ЛЕКЦИЯ 8.1 ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. ПРОСТЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ

1. Постановка задачи численного интегрирования

Интегрирование – это нахождение первообразной функции; численно можно решать только задачу расчёта определённого интеграла. Известно, что определённый интеграл можно точно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Для её применения необходимо найти первообразную, т.е. взять неопределённый интеграл, что не всегда возможно. Например, интеграл может не выражаться в элементарных функциях. Кроме того, интегрируемая функция может быть задана таблично, и формула Ньютона-Лейбница неприменима.

В этих и некоторых других случаях возникает задача численного интегрирования, которая заключается в приближённом вычислении интеграла и оценке погрешностей приближённого значения. Начнём мы её решение с простейших квадратурных формул.

2. Простейшие формулы численного интегрирования

Как известно, определённый интеграл – это предел интегральных сумм при стремлении к нулю максимального размера частичных отрезков разбиения. Поэтому очевидная идея его приближения – замена суммой. Такие суммы называются квадратурными.

Квадратурная формула – это формула, приближённо заменяющая интеграл суммой вида

$$I^* = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i),$$

где x_i – некоторые точки на отрезке интегрирования $[a; b]$, которые называются *узлами* формулы, n – их число, A_i – числовые коэффициенты, которые называются *весами*. В зависимости от выбора этих параметров получаются различные квадратурные формулы.

Простейшие формулы основаны на геометрическом смысле: определённый интеграл на отрезке от a до b от функции $f(x)$ есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной слева вертикальной прямой $x = a$, справа – прямой $x = b$, осью абсцисс снизу и сверху – кривой $y = f(x)$ (рис. 1).

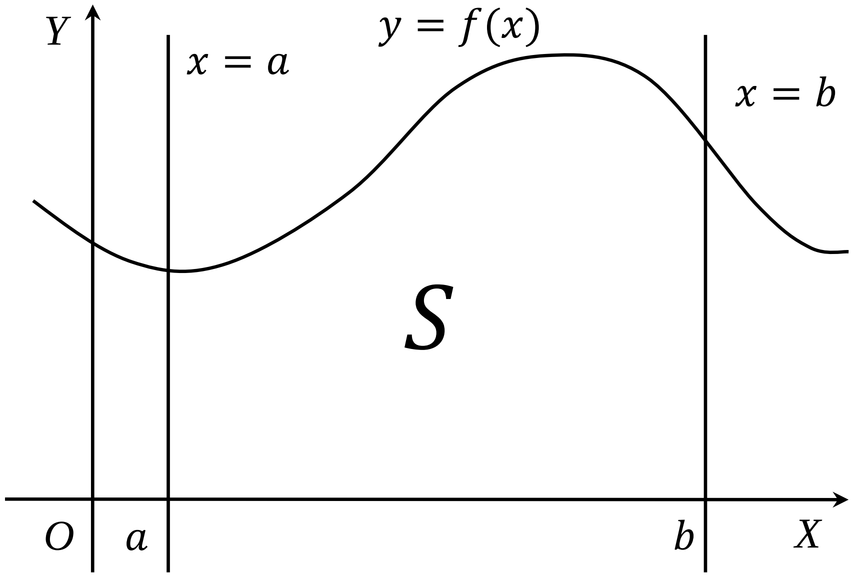

Рис. 1. Криволинейная трапеция

Разобьём отрезок интегрирования $[a; b]$ на n частичных отрезков равной длины, пусть h - длина каждого отрезка. Тогда точки разбиения x_i определяются формулой

$$x_i = a + ih, i = 0, \dots, n,$$

где

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Проведём через x_i вертикальные прямые $x = x_i$. Они разобьют криволинейную трапецию на n частичных криволинейных трапеций (рис 2). Понятно, что площадь всей трапеции, а значит, и интеграл, будут равны сумме площадей частичных трапеций S_i. Заметим, что проведённое разбиение равносильно разложению исходного интеграла на сумму n интегралов по частичным отрезкам, т.к. площадь каждой трапеции как раз равна интегралу по своему частичному отрезку. Теперь заменим каждую частичную криволинейную трапецию некоторой фигурой, площадь которой можно просто и точно вычислить, при этом, естественно, заменяющая фигура должна приближать эту трапецию.

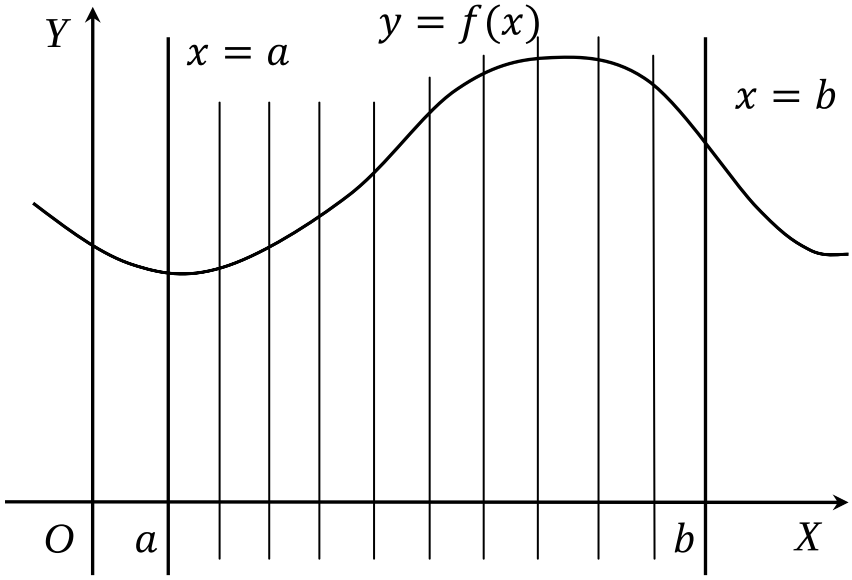

Рис. 2. Разбиение криволинейной трапеции на частичные трапеции

2.1. Формулы прямоугольников

Первая самая простая идея – заменить криволинейную трапецию прямоугольником. Пусть S_i – площадь i-й криволинейной трапеции, построенной на i-м отрезке разбиения $[x_{i-1};\ x_i]$ (рис. 3).

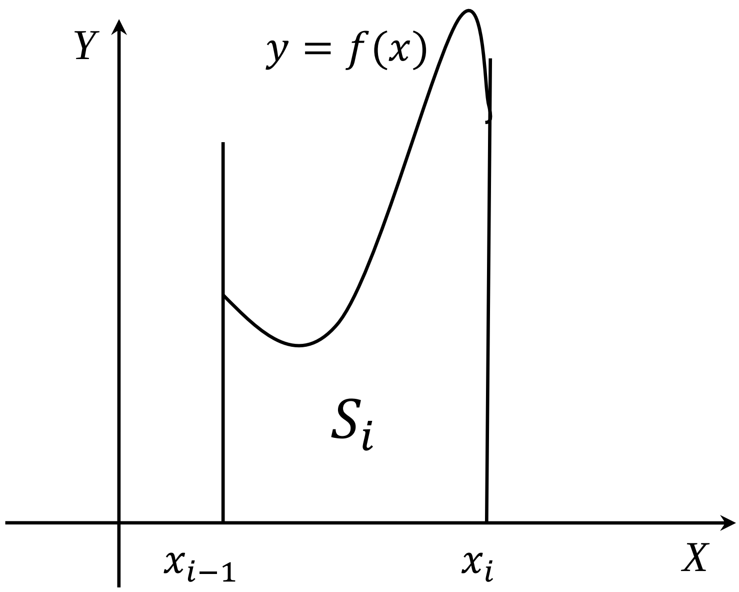

Рис. 3. Частичная криволинейная трапеция

Заменим i-ю трапецию прямоугольником, у которого одна сторона есть нижнее основание трапеции – отрезок $[x_{i-1};\, x_i]$, вторая – отрезок длины $f(x_{i-1})$ (рис. 4). Тогда $S_i \approx S_i^* = hf(x_{i-1})$.

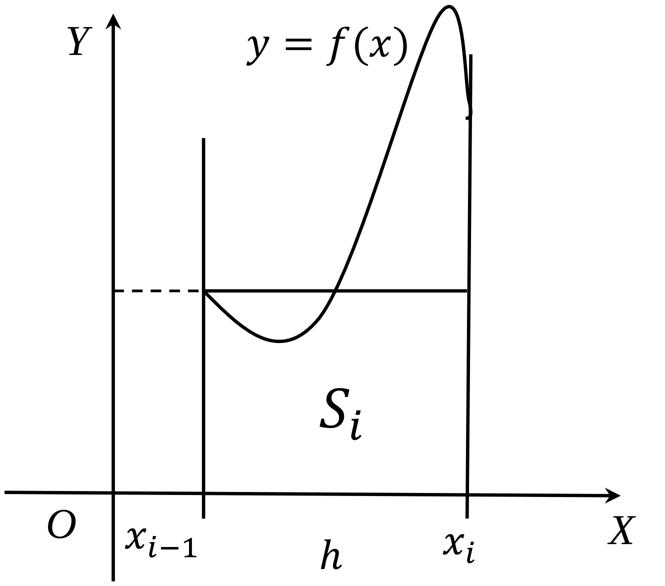

Рис. 4. Приближённое вычисление площади i-й криволинейной трапеции по формуле левых прямоугольников

Подставляя это значение в формулу для вычисления площади криволинейной трапеции через площади частичных трапеций, получаем *квадратурную формулу левых прямоугольников*:

$$I \approx I^* = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}).$$

Это и есть первая простейшая формула численного интегрирования.

Получим вторую формулу. Опять заменим i-ю трапецию прямоугольником, у которого одна сторона есть по-прежнему $[x_{i-1};\, x_i]$, а вторая – отрезок длины $f(x_i)$ (рис. 5). Тогда $S_i \approx S_i^* = hf(x_i)$ и получаем *формулу правых прямоугольников*:

$$I \approx I^* = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Наконец, третья формула прямоугольников получается заменой i-й криволинейной трапеции прямоугольником с тем же основанием – отрезком $[x_{i-1};\, x_i]$ – и высотой

$f\left(x_{i-1} + + \frac{h}{2}\right)$ (рис. 6). Тогда $S_i \approx S_i^* = hf\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)$, и получаем *формулу центральных прямоугольников*:

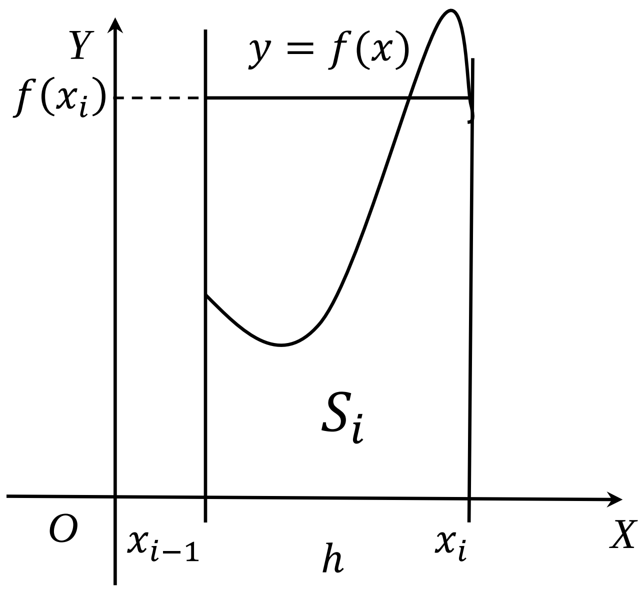

Рис. 5. Приближённое вычисление площади i-й криволинейной трапеции по формуле правых прямоугольников

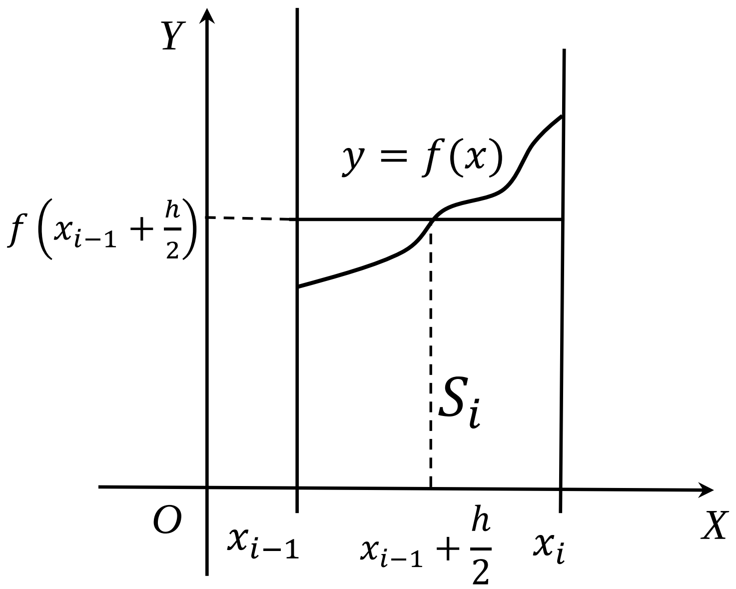

Рис. 6. Приближённое вычисление площади i-й криволинейной трапеции по формуле центральных прямоугольников

$$I \approx I^* = h \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right).$$

2.2. Формула трапеций

Теперь заменим *i*-ю криволинейную трапецию обычной трапецией. Её параллельные основания – отрезки длин $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$; боковые стороны - отрезок $[x_{i-1};\ x_i]$ и хорда, стягивающая дугу кривой, т.е. отрезок, соединяющий точки с координатами $\left(x_{i-1};\ f(x_{i-1})\right)$, $\left(x_i;\ f(x_i)\right)$ (рис. 7). Высота этой трапеции равна длине отрезка $[x_{i-1};\ x_i]$, т.е. h.

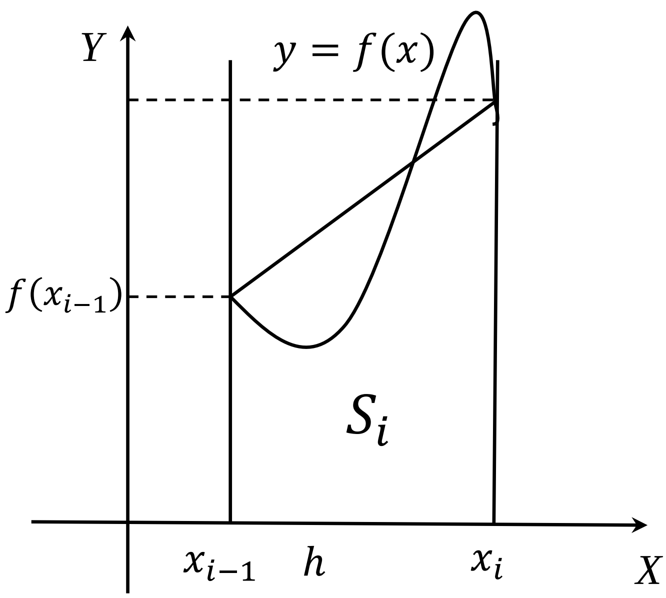

Рис. 7. Приближённое вычисление площади i-й криволинейной трапеции по формуле трапеций

Тогда

$$S_i \approx S_i^* = h\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}.$$

Подставляя S_i^* в формулу для вычисления площади криволинейной трапеции через площади частичных трапеций, получаем *квадратурную формулу трапеций*:

$$I \approx I^* = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right).$$

2.3. Формула парабол (Симпсона)

А теперь заменим криволинейную трапецию другой криволинейной трапецией, но такой, что её площадь можно просто и точно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница. Именно, пусть кривая из произвольной превратится в параболу. Парабола задаётся квадратным трёхчленом, интеграл от которого легко вычисляется (рис. 8).

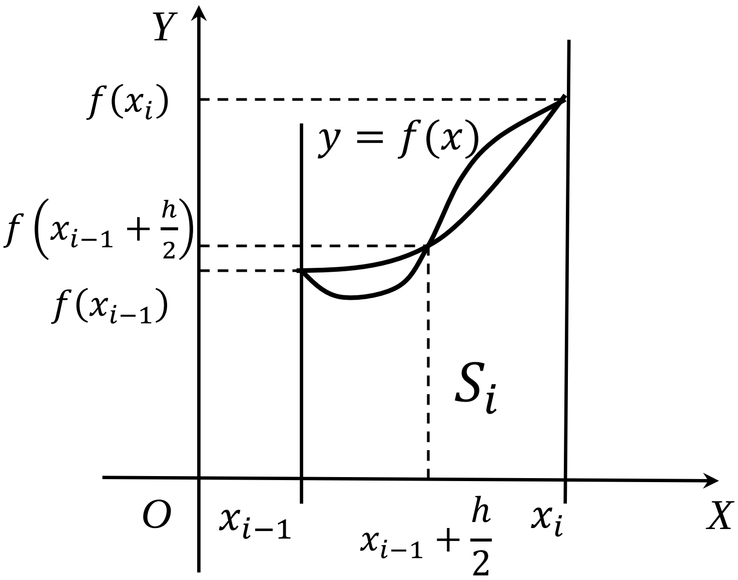

Рис. 8. Приближённое вычисление площади i-й криволинейной трапеции по формуле парабол

Возьмём на дуге кривой три точки: $(x_{i-1};\ f(x_{i-1}))$, $\left(x_{i-1} + \frac{h}{2};\ f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\right)$, $(x_i;\ f(x_i))$. Как известно, через три различных точки плоскости можно провести единственную параболу. Её уравнение можно найти с помощью интерполяционных формул. Например, поскольку узлы x_{i-1}, $x_{i-1} + \frac{h}{2}$, x_i идут равномерно, можно применить формулу Ньютона с конечными разностями:

$$P_{2,i}(x) = f(x_{i-1}) + \Delta f_{i-1} t + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 f_{i-1},$$

где

$$t = 2\frac{x - x_{i-1}}{h}, \Delta f_{i-1} = f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) - f(x_{i-1}),$$

$$\Delta^2 f_{i-1} = \Delta f_{i-\frac{1}{2}} - \Delta f_{i-1} = f(x_i) - 2f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + f(x_{i-1}).$$

Тогда площадь *i*-й криволинейной трапеции равна

$$S_i^* = \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_{2,i}(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x_{i-1}) + \Delta f_{i-1}t + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 f_{i-1}\right)dx =$$

$$= \frac{h}{2}\int_0^2 \left(f(x_{i-1}) + \Delta f_{i-1}t + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 f_{i-1}\right)dt =$$

$$= \frac{h}{2}\left(2f(x_{i-1}) + 2\Delta f_{i-1} + \frac{1}{2}\Delta^2 f_{i-1}\right) =$$

$$= \frac{h}{6}\left(6f(x_{i-1}) + 6\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) + f(x_{i-1}) - 2f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + f(x_i)\right) =$$

$$= \frac{h}{6}\left(f(x_{i-1}) + f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + f(x_i)\right).$$

Итак,

$$S_i \approx S_i^* = \frac{h}{6}\left(f(x_{i-1}) + 4f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + f(x_i)\right).$$

Подставляя S_i^* в формулу для вычисления площади криволинейной трапеции через площади частичных трапеций, получаем *квадратурную формулу парабол*, или Симпсона:

$$I \approx I^* = \frac{h}{6}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right).$$

Заметим, что если интегрируемая функций есть полином второй степени, то формула парабол даёт точное значение интеграла.