ЛЕКЦИЯ 8.2 ПОГРЕШНОСТИ ПРОСТЕЙШИХ ФОРМУЛ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Погрешности формул прямоугольников

В первой части лекции мы сформулировали задачу численного интегрирования и решили её самым простым способом, используя геометрический смысл определённого интеграла. Мы получили простейшие квадратурные формулы: левых, правых и центральных прямоугольников, трапеций и парабол.

Решение любой вычислительной задачи обязательно должно включать оценку погрешности. Начнём с формулы левых прямоугольников

$$I \approx I^* = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}).$$

По определению абсолютная погрешность приближённого значения интеграла I^* есть модуль разности точного I и приближённого I^* значений:

$$\Delta I^* = |I - I^*|.$$

Подставляя их в ΔI^*, получаем

$$\Delta I^* = \left|\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\right|.$$

Теперь преобразуем выражение под модулем. Во-первых, интеграл на отрезке $[a; b]$ разложим на сумму интегралов на частичных отрезках:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

Во-вторых, значение h представим как интеграл от тождественной единицы на частичном отрезке $[x_{i-1};\ x_i]$:

$$h = \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx.$$

Тогда

$$h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\, h = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1}) dx\,.$$

Теперь подставляем разложение интеграла и полученное только что представление квадратурной суммы в абсолютную погрешность:

$$\Delta I^* = \left| \int\limits_a^b f(x)dx - h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})dx \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x) - f(x_{i-1})\big)dx \right|.$$

Мы знаем свойство модуля: модуль суммы не превосходит суммы модулей. Поэтому из последнего равенства следует оценка

$$\Delta I^* = \left| \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x) - f(x_{i-1})\big)dx \right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x) - f(x_{i-1})\big)dx \right|.$$

Теперь надо найти оценку модуля интеграла на $[x_{i-1};\ x_i]$. Для этого вспомним теорему Лагранжа:

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi),$$

где $\xi \in (a; b)$. Пусть подынтегральная функция непрерывно дифференцируема на отрезке интегрирования $[a; b]$. Тогда теорема Лагранжа применима на каждом частичном отрезке. Запишем её для отрезка $[x_{i-1};\ x]$, где $x \in [x_{i-1};\ x_i]$:

$$f(x) - f(x_{i-1}) = (x - x_{i-1})f'\big(\xi(x)\big)$$

($\xi(x)$ – некоторая точка на $[x_{i-1};\ x]$, она зависит от x, что и отражено в записи $\xi(x)$). Получаем

$$\left| \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x) - f(x_{i-1})\big)dx \right| = \left| \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})f'\big(\xi(x)\big)dx \right|.$$

По свойству интеграла (модуль интеграла не превосходит интеграла модуля) имеем

$$\left| \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})f'\big(\xi(x)\big)dx \right| \le \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left|(x - x_{i-1})f'\big(\xi(x)\big)\right| dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |x - x_{i-1}| \cdot \left|f'\big(\xi(x)\big)\right| dx.$$

Пусть

$$M_1 = \max_{x\in[a;b]} |f'(x)|.$$

Тогда последний интеграл можно оценить сверху:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |x - x_{i-1}| \cdot \left|f'\big(\xi(x)\big)\right| dx \le M_1 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |x - x_{i-1}| dx = M_1 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) dx.$$

Остаётся вычислить интеграл

$$M_1 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) dx = M_1 \frac{(x - x_{i-1})^2}{2}\bigg|_{x_{i-1}}^{x_i} = M_1 \frac{h^2}{2}.$$

Получили оценку

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x) - f(x_{i-1})\big) dx \right| \le M_1 \frac{h^2}{2}.$$

Подставляем её в записанную ранее оценку абсолютной погрешности

$$\Delta I^* \le \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x) - f(x_{i-1})\big) dx \right| \le \sum_{i=1}^{n} M_1 \frac{h^2}{2} \le M_1 n \frac{h^2}{2}.$$

Если вспомнить, что

$$\frac{b-a}{h} = n \;\Leftrightarrow b - a = nh,$$

то получаем оценку погрешности формулы левых прямоугольников:

$$\Delta I^* \le \frac{M_1}{2}(b-a)h.$$

Совершенно аналогично выводится оценка погрешности формулы правых прямоугольников.

Эти результаты сформулируем как теорему.

Теорема 1. Пусть функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[a; b]$. Тогда для квадратурных формул левых и правых прямоугольников верна оценка погрешности

$$\Delta I^* = |I - I^*| \le \frac{M_1}{2}(b-a)h,$$

где

$$M_1 = \max_{x\in[a;b]} |f'(x)|.$$

Как видим, точность формул невелика – всего первый порядок по h.

Приступим к формуле центральных прямоугольников

$$I \approx I^* = h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right).$$

Сначала преобразуем погрешность так же, как раньше:

$$\Delta I^* = |I - I^*| = \left|\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)dx\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f(x) - f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\right)dx\right|. \quad (1)$$

Далее делаем оценку сверху:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f(x) - f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\right)dx\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f(x) - f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\right)dx\right|. \quad (2)$$

Для оценки разности под интегралом запишем для функции f формулу Тейлора первого порядка с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности точки $x_{i-1} + \frac{h}{2}$:

$$f(x) = f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + f'\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\left(x - \left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\right) + \frac{f''\big(\xi(x)\big)}{2}\left(x - \left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\right)^2,$$

где $\xi(x)$ – некоторая точка между $x_{i-1} + \frac{h}{2}$ и x, зависящая от x. Предполагаем, что функция дважды непрерывно дифференцируема на отрезке интегрирования $[a; b]$, тогда условия применимости формулы выполняются и

$$f(x) - f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) = f'\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\left(x - \left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\right) + \frac{f''\big(\xi(x)\big)}{2}\left(x - \left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\right)^2.$$

Подставим эту разность в интеграл в (2):

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f(x) - f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\right)dx = f'\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x - \left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\right)dx +$$

$$+ \int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f''\big(\xi(x)\big)}{2}\left(x - \left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\right)^2 dx.$$

Первый интеграл равен нулю. Оставшееся выражение подставим в (1) и оценим сверху:

$$\Delta I^* \le \sum_{i=1}^{n}\left|\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f''(\xi(x))}{2}\left(x-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)^2 dx\right| \le \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{f''(\xi(x))}{2}\left(x-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)^2\right| dx\,. \quad (3)$$

Пусть

$$M_2 = \max_{x\in[a;b]}|f''(x)|.$$

Тогда

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{f''(\xi(x))}{2}\left(x-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)^2\right| dx \le \frac{M_2}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)^2 dx =$$

$$= \frac{M_2}{2}\left.\frac{\left(x-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)^3}{3}\right|_{x_{i-1}}^{x_i} = \frac{M_2}{24}h^3.$$

Теперь подставляем эту оценку модуля i-го интеграла в (1) в сумму (3) и с учётом того, что $b-a=nh$, получаем

$$\Delta I^* \le \sum_{i=1}^{n}\frac{M_2}{24}h^3 = \frac{M_2}{24}nh^3 = \frac{M_2}{24}(b-a)h^2.$$

Сформулируем этот результат как теорему.

Теорема 2. Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a;b]$. Тогда для квадратурной формулы центральных прямоугольников верна оценка погрешности

$$\Delta I^* = |I - I^*| \le \frac{M_2}{24}(b-a)h^2,$$

где

$$M_2 = \max_{x\in[a;b]}|f''(x)|.$$

2. Погрешности формул трапеций и парабол

Оценка погрешности формулы трапеций дана в следующей теореме.

Теорема 3. Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a;b]$. Тогда для квадратурной формулы трапеций верна оценка погрешности

$$\Delta I^* = |I - I^*| \le \frac{M_2}{12}(b-a)h^2,$$

где

$$M_2 = \max_{x\in[a;b]} |f''(x)|.$$

Доказательство. Пусть $[x_{i-1}, x_i]$ – i-й отрезок разбиения $[a;b]$ на n равных частей с шагом

$$h = \frac{b-a}{n},$$

$i = 1, \dots, n$. Функция f на нём в формуле трапеций приближается линейной интерполяционной. Запишем это приближение с остаточным членом (см. лекцию 2.1):

$$f(x) = P_1(x) + \frac{f''\big(c_i(x)\big)}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i),$$

где $c_i(x)$ — зависящее от x число между x_{i-1} и x_i. Интерполяционный полином P_1 построим по формуле Ньютона с разделёнными разностями:

$$P_1(x) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}(x - x_{i-1}) + f(x_{i-1}).$$

Тогда

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} P_1(x)dx = \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}h,$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(P_1(x) + \frac{f''\big(c_i(x)\big)}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i) \right) dx = \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}h +$$

$$+ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f''\big(c_i(x)\big)}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i)dx.$$

Погрешность приближения по формуле трапеций на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ равна

$$R_i(f) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}h = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f''\big(c_i(x)\big)}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i)dx.$$

Тогда абсолютная погрешность есть модуль $R_i(f)$. Оценив его сверху, получим предельную абсолютную погрешность:

$$\Delta I_i^* = |R_i(f)| = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f''\big(c_i(x)\big)}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i)dx \right| \le$$

$$\le \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{f''\big(c_i(x)\big)}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i) \right| dx \le \frac{M_2}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(x - x_{i-1})(x - x_i)|dx = \bar{\Delta} I_i^*.$$

Учитывая, что

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |(x - x_{i-1})(x - x_i)| dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})(x_i - x) dx = \frac{h^3}{6},$$

получаем верхнюю оценку погрешности:

$$\bar{\Delta} I_i^* = \frac{M_2}{12} h^3.$$

Полная погрешность интегрирования на отрезке $[a; b]$ может быть оценена как сумма оценок погрешностей на частичных отрезках:

$$\Delta I^* \leq \sum_{i=1}^{n} \bar{\Delta} I_i^* = \frac{M_2}{12} h^3 n = \frac{M_2}{12} (b - a) h^2. \qquad \blacksquare$$

Оценку погрешности формулы парабол приведём без доказательства.

Теорема 4. Пусть функция f имеет непрерывные производные на отрезке $[a; b]$ до 4-го порядка включительно. Тогда для квадратурной формулы парабол верна оценка погрешности

$$\Delta I^* = |I - I^*| \leq \frac{M_4}{2880} (b - a) h^4,$$

где

$$M_4 = \max_{x \in [a;b]} \left| f^{(4)}(x) \right|.$$

Пример. Вычислим приближенное значение интеграла

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt$$

по формуле трапеций с шагом $h_1 = \frac{\pi}{6}$ и $h_2 = \frac{\pi}{12}$. Получим следующие величины для квадратурных сумм и погрешностей: $IT_1^* = 1{,}954$, $IT_2^* = 1{,}989$ $RT_1 = 0{,}072$, $RT_2 = 0{,}018$. Здесь приведены оценки погрешностей, вычисленные по теореме 3. А действительные погрешности равны $RRT_1 = 0{,}046$, $RRT_2 = 0{,}011$ (точное значение интеграла равно 2). Действительные погрешности немного меньше предельных.

Если оценить этот интеграл по формуле центральных прямоугольников, то для шага $h_1 = \frac{\pi}{6}$ имеем $IC_1^* = 2{,}023$, оценка погрешности по теореме 2 $RC_1 = 0{,}036$, действительная погрешность $RRC_1 = 0{,}023$. Для шага $h_2 = \frac{\pi}{12}$ имеем $IC_2^* = 2{,}006$, $RC_2 = 0{,}009$, $RRC_2 =$ $= 0{,}006$.