ЛЕКЦИЯ 2.2 ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ РАЗНОСТЕЙ

1. Интерполирование с применением разделенных разностей

2.1. Разделенные разности и их свойства

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей с попарно несовпадающими узлами, которые пронумерованы в произвольном порядке (т.е. не обязательно в возрастающем). Для такой таблицы можно вычислить величины, которые называются *разделенными разностями*. Они определяются рекуррентно, начиная с первого порядка.

Определение. *Разделенной разностью первого порядка* функции f в узлах x_i, x_{i+1} называется величина

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \tag{1}$$

индекс i принимает значения от 0 до $n-1$. Таким образом, имеются n разностей первого порядка (по числу пар соседних узлов). Формула (1) показывает, что разделенная разность является дискретным аналогом первой производной. Разности порядков выше первого определяются рекуррентно через предыдущие порядки.

Определение. *Разделенной разностью k-го порядка* функции f в узлах x_i, $x_{i+1}, \dots,$ x_{i+k} называется

$$f(x_i; \dots; x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) - f(x_i; \dots; x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}, \tag{2}$$

$i = 0, \dots, n-k$.

Разделенные разности удобно рассчитывать в таблицах. Ниже (таблица 1) показан общий вид треугольной таблицы разделенных разностей.

Следующее утверждение дает формулу для непосредственного вычисления разделенных разностей по таблице функции.

Лемма 1. Разделенная разность *k*-го порядка в узлах x_i, $x_{i+1}, \dots,$ x_{i+k} вычисляется по формуле

$$f(x_i; \dots; x_{i+k}) =$$
$$= \sum_{j=i}^{i+k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_i) \cdot (x_j - x_{i+1}) \cdots (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{i+k})}. \tag{3}$$

Табл. 1. Таблица разделенных разностей

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i;x_{i+1})$	$f(x_i;x_{i+1};x_{i+2})$	…	$f(x_0;\dots;x_n)$
x_0	$f(x_0)$				
		$f(x_0;x_1)$			
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0;x_1;x_2)$		
		$f(x_1;x_2)$		$\ddots$	
x_2	$f(x_2)$				$f(x_0;\dots;x_n)$
				$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
				$⋰$	
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$		$f(x_{n-2};x_{n-1};x_n)$		
		$f(x_{n-1};x_n)$			
x_n	$f(x_n)$				

Доказательство. Докажем (3) индукцией по k. База индукции ($k = 1$):

$$f(x_i;x_{i+1}) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} + \frac{f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

Пришли к определению разности первого порядка (1). База доказана.

Индукционное предположение: формула (3) верна для любого порядка $k \le s$ при любых $i = 0,\ 1, \dots,\ n-k$. Пусть теперь $k = s+1$. Тогда из (2) с учетом индукционного предположения получаем

$$f(x_i;\dots;x_{i+s+1}) = \frac{f(x_{i+1};\dots;x_{i+s+1}) - f(x_i;\dots;x_{i+s})}{x_{i+s+1} - x_i} =$$

$$= \frac{1}{x_{i+s+1} - x_i} \times$$

$$\times \left(\sum_{j=i+1}^{i+s+1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_{i+1}) \cdots (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{i+s+1})} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=i}^{i+s} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_i) \cdots (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{i+s})} \right) =$$

$$= \sum_{j=i}^{i+s+1} S_j f(x_j). \qquad (4)$$

Для доказательства индукционного шага нужно найти коэффициенты S_j при $f(x_j)$ в общей сумме (4). Пусть $j \notin \{i; i+s+1\}$. Тогда

$$S_j = \frac{1}{x_{i+s+1} - x_i}\left(\frac{1}{(x_j - x_{i+1})\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_{i+s+1})} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(x_j - x_i)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_{i+s})}\right) = \frac{1}{x_{i+s+1} - x_i} \times$$

$$\times \frac{x_j - x_i - (x_j - x_{i+s+1})}{(x_j - x_i)(x_j - x_{i+1})\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_{i+s})(x_j - x_{i+s+1})} =$$

$$= \frac{1}{(x_j - x_i)(x_j - x_{i+1})\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_{i+s})(x_j - x_{i+s+1})},$$

что совпадает с коэффициентом при $f(x_j)$ в (3) при $k = s + 1$.

Если $j = i$, то

$$S_j = S_i = -\frac{1}{x_{i+s+1} - x_i} \cdot \frac{1}{(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_{i+s})} =$$

$$= \frac{1}{(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_{i+s})(x_i - x_{i+s+1})},$$

а при $j = i + s + 1$ имеем

$$S_j = S_{i+s+1} = \frac{1}{x_{i+s+1} - x_i} \cdot \frac{1}{(x_{i+s+1} - x_{i+1})\cdots(x_{i+s+1} - x_{i+s})} =$$

$$= \frac{1}{(x_{i+s+1} - x_i)(x_{i+s+1} - x_{i+1})\cdots(x_{i+s+1} - x_{i+s})},$$

что также совпадает с коэффициентами при $f(x_j)$ в (3). Индукционный шаг доказан. ■

Следствие. Разделенные разности являются симметричными функциями своих аргументов, т.е. их значения не зависят от перестановок узлов, в которых они определены.

Формула (3) не применяется для вычисления разделенных разностей, поскольку гораздо удобнее это делать с помощью (1), (2) по таблице 1. Она имеет значение для теории, в частности, следствие из нее будет использоваться при выводе интерполяционных формул.

По таблице же вычислять разности довольно просто. На рисунке 1 показано, как считается разность первого порядка $f(x_i; x_{i+1})$.

x_i	$f(x_i)$	
		$f(x_i; x_{i+1})$
x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	

Рис. 1. Вычисление разности первого порядка $f(x_i; x_{i+1})$

Считаем разность клеток с x_{i+1} и x_i (показано стрелкой), пишем в знаменатель; считаем разность клеток с y_{i+1} и y_i (показано стрелкой), пишем в числитель; частное пишем в клетку разности (тёмная клетка). Для следующей разности спускаемся на две строки и повторяем те же операции. А на рисунке 2 показано, как считается разность k-го порядка $f(x_i; \ldots; x_{i+k})$.

x_i	$f(x_i)$	$\cdots$		
x_{i+1}	$f(x_{i+1})$		$f(x_i; \ldots; x_{i+k-1})$	
$\vdots$	$\vdots$			$f(x_i; \ldots; x_{i+k})$
x_{i+k-1}	$f(x_{i+k-1})$		$f(x_{i+1}; \ldots; x_{i+k})$	
x_{i+k}	$f(x_{i+k})$			

Рис. 2. Вычисление разности k-го порядка $f(x_i; \ldots; x_{i+k})$

Считаем разность клеток с x_{i+k} и x_i (показано стрелкой), пишем в знаменатель; считаем разность клеток с соседними разностями предыдущего (k-1)-го порядка (в предыдущем столбце, показано стрелкой), пишем в числитель; частное пишем в клетку разности (тёмная клетка). Для следующей разности спускаемся на две строки и повторяем те же операции.

2.2. Интерполяционные многочлены Ньютона с разделенными разностями

Получим с помощью разделенных разностей другую, отличную от L_n, форму записи интерполяционного многочлена. Имеем

$$f(x) - L_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} y_i l_{n,i}(x) =$$

$$= f(x) - \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{j=0}^{n} \left(x - x_j\right) \times$$

$$\times \left(\frac{f(x)}{\prod_{j=0}^{n} \left(x - x_j\right)} + \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(x_i - x_j\right)} \right).$$

Сравнивая выражение в скобках с (3), убеждаемся в том, что оно равно $f(x;\ x_0; \dots;\ x_n)$. Поэтому

$$f(x) - L_n(x) = f(x;\ x_0; \dots;\ x_n) \cdot \prod_{j=0}^{n} \left(x - x_j\right) =$$

$$= f(x;\ x_0; \dots;\ x_n) Q_{n+1}(x). \qquad (5)$$

Пусть L_i — интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по узлам x_0, $x_1, \dots, x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда очевидно представление

$$L_n(x) = L_0(x) + \left(L_1(x) - L_0(x)\right) + \left(L_2(x) - L_{\mathbf{1}}(x)\right) + \cdots +$$

$$+ \left(L_n(x) - L_{\boldsymbol{n-1}}(x)\right). \qquad (6)$$

Разность $L_i - L_{i-1}$ представляет собой многочлен степени $i - 1$, обращающийся в нуль в точках x_0, $x_1, \dots, x_{i-1}$, так как $L_i\left(x_j\right) = L_{i-1}\left(x_j\right) = y_j$ при $j = 0, 1, \dots, i - 1$. Следовательно, его можно представить в виде

$$L_i(x) - L_{i-1}(x) = A_{i-1}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1}) =$$

$$= A_{i-1} Q_i(x),$$

где A_{i-1} — постоянный коэффициент. Полагая в этом равенстве $x = x_i$, имеем

$$L_i(x_i) - L_{i-1}(x_i) = f(x_i) - L_{i-1}(x_i) = A_{i-1} Q_i(x_i).$$

С другой стороны, из (5) при $n = i - 1$, $x = x_i$ получаем

$$f(x_i) - L_{i-1}(x_i) = f(x_i;\ x_0; \dots;\ x_{i-1}) Q_i(x_i) =$$

$$= f(x_0; \dots;\ x_{i-1};\ x_i) Q_i(x_i)$$

(здесь применено следствие из леммы 1). Сравнивая последние два равенства, заключаем: $A_{i-1} = f(x_0; \dots;\ x_{i-1};\ x_i)$, поэтому

$$L_i(x) - L_{i-1}(x) = f(x_0; \dots;\ x_i) Q_i(x) =$$

$$= f(x_0; \dots;\ x_i)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1}).$$

Теперь подставим это последнее представление в (6):

$$L_n(x) = L_0(x) + f(x_0;\ x_1)Q_1(x) + f(x_0;\ x_1;\ x_2)Q_2(x) + \cdots +$$
$$+f(x_0; \dots;\ x_n)Q_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) +$$
$$+f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \cdots +$$
$$+f(x_0; \dots; x_n)(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Полученная форма записи формулы Лагранжа называется *интерполяционным многочленом Ньютона с разделенными разностями первого вида***:**

$$P_n^{(1)}(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ \cdots + f(x_0; \dots; x_n)(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) =$$
$$= f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f(x_0; \dots; x_i)(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1}). \qquad (7)$$

По-другому он называется многочленом для *интерполирования вперед*. Это объясняется тем, что участвующие в нем разделенные разности (если двигаться от начала к концу) образуют верхнюю диагональ таблицы 1, номера захватываемых ими узлов возрастают (т.е. движение идет вперед по таблице).

Для многочлена Ньютона как для интерполяционного полинома степени n справедлива теорема 2 лекции 2.1 об остаточном члене и вытекающие из нее оценки (6) лекции 2.1. При условии гладкости функции f на некотором отрезке $[a; b]$, содержащем все узлы интерполяции, оценочная функция погрешности $\overline{\Delta}\left(P_n^{(1)}(x)\right)$ многочлена (7) приближенно равна

$$\overline{\Delta}\left(P_n^{(1)}(x)\right) \approx |f(x; x_0; \dots; x_n)Q_{n+1}(x)|, \qquad (8)$$

где $f(x; x_0; \dots; x_n)$ — разделенная разность $(n+1)$-го порядка, вычисленная по таблице 1, в которую точка интерполяции x добавлена как узел (считается, что $f(x) \approx P_n^{(1)}(x)$). Согласно следствию из леммы 1 это можно делать в любом месте таблицы. Обычно x ставят до первого или после последнего узла, так как в этом случае достаточно рассчитать только одну строку. Формула (8) очень удобна для приближенной оценки погрешности, поскольку нет необходимости находить M_{n+1}.

Интерполяционным многочленом Ньютона с разделенными разностями второго вида называется

$$P_n^{(2)}(x) = f(x_n) + f(x_{n-1}; x_n)(x - x_n) + f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n)(x - x_n) \times$$

$$\times (x - x_{n-1}) + \cdots + f(x_0; \dots; x_n)(x - x_n) \cdots (x - x_1) =$$

$$= f(x_n) + \sum_{i=1}^{n} f(x_{n-i}; \dots; x_n)(x - x_n) \cdots (x - x_{n-i+1}). \qquad (9)$$

Выводится она аналогично (7). По-другому эта формула называется многочленом для *интерполирования назад*. Это объясняется тем, что его разделенные разности образуют нижнюю косую строку таблицы 1, номера участвующих в них узлов убывают (т.е. движение по таблице идет назад).

Для многочлена (9) также справедлива приближенная формула оценки погрешности

$$\overline{\Delta}\left(P_n^{(2)}(x)\right) \approx |f(x; x_0; \dots; x_n) Q_{n+1}(x)|.$$

При неполных таблицах разделенных разностей для интерполяции в начале таблицы обычно применяется многочлен (7), так как в этом случае он имеет меньшую погрешность по сравнению с многочленом второго вида. Последний применяется для интерполяции в конце таблицы, так как там его погрешность меньше. В середине таблицы можно применять любой из них, но лучше использовать специально приспособленные для этого многочлены Гаусса, Стирлинга или Бесселя (см. п. 2.3).

Рассмотрим подробно упомянутое в п.3.3 лекции 2.1 преимущество формул Ньютона перед многочленом Лагранжа. Пусть, например, по таблице с $n + 1$ узлом построен интерполяционный полином Ньютона первого вида $P_n^{(1)}$. Допустим, что в таблицу добавлен $(n + 2)$-й узел и надо построить полином по расширенной таблице $P_{n+1}^{(1)}$. Как уже отмечалось, этот узел можно вставить в любое место таблицы, поэтому сделаем его последним (по нумерации), $(n + 2)$-м, узлом. Тогда в таблицу разделенных разностей будет добавлена новая нижняя косая строка с разностью $(n + 1)$-го порядка в вершине. Все остальные клетки таблицы останутся неизменными (в таблице 2 новые клетки затемнены). Тогда интерполяционный многочлен Ньютона первого вида $P_{n+1}^{(1)}$ по расширенной таблице имеет вид

$$P_{n+1}^{(1)}(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ \cdots + f(x_0; \dots; x_n)(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) + f(x_0; \dots; x_{n+1}) \times$$
$$\times (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n) =$$
$$= P_n^{(1)}(x) + f(x_0; \dots; x_{n+1})(x - x_0) \cdots (x - x_n),$$

т.е. отличается от имеющегося полинома $P_n^{(1)}$ на слагаемое, содержащее разделенную разность $(n+1)$-го порядка.

Табл. 2. Добавление нового узла в таблицу разделённых разностей

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i; x_{i+1})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2})$	…	$f(x_i; \dots; x_{i+n})$	$f(x_0; \dots; x_n)$
x_0	$f(x_0)$					
		$f(x_0; x_1)$				
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0; x_1; x_2)$			
		$f(x_1; x_2)$		$\ddots$		
x_2	$f(x_2)$				$f(x_0; \dots; x_n)$	
						$f(x_0; \dots; x_{n+1})$
				$\vdots$	$f(x_1; \dots; x_{n+1})$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$			
				$\iddots$		
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$		$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n)$			
		$f(x_{n-1}; x_n)$				
x_n	$f(x_n)$		$f(x_{n-1}; x_n; x_{n+1})$			
		$f(x_n; x_{n+1})$				
x_{n+1}	$f(x_{n+1})$					

Аналогично, для построения многочлена второго типа $P_{n+1}^{(2)}$ надо добавить новый узел в начало таблицы как нулевой и рассчитать новую верхнюю строку с разностью $(n+1)$-го порядка в вершине, нумерация в остальной части таблицы увеличится на единицу, но сами значения разностей не изменятся. Тогда $P_{n+1}^{(2)}$ будет равен сумме $P_n^{(2)}$ и нового слагаемого с разностью $(n+1)$-го порядка.

Пример. Построим по таблице 3 оба интерполяционных полинома Ньютона.

Разделенные разности рассчитаны в таблице 4. Построим интерполяционный полином Ньютона первого типа:

$$P_3^{(1)}(x) = 12 - 6(x+1)(x-0) + 5(x+1)(x-0)(x-1) = 5x^3 - 6x^2 - 11x + 12.$$

Табл. 3. Функция примера на с. 8

x_i	-1	0	1	3
y_i	12	12	0	60

Табл. 4. Разделенные разности к примеру на с. 8

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$
-1	12			
		0		
0	12		-6	
		-12		5
1	0		14	
		30		
3	60			

Многочлен построен по верхней диагонали таблицы разделенных разностей.

Интерполяционный полином Ньютона второго типа получается такой:

$$P_3^{(2)}(x) = 60 + 30(x-3) + 14(x-3)(x-1) + 5(x-3)(x-1)(x-0) =$$
$$= 5x^3 - 6x^2 - 11x + 12.$$

Естественно, обе формулы дают один и тот же многочлен, что и должно быть по теореме единственности интерполяционного многочлена степени n.

Полином $P_3^{(2)}$ можно получить по-другому. Построим полином второго типа $P_2^{(2)}$ по таблице разделённых разностей от узла x_1 до x_3:

$$P_2^{(2)}(x) = 60 + 30(x-3) + 14(x-3)(x-1) = 14x^2 - 26x + 12.$$

А теперь считаем узел x_0 добавленным к таблице и находим $P_3^{(2)}$, как было описано выше, т.е. прибавляем к $P_2^{(2)}$ слагаемое, соответствующее новой разделённой разности $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$:

$$P_3^{(2)}(x) = P_2^{(2)}(x) + 5(x-3)(x-1)(x-0) = 5x^3 - 6x^2 - 11x + 12.$$

Опять получили тот же многочлен.

2. Интерполирование с использованием конечных разностей

2.1. Конечные разности и их свойства

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей, в которой узлы идут в возрастающем порядке с постоянным шагом $h = x_i - x_{i-1}$, т.е. $x_i = x_0 + +ih$, $i = 0,\ 1, \dots ,\ n$. Такие таблицы будем называть *равномерными***.** Определим рекуррентно для f *конечные разности.*

Определение. *Конечной разностью первого порядка функции* f в *i*-м узле называется величина

$$\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) = y_{i+1} - y_i, \tag{10}$$

индекс i принимает значения от 0 до $n - 1$. Таким образом, имеются n конечных разностей первого порядка. Видно, что они представляют собой приращения функции при приращении h аргумента. Разности порядков выше первого определяются рекуррентно через предыдущие.

Определение. *Конечной разностью k-го порядка функции* f в *i*-м узле называется

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \tag{11}$$

$i = 0, \dots , n - k$; $k = 2, \dots , n$. Например, при $k = 2$ из (10), (11) получаем формулу разности второго порядка:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i) = \\ = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i. \end{aligned} \tag{12}$$

При $k = 3$ из (11), (12) выводим разности третьего порядка:

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1} -$$
$$-(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i.$$

Аналогично получаются разности четвертого порядка:

$$\Delta^4 y_i = \Delta^3 y_{i+1} - \Delta^3 y_i = y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i.$$

Можно заметить, что коэффициенты в этих формулах представляют собой числа сочетаний, или биномиальные коэффициенты. Общее утверждение об этом формулируется следующей леммой.

Лемма 2. Конечная разность *k*-го порядка в узле x_i вычисляется по формуле

$$\Delta^k y_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j \, y_{i+k-j}, \qquad (13)$$

где

$$C_k^j = \frac{k!}{j!\,(k-j)!} -$$

биномиальный коэффициент; $i = 0, \dots, n-k$; $k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Применим метод математической индукции по k. База индукции ($k = 1$) очевидна. Предположим, что формула (13) верна для всех разностей k-го порядка. Для доказательства индукционного шага вычислим конечную разность $(k+1)$-го порядка, используя (11) и предположение (12):

$$\Delta^{k+1} y_i = \Delta^k y_{i+1} - \Delta^k y_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j \, y_{i+1+k-j} - \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j \, y_{i+k-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j \, y_{i+k+1-j} - \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j \, y_{i+k+1-(j+1)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j \, y_{i+k+1-j} + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j C_k^{j-1} \, y_{i+k+1-j}.$$

Если принять $C_k^{k+1} = C_k^{-1} = 0$, то обе суммы в последнем выражении можно объединить в одну:

$$\Delta^{k+1} y_i = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \left(C_k^j + C_k^{j-1} \right) y_{i+k+1-j}.$$

Теперь воспользуемся известной из комбинаторики формулой Паскаля $C_k^j + C_k^{j-1} = C_{k+1}^j$:

$$\Delta^{k+1} y_i = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \, C_{k+1}^j y_{i+k+1-j}.$$

Приходим к выводу, что конечная разность $(k+1)$-го порядка также вычисляется по формуле (13). Индукционный шаг доказан. ■

Лемма 2 применяется только для получения теоретических результатов, поскольку вычислять конечные разности гораздо удобнее по формулам (10), (11), занося их в таблицу (см. табл. 5). Правило вычисления очень простое, оно показано на рис. 3. Для заполнения столбца разностей k-го порядка вычитаем соседние клетки в предыдущем столбце (показано стрелкой), результат пишем в клетку разности (тёмная клетка). Для следующей разности спускаемся на две строки и повторяем те же операции.

Табл. 5. Таблица конечных разностей

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\cdots$	$\Delta^n y_i$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\ddots$	
x_2	y_2				$\Delta^n y_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
				$\iddots$	
x_{n-1}	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-1}$		
		Δy_{n-1}			
x_n	y_n				

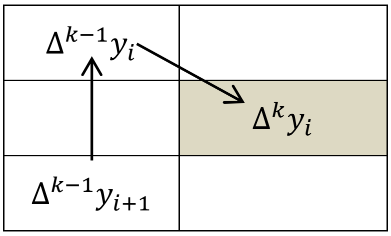

Рис. 3. Вычисление конечной разности k-го порядка $\Delta^k y_i$

Лемма 3. Разделенная разность k-го порядка в узлах x_i, $x_{i+1}, \ldots$, x_{i+k} выражается через конечную разность k-го порядка в узле x_i формулой

$$f(x_i; \ldots; x_{i+k}) = \frac{\Delta^k y_i}{k!\, h^k}, \tag{14}$$

$i = 0, \ldots, n-k$; $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Применяем индукцию по k. При $k = 1$ из (14) с учетом (10) получаем

$$f(x_i\,;\,x_{i+1}) = \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i},$$

что совпадает с определением разделенной разности первого порядка (1). База индукции доказана. Предположим теперь, что формула (14) справедлива для всех разностей *k*-го порядка. Вычислим разделенную разность $(k+1)$-го порядка в узлах $x_i, \dots, x_{i+k+1}$:

$$f(x_i; \dots; x_{i+k+1}) = \frac{f(x_{i+1}; \dots; x_{i+k+1}) - f(x_i; \dots; x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i}.$$

Стоящие в числителе разности *k*-го порядка находятся, согласно индукционному предположению, по формуле (14). Также учтем, что $x_{i+k+1} - x_i = (k+1)h$. Имеем

$$f(x_i; \dots; x_{i+k+1}) = \frac{\dfrac{\Delta^k y_{i+1}}{k!\,h^k} - \dfrac{\Delta^k y_i}{k!\,h^k}}{(k+1)h} = \frac{\Delta^k y_{i+1} - \Delta^k y_i}{(k+1)!\,h^{k+1}} = \frac{\Delta^{k+1} y_i}{(k+1)!\,h^{k+1}}$$

(здесь применено рекуррентное определение конечной разности (11)). Получили формулу вида (14), что и доказывает индукционный шаг. ■

2.2. Интерполяционные многочлены Ньютона с конечными разностями

Заменим в интерполяционном многочлене Ньютона (7) разделенные разности по формуле (14):

$$P_n^{(1)}(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f_0}{1!\,h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ \dots + \frac{\Delta^n f_i}{n!\,h^n}(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) =$$
$$= f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i f_0}{i!\,h^i}(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1}). \qquad (15)$$

Полученное выражение называется *интерполяционным многочленом Ньютона с конечными разностями первого вида* (или *для интерполяции вперёд*). Входящие в неё разности образуют верхнюю строку таблицы 5.

Для получения другой формы записи многочлена (15) сделаем замену

$$q = \frac{x - x_0}{h},$$

тогда $x = x_0 + qh$,

$$x - x_0 = qh,$$
$$x - x_1 = x_0 + qh - x_1 = (q - 1)h,$$
$$\vdots$$

$$x - x_{i-1} = x_0 + qh - x_{i-1} = (q - i + 1)h,$$

и слагаемые в (15) преобразуются к виду

$$\frac{\Delta y_0}{1!\,h}(x - x_0) = \frac{\Delta y_0}{1!} q;$$

$$\frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) = \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot \frac{x - x_0}{h} \cdot \frac{x - x_1}{h} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1); \ldots ;$$

$$\frac{\Delta^i y_0}{i!\,h^i}(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1}) = \frac{\Delta^i y_0}{i!} \cdot \frac{x - x_0}{h} \cdot \frac{x - x_1}{h} \cdot \ldots \cdot \frac{x - x_{i-1}}{h} =$$

$$= \frac{\Delta^i y_0}{i!} q(q-1) \cdots (q - i + 1), \ldots ;$$

$$\frac{\Delta^n y_i}{n!\,h^n}(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) = \frac{\Delta^n y_0}{n!} \cdot \frac{x - x_0}{h} \cdot \frac{x - x_1}{h} \cdot \ldots \cdot \frac{x - x_{n-1}}{h} =$$

$$= \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q-1) \cdots (q - n + 1).$$

Подставляя их в (15), имеем

$$P_n^{(1)}(x) = P_n^{(1)}(x_0 + qh) = f(x_0) + \frac{\Delta y_0}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + \cdots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q-1) \cdots (q - n + 1) =$$

$$= f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i y_0}{i!} q(q-1) \cdots (q - i + 1). \qquad (16)$$

Многочлен Ньютона в виде (16) более удобен для применения в тех случаях, когда нужно вычислить интерполяцию в конкретной точке x и не требуется выводить общую формулу.

Аналогично с помощью (14) из (9) *выводится интерполяционный многочлен Ньютона с конечными разностями второго вида* (или для *интерполяции назад*):

$$P_n^{(2)}(x) = f(x_n) + \frac{\Delta f_{n-1}}{1!\,h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

$$+ \cdots + \frac{\Delta^n f_i}{n!\,h^n}(x - x_n) \cdots (x - x_1) =$$

$$= f(x_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i f_{n-i}}{i!\,h^i}(x - x_n) \cdots (x - x_1).$$

Входящие в него разности находятся в нижней косой строке таблицы 5. Заменой

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

с помощью элементарных преобразований можно получить другую форму записи $P_n^{(2)}$:

$$P_n^{(2)}(x) = P_n^{(2)}(x_n + qh) = f(x_n) + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} q(q+1) + \cdots +$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q+1) \cdots (q+n-1) =$$
$$= f(x_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!} q(q+1) \cdots (q+i-1). \qquad (17)$$

Как и (16), формула (17) применяется для расчета значения в данной конкретной точке x.

Для интерполяционных многочленов с конечными разностями остаются в силе те же практические правила применения, что и для полиномов с разделенными разностями: первый из них лучше подходит для интерполяции в начале, второй — в конце таблиц при неполных таблицах конечных разностей.

Оценка погрешности этих полиномов производится по общим формулам (6) лекции 2.1. Для их представлений (16), (17) оценочные функции имеют вид, как нетрудно показать,

$$\overline{\Delta}\left(P_n^{(1)}(x_0 + qh)\right) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} |q(q-1) \cdots (q-n)|,$$
$$\overline{\Delta}\left(P_n^{(2)}(x_n + qh)\right) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} |q(q+1) \cdots (q+n)|$$

соответственно. Из этих оценок следует ожидать, что уменьшение шага таблицы (и соответственно, увеличение n) приведет к значительному снижению погрешности. Это в определенной степени справедливо для точности интерполяции в данной точке. Но далее будет показано, что глобальная оценка погрешности (по всей таблице) не обязательно стремится к нулю при уменьшении h.

2.3. Интерполяционные многочлены Гаусса, Стирлинга, Бесселя

В этом пункте будут выведены формулы интерполирования, применяющиеся в серединах таблиц. Пусть функция f задана своими значениями в точках (узлах) a, $a \pm h$, $a \pm 2h, \dots$. Таблица функции, таким образом, является равномерной, h — ее шаг. Узлы располагаются слева и справа от центральной точки a. Пусть требуется найти приближенное значение функции f в точке x между a и $a + h$: $a < x < a + h$. Таким образом, поставлена интерполяции табличной функции в середине таблицы. Для ее решения построим с помощью формулы Ньютона (7) интерполяционный многочлен степени n, имеющий как можно меньшую погрешность. Для этого нам понадобится $n+1$ узел таблицы функции f. Выберем такую нумерацию этих узлов, при которой оценка погрешности будет как можно меньше. Понятно, что уменьшения оценки (6) лекции 2.1 можно достигнуть только за счет величины

$$|Q_{n+1}(x)| = |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|. \tag{18}$$

Поскольку $a < x < a+h$, в качестве x_0, x_1 целесообразно взять ближайшие к x узлы, т.е. a и $a+h$ соответственно. Тогда первые две скобки в (17) будут максимально близки к нулю. Чтобы следующие две разности были поближе к нулю, выбираем в качестве x_2, x_3 очередные ближайшие к x узлы $a-h$, $a+2h$ и так далее. В итоге получаем следующую нумерацию: $x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $x_2 = a-h$, $x_3 = a+2h$, $x_4 = a-2h, \dots,$ $x_n = a + (-1)^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]h$, — всего $n+1$ узел ($[k]$ — целая часть числа). Конечно, для получения наименьшей величины (18) желательно бы иметь более точную информацию о расположении точки интерполяции x. Если она ближе к $a+h$, чем к a, то (18) будет меньше, если взять узлы в порядке $x_0 = a+h$, $x_1 = a$, $x_2 = a+2h$, $x_3 = a-2h, \dots$. Так как об x известно только то, что она находится между a и $a+h$, для определенности остановимся на построенной выше нумерации. Значения функции f в узлах обозначим $y_i = f(a+ih)$, $i = 0$, ± 1, $\pm 2, \dots,$ $(-1)^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Итак, получаем функцию для интерполяции, заданную таблицей 6 (в этой таблице отражен случай нечетного n, если n четное, то первая и последняя строки в ней меняются местами).

Теперь выразим входящие в интерполяционный многочлен Ньютона (7) разделенные разности через конечные, посчитанные по таблице 6, с помощью (14):

$$f(x_0) = f(a) = y_0;$$

$$f(x_0;\ x_1) = f(a; a+h) = \frac{\Delta y_0}{1!\,h};$$

$$f(x_0;\ x_1;\ x_2) = f(a; a+h; a-h) = f(a-h; a; a+h) = \frac{\Delta^2 f(a-h)}{2!\,h^2} =$$

$$= \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!\,h^2};$$

$$f(x_0;\ x_1; \dots;\ x_k) =$$

$$= f\left(a; a+h; a-h; \dots; a+(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]h;\ a+(-1)^{k+1}\left[\frac{k+1}{2}\right]h\right) =$$

$$= \begin{cases} f(a-sh; \dots; a; \dots;\ a+sh), k=2s; \\ f(a-sh; \dots; a; \dots;\ a+(s+1)h), k=2s+1. \end{cases}$$

Табл. 6. Нумерация узлов для многочлена Гаусса

i	x_i	y_i
$n-1$	$a+(-1)^n\left[\frac{n}{2}\right]h$	$y_{(-1)^n\left[\frac{n}{2}\right]}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
8	$a-4h$	y_{-4}
6	$a-3h$	y_{-3}
4	$a-2h$	y_{-2}
2	$a-h$	y_{-1}
0	a	y_0
1	$a+h$	y_1
3	$a+2h$	y_2
5	$a+3h$	y_3
7	$a+4h$	y_4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$a+(-1)^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]h$	$y_{(-1)^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]}$

Отсюда выводится общая формула:

$$f(x_0;\ x_1; \dots ;\ x_k) = \frac{\Delta^k f\left(a-\left[\frac{k}{2}\right]h\right)}{k!\,h^k} = \frac{\Delta^k y_{-\left[\frac{k}{2}\right]}}{k!\,h^k},$$

$k = 1, 2, \dots, n$. Подставив эти выражения для разностей в (7) с заменой переменной

$$q = \frac{x-x_0}{h} = \frac{x-a}{h} \Rightarrow x = a+qh,$$

получаем

$$P_n(a+qh) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}q + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}q(q-1) +$$

$$+\frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!}q(q-1)(q+1) + \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!}q(q-1)(q+1)(q-2) +$$

$$+\dots+\frac{\Delta^n y_{-\left[\frac{n}{2}\right]}}{n!}q(q-1)(q+1)\cdots\left(q+(-1)^{n-1}\left[\frac{n}{2}\right]\right). \quad (19)$$

Этот многочлен называется *первым интерполяционным многочленом Гаусса* и применяется для приближения функций в серединах таблиц. Фигурирующие в формуле (19) конечные разности отмечены в таблице 7 зеленым цветом.

Табл. 7. Конечные разности многочлена Гаусса

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$	…
…	…	…	…	…	…	…	…	
x_{-3}	y_{-3}							
		Δy_{-3}						
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$					
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$				
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$			
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$		
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$	…
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$				
x_2	y_2		$\Delta^2 1$					
		Δy_2				…	…	
x_3	y_3			…	…			
		…	…					
…	…							

Остаточный член (3) в лекции 2.1 для формулы Гаусса приобретает вид

$$R_n(a+qh)=f(a+qh)-P_n(a+qh)=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}h^{n+1}q(q-1)(q+1)\cdots\left(q+(-1)^n\left[\frac{n+1}{2}\right]\right),$$

где ζ — некоторая точка между $a+(-1)^n\left[\frac{n}{2}\right]h$ и $a+(-1)^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]h$ (какая из них находится слева, зависит от четности n). Отсюда следует формула оценочной функции погрешности многочлена Гаусса:

$$\overline{\Delta}\big(P_n(a+qh)\big)=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}h^{n+1}\left|q(q-1)(q+1)\cdots\left(q+(-1)^n\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)\right|.$$

Подключая узлы в другом порядке (синий цвет клеток в таблице 7), получим *вторую интерполяционную формулу Гаусса*:

$$P_n(a+qh)=y_0+\frac{\Delta y_{-1}}{1!}q+\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}q(q+1)+$$
$$+\frac{\Delta^3 y_{-2}}{3!}q(q+1)(q-1)+\frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!}q(q+1)(q-1)(q+2)+$$
$$+\cdots+\frac{\Delta^n y_{-\left[\frac{n}{2}\right]}}{n!}q(q+1)(q-1)(q+2)\cdots\left(q+(-1)^n\left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

Первая формула применяется при $x>a$, вторая – при $x<a$.

Теперь выведем формулу Стирлинга. Пусть точка интерполирования x находится в интервале $(a;a+h)$ ближе к a, чем к середине интервала: $a<x<a+\frac{h}{4}$. Из соображений уменьшения верхней оценки погрешности (см. рассуждения на с. 16) число узлов $n+1$ выбираем нечётным и нумеруем их в следующем порядке: $x_0=a$, $x_1=a+h$, $x_2=a-h$, $x_3=a+2h,\ x_4=a-2h,\dots,\ x_{n-1}=a+\frac{n}{2}h,\ x_n=a-\frac{n}{2}h$. Интерполируемая функция, таким образом, задаётся таблицей 6 с чётным n. Узлы в ней располагаются симметрично относительно центрального $x_0=a$. Запишем для этой таблицы формулу Гаусса (19):

$$P_n(a+qh)=y_0+\frac{\Delta f_0}{1!}q+\frac{\Delta^2 f_{-1}}{2!}q(q-1)+$$
$$+\frac{\Delta^3 f_{-1}}{3!}q(q-1)(q+1)+\frac{\Delta^4 f_{-2}}{4!}q(q-1)(q+1)(q-2)+$$
$$+\cdots+\frac{\Delta^n f_{-\frac{n}{2}}}{n!}q(q-1)(q+1)(q-2)\cdots\left(q-\frac{n}{2}\right). \qquad (20)$$

Преобразуем (20) к симметричному виду соответственно симметрии узлов. Для этого все слагаемые в (20), кроме y_0, разобьём на пары последовательно идущих (получится $\frac{n}{2}$ пар). Выпишем сумму k-й пары:

$$\frac{\Delta^{2k-1}f_{-k+1}}{(2k-1)!}q(q-1)(q+1)\cdots(q-k+1)(q+k-1)+$$

$$+\frac{\Delta^{2k} f_{-k}}{(2k)!} q(q-1)(q+1)\cdots(q+k-1)(q-k) =$$

$$= \frac{q(q-1)(q+1)\cdots(q-k+1)(q+k-1)}{(2k-1)!} \times$$

$$\times \left(\Delta^{2k-1} f_{-k+1} + \frac{\Delta^{2k} f_{-k}}{2k}(q-k)\right) =$$

$$= \frac{q(q-1)(q+1)\cdots(q-k+1)(q+k-1)}{(2k-1)!} \times$$

$$\times \left(\Delta^{2k-1} f_{-k+1} + \left(\frac{q}{2k} - \frac{1}{2}\right)\Delta^{2k} f_{-k}\right) =$$

$$= \frac{q(q-1)(q+1)\cdots(q-k+1)(q+k-1)}{(2k-1)!} \times$$

$$\times \left(\Delta^{2k-1} f_{-k+1} - \frac{1}{2}\Delta^{2k} f_{-k} + \frac{q}{2k}\Delta^{2k} f_{-k}\right), \tag{21}$$

$k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$. Далее выполняем элементарные преобразования:

$$\Delta^{2k-1} f_{-k+1} - \frac{1}{2}\Delta^{2k} f_{-k} = \frac{\Delta^{2k-1} f_{-k+1}}{2} + \frac{\Delta^{2k-1} f_{-k+1} - \Delta^{2k} f_{-k}}{2}. \tag{22}$$

Из рекуррентного определения конечной разности $\Delta^{2k} f_{-k} = \Delta^{2k-1} f_{-k+1} - -\Delta^{2k-1} f_{-k}$ следует $\Delta^{2k-1} f_{-k+1} - \Delta^{2k} f_{-k} = \Delta^{2k-1} f_{-k}$. Подставляя в (22), получаем

$$\Delta^{2k-1} f_{-k+1} - \frac{1}{2}\Delta^{2k} f_{-k} = \frac{\Delta^{2k-1} f_{-k+1} + \Delta^{2k-1} f_{-k}}{2},$$

откуда следует, что сумма (21) равна

$$\frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)\cdots(q^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!} \times$$

$$\times \left(\frac{\Delta^{2k-1} f_{-k+1} + \Delta^{2k-1} f_{-k}}{2} + \frac{q}{2k}\Delta^{2k} f_{-k}\right) =$$

$$= \frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)\cdots(q^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!} \cdot \frac{\Delta^{2k-1} f_{-k+1} + \Delta^{2k-1} f_{-k}}{2} +$$

$$+ \frac{q^2(q^2-1)(q^2-2^2)\cdots(q^2-(k-1)^2)}{(2k)!}\Delta^{2k} f_{-k},$$

$k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$. Подставив эти выражения для сумм двух последовательных слагаемых в формулу Гаусса (20), получим *интерполяционный многочлен Стирлинга*

$$P_n(a+qh) = y_0 + \frac{q}{1!} \cdot \frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} + \frac{q^2}{2!}\Delta^2 f_{-1} +$$

$$+ \frac{q(q^2-1)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 f_{-1} + \Delta^3 f_{-2}}{2} + \frac{q^2(q^2-1)}{4!}\Delta^4 f_{-2} + \cdots +$$

$$
+\frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)\cdots\left(q^2-\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\right)}{(n-1)!}\cdot\frac{\Delta^{n-1}f_{-\frac{n-2}{2}}+\Delta^{n-1}f_{-\frac{n}{2}}}{2}+
$$

$$
+\frac{q^2(q^2-1)(q^2-2^2)\cdots\left(q^2-\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\right)}{n!}\Delta^n f_{-\frac{n}{2}}=y_0+
$$

$$
+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)\cdots(q^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!}\cdot\frac{\Delta^{2k-1}f_{-k+1}+\Delta^{2k-1}f_{-k}}{2}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{q^2(q^2-1)(q^2-2^2)\cdots(q^{\,2}-(k-1)^2)}{(2k)!}\Delta^{2k}f_{-k}\right).
$$

Табл. 8. Конечные разности многочлена Стирлинга

<table>
<tr><th>x_i</th><th>y_i</th><th>Δy_i</th><th>$\Delta^2 y_i$</th><th>$\Delta^3 y_i$</th><th>$\Delta^4 y_i$</th><th>$\Delta^5 y_i$</th><th>$\Delta^6 y_i$</th><th>…</th></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td rowspan="2">…</td><td rowspan="3">…</td><td rowspan="4">…</td><td rowspan="5">…</td><td rowspan="6">…</td><td rowspan="7">…</td><td rowspan="16">…</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_{-3}</td><td rowspan="2">y_{-3}</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δy_{-3}</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_{-2}</td><td rowspan="2">y_{-2}</td><td rowspan="2">$\Delta^2 y_{-3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δy_{-2}</td><td rowspan="2">$\Delta^3 y_{-3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_{-1}</td><td rowspan="2">y_{-1}</td><td rowspan="2">$\Delta^2 y_{-2}$</td><td rowspan="2">$\Delta^4 y_{-3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δy_{-1}</td><td rowspan="2">$\Delta^3 y_{-2}$</td><td rowspan="2">$\Delta^5 y_{-3}$</td></tr>
<tr><td>x_0</td><td>y_0</td><td>$\Delta^2 y_{-1}$</td><td>$\Delta^4 y_{-2}$</td><td>$\Delta^6 y_{-3}$</td></tr>
<tr><td>x_0</td><td>y_0</td><td rowspan="2">Δy_0</td><td>$\Delta^2 y_{-1}$</td><td rowspan="2">$\Delta^3 y_{-1}$</td><td>$\Delta^4 y_{-2}$</td><td rowspan="2">$\Delta^5 y_{-2}$</td><td>$\Delta^6 y_{-3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_1</td><td rowspan="2">y_1</td><td rowspan="2">$\Delta^2 y_0$</td><td rowspan="2">$\Delta^4 y_{-1}$</td><td rowspan="7">…</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δy_1</td><td rowspan="2">$\Delta^3 y_0$</td><td rowspan="6">…</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_2</td><td rowspan="2">y_2</td><td rowspan="2">$\Delta^2 1$</td><td rowspan="5">…</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δy_2</td><td rowspan="4">…</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_3</td><td rowspan="2">y_3</td><td rowspan="3">…</td></tr>
<tr><td rowspan="2">…</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
</table>

Напомним, что эта формула предназначена для интерполирования в точке x при $a < x < a + \frac{h}{4}$. Входящие в неё конечные разности показаны в таблице 8.

Остаточный член формулы Стирлинга равен

$$R_n(a+qh) = f(a+qh) - P_n(a+qh) =$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} h^{n+1} q(q^2-1)(q^2-2^2)\cdots\left(q^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2\right),$$

где ζ — некоторая точка из интервала $\left(a - \frac{n}{2}h;\ a + \frac{n}{2}h\right)$. Соответственно, оценочная функция погрешности в точке x имеет вид

$$\overline{\Delta}\big(P_n(a+qh)\big) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \left| q(q^2-1)(q^2-2^2)\cdots\left(q^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2\right)\right|.$$

Для вывода последней формулы (Бесселя) предположим, что точка интерполирования x расположена близко к середине интервала $(a; a+h)$ или совпадает с ней. При помощи тех же соображений, что применялись при выводе двух предыдущих формул, приходим к выводу, что в данном случае целесообразно взять чётное число узлов $n+1$ и расположить их в следующем порядке: $x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $x_2 = a-h$, $x_3 = a+2h$, $x_4 = a-2h, \dots, x_{n-1} = a - \frac{n-1}{2}h$, $x_n = a + \frac{n+1}{2}h$. Получаем таблицу 6 с нечётным n. Узлы в ней расположены симметрично относительно $x_0 = a$ за исключением последнего, $(n+1)$-го, не имеющего симметричной пары. Запишем для такой таблицы формулу Гаусса (19):

$$P_n(a+qh) = y_0 + \frac{\Delta f_0}{1!} q + \frac{\Delta^2 f_{-1}}{2!} q(q-1) +$$
$$+ \frac{\Delta^3 f_{-1}}{3!} q(q-1)(q+1) + \frac{\Delta^4 f_{-2}}{4!} q(q-1)(q+1)(q-2) +$$
$$+ \cdots + \frac{\Delta^n f_{-\frac{n-1}{2}}}{n!} q(q-1)(q+1)(q-2)\cdots\left(q + \frac{n-1}{2}\right). \qquad (23)$$

Преобразуем (23) к симметричному виду, для чего все слагаемые разобьём на пары последовательно идущих ($\frac{n+1}{2}$ пар). Выпишем сумму k-й пары и проведём элементарные преобразования:

$$\frac{\Delta^{2k-2} f_{-k+1}}{(2k-2)!} q(q-1)(q+1)\cdots(q+k-2)(q-k+1) +$$
$$+ \frac{\Delta^{2k-1} f_{-k+1}}{(2k-1)!} q(q-1)(q+1)\cdots(q+k-2)(q-k+1)(q+k-1) =$$

$$= \frac{q(q-1)(q+1)\cdots(q+k-2)(q-k+1)}{(2k-2)!}\times$$

$$\times\left(\Delta^{2k-2}f_{-k+1}+\frac{q+k-1}{2k-1}\Delta^{2k-1}f_{-k+1}\right)=$$

$$= \frac{q(q-1)(q+1)\cdots(q+k-2)(q-k+1)}{(2k-2)!}\times$$

$$\times\left(\frac{\Delta^{2k-2}f_{-k+1}}{2}+\frac{\Delta^{2k-2}f_{-k+1}}{2}+\frac{q+k-1}{2k-1}\Delta^{2k-1}f_{-k+1}\right),$$

$k=1,\ 2,\dots,\ \frac{n+1}{2}$. Далее из определения разности $\Delta^{2k-1}f_{-k+1}=\Delta^{2k-2}f_{-k+2}-{}-\Delta^{2k-2}f_{-k+1}$ выражаем $\Delta^{2k-2}f_{-k+1}=\Delta^{2k-2}f_{-k+2}-\Delta^{2k-1}f_{-k+1}$ и подставляем во вторую дробь в скобках. Получаем выражение для суммы последовательных слагаемых:

$$\frac{q(q-1)(q+1)\cdots(q+k-2)(q-k+1)}{(2k-2)!}\times$$

$$\times\left(\frac{\Delta^{2k-2}f_{-k+1}+\Delta^{2k-2}f_{-k+2}}{2}-\frac{\Delta^{2k-1}f_{-k+1}}{2}+\frac{q+k-1}{2k-1}\Delta^{2k-1}f_{-k+1}\right)=$$

$$= \frac{q(q-1)(q+1)\cdots(q+k-2)(q-k+1)}{(2k-2)!}\times$$

$$\times\left(\frac{\Delta^{2k-2}f_{-k+1}+\Delta^{2k-2}f_{-k+2}}{2}+\frac{q-\frac{1}{2}}{2k-1}\Delta^{2k-1}f_{-k+1}\right)=$$

$$= \frac{q(q-1)(q+1)\cdots(q+k-2)(q-k+1)}{(2k-2)!}\cdot\frac{\Delta^{2k-2}f_{-k+1}+\Delta^{2k-2}f_{-k+2}}{2}+$$

$$+\frac{\left(q-\frac{1}{2}\right)q(q-1)(q+1)\cdots(q+k-2)(q-k+1)}{(2k-1)!}\Delta^{2k-1}\,f_{-k+1},$$

$k=1,\ \ 2,\dots,\ \frac{n+1}{2}$. Подставляем его в (23) и приходим к *интерполяционному многочлену Бесселя*

$$P_n(a+qh)=\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{q-\frac{1}{2}}{1!}\Delta f_0+\frac{q(q-1)}{2!}\cdot\frac{\Delta^2 f_{-1}+\Delta^2 f_0}{2}+$$

$$+\frac{\left(q-\frac{1}{2}\right)q(q-1)}{3!}\Delta^3 f_{-1}+\cdots+$$

$$+\frac{q(\,q-1)(q+1)\cdots\left(q+\frac{n-3}{2}\right)\left(q-\frac{n-1}{2}\right)}{(n-1)!}\cdot\frac{\Delta^{n-1}f_{-\frac{n-1}{2}}+\Delta^{n-1}f_{-\frac{n-3}{2}}}{2}+$$

$$+\frac{\left(q-\frac{1}{2}\right)q(q-1)(q+1)\cdots\left(q+\frac{n-3}{2}\right)\left(q-\frac{n-1}{2}\right)}{n!}\Delta^n f_{-\frac{n-1}{2}}=$$

$$= \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{q(q-1)(q+1)\cdots(q-k+1)}{(2k-2)!} \cdot \frac{\Delta^{2k-2} f_{-k+1} + \Delta^{2k-2} f_{-k+2}}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(q - \frac{1}{2}\right) q(q-1)(q+1)\cdots(q-k+1)}{(2k-1)!} \Delta^{2k-1} f_{-k+1} \right). \qquad 24$$

В неё входят полусуммы конечных разностей чётных порядков и разности нечётных порядков.

Остаточный член формулы Бесселя имеет вид:

$$R_n(a+qh) = f(a+qh) - P_n(a+qh) =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} h^{n+1} q(q-1)(q+1)\cdots\left(q + \frac{n-1}{2}\right)\left(q - \frac{n+1}{2}\right),$$

где $\zeta \in \left(a - \frac{n-1}{2}h;\ a + \frac{n+1}{2}h\right)$. Оценочная функция погрешности:

$$\overline{\Delta}\big(P_n(a+qh)\big) =$$

$$= \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \left| q(q-1)(q+1)\cdots\left(q + \frac{n-1}{2}\right)\left(q - \frac{n+1}{2}\right) \right|.$$

Особо отметим частный случай формулы Бесселя при $q = \frac{1}{2}$ (точка интерполирования x совпадает с серединой интервала $(a; a+h)$). Подставив $q = \frac{1}{2}$ в (24), после несложных преобразований получим

$$P_n(a+qh) = \frac{y_0 + y_1}{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta^2 f_{-1} + \Delta^2 f_0}{2} +$$

$$+ \frac{3}{128} \cdot \frac{\Delta^4 f_{-2} + \Delta^4 f_{-1}}{2} - \frac{5}{1024} \cdot \frac{\Delta^6 f_{-3} + \Delta^6 f_{-2}}{2} + \cdots +$$

$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\big(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (n-2)\big)^2}{2^{n-1}(n-1)!} \cdot \frac{\Delta^{n-1} f_{-\frac{n-1}{2}} + \Delta^{n-1} f_{-\frac{n-3}{2}}}{2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \left((-1)^{k-1} \frac{\big(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-3)\big)^2}{2^{2k-2}(2k-2)!} \cdot \frac{\Delta^{2k-2} f_{-k+1} + \Delta^{2k-2} f_{-k+2}}{2} \right).$$

Формулы остаточного члена и оценочной функции предлагается вывести самостоятельно.

Пример. Для функции $f(x) = x^2 e^{-x}$, по которой составлена табличная функция (рис. 3, первая строка - аргументы, вторая строка – значения функции), построена таблица конечных разностей, и для точки $a = 1{,}7$ вычислены значения интерполяционных полиномов третьей степени по первой и второй формулам Гаусса (расчёты проведены в Mathcad).

$$Z^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.8 & 1.2 & 1.6 & 2 & 2.4 & 2.8 & 3.2 & 3.6 \\ 0 & 0.107 & 0.288 & 0.434 & 0.517 & 0.541 & 0.523 & 0.477 & 0.417 & 0.354 \end{bmatrix}$$

Рис. 3. Функция $f(x) = x^2 e^{-x}$ примера на с. 24

При этом для первой формулы Гаусса принято $x_0 = 1{,}6$, для второй формулы $x_0 = 2{,}0$. Соответствующие значения q равны $0{,}25$ и $-0{,}75$. Значения полиномов равны $0{,}52796$ и $0{,}52935$, а значение функции $0{,}52795$. Видим, что по первой формуле приближение лучше, так как точка a находится в этом случае ближе к точке x_0. В этом и состоит идея выбора и построения формул для середины таблицы.