ЛЕКЦИЯ 15.1 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

1. Двухточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) состоит в нахождении частного решения этого уравнения, удовлетворяющего краевым условиям, заданным в нескольких точках. Мы разберём решение *двухточечной* краевой задачи для ОДУ второго порядка. Общая постановка такова. Надо найти частное решение ОДУ второго порядка

$$y'' = F(x; y; y'),$$

определённое на отрезке $[x_0; X]$ и удовлетворяющее на его концах двум краевым условиям

$$\begin{cases} \varphi\big(y(x_0); y'(x_0)\big) = 0, \\ \psi\big(y(X); y'(X)\big) = 0; \end{cases}$$

здесь φ, ψ – функции соответствующих аргументов.

2. Постановка вычислительной задачи

Приближённое решение краевой задачи – это та же самая сеточная функция, что была определена в лекции 14.1. Это значит, что надо найти сеточное решение $\{y_i\}_{i=0}^{n}$ поставленной краевой задачи, вычисленное на сетке $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, где $y_i = y(x_i)$. Узлы сетки – числа $x_i = x_0 + hi, i = 0, \dots, n$.

3. Метод конечных разностей

3.1. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Рассмотрим линейную двухточечную краевую задачу, чаще всего встречающуюся в вычислительной практике. Это значит, что все три функции F, φ, ψ линейны. Задача тогда заключается в нахождении частного решения линейного уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{1}$$

определённого на отрезке $[x_0; X]$, p, q, g – функции, непрерывные на отрезке $[x_0; X]$, удовлетворяющего краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_0 y(x_0) + \alpha_1 y'(x_0) = a, \\ \beta_0 y(X) + \beta_1 y'(X) = b, \end{cases} \tag{2}$$

α_0, α_1, β_0, β_1, a, b – заданные числа, причём

$$\begin{cases} \alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0, \\ \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0, \end{cases}$$

т.е. левые части краевых условий не равны тождественно нулю. Если a и b равны нулю, краевые условия называются *однородными*.

Введём для удобства обозначения

$$p_i = p(x_i),\ q_i = q(x_i),\ g_i = g(x_i).$$

Это значения соответствующих функций в узлах сетки. Проведём *дискретизацию* ДУ и краевых условий. Это означает переход от непрерывных функций и операций над ними к их дискретным аналогам. Для самого решения y это означает замену сеточным решением. Дискретными аналогами производных являются разностные формулы численного дифференцирования, изученные в лекции 7.1. Заменяем во внутренних узлах первую производную первой, а вторую – второй центральными разностными производными:

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}.$$

На концах отрезка $[x_0; X]$ $y'(x_0)$ приближаем правой, $y'(X)$ – левой разностными производными:

$$y'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h},$$

$$y'(X) = y'(x_n) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

Тогда получаем дискретные аналоги ДУ и краевых условий:

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = a, \\ \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = g_i, i = 1, \dots, n-1, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = b. \end{cases} \tag{3}$$

В этих равенствах нетрудно увидеть систему линейных уравнений для нахождения сеточных значений $\{y_i\}_{i=0}^{n}$. Система замкнутая: в ней $n+1$ уравнение и столько же неизвестных. Кроме того, она имеет специальную структуру. Перепишем её в таком виде:

$$(\alpha_0 h-\alpha_1)y_0+\alpha_1 y_1=ah,$$
$$(2-hp_i)y_{i-1}+2(h^2q_i-2)y_i+(2+hp_i)y_{i+1}=2h^2g_i, i=1,\dots,n-1,$$
$$-\beta_1 y_{n-1}+(\beta_0 h+\beta_1)y_n=bh.$$

Это система с трёхдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} (\alpha_0 h-\alpha_1)y_0+\alpha_1 y_1 & =ah,\\ (2-hp_1)y_0+2(h^2q_1-2)y_1+(2+hp_1)y_2 & =2h^2g_1,\\ \qquad\ddots \qquad\qquad\qquad \vdots & \\ (2-hp_i)y_{i-1}+2(h^2q_i-2)y_i+(2+hp_i)y_{i+1} & =2h^2g_i,\\ \qquad\ddots \qquad\qquad\qquad \vdots & \\ (2-hp_{n-1})y_{n-2}+2(h^2q_{n-1}-2)y_{n-1}+(2+hp_{n-1})y_n & =2h^2g_{n-1},\\ -\beta_1 y_{n-1}+(\beta_0 h+\beta_1)y_n & =bh. \end{cases}$$

Для неё имеется специальный метод решения – метод прогонки. Находим сеточные значения решением системы и получаем ответ.

Описанный метод решения линейной краевой двухточечной задачи называется методом конечных разностей. Оценка погрешности даётся в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть решение линейной краевой двухточечной задачи (1)-(2) y четырежды непрерывно дифференцируемо на отрезке $[x_0;X]$. Тогда для погрешностей сеточных значений y_i, полученных методом конечных разностей, верна оценка

$$\Delta y_i=|y_i-y(x_i)|\le\frac{M_4}{96}(X-x_0)^2h^2,$$

где

$$M_4=\max_{x\in[x_0;X]}\left|y^{(4)}(x)\right|,$$

$y(x_i)$ – точное значение решения в точке x_i.

Из теоремы следует, что метод имеет второй порядок точности по h.

Метод конечных разностей допускает и другие реализации. Ведь можно использовать иные разностные формулы, например, формулы более высоких порядков точности, которые задействуют большее число узлов. Они повышают точность, но структура системы усложняется, надо применять для её решения другие методы.

Пример. Найти решение краевой задачи

$$\begin{cases} u''(x) + 4u'(x) - u(x) = x, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

на отрезке $[0; 1]$.

Выпишем разностную схему (3):

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ \dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + 4\dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - u_i = x_i, i = 1, \dots, n-1, \\ u_n = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Систему (4) представим в трёхдиагональном виде:

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ \left(\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{2}{h}\right) u_{i-1} - \left(\dfrac{2}{h^2} + 1\right) u_i + \left(\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{2}{h}\right) u_{i-1} = x_i, i = 1, \dots, n-1, \\ u_n = 1. \end{cases} \tag{5}$$

При $h \geq \frac{1}{2}$ для системы (5) выполняется условия диагонального преобладания (см. теорему 1 лекции 10.1), поэтому метод прогонки применим и решение системы устойчиво к возмущениям матрицы (проверьте это самостоятельно). Возьмем $h = 0{,}2$. Тогда

$$n = \frac{1 - 0}{0{,}2} = 5,$$

$$x_i = x_0 + hi = 0{,}2i,$$

$i = 0, 1, \dots, 5$. Система (5) принимает вид

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ 15u_{i-1} - 51u_i + 35u_{i+1} = 0{,}2i, \qquad i = 1, 2, 3, 4, \\ u_5 = 1. \end{cases}$$

Решаем систему методом прогонки и получаем ответ (см. таблицу 1).

3.2. Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка

Теперь рассмотрим нелинейную краевую задачу. Для неё вычисления уже не так просты. Общих формул не существует, решение строится для конкретной задачи. Возьмём простой пример краевой задачи для нелинейного уравнения второго порядка

$$y'' = F(x; y; y') \tag{6}$$

на отрезке $[x_0; X]$ с линейными краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha_0 y(x_0) + \alpha_1 y'(x_0) = a, \\ \beta_0 y(X) + \beta_1 y'(X) = b. \end{cases} \tag{7}$$

Табл. 1. Решение примера на с. 3-4

i	x_i	u_i
0	0	0
1	0,2	0,4701
2	0,4	0,6906
3	0,6	0,8164
4	0,8	0,9107
5	1	1,0000

Проведём дискретизацию уравнения (6) и краевых условий (7) точно так же, как в линейном случае, т.е. аппроксимируем первую производную первой, а вторую – второй центральными разностными производными. На концах отрезка $[x_0; X]$ $y'(x_0)$ приближаем правой, $y'(X)$ – левой разностными производными. Получим разностную аппроксимацию задачи (6)-(7):

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = a, \\ \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = F\left(x_i;\ y_i;\ \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right), i = 1, \dots, n-1, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = b. \end{cases}$$

Это нелинейная система для нахождения сеточных значений $\{y_i\}_{i=0}^{n}$. Она замкнута: в ней $n+1$ уравнение и столько же неизвестных. В методе конечных разностей она решается итерационно, т.е. строится последовательность векторов-итераций $\left\{\bar{y}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, где

$$\bar{y}^{(k)} = \begin{pmatrix} y_0^{(k)} \\ y_1^{(k)} \\ \vdots \\ y_n^{(k)} \end{pmatrix} -$$

k-я итерация сеточного решения.

Схема вычислений следующая. Выбирается начальная итерация $\bar{y}^{(0)}$, подставляется в правую часть разностного уравнения (полученного дискретного аналога ДУ), а левая часть считается следующим приближением к левой части ДУ, т.е. *(k+1)*-м приближением второй производной:

$$\frac{y_{i+1}^{(k+1)} - 2y_i^{(k+1)} + y_{i-1}^{(k+1)}}{h^2} = F\left(x_i;\ y_i^{(k)};\ \frac{y_{i+1}^{(k)} - y_{i-1}^{(k1)}}{2h}\right),$$

$i = 1, \ldots, n-1$. Краевые условия

$$\alpha_0 y_0^{(k+1)} + \alpha_1 \frac{y_1^{(k+1)} - y_0^{(k+1)}}{h} = a,$$

$$\beta_0 y_n^{(k+1)} + \beta_1 \frac{y_n^{(k+1)} - y_{n-1}^{(k+1)}}{h} = b$$

используются для замыкания системы. Таким образом, получается линейная система. Решив её, находим следующую итерацию $\bar{y}^{(k+1)}$ сеточного решения. Система и здесь трёхдиагональная. Исходная нелинейная задача свелась к вычислениям по линейной итерационной схеме.

Итерационный процесс можно останавливать, когда соседние приближения всех компонент вектора-итерации совпадут в пределах заданной точности.

Для выбора начального приближения можно применить следующий алгоритм. Решить аналитически близкую к данной более простую краевую задачу (желательно с теми же краевыми условиями), а затем взять в качестве начального вектор значений этого решения в узлах сетки.