ЛЕКЦИЯ 2.1 АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ТАБЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ.
ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

1. Задача приближенного вычисления функции

В данной теме рассматривается задача приближенного вычисления скалярной функции одного аргумента $y = f(x)$. Такая задача возникает в тех случаях, когда непосредственное вычисление затруднительно (функция задана сложной формулой, вычисляется по сложному алгоритму или экспериментально) или невозможно (функция задана таблично).

Общий подход к решению такой задачи заключается в следующем. Составляется таблица значений функции (если она не задана). Например, сложно вычисляемая функция рассчитывается в нескольких точках, для которых возможно вычисление с приемлемой точностью. Затем по таблице строится просто вычисляемая функция $y = g(x)$ (например, полином), которая считается приближенно равной f. Такой подход называется *аналитическим приближением функции* по табличным данным. Имеются две его разновидности: *интерполяция* и *аппроксимация*. Сначала будет рассмотрен первый из них.

2. Интерполяция

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей 1. Задача заключается в приближенном вычислении ее значения в точке x, не совпадающей ни с одним из $x_0, x_1, \dots, x_n$. Ее решение методом интерполяции предполагает построение по табличным данным функции $y = g(x)$, значения которой в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ в точности совпадают с $y_0, y_1, \dots, y_n$. Функция g называется *интерполирующей*, значения $x_0, x_1, \dots, x_n$ — *узлами интерполяции*. Вне узлов считается, что $f(x) \approx g(x)$. Таким образом, задача интерполяции формулируется следующим образом. По таблице 1 построить функцию $y = g(x)$, удовлетворяющую условиям $g(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$, которые называются *условиями интерполяции*. Естественно, желательно, чтобы g обладала хорошими вычислительными свойствами и притом вне узлов приблизительно повторяла значения f. Тогда можно считать, что $f(x) \approx g(x)$ при $x \neq x_i$, $i = 0, \dots, n$.

Табл. 1. Функция $y = f(x)$

i	x_i	y_i
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n

В такой постановка задача интерполяции не является корректной, так как она имеет бесконечное множество решений. Для устранения (или хотя бы уменьшения) этой неоднозначности вводят класс $\mathfrak{G}$ функций, в котором ищется решение (*класс интерполирующих функций*). При надлежащем выборе $\mathfrak{G}$ задача может иметь единственное решение.

3. Полиномиальная интерполяция

3.1. Задача полиномиальной интерполяции

Возьмем в качестве класса интерполирующих функций $\mathfrak{G}$ множество алгебраических полиномов (многочленов) степени m, т.е. положим

$$g(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m.$$

Тогда получаем *задачу полиномиальной интерполяции*. Она имеет важное практическое значение, так как алгебраические полиномы представляют собой достаточно просто вычисляемые функции с хорошими свойствами (непрерывность, гладкость, дифференцируемость, интегрируемость). На алгебраической интерполяции основываются многие методы численного дифференцирования и интегрирования.

Понятно, что многочлен P_m полностью определяется своими коэффициентами. Поэтому поставленная задача формулируется так. По таблице 1 найти коэффициенты a_0, $a_1, \dots, a_m$ многочлена P_m, удовлетворяющего условиям интерполяции

$$P_m(x_i) = y_i, \tag{1}$$

$i = 0, \dots, n$. Этот многочлен называется *интерполяционным*.

Особый интерес представляет случай $m = n$ (степень интерполяционного многочлена на единицу меньше числа узлов), поскольку задача полиномиальной интерполяции при этом условии имеет единственное решение. Этот результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Если f задана таблицей 1, в которой узлы попарно различны, то для нее существует единственный интерполяционный многочлен P_n степени n.

Доказательство. Очевидно, что интерполяционный многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ полностью определяется своими коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n$, которые находятся из условий интерполяции (1). При $m = n$ они представляют собой систему $n + 1$ линейного уравнения с $n + 1$ неизвестным $a_0, a_1, \dots, a_n$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 \cdots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \cdots + a_n x_1^n = y_1, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 \cdots + a_n x_n^n = y_n. \end{cases} \tag{2}$$

Ее определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

не равен нулю при попарно различных $x_0, x_1, \dots, x_n$ как определитель Вандермонда. Следовательно, система (2) имеет единственное решение, определяющее коэффициенты P_n. ■

Замечание 1. Степень интерполяционного многочлена может быть меньше n, если несколько старших коэффициентов нулевые.

Замечание 2. При $m > n$ задача имеет бесконечное множество решений, а при $m < n$ может вообще не иметь решений.

Далее будут рассмотрены методы построения этого единственного интерполяционного многочлена P_n. Но прежде исследуем очень важный вопрос, касающийся каждой вычислительной задачи, — оценку погрешности решения.

3.2. Погрешность полиномиальной интерполяции

Пусть P_n — интерполяционный многочлен степени n, построенный по таблице 1. Обозначим через $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ *остаточный член интерполяции* в точке x. Понятно, что ее погрешность есть модуль $R_n(x)$. Оценка погрешности основывается на следующей теореме о представлении остаточного члена.

Теорема 2. Пусть функция f $n+1$ раз непрерывно дифференцируема на некотором отрезке $[a;b]$, содержащем все узлы $x_0, x_1, \dots, x_n$. Тогда для любого $x \in [a;b]$ существует такое $\zeta \in (a;b)$, что

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} Q_{n+1}(x), \tag{3}$$

где $Q_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ ($f^{(n+1)}$— $(n+1)$-я производная).

Доказательство. Если x совпадает с каким-либо узлом интерполяции x_i, то равенство (3) справедливо при любом $\zeta \in (a;b)$, так как обе его части обращаются в нуль. Пусть $x = \tilde{x}$ - произвольная точка из $[a;b]$, не совпадающая ни с одним из узлов x_i. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$h(x) = f(x) - P_n(x) - kQ_{n+1}(x),$$

где k — некоторый постоянный параметр. Очевидно, что $h(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$ ($f(x_i) = P_n(x_i)$ в силу условий интерполяции, а $Q_{n+1}(x_i) = 0$ по определению многочлена Q_{n+1}). Параметр k подберем так, чтобы $h(\tilde{x}) = 0$:

$$h(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - P_n(\tilde{x}) - kQ_{n+1}(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{f(\tilde{x}) - P_n(\tilde{x})}{Q_{n+1}(\tilde{x})} \tag{4}$$

($Q_{n+1}(\tilde{x}) \neq 0$, так как $\tilde{x} \neq x_i$, , $i = 0, 1, \dots, n$). Далее считаем, что k определен формулой (4). Тогда функция h обращается в нуль на отрезке $[a;b]$ по крайней мере $n+2$ раза: в узлах $x_0, x_1, \dots, x_n$ и в $\tilde{x}$, т.е имеет одинаковые значения в $n+2$ различных точках. Согласно теореме Ролля производная h' имеет не менее $n+1$ различных нулей на $(a;b)$. Применяя эту теорему к h', убеждаемся, что h'' имеет не менее n различных нулей на интервале $(a;b)$. Аналогично рассуждая далее, приходим к выводу, что $h^{(n+1)}$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке на $(a;b)$. Обозначим эту точку ζ (заметим, что нули функций $h, h', h'', \dots, h^{(n+1)}$ зависят от $\tilde{x}$, поэтому на самом деле $\zeta = \zeta(\tilde{x})$). Тогда имеем

$$h^{(n+1)}(\zeta) = f^{(n+1)}(\zeta) - P_n^{(n+1)}(\zeta) - kQ_{n+1}^{(n+1)}(\zeta) = 0. \tag{5}$$

Поскольку $(n+1)$-я производная многочлена n-й степени P_n равна нулю, а полинома $(n+1)$-й степени Q_{n+1} — $(n+1)!$, то из (5) с учетом (4) получаем

$$f^{(n+1)}(\zeta) - k(n+1)! = 0 \;\Rightarrow\; f^{(n+1)}(\zeta) = \frac{f(\tilde{x}\,) - P_n(\tilde{x}\,)}{Q_{n+1}(\tilde{x}\,)}(n+1)! \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(\tilde{x}\,) - P_n(\tilde{x}\,) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}Q_{n+1}(\tilde{x}\,).$$

Для завершения доказательства осталось учесть, что $\tilde{x}$ — произвольная точка из $[a;b]$. ■

Из формулы (3) следует оценка погрешности интерполяции в точке x:

$$\Delta\big(P_n(x)\big) = |R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}Q_{n+1}(x)\right| \le$$

$$\le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|Q_{n+1}(x)| = \overline{\Delta}\big(P_n(x)\big),$$

где

$$M_{n+1} = \max_{z\in[a;b]}\left|f^{(n+1)}(z)\right|$$

(эта величина существует в силу условий, налагаемых на f теоремой 2). Оценка $\overline{\Delta}$, зависящая от x, называется *оценочной функцией* интерполяции, ее точная верхняя грань на $[a;b]$ $V(P_n)$ есть глобальная оценка погрешности, т.е. оценка по всей таблице.

Итак, величины

$$\overline{\Delta}\big(P_n(x)\big) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|Q_{n+1}(x)|, \qquad (6)$$

$$V(P_n) = \sup_{x\in[a;b]}\overline{\Delta}\big(P_n(x)\big)$$

можно использовать для оценки погрешности интерполяции в точке x или по всей таблице. Однако их применение затрудняется необходимостью вычисления константы M_{n+1}, ведь о функции f в общем случае неизвестно ничего, кроме таблицы 1. Для решения этой проблемы приходится привлекать дополнительные соображения, например, геометрические или физические, все, что известно о f в каждом конкретном случае. На практике чаще всего вместо M_{n+1} приходится использовать ее верхнюю оценку, т.е. такое число q_{n+1}, про которое заведомо известно, что $M_{n+1} \le q_{n+1}$. Конечно, q_{n+1} должно быть как можно ближе к M_{n+1}, чтобы оценка погрешности не была завышенной.

Пример. Функция $y = \cos 2x$ задана таблицей 2 с 5 узлами ($n = 4$). Найдем для нее оценочную функцию погрешности интерполяционного многочлена четвертой степени. Так как $y^{(5)}(x) = -32\sin 2x$, $\left|y^{(5)}(x)\right| \le 32 = M_5$, то по формуле (6) имеем:

$$\overline{\Delta}\big(P_4(x)\big) = \frac{32}{5!}|(x-0{,}00)(x-0{,}10)(x-0{,}20)(x-0{,}35)(x-0{,}60)| =$$

$$= 0{,}267|(x-0{,}00)(x-0{,}10)(x-0{,}20)(x-0{,}35)(x-0{,}60)|.$$

Табл. 2. Функция $y = \cos 2x$

x_i	0,00	0,10	0,20	0,35	0,60
y_i	1,000	0,980	0,921	0,765	0,362

Например, в точке $x = 0{,}17$ погрешность интерполяции не превосходит $\overline{\Delta}\big(P_4(0{,}07)\big) = 0{,}000011$, т.е. интерполяционный многочлен дает четыре верных знака после запятой. Однако нужно учитывать погрешности табличных данных и вычислений многочлена, поэтому верных знаков, скорее всего, будет меньше.

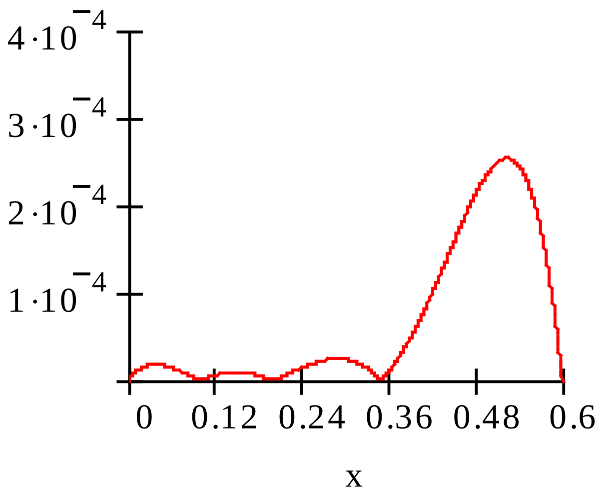

Рис. 1. График оценочной функции $\overline{\Delta}$

На рис. 1 изображен график оценочной функции $\overline{\Delta}$ (график построен в Mathcad). По нему видно, что глобальная погрешность $V(P_4)$ не превосходит $0{,}0003$, причем между последними двумя узлами оценка имеет значительный скачок.

Приведенный пример иллюстрирует следующие практические правила, которыми следует руководствоваться при проведении расчетов. Во-первых, $\overline{\Delta}\big(P_n(x)\big)$ и $V(P_n)$ представляют собой оценки погрешности только лишь самого интерполяционного многочлена, т.е. погрешности метода. При реальной оценке надо учитывать еще погрешности расчета коэффициентов P_n, зависящие от погрешностей табличных данных, а также погрешности вычисления $P_n(x)$. Во-вторых, применение многочленов высокой степени для таблиц с большим числом узлов не гарантирует стремление к нулю $\overline{\Delta}\big(P_n(x)\big)$ и $V(P_n)$. Наоборот, доказаны результаты, из которых следует, что с ростом n $V(P_n)$ неограниченно возрастает (феномен Рунге). Поэтому на практике интерполяционные многочлены степени выше третьей не применяются. Для больших таблиц используются другие методы приближенных вычислений (аппроксимация, локальная интерполяция).

3.3. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Рассмотрим первый метод построения интерполяционного многочлена, существование и единственность которого гарантирует теорема 1. Функция $y = f(x)$ задана таблицей 1 с попарно несовпадающими узлами. Пусть искомый многочлен имеет вид

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)\cdots(x - x_n) + a_1(x - x_0)(x - x_2)\cdots(x - x_n) +$$
$$+ \cdots + a_i(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n) +$$
$$+ \cdots + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}). \qquad (7)$$

Такое представление правомерно, поскольку (7) действительно задает многочлен степени n от x. Для нахождения коэффициентов a_0, $a_1, \dots,$ a_n воспользуемся условиями интерполяции $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$. Подстановка в (7) $x = x_0$ дает коэффициент a_0:

$$P_n(x_0) = y_0 \;\Rightarrow\; a_0(x_0 - x_1)\cdots(x_0 - x_n) = y_0 \;\Rightarrow$$
$$a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)\cdots(x_0 - x_n)};$$

аналогично получаем a_1:

$$P_n(x_1) = y_1 \;\Rightarrow\; a_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_n) = y_1 \;\Rightarrow$$
$$a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_n)}.$$

Общая формула для a_i следует из условия интерполяции в точке x_i:

$$P_n(x_i) = y_i \;\Rightarrow\; a_i(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n) = y_i \;\Rightarrow$$
$$a_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)},$$

в частности,

$$a_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1})}.$$

Подставляя найденные коэффициенты a_i в (7), имеем

$$P_n(x) = L_n(x) = y_0\frac{(x - x_1)\cdots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\cdots(x_0 - x_n)} +$$
$$+ y_1\frac{(x - x_0)(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_n)} + \cdots +$$
$$+ y_i\frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} + \cdots +$$

$$+y_n \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1})}.$$

Это и есть формула *интерполяционного многочлена Лагранжа* (его принято обозначать буквой L). Ее можно записать в сокращенной форме:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_{n,i}(x), \qquad (8)$$

где

$$l_{n,i}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Величины $l_{n,i}(x)$ называются *множителями Лагранжа.*

Интерполяционная формула Лагранжа просто выводится, имеет удобную для вычислений структуру (например, с помощью таблицы), недостаток же ее в том, что при добавлении нового узла ее всю надо пересчитывать заново. В рассматриваемой далее формуле с разделенными разностями при добавлении узла достаточно вычислить и прибавить к имеющейся формуле новое слагаемое.

В заключение приведем формулы Лагранжа для таблиц с двумя и тремя узлами. Если $n = 1$ (два узла и первая степень многочлена), то

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

В этом выражении нетрудно узнать уравнение прямой, проходящей через две точки $(x_0;\ y_0)$, $(x_1;\ y_1)$.

При $n = 2$ (многочлен Лагранжа для таблицы с тремя узлами имеет вторую степень) из (8) получаем уравнение параболы, проходящей через три точки $(x_0;\ y_0)$, $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$:

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} +$$

$$+y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Пример. Пусть задана функция $f(x) = t^4 + 2t^3 - 7t^2 - 8t + 12$. По четырем точкам (см. табл. 3) составим для этой функции интерполяционный многочлен Лагранжа.

Многочлен строим по формуле (8):

$$L_3(x) = 12 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(-1-0)(-1-1)(-1-3)} + 12 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(0+1)(0-1)(0-3)} +$$
$$+60 \cdot \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(3+1)(3-0)(3-1)}.$$

Табл. 3. Функция $y = f(x)$ примера на с. 8

x_i	-1	0	1	3
y_i	12	12	0	60

После упрощения получаем $L_3(x) = 5x^3 - 6x^2 - 11x + 12$. Исходная функция является многочленом 4-ой степени, а ее интерполяционное приближение по 4 точкам – многочленом 3-й степени. Построим графики исходной функции f и построенного приближения L_3 в Mathcad (рис. 2).

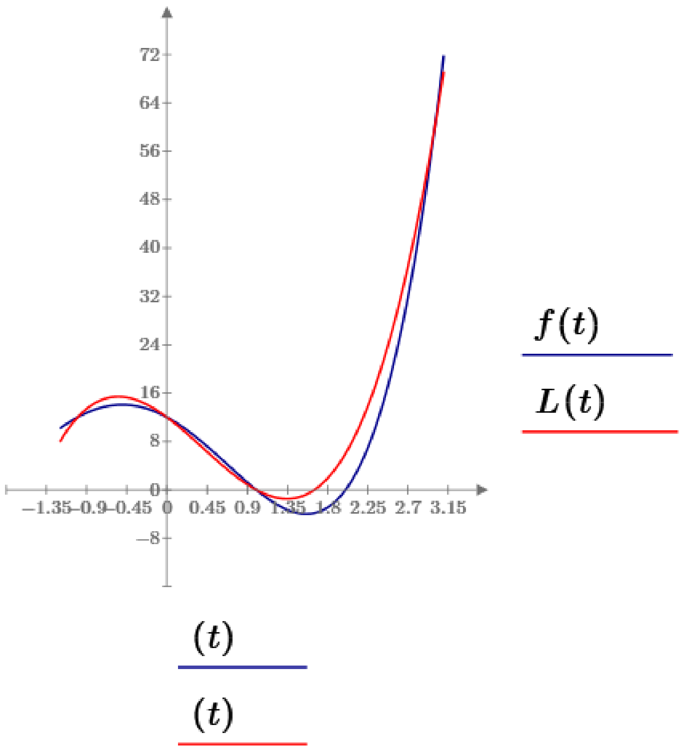

Рис. 2. Графики функции f и приближения L_3

Данный график иллюстрирует приближение исходной функции интерполяционным полиномом. На рис. 3 приведен график абсолютной погрешности приближения D на отрезке интерполяции. Несмотря на то, что исходная функция – полином четвертой степени, а приближение – полином третьей степени, погрешность приближения на отрезке $[1;3]$ высока.

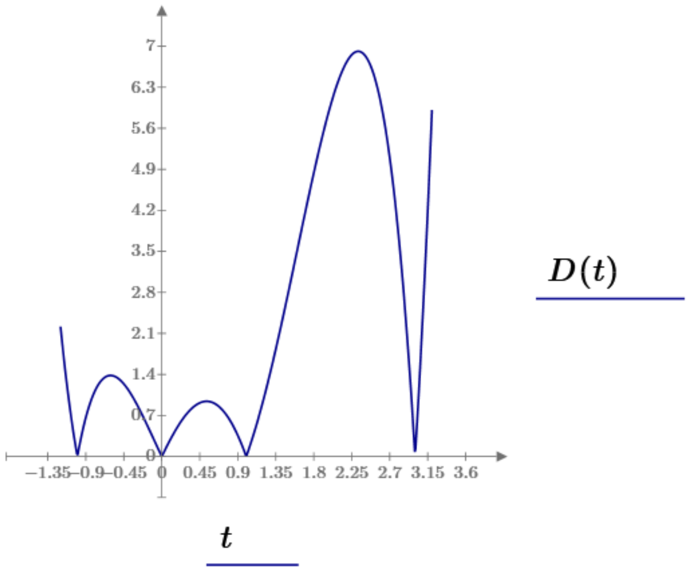

Рис. 3. График абсолютной погрешности приближения D

3.4. Схема Эйткена

Вычислительная схема Эйткена предназначена для пошагового рекуррентного вычисления значения интерполяционного многочлена Лагранжа L_n в точке x. Обозначим через $L_k^{i,i+1,\dots,i+k}(x)$ значение полинома Лагранжа степени k, построенного по $k+1$ соседнему узлу $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$, в точке x. Очевидно, что $L_0^i(x) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

На первом шаге вычисляются $L_1^{0,1}(x)$, $L_1^{1,2}(x), \dots, L_1^{n-1,n}(x)$, т.е. строятся многочлены первой степени (линейные функции) по парам соседних узлов и находятся их значения в точке x. Расчетные формулы первого шага:

$$L_1^{i,i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i}\begin{vmatrix} L_0^i(x) & x_i - x \\ L_0^{i+1}(x) & x_{i+1} - x \end{vmatrix} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i}\begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x \end{vmatrix},$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$.

На втором шаге по найденным $L_1^{i,i+1}(x)$ вычисляются $L_2^{0,1,2}(x)$, $L_2^{1,2,3}(x), \dots$, $L_2^{n-2,n-1,n}(x)$, т.е. строятся многочлены второй степени по тройкам соседних узлов (графически они изображаются параболами, проходящими через тройки точек) и считаются их значения в x. Расчетные формулы:

$$L_2^{i,i+1,i+2}(x) = \frac{1}{x_{i+2} - x_i}\begin{vmatrix} L_1^{i,i+1}(x) & x_i - x \\ L_1^{i+1,i+2}(x) & x_{i+2} - x \end{vmatrix},$$

$i = 0, 1, \dots, n-2$.

На третьем шаге по $L_2^{i,i+1,i+2}(x)$ вычисляются $L_3^{i,i+1,i+3,i+4}(x)$ и т.д. Расчетные формулы k-го шага:

$$L_k^{i,i+1,\dots,i+k}(x) = \frac{1}{x_{i+k} - x_i}\begin{vmatrix} L_{k-1}^{i,\dots,i+k-1}(x) & x_i - x \\ L_{k-1}^{i+1,\dots,i+k}(x) & x_{i+k} - x \end{vmatrix}, \quad (9)$$

$i = 0, 1, \dots, n-k$.

На последнем, n-м, шаге вычисляется значение $L_n(x)$ многочлена Лагранжа, построенного по всем $n+1$ узлам:

$$L_n(x) = L_n^{0,\dots,n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0}\begin{vmatrix} L_{n-1}^{0,\dots,n-1}(x) & x_0 - x \\ L_{n-1}^{1,\dots,n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}.$$

Докажем, что (9) действительно дает значения интерполяционного многочлена степени k, построенного по узлам $x_i,\ x_{i+1}, \dots,\ x_{i+k}$. Применяем индукцию по k. При $k = 1$ имеем:

$$L_1^{i,i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i}\begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x \end{vmatrix} = \frac{y_i(x_{i+1} - x) - y_{i+1}(x_i - x)}{x_{i+1} - x_i} =$$

$$= y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1}\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

Получили многочлен Лагранжа (8) первой степени для узлов x_i, x_{i+1}. База индукции доказана. Предполагаем теперь, что $L_k^{i,i+1,\dots,i+k}$ — интерполяционный многочлен степени k, построенный по узлам $x_i,\ x_{i+1}, \dots,\ x_{i+k}$, — вычисляется по формуле (9). Докажем, что $L_{k+1}^{i,i+1,\dots,i+k+1}$ также определяется (9):

$$L_{k+1}^{i,i+1,\dots,i+k+1}(x) = \frac{1}{x_{i+k+1} - x_i}\begin{vmatrix} L_k^{i,\dots,i+k}(x) & x_i - x \\ L_k^{i+1,\dots,i+k+1}(x) & x_{i+k+1} - x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{L_k^{i,\dots,i+k}(x)(x_{i+k+1} - x) - L_k^{i+1,\dots,i+k+1}(x)(x_i - x)}{x_{i+k+1} - x_i}. \quad (10)$$

Очевидно, что функция $L_{k+1}^{i,i+1,\dots,i+k+1}$, вычисленная по (10), есть многочлен $(k+1)$- й степени по x. Проверим для него условия интерполяции. При $x = x_i$

$$L_{k+1}^{i,i+1,\dots,i+k+1}(x_i) = \frac{L_k^{i,\dots,i+k}(x_i)(x_{i+k+1} - x_i)}{x_{i+k+1} - x_i} = L_k^{i,\dots,i+k}(x_i) = y_i$$

в силу индукционного предположения; при $x = x_{i+k+1}$

$$L_{k+1}^{i,i+1,\dots,i+k+1}(x_{i+k+1}) = -\frac{L_k^{i+1,\dots,i+k+1}(x_{i+k+1})(x_i - x_{i+k+1})}{x_{i+k+1} - x_i} = y_{i+k+1}$$

также по предположению (в числителе— многочлен k-й степени). Если же $x = x_j$, $i < j < i + k + 1$, то из (10) следует

$$L_{k+1}^{i,i+1,\dots,i+k+1}(x_j) = \frac{L_k^{i,\dots,i+k}(x_j)(x_{i+k+1} - x_j) - L_k^{i+1,\dots,i+k+1}(x_j)(x_i - x_j)}{x_{i+k+1} - x_i}.$$

Согласно предположению $L_k^{i,\dots,i+k}(x_j) = L_k^{i+1,\dots,i+k+1}(x_j) = y_j$, поэтому

$$L_{k+1}^{i,i+1,\dots,i+k+1}(x_j) = \frac{y_j(x_{i+k+1} - x_j) - y_j(x_i - x_j)}{x_{i+k+1} - x_i} = y_j.$$

Условия интерполяции в узлах x_i, $x_{i+1}, \dots, x_{i+k+1}$ выполняются. Индукционный шаг доказан.

Пример. Для приведенной в примере п. 3.3 табличной функции (см. табл. 3) построена таблица Эйткена (рис. 4) при $x = 0{,}6$. В матрице, соответствующей таблице, первые два столбца – исходные данные; третий столбец – разности $x_i - x$. Следующие три столбца – последовательные вычисления по формулам Эйткена.

$$Aitken = \begin{bmatrix} -1 & 12 & -1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -0.6 & 12 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.4 & 4.8 & 6.24 & 0 \\ 3 & 60 & 2.4 & -12 & 1.44 & 4.32 \end{bmatrix}$$

Рис. 4. Таблица Эйткена

Значит, значение интерполяционного полинома третьей степени в точке $x = 0{,}6$ равно 4,32.

То же значение получим из интерполяционного полинома, построенного в п. 3.3: $L_3(0{,}6) = 4{,}32$.