ЛЕКЦИЯ 15.2 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

В этой части лекции мы кратко рассмотрим аналитические методы, позволяющие находить приближённое решение аналитически, т.е. в виде функции, заданной формулой.

1. Метод Галёркина

Начнём с метода Галёркина. Имеем линейную двухточечную краевую задачу второго порядка. Надо найти частное решение линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),$$

определённое на отрезке $[u; v]$ и удовлетворяющее на его концах линейным краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_0 y(u) + \alpha_1 y'(u) = a, \\ \beta_0 y(v) + \beta_1 y'(v) = b. \end{cases}$$

Для краткости будем применять операторную запись:

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y,$$

$$\Lambda_u(y) = \alpha_0 y(u) + \alpha_1 y'(u),$$

$$\Lambda_v(y) = \beta_0 y(v) + \beta_1 y'(v).$$

Здесь L, Λ_u, Λ_v – линейные функциональные операторы, действующие на функцию по данным формулам. Тогда задача формулируется в операторной форме таким образом. Надо найти решение дифференциального уравнения

$$L(y)(x) = g(x), \tag{1}$$

определённое на отрезке $[u; v]$ и удовлетворяющее на его концах краевым условиям

$$\begin{cases} \Lambda_u(y) = a, \\ \Lambda_v(y) = b; \end{cases}$$

L – линейный дифференциальный оператор второго порядка, Λ_u, Λ_v – линейные функциональные операторы, действующие на функции и переводящие их в действительные числа.

Пусть на отрезке $[u; v]$ задана полная ортогональная система базисных функций $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$. Ортогональность означает равенство нулю всех скалярных произведений попарно различных функций из неё. Скалярное произведение в данном функциональном пространстве определяется формулой

$$\varphi\psi = \int_u^v \varphi(x)\psi(x)dx.$$

Для базисных функций оно равно нулю, если $i \neq j$, по условию ортогональности:

$$\varphi_i\varphi_j = \int_u^v \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0, i \neq j.$$

Полнота означает системы $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$, что не существует никакой другой ненулевой функции, ортогональной ко всем функциям системы.

Далее, подсистема $\{\varphi_0;\ \varphi_1;\ \dots;\ \varphi_n\}$ системы $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ подобрана так, что φ_0 удовлетворяет краевым условиям задачи, а φ_i, $i = 1, \dots, n$, - соответствующим однородным краевым условиям:

$$\begin{cases} \Lambda_u(\varphi_0) = a, \\ \Lambda_v(\varphi_0) = b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Lambda_u(\varphi_i) = 0, \\ \Lambda_v(\varphi_i) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$i = 1, \dots, n$.

Решение задачи будем искать в виде

$$y(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x). \tag{3}$$

Тогда в силу линейности операторов Λ_u, Λ_v и подбора функций $\{\varphi_0;\ \varphi_1;\ \dots,;\varphi_n\}$ функция y такого вида удовлетворяет краевому условию в точке u:

$$\Lambda_u(y) = \Lambda_u\left(\varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right) = \Lambda_u(\varphi_0) + \sum_{i=1}^{n} c_i\Lambda_u(\varphi_i) = \Lambda_u(\varphi_0) = a.$$

Аналогично доказывается такое же утверждение для точки v.

Надо найти коэффициенты $c_1, \dots, c_n$. Для этого подставим (3) в уравнение (1):

$$L\left(\varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right) = L(\varphi_0) + \sum_{i=1}^{n} c_iL(\varphi_i) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\varphi_0) + \sum_{i=1}^{n} c_i L(\varphi_i) = g. \tag{4}$$

Получили уравнение для нахождения коэффициентов. Однако точного равенства в (4) не всегда можно достичь. Рассмотрим разность левой и правой частей, т.е. погрешность приближённого равенства

$$L(\varphi_0) + \sum_{i=1}^{n} c_i L(\varphi_i) \approx g. \tag{5}$$

Это функция, зависящая от параметров $c_1, \dots, c_n$. Она называется *невязкой* решения y. Обозначим её R:

$$R = L(\varphi_0) + \sum_{i=1}^{n} c_i L(\varphi_i) - g. \tag{6}$$

Её нужно минимизировать за счёт выбора $c_1, \dots, c_n$ (чем она меньше, тем точнее приближённое равенство (5)). Сделаем это следующим образом: выберем коэффициенты $c_1, \dots, c_n$ так, чтобы интеграл квадрата невязки R по отрезку $[u; v]$, т.е. квадрат нормы R, был минимален:

$$\|R\|^2 = \int_u^v R^2(x)dx \to \min.$$

Доказано, что это достигается только тогда, когда невязка ортогональна всем базисным функциям $\varphi_1, \dots, \varphi_n$:

$$\varphi_k R = \int_u^v \varphi_k(x) R(x) dx = 0, \tag{7}$$

$k = 1, \dots, n$. По этим n условиям находятся коэффициенты $c_1, \dots, c_n$ решения y. Фактически это система n уравнений с n неизвестными $c_1, \dots, c_n$. Запишем её более подробно. Для этого в условия ортогональности (7) подставим выражение для невязки (6):

$$\varphi_k R = \int_u^v \varphi_k(x) R(x) dx = \int_u^v \varphi_k(x) \left(L(\varphi_0)(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i L(\varphi_i)(x) - g(x) \right) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i \int_u^v \varphi_k(x) L(\varphi_i)(x)\, dx = \int_u^v \varphi_k(x) (L(\varphi_0)(x) - g(x)) dx,$$

$k = 1, \dots, n$. Здесь все слагаемые с неизвестными c_i оставлены в левых частях уравнений, остальные убраны вправо.

Получена система линейных уравнений для определения коэффициентов $c_1, \dots, c_n$. Решаем её и строим функцию (3), которая и считается приближённым решением краевой задачи.

Выбор конкретной системы базисных функций определяется спецификой задачи. Очень удобны в этом качестве тригонометрические и другие ортогональные полиномы (Лежандра, Чебышёва, Эрмита).

2. Метод коллокации

Ещё один аналитический метод приближённого решения линейной двухточечной краевой задачи – это метод коллокации. Решение ищется в том же виде (3), что и в методе Галёркина. Только от базисных функций $\{\varphi_0; \varphi_1; \dots; \varphi_n\}$, число которых теперь конечно, требуются только:

1) линейная независимость;
2) выполнение краевых условий (2) (т.е. опять φ_0 удовлетворяет краевым условиям задачи, а φ_i, $i = 1, \dots, n$, - соответствующим однородным краевым условиям).

Коэффициенты $c_1, \dots, c_n$ решения y определяются из условия равенства нулю невязки R в некоторых точках $x_1, \dots, x_n$:

$$R(x_i) = L(\varphi_0)(x_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i L(\varphi_i)(x_i) - g(x_i) = 0, \qquad (8)$$

$i = 1, \dots, n$. Точки $x_1, \dots, x_n$ называются *точками коллокации*. Получаем систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов $c_1, \dots, c_n$. Решаем её, строим функцию (2), которая и считается приближённым решением задачи. Система (8) с неизвестными $c_1, \dots, c_n$ в левых частях уравнений имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i L(\varphi_i)(x_i) = g(x_i) - L(\varphi_0)(x_i),$$

$i = 1, \dots, n$.

Метод коллокации можно применять и для нелинейного уравнения с линейными краевыми условиями. Тогда для нахождения коэффициентов надо решать нелинейную систему уравнений.