

ЛЕКЦИЯ 14.2 МЕТОДЫ РУНГЕ-КУТТЫ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Методы Рунге-Кутты

1.1. Общая вычислительная схема методов Рунге-Кутты

В первой части мы сформулировали вычислительную задачу Коши для ОДУ первого порядка и получили расчётные формулы самого простого метода её решения – метода Эйлера. Идея была очень проста: интегрированием дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

получается формула для расчёта следующего сеточного значения

$$y(x_{i+1}) = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx. \quad (1)$$

Интеграл в (1) вычисляется приближённо по какой-либо квадратурной формуле. Таким способом мы вывели метод Эйлера, и так же выводится вычислительная схема целого семейства весьма распространённых методов. Это методы Рунге-Кутты. Они объединены общим происхождением и общей параметризованной расчётной формулой. Далее мы увидим, что метод Эйлера и его модификации - представители этого семейства.

В методах Рунге-Кутты интеграл заменяется квадратурной суммой:

$$y(x_{i+1}) = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \approx y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^m c_j f(x_i^{(j)}, y(x_i^{(j)})), \quad (2)$$

где $x_i^{(j)} = x_i + \alpha_j h$, $j = 1, \dots, m$, параметры α_j удовлетворяют условиям

$$0 = \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_m \leq 1. \quad (3)$$

Здесь $x_i^{(j)}$ – узлы квадратуры, $j = 1, \dots, m$, всего m узлов. Причём первый $x_i^{(1)}$ равен x_i , среди узлов могут быть совпадающие (см. условия (3)); c_j (вернее, $h c_j$) – веса квадратуры.

Для расчёта y_{i+1} по этой формуле надо вычислять значения $y(x_i^{(j)})$ решения y в узлах квадратуры. Это, в свою очередь, делается также по квадратурным формулам

$$\begin{aligned}
 y(x_i^{(1)}) &= y_i, \\
 y(x_i^{(2)}) &= y_i + h\beta_{21}f(x_i^{(1)}, y(x_i^{(1)})), \\
 y(x_i^{(3)}) &= y_i + h\left(\beta_{31}f(x_i^{(1)}, y(x_i^{(1)})) + \beta_{32}f(x_i^{(2)}, y(x_i^{(2)}))\right), \\
 &\vdots \\
 y(x_i^{(j)}) &= y_i + h\sum_{k=1}^{j-1}\beta_{jk}f(x_i^{(k)}, y(x_i^{(k)})), \\
 &\vdots \\
 y(x_i^{(m)}) &= y_i + h\sum_{k=1}^{m-1}\beta_{mk}f(x_i^{(k)}, y(x_i^{(k)})). \tag{4}
 \end{aligned}$$

Формулы (4) рекуррентные: каждое значение $y(x_i^{(j)})$ вычисляется по предыдущим $y(x_i^{(1)}), \dots, y(x_i^{(j-1)})$. Начальное значение $y(x_i^{(1)}) = y_i$. Это и есть общая вычислительная схема методов Рунге-Кутты. Она задаётся следующими параметрами:

- 1) коэффициенты, определяющие узлы, $\{\alpha_j\}_{j=1}^m$, причём $\alpha_1 = 0$;
- 2) число узлов m ;
- 3) веса квадратуры (2) $\{c_j\}_{j=1}^m$;
- 4) веса вспомогательных квадратур $\{\beta_{jk}\}_{j=2, \dots, m}^{k=1, \dots, j-1}$.

Эту схему можно записать с помощью вспомогательных величин. Пусть

$$K_i^{(j)} = f(x_i^{(j)}, y(x_i^{(j)})).$$

Тогда расчётные формулы принимают такой вид:

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + hK_i, \\
 K_i &= \sum_{j=1}^m c_j K_i^{(j)}; \\
 K_i^{(1)} &= f(x_i^{(1)}, y(x_i^{(1)})), \quad x_i^{(1)} = x_i, \quad y(x_i^{(1)}) = y_i;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_i^{(2)} &= f\left(x_i^{(2)}, y(x_i^{(2)})\right), x_i^{(2)} = x_i + \alpha_2 h, y(x_i^{(2)}) = y_i + h\beta_{21}K_i^{(1)}; \\
&\vdots \\
K_i^{(j)} &= f\left(x_i^{(j)}, y(x_i^{(j)})\right), x_i^{(j)} = x_i + \alpha_j h, y(x_i^{(j)}) = y_i + h \sum_{k=1}^{j-1} \beta_{jk} K_i^{(k)}; \\
&\vdots \\
K_i^{(m)} &= f\left(x_i^{(m)}, y(x_i^{(m)})\right), x_i^{(m)} = x_i + \alpha_m h, y(x_i^{(m)}) = y_i + h \sum_{k=1}^{m-1} \beta_{mk} K_i^{(k)}. \quad (5)
\end{aligned}$$

Сначала вычисляется $K_i^{(1)} = f(x_i, y_i)$, потом по $K_i^{(1)}$ находится $K_i^{(2)}$ и т.д. По рекуррентным формулам вычисляются все $K_i^{(j)}$, $j = 2, \dots, m$; затем вычисляется K_i и, наконец, очередное сеточное значение y_{i+1} . Параметры выбираются так, чтобы обеспечить максимальный порядок точности решения.

Таким образом, методы Рунге-Кутты характеризуются следующим:

1. Это явные одношаговые методы, т.е. очередное сеточное значение вычисляется по явной формуле с использованием одного предыдущего.
2. На каждом шаге вычисляются значения решения и правой части уравнения в m вспомогательных точках.

Замечание 1. Существуют также неявные методы Рунге-Кутты. Их отличие от классических явных в том, что значения $y(x_i^{(j)})$ во вспомогательных точках находятся не рекуррентно, а как решение нелинейной системы уравнений. Они имеют некоторые преимущества, но при этом алгоритм существенно усложняется.

Замечание 2. Увеличивая число m вспомогательных точек, можно получить методы Рунге-Кутты любого порядка точности. Однако методы выше четвёртого порядка используется редко из-за громоздкости формул. А также из-за того, что методы Рунге-Кутты высокого порядка менее эффективны по сравнению с другими того же порядка точности.

Нетрудно установить связь изученных нами в лекции 14.1 методов Эйлера с семейством методов Рунге-Кутты. Если сравнить формулы этих методов с общей схемой Рунге-Кутты, то выводятся значения параметров, приведённые в таблице 1.

Метод Эйлера и его модификации – частные случаи методов Рунге-Кутты.

Табл. 1. Параметры методов Рунге-Кутты

Параметр	Метод Эйлера	Метод Эйлера-Коши	Усовершенствованный метод Эйлера
m	1	2	2
α_1	0	0	0
α_2	-	1	$\frac{1}{2}$
c_1	1	$\frac{1}{2}$	0
c_2	-	$\frac{1}{2}$	1
β_{21}	-	1	$\frac{1}{2}$

1.2. Метод Рунге-Кутты четвёртого порядка

Самым популярным методом из семейства Рунге-Кутты является метод четвёртого порядка. Он считается классическим и даже называется просто *методом Рунге-Кутты*. Вычислительная схема (5) для него принимает вид:

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + hK_i, \\
 K_i &= \frac{1}{6} \left(K_i^{(1)} + 2K_i^{(2)} + 2K_i^{(3)} + K_i^{(4)} \right), \\
 K_i^{(1)} &= f(x_i, y_i), \\
 K_i^{(2)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_i^{(1)}\right), \\
 K_i^{(3)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_i^{(2)}\right), \\
 K_i^{(4)} &= f\left(x_{i+1}, y_i + hK_i^{(3)}\right), \\
 y(x_0) &= y_0,
 \end{aligned}$$

$i = 0, \dots, n - 1$. Его параметры приведены в таблице 2. Этот метод имеет четвёртый порядок точности. Это значит, что локальная погрешность равна $O(h^5)$, а глобальная накопленная погрешность - $O(h^4)$.

Для оценки погрешности методов Рунге-Кутты рекомендуется применять правило двойного пересчёта (*правило Рунге*). Согласно нему погрешность сеточного решения в точке x_{i+1} грубо оценивается по формуле

Табл. 2. Параметры метода Рунге-Кутты четвёртого порядка

Параметр	Значения			
m	4			
c_i	$c_1 = \frac{1}{6}$	$c_2 = \frac{1}{3}$	$c_3 = \frac{1}{3}$	$c_4 = \frac{1}{6}$
α_i	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_2 = \frac{1}{2}$	$\alpha_3 = \frac{1}{2}$	$\alpha_4 = 1$
β_{2k}	$\beta_{21} = \frac{1}{2}$	-	-	-
β_{3k}	$\beta_{31} = 0$	$\beta_{32} = \frac{1}{2}$	-	-
β_{4k}	$\beta_{41} = 0$	$\beta_{42} = 0$	$\beta_{43} = 1$	-

$$\Delta y_{i+1}^{(\frac{h}{2})} = \left| y(x_{i+1}) - y_{i+1}^{(\frac{h}{2})} \right| \approx \frac{\left| y_{i+1}^{(h)} - y_{i+1}^{(\frac{h}{2})} \right|}{2^s - 1},$$

где $y(x_{i+1})$ – значение точного решения в точке x_{i+1} , $y_{i+1}^{(\frac{h}{2})}$ – сеточное решение в этой точке с шагом $\frac{h}{2}$, $y_{i+1}^{(h)}$ – то же самое с шагом h , s – порядок точности метода. Тогда при $s = 4$ получаем оценку метода четвёртого порядка:

$$\Delta y_{i+1}^{(\frac{h}{2})} \approx \frac{\left| y_{i+1}^{(h)} - y_{i+1}^{(\frac{h}{2})} \right|}{15}.$$

Это же правило можно применять для метода Эйлера ($s = 1$) и его модификаций ($s = 2$).

Порядок применения правила следующий. По значению y_i вычисляется $y_{i+1}^{(h)}$ с шагом интегрирования h и $y_{i+1}^{(\frac{h}{2})}$ с шагом $\frac{h}{2}$. Для последнего надо выполнить два расчётных шага метода. Затем находится оценка погрешности. Если она укладывается в заданную

точность, то шаг оставляется, значение $y_{i+1}^{(\frac{h}{2})}$ принимается за сеточное решение в точке x_{i+1} . В противном случае шаг уменьшается. На этом правиле основаны программы решения задачи Коши методом Рунге-Кутты с адаптивным шагом. Они оценивают погрешность в каждом узле сетки и принимают решение об изменении шага для следующего узла.

Пример. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2^{x-y}, \\ y(-3) = -5 \end{cases}$$

на отрезке $[-3; -2]$ с шагом $h = 0,1$ тремя методами: явным методом Эйлера, модифицированным метод Эйлера, методом Рунге-Кутты.

Аналитически можно найти точное решение:

$$y = \log_2 \left(2^x - \frac{3}{32} \right).$$

Узлы сетки рассчитываются по формулам $x_i = -3 + hi, i = 0, 1, \dots, 10$.

Расчетные формулы явного метода Эйлера для данного примера получаются следующие:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot 2^{x_i - y_i}, \\ y_0 = -5, \end{cases}$$

$i = 0, 1, \dots, 9$.

Расчетные формулы модифицированного метода Эйлера:

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot 2^{x_i - y_i}, \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (2^{x_i - y_i} + 2^{x_i - \tilde{y}_i}), \\ y_0 = -5, \end{cases}$$

$i = 0, 1, \dots, 9$.

Расчетные формулы метода Рунге – Кутты:

$$\begin{cases} k_1 = 2^{x_i - y_i}, \\ k_2 = 2^{x_i + \frac{h}{2} - y_i - \frac{hk_1}{2}}, \\ k_3 = 2^{x_i + \frac{h}{2} - y_i - \frac{hk_2}{2}}, \\ k_4 = 2^{x_i + h - y_i - hk_3}, \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ y_0 = -5, \end{cases}$$

$i = 0, 1, \dots, 9$.

Результаты расчётов приведены в таблице 3: $\{y_i\}$ – точное сеточное решение, $\{y_i^1\}$ – сеточное решение, полученное методом Эйлера, $\{y_i^2\}$ – модифицированным методом Эйлера, $\{y_i^3\}$ – методом Рунге Кутты. Последний является самым точным. Погрешность метода меньше 10^{-5} . В приведенной таблице 3 не видно различия между точным и приближенным решением метода Рунге-Кутты.

Табл. 3. Точное и приближенное решения задачи Коши на с. 6

x_i	y_i	y_i^1	y_i^2	y_i^3
–3	–5	–5	–5	–5
–2,9	–4,636	–4,600	–4,648	–4,636
–2,8	–4,327	–4,275	–4,312	–4,327
–2,7	–4,055	–3,997	–4,082	–4,055
–2,6	–3,812	–3,751	–3,843	–3,812
–2,5	–3,590	–3,529	–3,624	–3,590
–2,4	–3,385	–3,325	–3,421	–3,385
–2,3	–3,193	–3,315	–3,232	–3,193
–2,2	–3,013	–2,957	–3,053	–3,013
–2,1	–2,842	–2,788	–2,883	–2,842
–2	–2,678	–2,627	–2,720	–2,678

2. Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Теперь перейдём к многомерной задаче Коши. Рассмотренные ранее методы могут быть использованы также для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассмотрим задачу в общей постановке. Надо найти частное решение системы ОДУ первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m), \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}$$

при начальных условиях в точке x_0

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}, \\ \vdots \\ y_m(x_0) = y_{m0}, \end{cases}$$

$x \in [x_0; X]$, y_{10}, \dots, y_{m0} – константы. Здесь x – независимая переменная, y_1, \dots, y_m – неизвестные функции, определённые на отрезке $[x_0; X]$. Эта задача записывается в векторной форме следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \bar{y}(x) = \bar{f}(x, \bar{y}), \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0, \end{cases}$$

$$x \in [x_0; X],$$

где

$$\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_m(x) \end{pmatrix}, \bar{f}(x, \bar{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \vdots \\ f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{pmatrix},$$

$$\bar{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{m0} \end{pmatrix}.$$

Здесь \bar{y} – вектор-функция от x , \bar{f} – вектор-функция от x и \bar{y} , \bar{y}_0 – вектор начальных значений.

Описанные нами методы решения одномерной задачи Коши переносятся с минимальными изменениями на многомерную задачу. Надо лишь скалярные величины заменить векторными. Например, расчётные формулы метода Рунге-Кутты имеют такой вид:

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{K}_i,$$

$$\bar{K}_i = \frac{1}{6} \left(\bar{K}_i^{(1)} + 2\bar{K}_i^{(2)} + 2\bar{K}_i^{(3)} + \bar{K}_i^{(4)} \right),$$

$$\bar{K}_i^{(1)} = \bar{f}(x_i, \bar{y}_i),$$

$$\bar{K}_i^{(2)} = \bar{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{h}{2} \bar{K}_i^{(1)}\right),$$

$$\bar{K}_i^{(3)} = \bar{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{h}{2} \bar{K}_i^{(2)}\right),$$

$$\bar{K}_i^{(4)} = \bar{f}\left(x_{i+1}, \bar{y}_i + h \bar{K}_i^{(3)}\right),$$

$$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0,$$

$i = 0, \dots, n - 1$. Соответственно, результаты, касающиеся погрешностей, переносятся на многомерный случай. Абсолютная погрешность сеточного значения теперь – это векторная норма разности точного и сеточного значений. Оценки погрешности производятся по норме или покомпонентно.

Многомерная задача Коши имеет свои особенности. Например, появляется такое явление, как жёсткость. Но мы не рассматриваем её в нашем курсе. В целом теория численного решения многомерной задачи мало отличается от скалярной задачи.

В заключение для примера приведём расчётные формулы изученных методов для двумерной задачи Коши. Надо найти частное решение системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \varphi(x; y; z), \\ \frac{dz}{dx} = \psi(x; y; z), \end{cases}$$

определённое на отрезке $[x_0; X]$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ z(x_0) = z_0. \end{cases}$$

Пусть задана сетка $\{x_i\}_{i=0}^n$, $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$. Шаг сетки

$$h = \frac{X - x_0}{n}.$$

Сеточное решение рассчитывается явным методом Эйлера по формулам

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i; y_i; z_i), \\ z_{i+1} = z_i + h\psi(x_i; y_i; z_i), \\ y(x_0) = y_0, \\ z(x_0) = z_0, \end{cases}$$

$i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Расчётные формулы модифицированного метода Эйлера имеют вид

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i; y_i; z_i), \\ \tilde{z}_{i+1} = z_i + h\psi(x_i; y_i; z_i), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(\varphi(x_i; y_i; z_i) + \varphi(x_{i+1}; \tilde{y}_{i+1}; \tilde{z}_{i+1})), \\ z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2}(\psi(x_i; y_i; z_i) + \psi(x_{i+1}; \tilde{y}_{i+1}; \tilde{z}_{i+1})), \\ y(x_0) = y_0, \\ z(x_0) = z_0, \end{cases}$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$.

Схема метода Рунге – Кутты четвертого порядка точности такова:

$$\begin{cases} k_1 = \varphi(x_i; y_i; z_i), l_1 = \psi(x_i; y_i; z_i), \\ k_2 = \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2}k_1; z_i + \frac{h}{2}l_1\right), l_2 = \psi\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2}k_1; z_i + \frac{h}{2}l_1\right), \\ k_3 = \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2}k_2; z_i + \frac{h}{2}l_2\right), l_3 = \psi\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2}k_2; z_i + \frac{h}{2}l_2\right), \\ k_4 = \varphi(x_i + h; y_i + hk_3; z_i + hl_3), l_4 = \psi(x_i + h; y_i + hk_3; z_i + hl_3), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4), \\ y(x_0) = y_0, \\ z(x_0) = z_0, \end{cases}$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$.

Этот метод имеет четвёртый порядок точности, т.е. ошибка на одном шаге имеет порядок $O(h^5)$, а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок $O(h^4)$.

3. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков

В заключение посмотрим, как решается задача Коши для уравнения высшего порядка. Она состоит в нахождении частного решения ОДУ p -го порядка

$$y^{(p)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(p-1)}),$$

определённого на отрезке $[x_0; X]$ и удовлетворяющего при $x = x_0$ начальным условиям

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ \vdots \\ y^{(p-1)}(x_0) = y_0^{(p-1)}. \end{cases}$$

Здесь $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(p-1)}$ – константы.

Известно, что уравнение высшего порядка сводится к системе ОДУ первого порядка с помощью замен

$$\begin{cases} y_1(x) = y(x), \\ y_2(x) = y'(x), \\ \vdots \\ y_p(x) = y^{(p-1)}(x). \end{cases}$$

Тогда вместо уравнения p -го порядка получаем систему p уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2(x), \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3(x), \\ \vdots \\ \frac{dy_{p-1}}{dx} = y_p(x), \\ \frac{dy_p}{dx} = F(x, y_1, y_2, \dots, y_p) \end{cases}$$

и начальные условия

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_0, \\ y_2(x_0) = y'_0, \\ \vdots \\ y_p(x_0) = y_0^{(p-1)}, \end{cases}$$

$x \in [x_0; X]$. Пришли к многомерной задаче Коши первого порядка, которая решается теми же методами, что и одномерная.

Для уравнений второго порядка существуют также специальные методы решения. Одним из самых популярных считается метод Нумерова четвёртого порядка точности. Имеем задачу Коши второго порядка:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \end{cases}$$

$x \in [x_0; X]$. Правая часть уравнения не содержит первую производную. Заменяем дифференциальное уравнение конечной разностной схемой. Вторую производную аппроксимируем второй центральной разностной производной, а функцию f в правой части – величиной

$$\frac{1}{12}(f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 10f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})).$$

Получаем расчётную формулу метода Нумерова:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{12}(f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 10f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})),$$

$i = 1, 2, \dots, n - 1$. Это неявный двухшаговый метод: y_{i+1} находится по двум предыдущим y_i и y_{i-1} решением нелинейного уравнения (y_{i+1} присутствует в обеих частях). Для запуска метода нужны два начальных значения y_0, y_1 . Первое задано, а второе находится каким-либо одношаговым методом либо разностной аппроксимацией второго начального условия:

$$y'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h} = y'_0$$

(здесь применена правая разностная производная).

Пример. Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 1, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - 3, \\ x(0) = 0, \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

на отрезке $[0; 1]$. В правую часть уравнения переменная t не входит явно.

Аналитически можно найти точное решение:

$$\begin{cases} x(t) = e^t - 1, \\ y(t) = e^t + e^{2t} + 1. \end{cases}$$

Решим задачу явным и модифицированным методами Эйлера и методом Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0,1$.

На рисунке 1 приведен фрагмент решения задачи в Mathcad модифицированным методом Эйлера: рассчитывается первое сеточное значение $(x_1^1; y_1^1)$. Все расчёты сделаны в Mathcad, результаты даны в таблице 4. Точки $(x_i; y_i)$ – это точное сеточное решение, $(x_i^1; y_i^1)$ – это сеточное решение по методу Эйлера, $(x_i^2; y_i^2)$ – по модифицированному методу Эйлера, точки $(x_i^3; y_i^3)$ – по методу Рунге-Кутты.

$$\begin{aligned}
f1(x, y) &:= x - 1 \\
f2(x, y) &:= x + 2y - 3 \\
t0 &:= 0 \quad y0 := 3 \quad x0 := 0 \quad y11 := y0 + h \cdot f2(x0, y0) = 3.3 \\
x11 &:= x0 + h \cdot f1(x0, y0) = -0.1 \\
y1 &:= y0 + \frac{h}{2} \cdot (f2(x0, y0) + f2(x11, y11)) = 3.325 \\
x1 &:= x0 + \frac{h}{2} \cdot (f1(x0, y0) + f1(x11, y11)) = -0.105 \\
x0 &:= x1 \quad y0 := y1
\end{aligned}$$

Рис. 1. Фрагмент решения задачи на с. 12 в Mathcad модифицированным методом Эйлера

Табл. 4. Решение задачи на с. 12

t_i	$(x_i; y_i)$	$(x_i^1; y_i^1)$	$(x_i^2; y_i^2)$	$(x_i^3; y_i^3)$
0	(0; 3)	(0; 3)	(0; 3)	(0; 3)
0,1	(-0,105; 3,327)	(-0,100; 3,300)	(-0,105; 3,325)	(-0,105; 3,327)
0,2	(-0,221; 3,713)	(-0,210; 3,650)	(-0,221; 3,709)	(-0,221; 3,713)
0,3	(-0,350; 4,172)	(-0,331; 4,059)	(-0,349; 4,165)	(-0,350; 4,172)
0,4	(-0,492; 4,717)	(-0,464; 4,538)	(-0,491; 4,796)	(-0,492; 4,717)
0,5	(-0,649; 5,367)	(-0,611; 5,099)	(-0,647; 5,350)	(-0,649; 5,367)
0,6	(-0,822; 6,142)	(-0,772; 5,758)	(-0,820; 6,118)	(-0,822; 6,142)
0,7	(-1,014; 7,069)	(-0,949; 6,532)	(-1,102; 7,034)	(-1,014; 7,069)
0,8	(-1,226; 8,179)	(-1,144; 7,443)	(-1,223; 8,130)	(-1,226; 8,178)
0,9	(-1,460; 9,509)	(-1,358; 8,518)	(-1,456; 9,444)	(-1,460; 9,509)
1,0	(-1,718; 11,107)	(-1,594; 9,785)	(-1,714; 11,019)	(-1,718; 11,107)

4. Примеры практических задач, приводящих к решению дифференциальных

4.1. Дифференциальные уравнения в биотехнологиях

Биотехнологии – это прикладная отрасль биологии, в которой разрабатываются методы генной инженерии и выращивания клеточных культур. Инструмент биотехнологий – хеостат - биореактор, в котором посредством культивирования клеток вырабатываются полезные вещества. Цели исследования – достичь состояния, при котором число микроорганизмов N и объем питательных веществ C были бы практически постоянными, а рост численности микроорганизмов – экспоненциальным. Следующие дифференциальные уравнения описывают процессы в хеостате:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = K(C)N - F \frac{N}{V}, \\ \frac{dC}{dt} = -\alpha K(C)N - F \frac{C}{V} + F \frac{C_0}{V}, \end{cases}$$

где N - число микроорганизмов, C - концентрация питательных веществ, F - поток ($F_{\text{вход}} = F_{\text{выход}}$), V - объем, α , $K(C)$ и C_0 - параметры модели.

4.2. Математическое изучение рака

В 1964 году исследователь Лэйрд заметил, что рост опухолей в некоторых условиях описывается функцией Гомпертца. Дифференциальное уравнение для этой функции:

$$y' = \alpha y \ln \frac{K}{y},$$

где y - размер опухоли, K - максимально возможный размер опухоли. Решением данного уравнения является функция

$$y = K \exp \left(\ln \left(\frac{y(0)}{K} \right) e^{-\alpha t} \right),$$

где $y(0)$ – начальный размер опухоли.

4.3. Модель "хищник-жертва"

Примером задачи, сводимой к системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, является задача "хищник – жертва" (модель Лотки-Вольтерры). Данная модель довольно широко применяется при описании временной зависимости объема по-

пуляций в биологических системах, при моделировании экономических и физических процессов. Задача формулируется следующим образом. Пусть в системе в некоторый момент времени t имеются хищники (например, волки) в количестве $x(t)$ и жертвы (например, зайцы) в количестве $y(t)$. Согласно модель "хищник – жертва" $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют системе ОДУ первого порядка

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) - Bx(t)y(t), \\ y'(t) = Cx(t)y(t) - Dy(t), \end{cases}$$

где A, B, C и D - некоторые числовые константы.

Действительно, если зайцы имеют достаточно травы для питания, то скорость роста популяции будет прямо пропорциональна их числу (первое слагаемое в первом уравнении). Второе слагаемое описывает гибель зайцев при встрече с хищниками, так как вероятность их встречи равна произведению $x(t)y(t)$. Второе уравнение описывает изменение популяции хищников. Скорости роста популяции способствует их хорошее питание (первое слагаемое второго уравнения пропорционально вероятности встречи хищника и жертвы $x(t)y(t)$), а избыток хищников приводит к их гибели за счет голода (второе слагаемое).

4.4. Движение тела под действием пружины

Рассмотрим некоторое материальное тело массы m , которое движется по горизонтальной поверхности (в общем случае с трением) под действием пружины. Сила упругого сжатия (растяжения) пружины описывается законом Гука и пропорциональна смещению тела от положения равновесия пружины ($x = 0$): $F_{\text{упр}} = -kx$, где k – коэффициент жесткости пружины. Сила трения направлена всегда против движения тела и пропорциональна его скорости:

$$F_{\text{тр}} = -c \frac{dx}{dt},$$

c – коэффициент трения. Баланс сил, действующих на тело в каждый момент времени можно записать так:

$$F = ma = F_{\text{упр}} + F_{\text{тр}}.$$

С учетом того, что координата тела есть функция от времени, а скорость и ускорение – это первая и вторая производная координаты во времени соответственно, получим

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx(t) - c \frac{dx}{dt}.$$

Таким образом, изменение координаты тела от времени описывается ОДУ 2-го порядка. Начальными условиями в данной задачи являются значения координаты тела и его скорости в начальный момент времени ($t = 0$):

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0. \end{cases}$$