ЛЕКЦИЯ 3.2 НЕПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В лекции 3.1 мы решили задачу аппроксимации табличной функции в классе обобщённых и алгебраических полиномов. Но методом наименьших квадратов можно построить не только полиномиальное приближение. Если дана табличная функция и имеются предположения о её виде, определяемом некоторым набором параметров, то их можно приближенно оценить методом наименьших квадратов так же, как и коэффициенты полинома. Обычно табличная функция - данные эксперимента, сведённые в таблицу. По ним можно примерно предположить, какая функция аппроксимирует их. Например, по точкам построить соединяющую их ломаную. Затем оценить, к какому классу функций ближе всего эта ломаная, записать общее выражение функций этого класса с параметрами. А потом методом наименьших квадратов найти приближённые значения этих параметров. Часто используются следующие семейства функций:

$$y = a + b\ln(x)\,, y = a + b\lg(x)\,, y = ax^b, y = ae^{bx},$$

$$y = b + \frac{a}{x}, y = \frac{1}{ax+b}, y = \frac{x}{ax+b}.$$

Все эти семейства двухпараметрические. Рассмотрим некоторые примеры.

Функция задана таблицей 1. Методом наименьших квадратов построить аппроксимирующую функцию

$$y = a + \frac{b}{x^2}.$$

Действуем по алгоритму решения, полученному в лекции 3.1:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - \frac{b}{x_i^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - a - \dfrac{b}{x_i^2}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - a - \dfrac{b}{x_i^2}\right)\dfrac{1}{x_i^2} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} an + b\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\,, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^2} + b\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^4} = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{y_i}{x_i^2}. \end{cases}$$

Табл. 1. Функция $y = f(x)$

i	x_i	y_i
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n

Решаем эту систему и получаем значения параметров a и b, при которых аппроксимирующая функция

$$y = a + \frac{b}{x^2}$$

даёт минимальное среднеквадратическое отклонение.

Рассмотрим ещё пример. Пусть аппроксимирующая функция имеет вид $y = ae^{bx}$. Такое приближение применяется, например, при оценке параметров экспоненциального роста экспериментальных данных (или вообще, проверке адекватности экспоненциальной модели роста данных). Опять действуем по алгоритму решения задачи МНК:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ae^{bx_i})^2 \ \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ae^{bx_i})e^{bx_i} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = -2a\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ae^{bx_i})x_i e^{bx_i} = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ae^{bx_i})e^{bx_i} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ae^{bx_i})x_i e^{bx_i} = 0. \end{cases}$$

Получаем нормальную систему МНК. Это уже нелинейная система, причём явные формулы решения не выводятся. Она решается приближёнными методами (мы их изучим позже). Решаем её и получаем значения параметров a и b, при которых аппроксимирующая функция даёт минимальное среднеквадратическое отклонение.

Сложность неполиномиальной аппроксимации в том, что МНК в общем виде не является обоснованным. Это означает, что решение нормальной системы может не существовать, а если и существует, то не обязано быть точкой минимума S. В каждом случае надо устанавливать существование решения и проверять его на минимум. Это в том числе касается и приведённых выше примеров.