ЛЕКЦИЯ 5.1 ЛОКАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ. СПЛАЙНЫ

1. Локальная интерполяция

Все рассмотренные ранее методы интерполяции предполагают построение одной интерполирующей функции для всей таблицы. Такая интерполяция называется *глобальной*. Она имеет следующие недостатки. Во-первых, решение будет иметь сложный вид. Например, интерполяционный полином при большом числе узлов будет иметь высокую степень (на единицу меньшую количества узлов). Следствиями этого будут вычислительные сложности при нахождении численного решения. Во-вторых, применение глобальной интерполяции на больших таблицах может давать значительные погрешности в некоторых частях таблицы (см. лекцию 4.2). Поэтому были разработаны свободные от этих недостатков методы *локальной интерполяции*. Они предполагают построение нескольких интерполирующих функций по определённым участкам таблицы. Затем из них «склеивается» результирующая функция – решение задачи. Наиболее популярным методом локальной интерполяции является рассматриваемая ниже *сплайн-интерполяция*.

2. Интерполяционный сплайн

Определение. *Сплайном* называется кусочно-полиномиальная функция, определённая в некоторой области D в общем случае многомерного пространства. Это означает, что существует разбиение D на подобласти, при котором внутри каждой из них сплайн совпадает с некоторым полиномом степени m. Кроме того, сплайн непрерывен на всей области D вместе со своими производными (частными производными в многомерном случае) до некоторого порядка p включительно. Число m называется *степенью* сплайна.

Здесь будет рассмотрен только одномерный случай, т.е. область D – отрезок числовой прямой.

Сформулируем задачу кусочной сплайн-интерполяции. Функция $y = f(x)$ задана таблицей 1; $D = [a; b]$ – отрезок, содержащий все узлы таблицы.

Определение. *Интерполяционным сплайном* S_m степени m называется функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1. На каждом отрезке $[x_{i-1};\ x_i]$, $i = 1, \dots, n$, S_m совпадает с некоторым многочленом $P_{m,i}$ степени m.

Табл. 1. Функция $y = f(x)$

i	x_i	y_i
0	x_1	y_1
1	x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n

2. $S_m(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$ (условия интерполяции).
3. S_m непрерывна на $[a; b]$ со всеми своими производными до порядка p включительно (число $m - p$ называется *дефектом* сплайна).

Задача заключается в построении интерполяционного сплайна. Тогда значения функции f приближённо вычисляются как значения S_m, т.е. исходная табличная функция аппроксимируется сплайном.

Наиболее применимыми на практике являются *кубические сплайны*, т.е. сплайны третьей степени. Их построению посвящён следующий пункт.

3. Кубический сплайн

3.1. Построение кубического сплайна

Пусть $m = 3$, $p = 2$, т.е. поставим задачу построения кубического сплайна дефекта 1. Обозначим шаги таблицы $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. На каждом частичном отрезке $[x_{i-1};\ x_i]$ сплайн S_3 определяется *интерполяционной формулой Эрмита*:

$$S_3(x) = P_{3,i}(x) = y_{i-1}\frac{(x - x_i)^2(2(x - x_{i-1}) + h_i)}{h_i^3} +$$

$$+s_{i-1}\frac{(x - x_i)^2(x - x_{i-1})}{h_i^2} + y_i\frac{(x - x_{i-1})^2(2(x_i - x) + h_i)}{h_i^3} + s_i\frac{(x - x_{i-1})^2(x - x_i)}{h_i^2}, \quad (1)$$

$x \in [x_{i-1};\ x_i]$, $i = 1, \dots, n$, здесь s_i – подлежащие нахождению параметры. Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$S_3(x_i - 0) = P_{3,i}(x_i) = y_i, S_3(x_i + 0) = P_{3,i+1}(x_i) = y_i,$$

$i = 1, \dots, n-1$, т.е. выполняются условия интерполяции, и обеспечивается непрерывность сплайна во внутренних узлах. Кроме того,

$$S_3(x_0) = P_{3,1}(x_0) = y_0, S_3(x_n) = P_{3,n}(x_n) = y_n,$$

что означает удовлетворение условий интерполяции и в крайних точках. Далее, продифференцируем (1):

$$S_3'(x) = P_{3,i}'(x) = y_{i-1}\frac{2(x-x_i)(2(x-x_{i-1})+h_i)+2(x-x_i)^2}{h_i^3}+$$

$$+s_{i-1}\frac{2(x-x_i)(x-x_{i-1})+(x-x_i)^2}{h_i^2}+y_i\frac{2(x-x_{i-1})(2(x_i-x)+h_i)-2(x-x_{i-1})^2}{h_i^3}+$$

$$+s_i\frac{2(x-x_{i-1})(x-x_i)+(x-x_{i-1})^2}{h_i^2}. \qquad (2)$$

Подстановкой в (2) нетрудно проверяются равенства

$$S_3'(x_i-0) = P_{3,i}'(x_i) = s_i, S_3'(x_i+0) = P_{3,i+1}'(x_i) = s_i, i = 1, \dots, n-1,$$

$$S_3'(x_0) = P_{3,1}'(x_0) = s_0, S_3'(x_n) = P_{3,n}'(x_n) = s_n,$$

из которых следует непрерывность первой производной во внутренних узлах, а также то, что параметры s_i – значения S_3' в точках x_i: $s_i = S_3'(x_i)$. Эти величины называются *наклонами* сплайна.

Таким образом, формула Эрмита по своему построению обеспечивает непрерывность сплайна и его первой производной. Непрерывность же S_3'' будет достигнута подбором наклонов. Продифференцируем (2):

$$S_3''(x) = P_{3,i}''(x) = y_{i-1}\frac{2(2(x-x_{i-1})+h_i)+8(x-x_i)}{h_i^3}+$$

$$+s_{i-1}\frac{2(x-x_{i-1})+4(x-x_i)}{h_i^2}+y_i\frac{2(2(x_i-x)+h_i)-8(x-x_{i-1})}{h_i^3}+$$

$$+s_i\frac{2(x-x_i)+4(x-x_{i-1})}{h_i^2}. \qquad (3)$$

Теперь запишем условие непрерывности S_3'' в узлах x_i, $i = 1, \dots, n-1$:

$$S_3''(x_i-0) = S_3''(x_i+0) \;\Rightarrow\; P_{3,i}''(x_i) = P_{3,i+1}''(x_i) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{h_i}s_{i-1}+\frac{4}{h_i}s_i-\frac{6}{h_i^2}(y_i-y_{i-1}) = -\frac{4}{h_{i+1}}s_i-\frac{2}{h_{i+1}}s_{i+1}+\frac{6}{h_{i+1}^2}(y_{i+1}-y_i) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h_i}s_{i-1}+2\left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}\right)s_i+\frac{1}{h_{i+1}}s_{i+1} = 3\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2}\right). \qquad (4)$$

Получили систему линейных уравнений для нахождения наклонов $s_0, s_1, \dots, s_n$. Система не доопределённая: количество уравнений $n-1$ меньше числа неизвестных $n+1$. Не хватает двух уравнений для её замыкания. Чтобы их получить, используются граничные условия различных видов.

3.2. Граничные условия

Приведём некоторые из граничных условий. Если известны значения производных функции f в граничных узлах, то естественно положить $s_0 = f'(x_0)$, $s_n = f'(x_n)$. Получаем недостающие уравнения. Фактически здесь определяются две переменные s_0 и s_n, и число неизвестных уменьшается на два.

Далее, могут быть заданы $f''(x_0)$, $f''(x_n)$. Тогда нужно приравнять эти значения ко вторым производным сплайна в левой и правой крайних точках соответственно:

$$S_3''(x_0) = P_{3,1}''(x_0) = -\frac{4}{h_1}s_0 - \frac{2}{h_1}s_1 + 6\frac{y_1 - y_0}{h_1^2} = f''(x_0);$$

$$S_3''(x_n) = P_{3,n}''(x_n) = \frac{2}{h_n}s_{n-1} + \frac{4}{h_n}s_n - 6\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n^2} = f''(x_n).$$

Получаем два недостающих уравнения к системе (4):

$$-\frac{4}{h_1}s_0 - \frac{2}{h_1}s_1 = f''(x_0) + 6\frac{y_0 - y_1}{h_1^2},$$

$$\frac{2}{h_n}s_{n-1} + \frac{4}{h_n}s_n = f''(x_n) + 6\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n^2}.$$

При $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$ эти граничные условия называются *условиями свободного провисания*. Соответствующие уравнения имеют вид

$$2s_0 + s_1 = 3\frac{y_1 - y_0}{h_1};\ s_{n-1} + 2s_n = 3\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}.$$

Построенный по ним кубический сплайн называется *естественным*. Благодаря своей простоте условия свободного провисания получили широкое распространение, они применяются часто тогда, когда нет никакой информации о f'' на концах таблицы. Однако следует иметь в виду, что естественный сплайн в таких случаях менее точно приближает функцию f по сравнению с другими.

При отсутствии всякой информации о поведении функции f в крайних точках можно положить $P_{3,1}(x) \equiv P_{3,2}(x)$ и $P_{3,n-1}(x) \equiv P_{3,n}(x)$. Фактически это означает слияние смежных промежутков $[x_0;\, x_1]$, $[x_1;\, x_2]$ и $[x_{n-2};\, x_{n-1}]$, $[x_{n-1};\, x_n]$, т.е. вычёркивание из таблицы узлов x_1 и x_{n-1}. Поэтому эти граничные условия называются условиями «*отсутствия узла*». Выведем соответствующие уравнения. Для этого необходимо применить условия непрерывности S_3''' в x_1 и x_{n-1} (остальные условия или обеспечиваются формулой Эрмита, или уже были использованы). Дифференцируя (3), находим

$$S_3'''(x) = P_{3,i}'''(x) = \frac{12}{h_i^3}(y_{i-1} - y_i) + \frac{6}{h_i^2}(s_{i-1} + s_i).$$

Записываем условие непрерывности S_3''' в узле x_1:

$$S_3'''(x_1 - 0) = S_3'''(x_1 + 0) \Rightarrow P_{3,1}'''(x_1) = P_{3,2}'''(x_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{h_1^3}(y_0 - y_1) + \frac{6}{h_1^2}(s_0 + s_1) = \frac{12}{h_2^3}(y_1 - y_2) + \frac{6}{h_2^2}(s_1 + s_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h_1^2}s_0 + \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right)s_1 - \frac{1}{h_2^2}s_2 = 2\left(\frac{1}{h_2^3}(y_1 - y_2) + \frac{1}{h_1^3}(y_1 - y_0)\right).$$

Получили первое граничное уравнение. То же для x_{n-1}:

$$S_3'''(x_{n-1} - 0) = S_3'''(x_{n-1} + 0) \Rightarrow P_{3,n-1}'''(x_{n-1}) = P_{3,n}'''(x_{n-1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{h_{n-1}^3}(y_{n-2} - y_{n-1}) + \frac{6}{h_{n-1}^2}(s_{n-2} + s_{n-1}) = \frac{12}{h_n^3}(y_{n-1} - y_n) + \frac{6}{h_n^2}(s_{n-1} + s_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h_{n-1}^2}s_{n-2} + \left(\frac{1}{h_{n-1}^2} - \frac{1}{h_n^2}\right)s_{n-1} - \frac{1}{h_n^2}s_n = 2\left(\frac{1}{h_n^3}(y_{n-1} - y_n) + \frac{1}{h_{n-1}^3}(y_{n-1} - y_{n-2})\right).$$

Это второе граничное уравнение.

Наконец, в последних граничных условиях выполняется равенство $y_0 = y_n$ (или $y_0 \approx y_n$). Тогда функцию f можно считать периодической с периодом $T = x_n - x_0$ (вне таблицы она доопределяется по периодичности). Тогда очевидно, что первое граничное уравнение имеет вид

$$s_0 = s_n.$$

Второе выводится из условия $S_3''(x_0) = S_3''(x_n)$. Из (3) получаем

$$\begin{cases} S_3''(x_0) = P_{3,1}''(x_0) = -\dfrac{4}{h_1}s_0 - \dfrac{2}{h_1}s_1 + \dfrac{6}{h_1^2}(y_1 - y_0), \\ S_3''(x_n) = P_{3,n}''(x_n) = \dfrac{2}{h_n}s_{n-1} + \dfrac{4}{h_n}s_n + \dfrac{6}{h_n^2}(y_{n-1} - y_n), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{h_1}s_0 - \frac{2}{h_1}s_1 + \frac{6}{h_1^2}(y_1 - y_0) = \frac{2}{h_n}s_{n-1} + \frac{4}{h_n}s_n + \frac{6}{h_n^2}(y_{n-1} - y_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{h_1}s_0 + \frac{1}{h_1}s_1 + \frac{1}{h_n}s_{n-1} + \frac{2}{h_n}s_n = 3\left(\frac{1}{h_1^2}(y_1 - y_0) + \frac{1}{h_n^2}(y_n - y_{n-1})\right).$$

Таким образом, добавляя к (4) два граничных уравнения, выведенных из каких-либо условий, получаем линейную систему, записываемую в матричном виде

$$A\overline{s} = \overline{b},$$

где A – матрица системы, $\overline{s} = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ – вектор неизвестных наклонов, $\overline{b}$ – вектор правых частей. Матрица A, как правило, имеет специальную структуру. Например, при граничных условиях первого типа (даны значения производных на концах) матрица системы и вектор правых частей равны

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1^{-1} & 2(h_1^{-1} + h_2^{-1}) & h_2^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_2^{-1} & 2(h_2^{-1} + h_3^{-1}) & h_3^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-1}^{-1} & 2(h_{n-1}^{-1} + h_n^{-1}) & h_n^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} f'(x_0) \\ 3\left(\dfrac{y_1 - y_0}{h_1^2} + \dfrac{y_2 - y_1}{h_2^2}\right) \\ \vdots \\ 3\left(\dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}^2} + \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n^2}\right) \\ f'(x_n) \end{pmatrix}.$$

Матрица системы *трёхдиагональная*, для таких систем существуют специальные эффективные методы решения.

При граничных условиях второго типа (известны значения вторых производных) получаем следующие матрицу системы и вектор правых частей:

$$A = \begin{pmatrix} 4h_1^{-1} & -2h_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1^{-1} & 2(h_1^{-1} + h_2^{-1}) & h_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_2^{-1} & 2(h_2^{-1} + h_3^{-1}) & h_3^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-1}^{-1} & 2(h_{n-1}^{-1} + h_n^{-1}) & h_n^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2h_n^{-1} & 4h_n^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} f''(x_0) + 6\dfrac{y_0 - y_1}{h_1^2} \\ 3\left(\dfrac{y_1 - y_0}{h_1^2} + \dfrac{y_2 - y_1}{h_2^2}\right) \\ \vdots \\ 3\left(\dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}^2} + \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n^2}\right) \\ f''(x_n) + 6\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n^2} \end{pmatrix}.$$

Как видно, матрица и в этом случае трёхдиагональная.

В случае граничных условий типа «отсутствия узла» имеем:

$$A = \begin{pmatrix} h_1^{-2} & h_1^{-2} - h_2^{-2} & -h_2^{-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1^{-1} & 2(h_1^{-1} + h_2^{-1}) & h_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_2^{-1} & 2(h_2^{-1} + h_3^{-1}) & h_3^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-1}^{-1} & 2(h_{n-1}^{-1} + h_n^{-1}) & h_n^{-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-1}^{-2} & h_{n-1}^{-2} - h_n^{-2} & -h_n^{-2} \end{pmatrix},$$

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} 2\left(\dfrac{1}{h_2^3}(y_1 - y_2) + \dfrac{1}{h_1^3}(y_1 - y_0)\right) \\ 3\left(\dfrac{y_1 - y_0}{h_1^2} + \dfrac{y_2 - y_1}{h_2^2}\right) \\ \vdots \\ 3\left(\dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}^2} + \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n^2}\right) \\ 2\left(\dfrac{1}{h_n^3}(y_{n-1} - y_n) + \dfrac{1}{h_{n-1}^3}(y_{n-1} - y_{n-2})\right) \end{pmatrix}.$$

Матрица такого вида называется *почти трёхдиагональной*. Для систем с подобными матрицами также существуют специальные методы решения.

В любом случае матрицы систем, которые приходится решать при интерполяции сплайнами, являются разреженными (т.е. с преобладанием нулевых элементов), поэтому для них целесообразно применять специальные методы решения.

3.3. Погрешность интерполяции кубическим сплайном

В заключение приведём без доказательства теорему об оценке погрешности сплайн-интерполяции.

Теорема 1. Пусть функция f имеет непрерывные производные до четвёртого порядка включительно на отрезке $[a; b]$, содержащем все узлы интерполяции. Тогда для интерполяционного кубического сплайна S_3, построенного по приведённым выше граничным условиям, кроме условий свободного провисания, справедливы оценки погрешностей

$$\overline{\Delta}(S_3) = \max_{x\in[a;b]}|f(x) - S_3(x)| \le C_4 M_4 h_{max}^4,$$

где $C_4 > 0$ – некоторая константа,

$$M_4 = \max_{x\in[a;b]}\left|f^{(4)}(x)\right|,$$

$$h_{max} = \max_{i=1,\dots,n} h_i,$$

$$\overline{\Delta}\left(S_3^{(k)}\right) = \max_{x\in[a;b]}\left|f^{(k)}(x) - S_3^{(k)}(x)\right| \le C_k M_4 h_{max}^{4-k},$$

$k = 1, 2, 3$, где $C_k > 0$ – константы.

Из теоремы следует, что сплайны приближают не только саму функцию, но и её производные до третьего порядка.

Пример. Построим кубический сплайн дефекта 1 для функции $y(x) = x^2\sin(x^2)$ по узлам $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Кубические многочлены сплайна построим не по формуле Эрмита, а непосредственным нахождением коэффициентов из условий непрерывности. Для трех узлов строятся два кубических полинома $P_{3,1}(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$, $P_{3,2}(x) = a_5 + a_6x + {}$ ${}+a_7x^2 + a_8x^3$. Непосредственное использование условий интерполяции приводит к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1 + a_2x_0 + a_3x_0^2 + a_4x_0^3 = y_0, \\ a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2 + a_4x_1^3 = y_1, \\ a_5 + a_6x_1 + +a_7x_1^2 + a_8x_1^2 = y_1, \\ a_5 + a_6x_2 + +a_7x_2^2 + a_8x_2^2 = y_2, \\ a_2 + 2x_1a_3 + 3x_1^2a_4 = a_6 + 2x_1a_7 + 3x_1^2a_8, \\ 2a_3 + 6x_1a_4 = 2a_7 + 6x_1a_8, \\ 2a_3 + 6x_0a_4 = y_0'', \\ 2a_7 + 6x_2a_4 = y_2''. \end{cases}$$

Первые четыре уравнения – это условия интерполяции $P_{3,1}(x_0) = y_0 = y(x_0)$, $P_{3,1}(x_1) =$ $= y_1 = y(x_1)$, $P_{3,2}(x_1) = y_1 = y(x_1)$, $P_{3,2}(x_2) = y_2 = y(x_2)$ (второе и третье условия одновременно означают и непрерывность сплайна в узле x_1). Пятое и шестое уравнения получены как условия непрерывности первой и второй производных сплайна в узле x_1. Наконец, последние два уравнения – это граничные условия, в качестве которых взяты значения второй производной функции y в крайних узлах: $P_{3,1}''(x_0) = y_0'' = y''(x_0)$, $P_{3,2}''(x_2) =$

$= y_2'' = y''(x_2)$. Видно, что матрица системы разреженная, но она не имеет какой-то определённой структуры, для которой имеется специальный метод решения (в этом недостаток этого общего метода по сравнению с полиномами Эрмита). Поэтому систему надо решать каким-то общим методом. Сделав это, получаем многочлены

$$P_{3,1}(x) = 7{,}474 + 0{,}031x - 10{,}686x^2 + 4{,}023x^3,$$

$$P_{3,2}(x) = 137{,}823 - 195{,}493x + 87{,}076x^2 - 12{,}271x^3.$$

На отрезке $[1; 2]$ функция y интерполируется полиномом $P_{3,1}$, на отрезке $[2; 3]$ − полиномом $P_{3,2}$. Полином $P_{3,1}$ плавно переходит в точке $x_1 = 2$ в полином $P_{3,2}$. Можно проверить, что условия интерполяции выполнены.

Сравним вторые производные исходной функции и построенных полиномов в точке $x_1 = 2$:

$$P''_{3,1}(x_1) = 5{,}558;\ P''_{3,2}(x_1) = 5{,}558;\ f''(x_1) = -13{,}486.$$

Видим, что вторые производные полиномов существенно отличаются от таковых для исходной функции.

Графики полиномов сплайна и исходной функции приведены на рисунке 1. Красная линия интерполируется синей на отрезке $[1; 2]$ и зелёной - на отрезке $[2; 3]$. В точке $x_1 = 2$ все три кривые сходятся, причём синяя плавно переходит в зелёную.

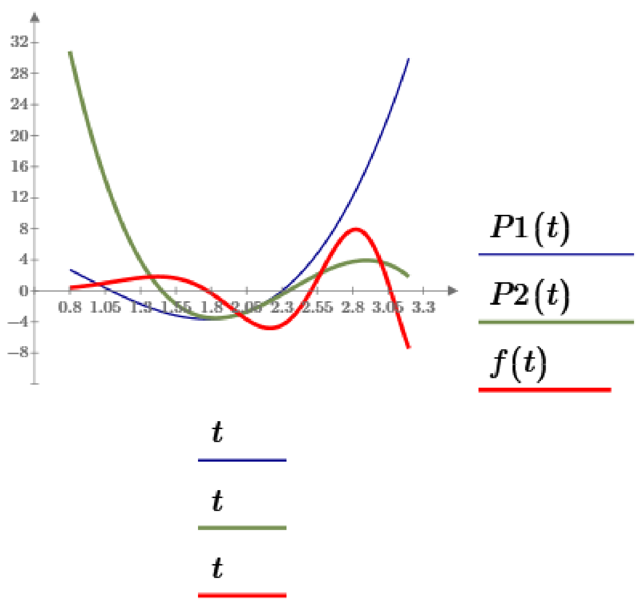

Рис. 1. Графики полиномов сплайна и функции примера на с. 8