),$$

а значит случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы.

В примере с радиолокатором случайные величины, очевидно, зависимы, так как

$$\frac{1}{\pi r^2} \neq \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}$$

при $x, y \in [-r, r]$. Это понятно и из вида области задания плотности. Подумайте :)

Мы уже видели на простейших примерах, описанных в первых лекциях, что совместное распределение не восстанавливается по маргинальным. Знание совместного распределения позволяет изучать функции от случайных величин. Остановимся в следующей лекции на этом, а также на числовых характеристиках характеристиках случайных величин, подробнее.