ЛЕКЦИЯ 6.2 ДИСКРЕТНОЕ И БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

1. Дискретное преобразование Фурье

Преобразование Фурье имеет место только для непрерывных функций. Но на практике часто приходится иметь дело с дискретными данными. Для таких наборов данных был разработан дискретный аналог преобразования Фурье - дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Это одно из преобразований Фурье, которое широко применяется в алгоритмах цифровой обработки сигналов.

Пусть функция $y = f(t)$ задана таблицей 1.

Табл. 1. Функция $y = f(t)$

j	t_j	y_j
0	t_0	y_0
1	t_1	y_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	t_{n-1}	y_{n-1}

Переменная t означает время; функция f периодическая с периодом T, все точки t_j лежат в отрезке длиной T. Таким образом, функция f представляет собой дискретный периодический сигнал, заданный на отрезке длиной в период. Дискретные значения сигнала y_j называются *временными отсчётами*. Всего имеются n отсчётов. Здесь применяется обычная терминология преобразования Фурье: оно переводит сигнал из временной области в частотную.

Требуется по набору отсчётов $\{y_j\}$ построить вектор комплексных амплитуд гармонических сигналов в разложении исходного сигнала. Количество гармоник и их частоты определятся далее в процессе решения. По комплексным амплитудам можно будет вычислить обычные вещественные амплитуды и фазы гармоник. Таким образом, мы получим разложение дискретного сигнала на синусоидальные составляющие.

Примем за начало отсчёта времени момент t_0, т.е. $t_0 = 0$. Далее, пусть все отсчёты фиксировались с одинаковым шагом $h = \frac{T}{n}$. Тогда

$$t_j = hj = \frac{jT}{n},$$

$j = 0, \dots, n-1$. Фактически это означает, что промежуток времени длиной в период T разделили на n одинаковых отрезков и замерили сигнал в n точках деления, начиная с нуля.

Разложим функцию f в ряд Фурье в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{2\pi i k}{T} t\right),$$

для коэффициентов c_k выполняется условие

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty. \tag{1}$$

Это разложение справедливо и для табличных значений:

$$y_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{2\pi i k}{T} t_j\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{2\pi i k}{T} \cdot \frac{jT}{n}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{2\pi i k}{n} j\right). \tag{2}$$

Далее, для экспоненты верно равенство

$$\exp\left(\frac{2\pi i}{n}(k + mn)j\right) = \exp\left(\frac{2\pi i k}{n} j + \frac{2\pi i m n}{n} j\right) = \exp\left(\frac{2\pi i k}{n} j\right) \cdot \exp(2\pi i \cdot mj) =$$

$$= \exp\left(\frac{2\pi i k}{n} j\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exp\left(\frac{2\pi i}{n}(k + mn)j\right) = \exp\left(\frac{2\pi i k}{n} j\right).$$

Фактически это равенство выражает периодичность синусоидальных сигналов.

Из этого следует, что в разложении y_j в ряд Фурье (2) слагаемые, расположенные на расстоянии mn друг от друга, имеют одинаковые экспоненты (m – произвольное целое число). Поэтому их можно сгруппировать и привести подобные слагаемые, вынеся общую экспоненту за скобки. Разложение (2) примет вид

$$y_j = \sum_{k=0}^{n-1} F_k \exp\left(\frac{2\pi i k}{n} j\right) = \sum_{k=0}^{n-1} F_k \exp\left(\frac{2\pi i k}{T} t_j\right), \tag{3}$$

где

$$F_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{k+mn}.$$

При выполнении условия (1) ряды в формулах F_k сходятся, и F_k существуют. Таким образом, y_j разложено по n гармоникам с частотами $\frac{2\pi k}{T}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ – всего n гармоник. Следовательно, выходной вектор амплитуд – результат дискретного преобразования Фурье – должен иметь размер n. Его координаты - комплексные амплитуды разложения по n гармоникам. Полученная формула (3) – это обратное преобразование: по частотному описанию (т.е. по амплитудам F_k) оно даёт временные отсчёты y_j.

Выведем формулу прямого преобразования. Умножим обратное преобразование y_j на $\exp\left(-\frac{2\pi i m}{n} j\right)$:

$$y_j \exp\left(-\frac{2\pi i m}{n} j\right) = \sum_{k=0}^{n-1} F_k \exp\left(\frac{2\pi i k}{n} j\right) \exp\left(-\frac{2\pi i m}{n} j\right) = \sum_{k=0}^{n-1} F_k \exp\left(\frac{2\pi i (k-m)}{n} j\right).$$

Теперь просуммируем эти равенства по j от 0 до $n-1$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} y_j \exp\left(-\frac{2\pi i m}{n} j\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} F_k \exp\left(\frac{2\pi i (k-m)}{n} j\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} F_k \left(\sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi i (k-m)}{n} j\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} F_k \frac{1 - \exp\big(2\pi i (k-m)\big)}{1 - \exp\left(\frac{2\pi i (k-m)}{n}\right)}.$$

Вычислим дробь в последней сумме:

$$\frac{1 - \exp\big(2\pi i (k-m)\big)}{1 - \exp\left(\frac{2\pi i (k-m)}{n}\right)} = \begin{cases} 0, k \neq m, \\ n, k = m. \end{cases}$$

Очевидно, что при $k \neq m$ она равна нулю, т.к. числитель равен нулю, а знаменатель нет (можно в этом убедиться, применив формулу Эйлера). При $k = m$ имеем неопределённость $\frac{0}{0}$, раскрыв которую, получаем n. Тогда

$$\frac{1 - \exp\big(2\pi i (k-m)\big)}{1 - \exp\left(\frac{2\pi i (k-m)}{n}\right)} = n\delta_{km}$$

(δ_{km} - символ Кронекера). Итак, окончательно имеем

$$\sum_{j=0}^{n-1} y_j \exp\left(-\frac{2\pi i m}{n} j\right) = n \sum_{k=0}^{n-1} F_k \delta_{km} = nF_m \Rightarrow F_m = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \exp\left(-\frac{2\pi i m}{n} j\right).$$

Это и есть прямое преобразование Фурье. Обычно множитель $\frac{1}{n}$ переносят в обратное преобразование.

Таким образом, ДПФ – это пара взаимно обратных преобразований. Прямое преобразование Фурье определяется формулой

$$F_k = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \exp\left(-\frac{2\pi i k}{n} j\right), \tag{4}$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$; обратное - формулой

$$y_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F_k \exp\left(\frac{2\pi i k}{n} j\right), \tag{5}$$

$j = 0, 1, \dots, n-1$. Прямое получает на вход вектор временных отсчётов, сделанных с равными интервалами на периоде, выдаёт вектор комплексных амплитуд разложения сигнала по гармоникам с частотами $\frac{2\pi k}{T}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Обратное преобразование, наоборот, по частотам вычисляет временные отсчёты.

Из формул (4), (5) следует, что ДПФ линейно. Его можно записать в матричном виде:

$$\bar{F} = A\bar{y},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \exp\left(-\frac{2\pi i}{n}\right) & \exp\left(-\frac{4\pi i}{n}\right) & \cdots & \exp\left(-\frac{2\pi i}{n}(n-1)\right) \\ 1 & \exp\left(-\frac{4\pi i}{n}\right) & \exp\left(-\frac{8\pi i}{n}\right) & \cdots & \exp\left(-\frac{2\pi i}{n}2(n-1)\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \exp\left(-\frac{2\pi i}{n}(n-1)\right) & \exp\left(-\frac{2\pi i}{n}2(n-1)\right) & \cdots & \exp\left(-\frac{2\pi i}{n}(n-1)^2\right) \end{pmatrix},$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} F_0 \\ \vdots \\ F_{n-1} \end{pmatrix}, \bar{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix};$$

A – матрица системы, $\bar{y}$ - вектор временных отсчётов, $\bar{F}$ - вектор комплексных амплитуд. Обратное ДПФ также записывается в матричной форме:

$$\bar{y} = A^{-1}\bar{F}.$$

Из изложенного следует, что результат ДПФ не зависит от узлов таблицы точек t_j, достаточно задать число n и вектор временных отсчётов $\bar{y}$.

Пример. На рисунке 1 показаны вектор временных отсчётов $\bar{y}$, содержащий 10 значений, вектор комплексных амплитуд $\bar{F}$, рассчитанный по формулам (4), и результат обратного преобразования (5) $\bar{f}_0$.

$$f^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0.819 & 1.341 & 1.646 & 1.797 & 1.839 & 1.807 & 1.726 & 1.615 & 1.488 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 14.079 \\ -3.018+0.736i \\ -1.454+0.741i \\ -1.101+0.437i \\ -0.987+0.202i \\ -0.958+7.721i\cdot 10^{-15} \\ -0.987-0.202i \\ -1.101-0.437i \\ -1.454-0.741i \\ -3.018-0.736i \end{bmatrix} \qquad fo = \begin{bmatrix} -1.865\cdot 10^{-15}-2.887i\cdot 10^{-16} \\ 0.819+1.221i\cdot 10^{-15} \\ 1.341+5.329i\cdot 10^{-16} \\ 1.646-1.11i\cdot 10^{-15} \\ 1.797+1.554i\cdot 10^{-15} \\ 1.839+1.554i\cdot 10^{-16} \\ 1.807-6.217i\cdot 10^{-16} \\ 1.726-1.688i\cdot 10^{-15} \\ 1.615+2.043i\cdot 10^{-15} \\ 1.488-1.599i\cdot 10^{-15} \end{bmatrix}$$

Рис. 1. Векторы временных отсчётов $\bar{y}$, комплексных амплитуд $\bar{F}$, обратного преобразования $\bar{f}_0$ примера на с. 5

2. Быстрое преобразование Фурье

ДПФ является довольно трудоёмкой вычислительной операцией: оно требует $O(n^2)$ операций над комплексными числами. Поэтому до появления компьютеров оно использовалось редко. А в 60-х годах прошлого века были изобретены алгоритмы ускоренного расчёта ДПФ. Они получили название быстрое преобразование Фурье. Это же самое, что и дискретное, но оно записано в более удобной форме и оптимизировано по числу операций. Используя свойства экспонент и числа отсчётов n, алгоритм преобразования изменяют так, чтобы число вычислений уменьшилось. Разберём простой пример такого преобразования - прореживание по времени по основанию 2.

Вектор отсчётов разделяется на два вектора половинной длины (число отсчётов n чётно):

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{y}^0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \end{pmatrix}, \\ \bar{y}^1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_j^0 = y_{2j}, \\ y_j^1 = y_{2j+1}, \end{cases}$$

$j = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$. Подвектор $\bar{y}^0$ содержит отсчёты с четными индексами, $\bar{y}^1$ - с нечетными.

Введём обозначение

$$W_n^{j\cdot k} = \exp\left(-\frac{2\pi i k}{n} j\right);$$

$W_n^{j\cdot k}$ – это множитель при y_j в прямом ДПФ для k-й амплитуды (или элемент $\|A\|_{kj}$ матрицы A ДПФ). Тогда сумма (4) разобьётся на две суммы по чётным и нечётным индексам

$$F_k = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \exp\left(-\frac{2\pi i k}{n} j\right) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j W_n^{j\cdot k} =$$
$$= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(y_{2j} W_n^{2j\cdot k}\right) + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(y_{2j+1} W_n^{(2j+1)\cdot k}\right). \tag{6}$$

Преобразуем множитель $W_n^{(2j+1)\cdot k}$ во второй сумме (6):

$$W_n^{(2j+1)\cdot k} = \exp\left(-\frac{2\pi i k}{n}(2j+1)\right) = \exp\left(-\frac{2\pi i k}{n} 2j\right) \cdot \exp\left(-\frac{2\pi i k}{n}\right) =$$
$$= W_n^{1\cdot k} W_n^{2j\cdot k} = W_n^k W_n^{2j\cdot k},$$

и тогда формула преобразования будет иметь вид

$$F_k = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(y_{2j} W_n^{2j\cdot k}\right) + W_n^k \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(y_{2j+1} W_n^{2j\cdot k}\right). \tag{7}$$

Коэффициенты при y_{2j} и y_{2j+1} в обеих суммах (7) одинаковы. Запишем их как $W_{\frac{n}{2}}^{j\cdot k}$:

$$W_n^{2j\cdot k} = \exp\left(-\frac{2\pi i k}{n} 2j\right) = \exp\left(-\frac{2\pi i k}{\frac{n}{2}} j\right) = W_{\frac{n}{2}}^{j\cdot k}.$$

Тогда преобразование приводится к виду

$$F_k = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(y_{2j} \, W_{\frac{n}{2}}^{j \cdot k} \right) + W_n^k \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(y_{2j+1} \, W_{\frac{n}{2}}^{j \cdot k} \right). \tag{8}$$

Первая сумма (8) – это ДПФ половинного вектора отсчётов $\bar{y}^0$ (с чётными индексами), вторая - ДПФ $\bar{y}^1$ (с нечётными индексами). Получаем формулу

$$F_k = F_k^0 + W_n^k F_k^1,$$

$k = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1$, где

$$F_k^0 = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(y_{2j} \, W_{\frac{n}{2}}^{j \cdot k} \right),$$

$$F_k^1 = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(y_{2j+1} \, W_{\frac{n}{2}}^{j \cdot k} \right). \tag{9}$$

Здесь F_k^0 – компоненты вектора ДПФ по чётным отсчётам, F_k^1 – по нечётным. По формулам (9) вычисляются амплитуды первой половины спектра, т.е. первая половина вектора ДПФ по всем отсчётам.

Запишем это же преобразование (8) для второй половины спектра:

$$F_{k+\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(y_{2j} \, W_{\frac{n}{2}}^{j \cdot \left(k+\frac{n}{2}\right)} \right) + W_n^{k+\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(y_{2j+1} \, W_{\frac{n}{2}}^{j \cdot \left(k+\frac{n}{2}\right)} \right), \tag{10}$$

$k = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1$. Преобразуем множитель $W_{\frac{n}{2}}^{j \cdot \left(k+\frac{n}{2}\right)}$ в суммах (10):

$$W_{\frac{n}{2}}^{j \cdot \left(k+\frac{n}{2}\right)} = \exp\left(-\frac{2\pi i \left(k + \frac{n}{2}\right)}{\frac{n}{2}} j \right) = \exp\left(-\frac{2\pi i k}{\frac{n}{2}} j \right) \cdot \exp(-2\pi i j) =$$

$$= \exp\left(-\frac{2\pi i k}{\frac{n}{2}} j \right) \cdot 1 = W_{\frac{n}{2}}^{j \cdot k}.$$

То же сделаем с множителем $W_{\frac{n}{2}}^{k+\frac{n}{2}}$ перед второй суммой (10):

$$W_n^{k+\frac{n}{2}} = \exp\left(-\frac{2\pi i \left(k + \frac{n}{2}\right)}{n} \right) = \exp\left(-\frac{2\pi i k}{n} \right) \cdot \exp(-\pi i) = -\exp\left(-\frac{2\pi i k}{n} \right) =$$

$$= -W_n^k.$$

Тогда

$$F_{k+\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(y_{2j}\,W_{\frac{n}{2}}^{j\cdot\left(k+\frac{n}{2}\right)}\right) + W_n^{k+\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(y_{2j+1}\,W_{\frac{n}{2}}^{j\cdot\left(k+\frac{n}{2}\right)}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(y_{2j}W_{\frac{n}{2}}^{j\cdot k}\right) - W_n^k\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(y_{2j+1}\,W_{\frac{n}{2}}^{j\cdot k}\right) = F_k^0 - W_n^k F_k^1,$$

$k = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1.$

Итак, окончательно

$$\begin{cases} F_k = F_k^0 + W_n^k F_k^1, \\ F_{k+\frac{n}{2}} = F_k^0 - W_n^k F_k^1, \end{cases}$$

где

$$F_k^0 = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(y_{2j}\,W_{\frac{n}{2}}^{j\cdot k}\right), F_k^1 = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(y_{2j+1}\,W_{\frac{n}{2}}^{j\cdot k}\right),$$

$k = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1.$

Обратное БПФ производится по формулам

$$\begin{cases} y_j = Y_j^0 + W_n^{-j} Y_j^1, \\ y_{j+\frac{n}{2}} = Y_j^0 - W_n^{-j} Y_j^1, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$Y_j^0 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(F_k^0\,W_{\frac{n}{2}}^{-j\cdot k}\right), Y_j^1 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(F_k^1\,W_{\frac{n}{2}}^{-j\cdot k}\right),$$

$j = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1.$ По первой формуле (11) вычисляется первая половина вектора отсчётов, по второй – вторая; Y_j^0 – компоненты вектора обратного преобразования вектора амплитуд F^0 (по чётным отсчётам), Y_j^1 – F^1 (по нечётным).

Таким образом, количество вычислений сокращается за счёт повторного использования вспомогательных векторов ДПФ по чётным и нечётным отсчётам. Если ДПФ требует n^2 операций, то БПФ в такой реализации - $\frac{n^2}{2}$ операций. Описанный алгоритм является базой для очень популярного алгоритма Кули-Тьюки с основанием 2. Если n есть степень 2, такое разделение на два половинных вектора с чётными и нечётными отсчётами можно продолжать рекурсивно, пока не будет достигнуто двухточечное ДПФ, которое вычисляется тривиально. Сложность такого рекурсивного алгоритма $\mathrm{O}(n \log n)$.

Вообще, количество вычислений в ДПФ сокращается, если n не является простым числом. Пусть $n = r_1 \cdots r_k$. Числа $W_n^{j \cdot k}$ образуют матрицу A размера $n \times n$. Тогда A можно представить в виде произведения матриц A_1, … , A_k, имеющих $r_i n$ ненулевых элементов. Таким образом, число вычислений сокращается.

Пусть $n = pq$. Тогда амплитуда F_k прямого преобразования вычисляется по формуле

$$F_k = \sum_{j=0}^{q-1} W_n^{j \cdot k} \sum_{l=0}^{p-1} f(ql + j) W_N^{i \cdot k \cdot q}.$$

Числа

$$F_{k,j} = \sum_{l=0}^{p-1} f(ql + j) W_N^{i \cdot k \cdot q} -$$

это $k (\mathrm{mod}\, p)$-е результаты преобразования Фурье j-й группы. Для вычисления $F_{k,j}$ необходимо всего порядка $\mathrm{O}(q)$ операций, а для вычисления всех F_k – порядка $\mathrm{O}(nq)$ операций.