

ЛЕКЦИЯ 10.1 ЗАДАЧА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ. НОРМЫ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ.

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ

Эта лекция начинает блок, посвящённый численным методам линейной алгебры.

Напомним, что линейная алгебра – это раздел алгебры, в котором исследуются линейные объекты: векторные (или линейные) пространства, линейные отображения, системы линейных алгебраических уравнений. Основной математический аппарат, используемый в линейной алгебре – матрицы. Соответственно, численные методы линейной алгебры – методы численного решения матричных задач. Наиболее важными из них являются решение систем линейных алгебраических уравнений и проблема собственных значений. Именно и займёмся в этой части нашего курса.

1. Постановка задачи численного решения систем линейных уравнений

Дана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

или в матричном виде

$$A\bar{x} = \bar{b}, \quad (1)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} -$$

матрица системы, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор неизвестных, $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ — вектор правой части.

При условии невырожденности матрицы A ($\det(A) \neq 0$) система имеет единственное решение \bar{x} . Задача состоит в том, чтобы вычислить приближённое решение \bar{x}^* .

Существуют точные и приближенные методы её решения. Например, к точным методам относятся метод Гаусса, метод обратной матрицы, формулы Крамера. Эти методы имеют большую вычислительную сложность. Например, число умножений при вычислении определителей в методе Крамера равно $n!$, что очень велико при $n \gg 1$. При таком количестве арифметических операций быстро накапливаются погрешности округлений, и решение является неустойчивым по отношению к возмущениям матрицы и правой части. В методе Гаусса тоже большое количество операций. При $n \gg 1$ практичнее решать систему приближенными методами, учитывающими те или иные их особенности матрицы.

Задача численного решения линейных систем чрезвычайно актуальна. Исследование применения численных методов показало, что примерно 75% всех вычислений приходится на решение систем линейных алгебраических уравнений. Причем, число неизвестных может достигать нескольких сотен или тысяч. Поэтому математикам, разрабатывающим приближенные методы решения СЛАУ, надо изобретать все более эффективные методы.

2. Числовые характеристики приближённого решения. Нормы векторов и матриц

2.1. Погрешность и невязка приближённого решения

Понятно, что численное решение задачи подразумевает не только нахождение приближённого решения, но и оценку погрешности. Качество приближённого решения \bar{x}^* определяется свойствами разности $\bar{x} - \bar{x}^*$. Этот вектор будем называть *погрешностью* $\varepsilon \bar{x}^*$ решения \bar{x}^* :

$$\varepsilon \bar{x}^* = \bar{x} - \bar{x}^*.$$

Другой характеристикой приближённого решения \bar{x}^* является её *невязка* $e \bar{x}^* = \bar{b} - A \bar{x}^*$. Очевидно выводится связь между погрешностью и невязкой:

$$e \bar{x}^* = \bar{b} - A \bar{x}^* = A \bar{x} - A \bar{x}^* = A(\bar{x} - \bar{x}^*) = A \varepsilon \bar{x}^*.$$

Прежде чем приступать к рассмотрению методов нахождения \bar{x}^* , надо определить скалярную величину, характеризующую степень близости векторов \bar{x} и \bar{x}^* , т.е. погрешность $\varepsilon\bar{x}^*$. Для одномерных числовых величин абсолютная погрешность определяется как модуль. В многомерном случае аналогами модуля являются нормы векторов и матриц.

2.2. Нормы векторов и матриц

Пусть \mathbb{U}^n — пространство числовых векторов размерности n (n -векторов). *Векторной нормой* в \mathbb{U}^n называется числовая функция $\rho: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$ — неотрицательная числовая полуось, удовлетворяющая условиям:

- 1) $\rho(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}, \bar{0}$ — нулевой вектор;
- 2) $\rho(\lambda\bar{x}) = |\lambda|\rho(\bar{x})$ для любого действительного числа λ и любого $\bar{x} \in \mathbb{U}^n$;
- 3) $\rho(\bar{x} + \bar{y}) \leq \rho(\bar{x}) + \rho(\bar{y})$ для любых $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{U}^n$ (неравенство треугольника).

Норма произвольного вектора \bar{x} обозначается $\|\bar{x}\|$, т.е. $\rho(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$. По свойствам нормы видно, что она численно характеризует величину, или «длину», вектора. Чем она больше, тем более отличен вектор (по совокупности координат) от нулевого. Поэтому норму логично взять в качестве характеристики величины погрешности. Итак, *абсолютной погрешностью* $\Delta\bar{x}^*$ приближённого решения \bar{x}^* называется норма вектора $\varepsilon\bar{x}^*$:

$$\Delta\bar{x}^* = \|\varepsilon\bar{x}^*\| = \|\bar{x} - \bar{x}^*\|.$$

Как и в случае с абсолютной погрешностью скалярной величины, $\Delta\bar{x}^*$ точно установить невозможно. Вместо неё находится её верхняя оценка $\bar{\Delta}\bar{x}^*$.

Безразмерной характеристикой $\varepsilon\bar{x}^*$ является *относительная погрешность*

$$\delta\bar{x}^* = \frac{\Delta\bar{x}^*}{\|\bar{x}\|} = \frac{\|\bar{x} - \bar{x}^*\|}{\|\bar{x}\|}.$$

Эта величина также не поддаётся вычислению, вместо неё определяется верхняя оценка $\bar{\delta}\bar{x}^*$.

В вычислительной математике наиболее употребительными являются следующие нормы: $\|\bar{x}\|_1$, $\|\bar{x}\|_2$, $\|\bar{x}\|_\infty$. Первая (читается «норма-один», другое название — *октаэдрическая норма*) вычисляется по формуле

$$\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (2)$$

Вторая — *евклидова* норма («норма-два», или *сферическая*):

$$\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (3)$$

В двумерном и трёхмерном пространствах она совпадает с евклидовой длиной вектора.

Последняя норма («норма-бесконечность», *кубическая* норма) вычисляется формулой

$$\|\bar{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (4)$$

Для всех трёх легко доказываются свойства 1) - 3) нормы. Кроме того, они связаны очевидными неравенствами

$$\|\bar{x}\|_\infty \leq \|\bar{x}\|_2 \leq \|\bar{x}\|_1 \leq n \|\bar{x}\|_\infty. \quad (5)$$

Выбор той или иной нормы определяется предъявляемыми к решению требованиями. Например, евклидову норму применяют тогда, когда нужно минимизировать средне-квадратическую ошибку решения, $\|\cdot\|_\infty$ — если минимальной должна быть максимальная из погрешностей переменных x_1, \dots, x_n .

Для формулировок условий сходимости итерационных методов и понятия устойчивости решения по отношению к возмущениям коэффициентов системы потребуется аналогичная числовая величина для матриц. Она называется *матричной нормой*. Пусть \mathbb{M}_n — пространство числовых квадратных матриц размерности n . *Нормой матрицы* $A \in \mathbb{M}_n$ называется числовая функция $\varphi: \mathbb{M}_n \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $\varphi(A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbb{O}_n$, \mathbb{O}_n — нулевая матрица размерности n (нулевой элемент пространства \mathbb{M}_n);
- 2) $\varphi(\lambda A) = |\lambda| \varphi(A)$ для любого действительного числа λ и любой $A \in \mathbb{M}_n$;
- 3) $\varphi(A + B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$ для любых $A, B \in \mathbb{M}_n$ (неравенство треугольника);
- 4) $\varphi(AB) \leq \varphi(A) \varphi(B)$ для любых $A, B \in \mathbb{M}_n$.

Норма матрицы A обозначается так же, как и векторная: $\varphi(A) = \|A\|$. Матричную норму можно определить бесконечным множеством способов. Так как в вычислительных задачах линейной алгебры требуется оценивать и векторы, и матрицы, то целесообразно вводить норму так, чтобы она разумным образом была связана с применяющейся вектор-

ной нормой. Именно, будем говорить, что матричная норма *согласована* с данной векторной, если

$$\|A\bar{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\bar{x}\| \quad (6)$$

для любых $\bar{x} \in \mathbb{U}^n$ и $A \in \mathbb{M}_n$. Особое значение при оценках имеет наименьшая норма матрицы, согласованная с данной векторной. Из (6) очевидно следует, что она равна максимуму отношения норм векторов $A\bar{x}$ и \bar{x} при всех ненулевых $\bar{x} \in \mathbb{U}^n$:

$$\|A\| = \sup_{\bar{x} \neq 0} \frac{\|A\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}. \quad (7)$$

Эту норму называют *подчинённой* соответствующей векторной. Можно показать, что её можно вычислять как максимум норм $A\bar{x}$ на единичной сфере $\|\bar{x}\| = 1$:

$$\|A\| = \sup_{\|\bar{x}\|=1} \|A\bar{x}\|. \quad (8)$$

Именно подчинённая норма, наименьшая из всех согласованных, определённая формулой (7), применяется при оценках матриц.

Приведём без доказательства формулы матричных норм, подчинённых введённым выше векторным. Норме (2) подчинена матричная норма

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

норме (3) —

$$\|A\|_2 = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^T A) \right)^{1/2},$$

где $\lambda_i(A^T A)$ — собственные числа матрицы $A^T A$ (она является эрмитовой, следовательно, неотрицательно определённой, поэтому все её собственные числа вещественны и неотрицательны). Эту норму называют *спектральной*, или *верхней гранью* матрицы.

Кубической норме (4) подчинена

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Нормы $\|A\|_\infty$ и $\|A\|_1$ связаны неравенством

$$\frac{1}{n} \|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n \|A\|_\infty.$$

Пример. Вычислить нормы матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Собственные числа данной матрицы $A^T A$: $\frac{33 \pm 5\sqrt{41}}{2}$ и 2; поэтому

$$\|A\|_2 = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^T A) \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{33 + 5\sqrt{41}}{2}} \approx 5,702.$$

Остальные нормы вычисляются совсем просто:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq 3} \sum_{i=1}^3 |a_{ij}| = 6;$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| = 6.$$

3. Прямые методы

В прямых методах точное (без учёта вычислительных погрешностей) решение достигается за конечное число шагов. Число необходимых арифметических операций в них зависит только от вычислительной схемы и порядка матрицы системы.

3.1. Метод Гаусса

Этот простой и естественный метод основан на последовательном исключении переменных. Он имеет несколько вычислительных схем. Здесь будет рассмотрена только *схема единственного деления*.

Алгоритм метода Гаусса состоит из *прямого* и *обратного хода*. На первом матрица системы приводится к треугольному виду, на втором — вычисляются значения переменных, начиная с последнего. Итак, начнём описание алгоритма с прямого хода.

Дана система (1) с невырожденной матрицей (для большей наглядности она записана в развёрнутом виде):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Опишем первый шаг прямого хода. Пусть $a_{11} \neq 0$. Если это условие не выполняется, то перестановкой уравнений (соответственно, строк матрицы) или переименованием переменных (перестановкой столбцов) можно добиться того, чтобы на месте a_{11} оказался ненулевой коэффициент. Число a_{11} называется *ведущим элементом* первого шага. Сначала вычисляются коэффициенты

$$\mu_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}},$$

$i = 2, \dots, n$. Затем i -е уравнение ($i = 2, \dots, n$) заменяется разностью между ним и первым, умноженным на μ_{i1} . Первое уравнение остаётся неизменным. В результате получается система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}, \end{cases}$$

где $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j}\mu_{i1}$, $i = 2, \dots, n$, $j = 2, \dots, n$, $b_i^{(1)} = b_i - b_1\mu_{i1}$, $i = 2, \dots, n$, у которой переменная x_1 исключена из второго, третьего и т.д. уравнений.

Таким образом, происходит последовательное исключение переменных. Ниже приведены вид системы в результате выполнения k -го шага и расчётные формулы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2k}^{(1)}x_k + a_{2,k+1}^{(1)}x_{k+1} + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \vdots \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + a_{k,k+1}^{(k-1)}x_{k+1} + \dots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)}, \\ a_{k+1,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{k+1,n}^{(k)}x_n = b_{k+1}^{(k)}, \\ \vdots \\ a_{n,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{nn}^{(k)}x_n = b_n^{(k)}, \end{cases}$$

где $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}\mu_{ik}$, $i = k+1, \dots, n$, $j = k+1, \dots, n$; $b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - b_k^{(k-1)}\mu_{ik}$,

$$\mu_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},$$

$i = k+1, \dots, n$, $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ — ведущий элемент.

После $(n-1)$ -го шага система приводится к треугольному виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \vdots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n = b_{n-1}^{(n-2)}, \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}. \end{array} \right.$$

На этом прямой ход метода Гаусса закончен.

На обратном ходе вычисляются значения переменных. Из последнего уравнения находим x_n :

$$a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \Rightarrow x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \quad (9)$$

(если матрица системы невырожденная, то $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$). Далее, из предпоследнего — x_{n-1} :

$$a_{n-1,n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n = b_{n-1}^{(n-2)} \Rightarrow x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}} \left(b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n \right)$$

($a_{n-1,n-1}^{(n-2)} \neq 0$ как ведущий элемент $(n-1)$ -го шага). Продолжая двигаться по системе в обратном направлении, получаем значения всех переменных. Общая расчётная формула:

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}^{(i-1)}} \left(b_i^{(i-1)} - a_{i,n}^{(i-1)}x_n - a_{i,n-1}^{(i-1)}x_{n-1} - \dots - a_{i,i+1}^{(i-1)}x_{i+1} \right),$$

$i = n-1, \dots, 1$; x_n вычисляется по формуле (9).

Число арифметических операций на прямом ходе метода Гаусса равно примерно $\frac{2}{3}n^3$, или $O(n^3)$, на обратном — $O(n^2)$. Поэтому при больших n вычислительная сложность обратного хода пренебрежимо мала по сравнению с прямым.

Заметим, что если на каком-то шаге ведущий элемент оказывается близким к нулю, то деление на него, чего требуют алгоритмы обоих ходов, может привести к большим погрешностям. В этом случае применяют другие вычислительные схемы, например, частичного или полного выбора.

Преимущества метода Гаусса заключаются в его простоте и универсальности: он применим для любых матриц. Однако в этом кроется и его недостаток: он никак не использует структуру матрицы, поэтому для матриц специального вида (разреженных, треугольных или близких к ним) вычислительная сложность та же, что и для матриц общего вида. Кроме того, метод Гаусса применим для систем линейных уравнений и тогда, когда

она может иметь и бесконечно много решений или не иметь решений. Применяя к системе все шаги прямого хода, получаем равносильную систему, по треугольному виду которой можно судить о числе решений. Для систем со специальными матрицами лучше применять методы, разработанные под них. Одним из них является *метод прогонки*.

Пример. Исследовать методом Гаусса систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Приводим систему к равносильному виду

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ -4x_2 - 8x_3 = -32, \\ -x_2 - 2x_3 = -8, \\ -x_2 - 7x_3 = -23, \\ -x_2 - 3x_3 = -11. \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ -4x_2 - 8x_3 = -32, \\ 0 = 0, \\ -20x_3 = -60, \\ 0 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ -4x_2 - 8x_3 = -32, \\ -20x_3 = -60, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Система пяти уравнений с тремя неизвестными имеет единственное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Пример. Рассмотрим еще один пример:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Методом исключения систему можно привести к виду

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ -12x_2 + 4x_3 = 4, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Решение не единственное:

$$x_1 = -2 - x_3,$$

$$x_2 = \frac{x_3 - 1}{3},$$

$$x_3 = r,$$

$r \in \mathbb{R}$.

Пример. Можно также привести пример системы, не имеющей решения:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

Система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ -12x_2 + 4x_3 = 4, \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Система не имеет решения.

3.2. Метод прогонки

Метод прогонки разработан для трёхдиагональных систем вида

$$\begin{cases} b_1x_1 + c_1x_2 & = d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & = d_2, \\ & \vdots \\ a_ix_{i-1} + b_ix_i + c_ix_{i+1} & = d_i, \\ & \vdots \\ a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n & = d_{n-1}, \\ & a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n. \end{cases} \quad (10)$$

Матрица системы (10) имеет специальную трёхдиагональную структуру:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & \dots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

Такие системы возникают при численном решении задач математической физики, интерполяции сплайнами и во многих других случаях.

Метод прогонки состоит из прямого и обратного ходов. На прямом вычисляются *прогоночные коэффициенты*. Опишем по шагам этот процесс.

На первом шаге в первом уравнении (10) x_1 выражается через x_2 :

$$b_1x_1 + c_1x_2 = d_1 \Rightarrow x_1 = -\frac{c_1}{b_1}x_2 + \frac{d_1}{b_1} = \alpha_1x_2 + \beta_1,$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \beta_1 = \frac{d_1}{b_1} -$$

прогнозные коэффициенты первого шага.

На втором шаге x_1 подставляется во второе уравнение, откуда находится x_2 через x_3 :

$$\begin{aligned} a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= d_2 \Rightarrow a_2(\alpha_1x_2 + \beta_1) + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_2 &= -\frac{c_2}{b_2 + a_2\alpha_1}x_3 + \frac{d_2 - a_2\beta_1}{b_2 + a_2\alpha_1} = \alpha_2x_3 + \beta_2, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_2 = -\frac{c_2}{b_2 + a_2\alpha_1}, \beta_2 = \frac{d_2 - a_2\beta_1}{b_2 + a_2\alpha_1} -$$

прогнозные коэффициенты второго шага.

Таким же образом вычисляются все остальные коэффициенты. В результате i -го шага получаем следующие формулы:

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad (11)$$

где

$$\alpha_i = -\frac{c_i}{b_i + a_i\alpha_{i-1}}, \beta_i = \frac{d_i - a_i\beta_{i-1}}{b_i + a_i\alpha_{i-1}},$$

$i = 2, 3, \dots, n-1$. На последнем, n -м, шаге найденное ранее значение $x_{n-1} = \alpha_{n-1}x_n + \beta_{n-1}$ подставляется в последнее уравнение (10) и определяется x_n :

$$\begin{aligned} a_nx_{n-1} + b_nx_n &= d_n \Rightarrow a_n(\alpha_{n-1}x_n + \beta_{n-1}) + b_nx_n = d_n \Rightarrow \\ \Rightarrow x_n &= \frac{d_n - a_n\beta_{n-1}}{b_n + a_n\alpha_{n-1}} = \beta_n. \end{aligned}$$

Приведём общую сводку формул прогнозных коэффициентов в наиболее удобном для программной реализации виде:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= b_1, \alpha_1 = -\frac{c_1}{\gamma_1}, \beta_1 = \frac{d_1}{\gamma_1}; \\ \gamma_i &= b_i + a_i\alpha_{i-1}, i = 2, 3, \dots, n; \alpha_i = -\frac{c_i}{\gamma_i}, i = 2, 3, \dots, n-1; \end{aligned}$$

$$\beta_i = \frac{d_i - a_i \beta_{i-1}}{\gamma_i}, i = 2, 3, \dots, n.$$

На обратном ходе вычисляются переменные x_i по рекуррентным формулам (11), начиная с последнего: $x_n = \beta_n$, $x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i$, $i = n-1, n-2, \dots, 1$.

Вычислительная сложность алгоритма метода прогонки составляет $O(n)$, что гораздо меньше, чем у метода Гаусса. Кроме того, трёхдиагональная структура матрицы позволяет использовать для её хранения только $3n - 2$ машинных слова.

Очевидно, что этот алгоритм осуществим только тогда, когда все $\gamma_i \neq 0$, и для меньших погрешностей желательно, чтобы они не были слишком близки к нулю. Достаточные условия для этого формулируются следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть коэффициенты системы (10) удовлетворяют *условиям диагонального преобладания*: $|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$, причём $c_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $\gamma_i \neq 0$ и $|\alpha_i| \leq 1$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Условия диагонального преобладания гарантируют не только применимость метода прогонки, но и его устойчивость к возмущениям матрицы системы.