ЛЕКЦИЯ 4.1 МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА

1. Определение многочленов Чебышева

Эта лекция посвящена проблеме минимизацией глобальной оценки погрешности. В общих словах она формулируется так. По таблице значений функции надо построить интерполяционный многочлен, для которого глобальная оценка погрешности будет минимально возможной. При этом минимизация будет производиться за счёт выбора узлов таблицы.

Оказывается, что решение дают такие математические объекты как многочлены Чебышёва, которые вообще играют фундаментальную роль при оптимизации вычислительных алгоритмов. В настоящей лекции они будут применены для решения задачи равномерного приближения заданной функции интерполяционными многочленами.

Существуют несколько определений многочленов Чебышева. Начнем с рекуррентного определения.

Многочлены Чебышева нулевой и первой степеней T_0, T_1 равны $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$. Многочлены степени n определяются рекуррентным соотношением

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x),$$

$n \geq 2$. Из него получаем, например, многочлены нескольких первых степеней:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1,$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x.$$

К примеру, T_2 и T_3 выводятся таким образом:

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x \cdot x - 1 = 2x^2 - 1;$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x.$$

Из этого определения следуют элементарные свойства многочленов Чебышева:

1^0. Старший коэффициент T_n равен 2^{n-1}, т.е. $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots$.

Доказательство. Старший член T_n получается из старшего члена T_{n-1} умножением на $2x$. Учитывая, что $T_0(x) = 1$, приходим к выводу, что старший член T_n равен $2^{n-1}x^n$. ■

2^0. Полиномы T_{2n} являются четными функциями, T_{2n+1} — нечетными.

Доказательство. Докажем свойство индукцией по $n \geq 0$. База индукции очевидна ($T_0(x) = 1$ – функция чётная, $T_1(x) = x$ – нечётная). Предположим, что свойство верно для всех $k \leq n$. Доказываем индукционный шаг. Если $n + 1$ чётно, то $2xT_n$ — четная функция как произведение двух нечетных (n нечётно, T_n нечётна по предположению), и тогда из (1) следует, что $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ — четная (разность двух четных, $n - 1$ чётно, T_{n-1} чётна по предположению). Если же $n + 1$ нечётно, то $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - -T_{n-1}(x)$ — нечетная (разность двух нечетных, $2xT_n$ — нечетная как произведение нечетной и четной). ■

Получим также тригонометрическое определение многочленов Чебышева. Полагая в очевидном тождестве

$$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

$\theta = \arccos x$ (тогда $x = \cos\theta$), получим

$$\cos(n\arccos x) = 2x\cos((n-1)\arccos x) - \cos\big((n-2)\arccos x\big).$$

Следовательно, функция $\cos(n\arccos x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (1) для T_n. Начальные условия при $n = 0$ и $n = 1$ тоже выполняются:

$$\cos(0\cdot\arccos x) = \cos 0 = 1,$$

$$\cos(1\cdot\arccos x) = x.$$

Поэтому

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x), \tag{2}$$

$n = 0, 1, 2, \dots, -1 \leq x \leq 1$. Очевидно, что $|T_n(x)| \leq 1$ при $|x| \leq 1$.

Еще одно определение можно получить с помощью решения рекуррентного соотношения (1). Обозначим $T_n(x) = d_n$. Тогда (1) записывается так:

$$d_n - 2xd_{n-1} + d_{n-2} = 0.$$

Это однородное рекуррентное соотношение с характеристическим уравнением $\lambda^2 - -2x\lambda + 1 = 0$ (переменная x рассматривается как постоянный параметр); его корни $\lambda_1 = x + \sqrt{x^2-1}$, $\lambda_2 = x - \sqrt{x^2-1}$ при $x \neq \pm 1$ различны, поэтому решение соотношения имеет вид $d_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ (коэффициенты C_1, C_2 являются функциями x). Для нахождения C_1, C_2 используем начальные условия:

$$\begin{cases} d_0 = T_0(x) = C_1 + C_2 = 1, \\ d_1 = T_1(x) = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = x, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}, \\ C_2 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Тогда решение рекуррентного соотношения определяется формулой

$$d_n = \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right),$$

откуда следует представление многочленов Чебышева

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right),$$

$n = 0, 1, \dots, |x| > 1$.

Замечание. Эта формула для T_n справедлива и при $x = \pm 1$. Докажите это самостоятельно.

2. Свойства многочленов Чебышева

Для доказательства нужных нам свойств наиболее удобна тригонометрическая форма (2). Из уравнения $T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0$ следует, что корнями многочлена Чебышева T_n на отрезке $[-1; 1]$ являются точки

$$x_m = \cos\frac{\pi(2m-1)}{2n},$$

$m = 1, \dots, n$. Очевидно, что T_n достигает экстремальных значений на $[-1; 1]$ там, где $|T_n(x)| = 1$. Из этого уравнения получаем точки экстремума T_n на отрезке $[-1; 1]$:

$$\tilde{x}_m = \cos\frac{\pi m}{n},$$

$m = 0, \dots, n$, причем

$$T_n(\tilde{x}_m) = \cos \pi m = (-1)^m. \tag{3}$$

Рассмотрим нормированный многочлен Чебышева $\bar{T}_n$, т.е. T_n, поделенный на старший коэффициент (см. свойство 1^0):

$$\bar{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x) = x^n + \cdots. \tag{4}$$

Оказывается, что $\bar{T}_n$ наименее уклоняются от нуля среди всех нормированных многочленов степени n (т.е. многочленов со старшим коэффициентом 1) на отрезке $[-1;1]$. Строго этот результат формулируется следующей леммой.

Лемма 1. Пусть P_n — произвольный нормированный многочлен степени n. Тогда

$$\max_{x\in[-1;1]}|P_n(x)| \geq \max_{x\in[-1;1]}|\bar{T}_n(x)| = 2^{1-n}.$$

Доказательство. Равенство

$$\max_{x\in[-1;1]}|\bar{T}_n(x)| = 2^{1-n}$$

очевидно следует из (3), (4). Поэтому остается доказать неравенство

$$\max_{x\in[-1;1]}|P_n(x)| \geq 2^{1-n}.$$

Предположим противное: при всех $x \in [-1;1]$ $|P_n(x)| < |\bar{T}_n(\tilde{x}_m)| = 2^{1-n}$, $m = 0, \dots, n$. Многочлен $\bar{T}_n - P_n$ имеет степень $n-1$ (разность двух нормированных) и отличен от нулевого, так как $\bar{T}_n(\tilde{x}_m) - P_n(\tilde{x}_m) = (-1)^m 2^{1-n} - P_n(\tilde{x}_m) \neq 0$ в силу предположения. Далее,

$$\operatorname{sign}\big(\bar{T}_n(\tilde{x}_m) - P_n(\tilde{x}_m)\big) = \operatorname{sign}\big((-1)^m 2^{1-n} - P_n(\tilde{x}_m)\big) = (-1)^m$$

опять же по предположению (функция $\operatorname{sign} x$ – знак x). Таким образом, между точками $\tilde{x}_m$, $\tilde{x}_{m+1}$ многочлен $\bar{T}_n - P_n$ меняет знак, следовательно, он имеет на $[-1;1]$ (все $\tilde{x}_m$ лежат в этом отрезке) по крайней мере n различных нулей. Пришли к противоречию с тем, что он имеет степень $n-1$. ■

Все эти свойства относятся к отрезку $[-1;1]$. Линейной заменой

$$z = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x$$

его можно перевести в произвольный отрезок $[a;b]$. Переменная $x \in [-1;1]$ выражается через $z \in [a;b]$ формулой

$$x = \frac{2z-(a+b)}{b-a}.$$

Из (4) следует, что

$$\bar{T}_n\left(\frac{2z-(a+b)}{b-a}\right) = \left(\frac{2z-(a+b)}{b-a}\right)^n + \cdots = \left(\frac{2}{b-a}\right)^n z^n + \cdots \,. \quad (5)$$

Введем в рассмотрение соответствующий (5) нормированный многочлен:

$$\bar{T}_n^{[a;b]}(x) = (b-a)^n 2^{-n} \bar{T}_n\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right) + \cdots =$$

$$= (b-a)^n 2^{1-2n} T_n\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right) + \cdots$$

(независимая переменная вновь обозначена x). В силу леммы 1 можно утверждать, что он является наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $[a;b]$ среди всех нормированных многочленов степени n:

$$\max_{x\in[a;b]} |P_n(x)| \geq \max_{x\in[a;b]} \left|\bar{T}_n^{[a;b]}(x)\right| = (b-a)^n 2^{1-2n}, \qquad (6)$$

где P_n — произвольный нормированный многочлен степени n.

Нетрудно проверить, что корнями многочлена $\bar{T}_n^{[a;b]}$ являются точки

$$x_m = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi(2m-1)}{2n},$$

$m = 1, \ldots, n$.