ЛЕКЦИЯ 12.2 МЕТОДЫ ХОРД И НЬЮТОНА

В этой части мы продолжим изучение методов численного решения нелинейных уравнений. Задача заключается в нахождении приближённого значения корня нелинейного уравнения

$$f(x) = 0. \qquad (1)$$

1. Метод хорд

1.1. Расчётная формула

Пусть на отрезке $[a; b]$ локализован корень уравнения (1), функция f непрерывна на нём и принимает на его концах значения разных знаков, т.е. $f(a)f(b) < 0$. Показать ход итерационного процесса лучше всего графически. Стягиваем крайние точки дуги кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ хордой (рис. 1). Точка пересечения хордой оси абсцисс – точка $(c; 0)$. Её абсциссу c возьмём за начальное приближение $x^{(0)}$ к корню (очевидно, что $x^{(0)} \in [a; b]$). Далее определяем, на каком из отрезков $[a; c]$ или $[c; b]$ находится корень.

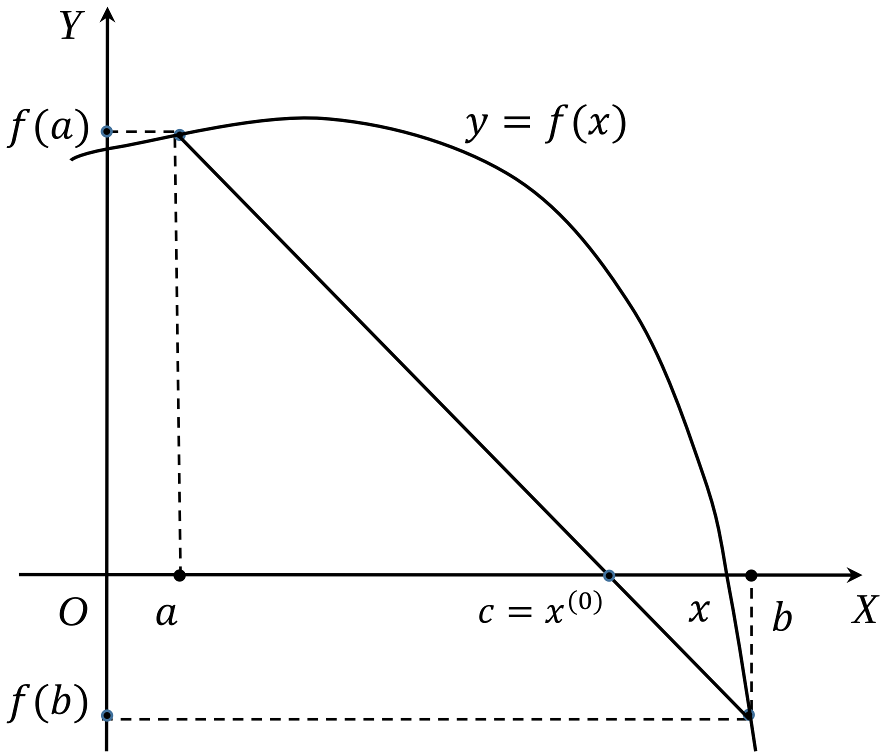

Рис. 1. Метод хорд

Для этого проверяем знак произведения $f(a)f(c)$. Если $f(a)f(c) < 0$, то корень на отрезке $[a;c]$, если $f(a)f(c) > 0$, то корень на отрезке $[c;b]$. За новый отрезок локализации $[a;b]$ возьмём тот, на котором находится корень:

$$[a;b] = \begin{cases}[a;c], \text{если } f(a)f(c) < 0,\\ [c;b], \text{если } f(a)f(c) > 0.\end{cases}$$

Для него проделываем ту же операцию: проводим хорду, находим точку пересечения с осью абсцисс, получаем новую итерацию $x^{(1)}$ (рис. 2). На этом рисунке корень находится на отрезке $[c;b]$, поэтому новый отрезок $[a;b]$ есть $[c;b]$. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность корня δ, т.е. до достижения неравенства $b - a < \delta$. Или же пока не будет достигнута точность выполнения приближённого равенства $f(c) \approx 0$: $|f(c)| < \varepsilon$.

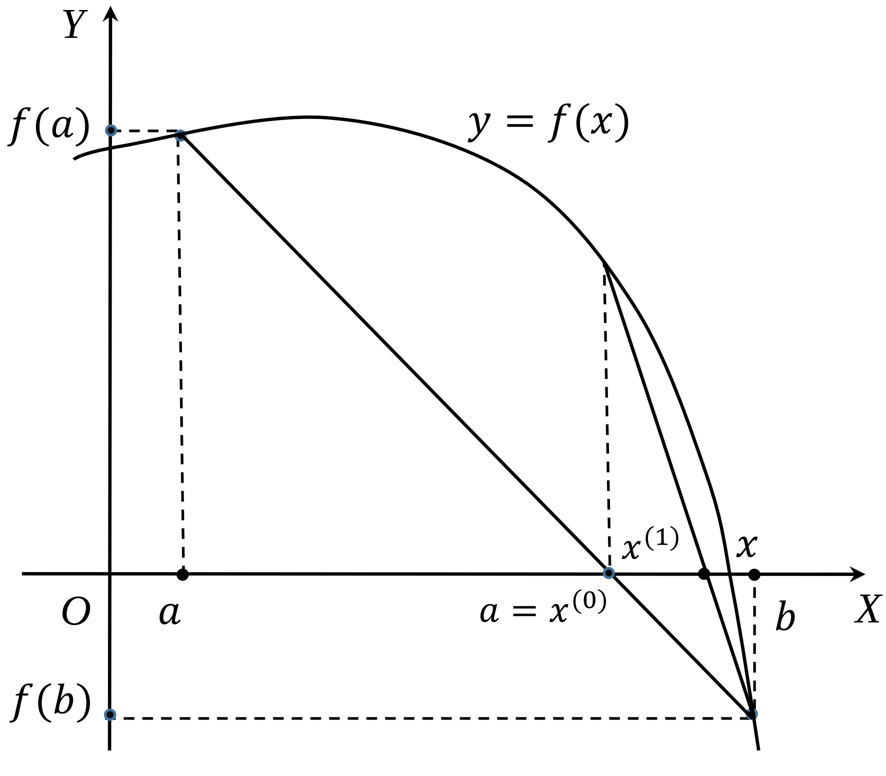

Рис. 2. Метод хорд. Вторая итерация

Выведем расчётную формулу метода. Пусть $[a;b]$ – текущий отрезок локализации на *k*-м шаге ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Запишем уравнение прямой, содержащей хорду:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Далее находим точку её пересечения с осью абсцисс. Подставляем в уравнение $y = 0$, $x = c$:

$$c = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}.$$

Учитывая, что c – очередная итерация, приходим к расчётной формуле метода:

$$x^{(k)} = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}, \qquad (2)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$. Чем меньше длина начального отрезка $[a; b]$, тем лучше приближение к корню, тем быстрее сойдётся метод.

На рисунке 3 изображена блок-схема алгоритма метода хорд.

1.2. Сходимость

Ход итерационного процесса сильно зависит от свойств функции f. Пусть, например, функция f непрерывна и монотонна и имеет монотонную и непрерывную производную на $[a; b]$. Пусть для определённости f монотонно возрастает, и f' не убывает на $[a; b]$, т.е. $f'(x) > 0$, $f''(x) \geq 0$, $x \in [a; b]$. Эта ситуация изображена на рисунке 4. Корень каждый раз оказывается на отрезке $[c; b]$. Поэтому на k-м шаге левый конец отрезка $[a; b]$ есть предыдущая итерация $x^{(k-1)}$. Расчётную формулу можно записать так:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - f\left(x^{(k-1)}\right)\frac{b - x^{(k-1)}}{f(b) - f(x^{(k-1)})},$$

$k = 1, 2, \dots, x^{(0)} = a$.

Это метод хорд с «закреплённым» правым концом. Можно строго аналитически доказать, что последовательность итераций не выходит за пределы отрезка $[a; b]$, не убывает и сходится к точному корню x.

Аналогично рассматриваются и остальные случаи знаков производных. Эти результаты можно свести в теорему 1.

Теорема 1. Пусть функция f непрерывна и монотонна, имеет непрерывную и монотонную производную на $[a; b]$, и $f(a)f(b) < 0$.

1. Если $f'(x) > 0, f''(x) \geq 0$ или $f'(x) < 0, f''(x) \leq 0$, то итерационная последовательность метода хорд вычисляется по формуле

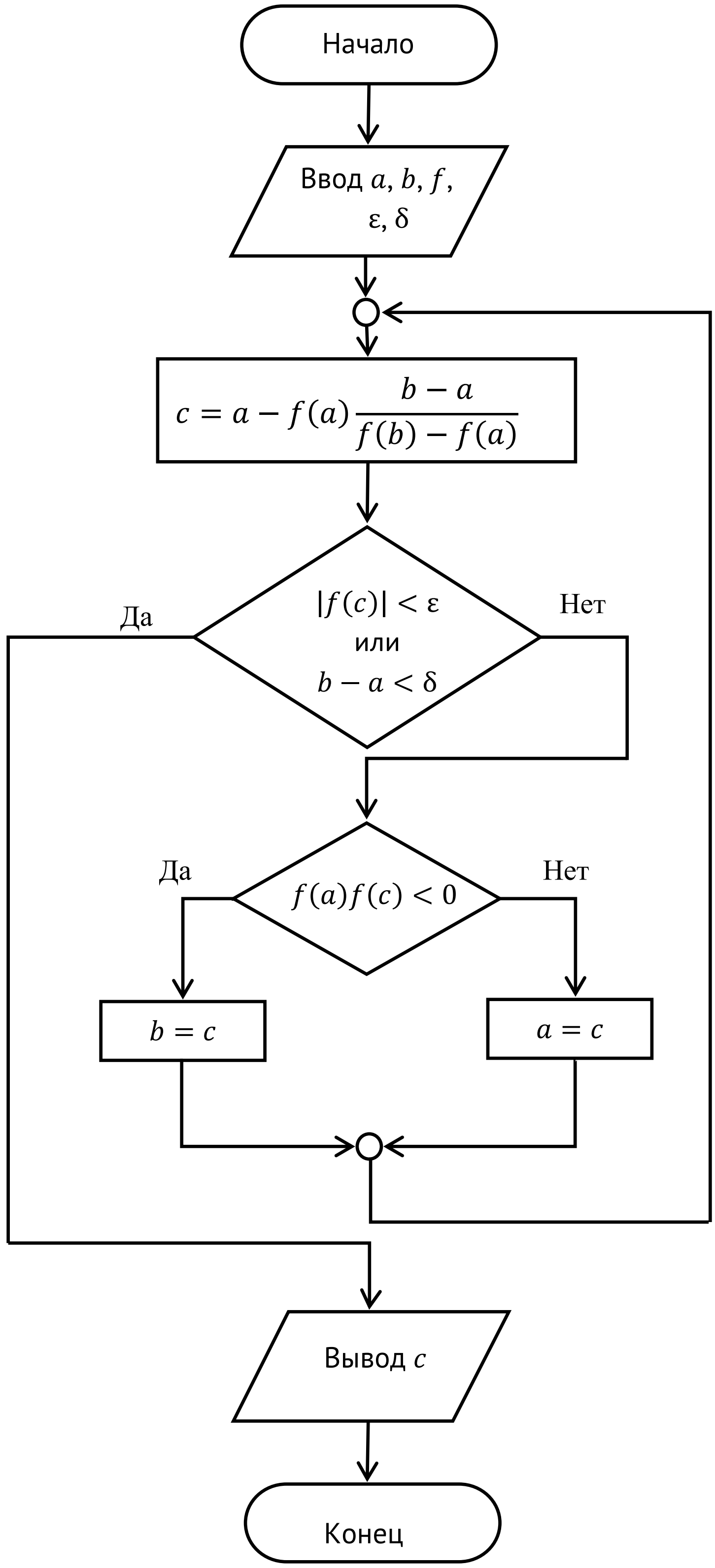

Рис. 3. Блок-схема алгоритма метода хорд

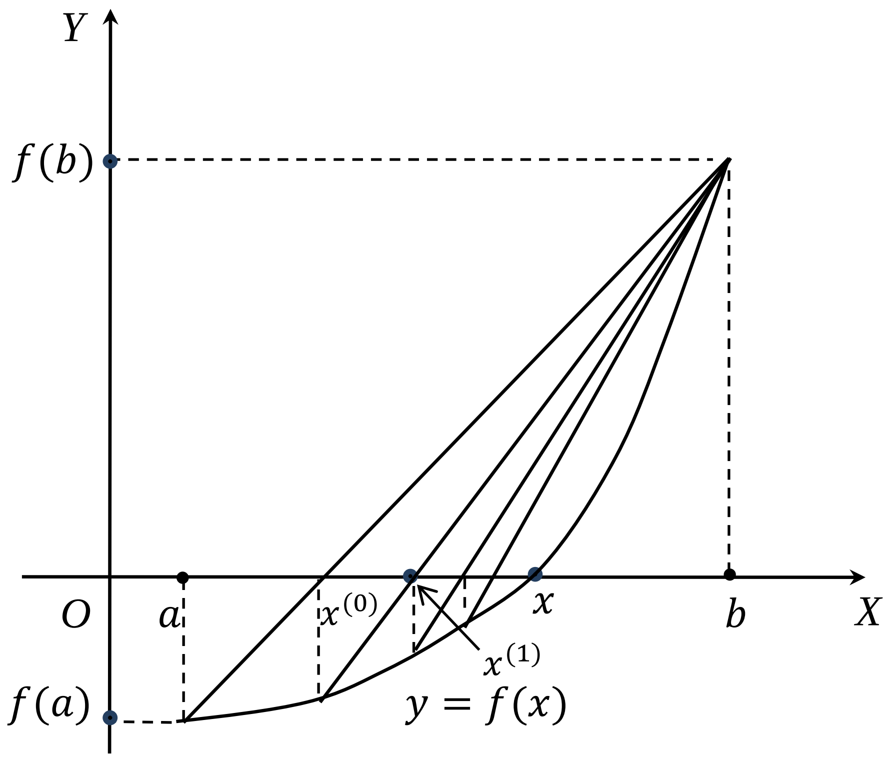

Рис. 4. Метод хорд, $f'(x) > 0, f''(x) \geq 0$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - f\left(x^{(k-1)}\right)\frac{b - x^{(k-1)}}{f(b) - f(x^{(k-1)})},$$

$k = 1, 2, \ldots, x^{(0)} = a$. При этом она не выходит за пределы отрезка $[a; b]$, не убывает и сходится к точному корню x.

2. Если $f'(x) < 0, f''(x) \geq 0$ или $f'(x) > 0, f''(x) \leq 0$, то итерационная последовательность метода хорд вычисляется по формуле

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - f(a)\frac{x^{(k-1)} - a}{f(x^{(k-1)}) - f(a)},$$

$k = 1, 2, \ldots, x^{(0)} = b$. При этом она не выходит за пределы отрезка $[a; b]$, не возрастает и сходится к точному корню x.

Первый случай (одинаковые знаки производных) – это метод хорд с «закреплённым» правым концом, второй (разные знаки) – с левым.

Теперь оценим погрешность итерации. Учитывая, что $f(x) = 0$, если x – точный корень, запишем $f\left(x^{(k)}\right)$ как

$$f\left(x^{(k)}\right) = f\left(x^{(k)}\right) - f(x)$$

и применим формулу Лагранжа:

$$f\left(x^{(k)}\right) - f(x) = \left(x^{(k)} - x\right)f'(\xi_k),$$

где ξ_k – некоторая точка между x и $x^{(k)}$. Отсюда следует равенство

$$x^{(k)} - x = \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'(\xi_k)},$$

из которого получаем оценку

$$\Delta x^{(k)} = \left|x - x^{(k)}\right| \leq \frac{\left|f\left(x^{(k)}\right)\right|}{m},$$

где

$$m = \min_{x \in [a;b]} |f'(x)|.$$

Эту оценку можно также использовать для останова вычислений наряду с описанными ранее.

Что касается скорости сходимости, то отметим, что она выше, чем у методов половинного деления и простой итерации, которые имеют линейную скорость. Нестрогие оценки показывают, что метод хорд имеет сходимость порядка

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618 \dots .$$

Этот результат справедлив, когда функция f дважды дифференцируема, а её производная не обращается в ноль на $[a; b]$.

Пример. Решим методом хорд уравнение $\sin x = 0$. Начинаем с отрезка локализации $[-0{,}5; 1{,}17]$. Легко проверить, что теорема 1 неприменима, «закреплённого конца» нет. В таблице 1 приведены несколько приближений, вычисленных по формуле (2). Видно, что для рассматриваемого уравнения метод хорд сходится быстрее метода половинного деления.

2. Метод Ньютона

Метод Ньютона (касательных) относится к быстро сходящимся. Его также лучше описать геометрически. Задаем некоторое начальное приближение к корню $x^{(0)}$. К графику функции f в точке с абсциссой $x^{(0)}$ проводим касательную (рис. 5). Точку пересечения касательной и оси абсцисс примем за следующее приближение к корню $x^{(1)}$. Затем в точке с абсциссой $x^{(1)}$ проводим еще касательную, и пересечение ее с осью абсцисс – новое

Табл. 1. Итерации метода хорд в примере на с. 6

Шаг	1	2	3
a	$-0{,}5$	$-0{,}5$	$-0{,}003$
b	$1{,}17$	$0{,}072$	$0{,}072$
c	$0{,}072$	$-0{,}003$	$2 \cdot 10^{-6}$
$f(a)$	$-0{,}479$	$-0{,}479$	$-0{,}003$
$f(b)$	$0{,}921$	$0{,}329$	$0{,}072$
$f(c)$	$0{,}329$	$-0{,}082$	$2 \cdot 10^{-6}$
$b-a$	$1{,}67$	$0{,}572$	$0{,}074$

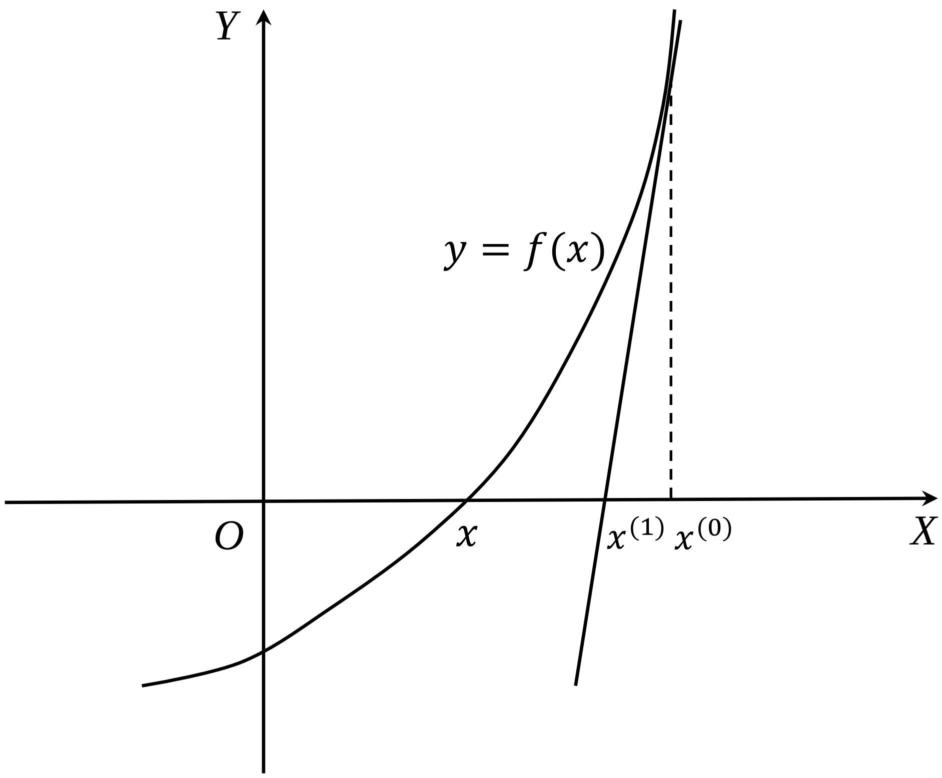

Рис. 5. Метод касательных

приближение к корню $x^{(2)}$ (рис. 6). Затем для $x^{(2)}$ повторяется та же процедура и т.д.

Выведем формулу метода. Пусть получена итерация $x^{(k-1)}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $\left(x^{(k-1)}; f\left(x^{(k-1)}\right)\right)$ имеет вид

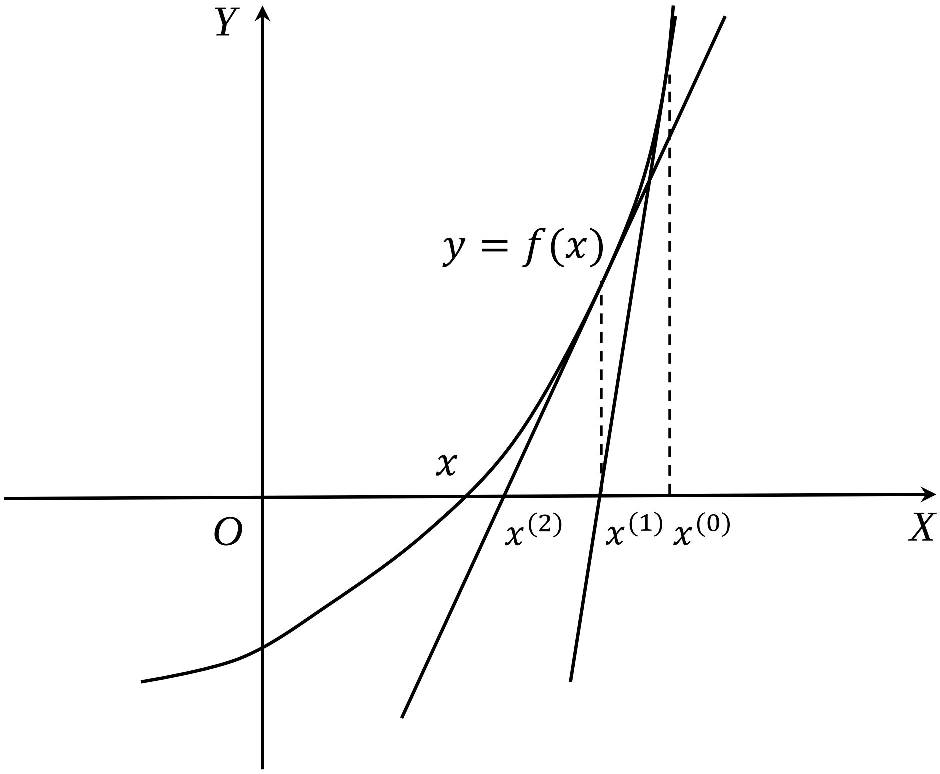

Рис. 6. Метод касательных. Вторая итерация

$$y = f\left(x^{(k-1)}\right) + f'\left(x^{(k-1)}\right)\left(x - x^{(k-1)}\right). \tag{3}$$

Теперь найдём новую итерацию $x^{(k)}$. Подставляя $y = 0$, $x = x^{(k)}$ в (3) ($x^{(k)}$ – абсцисса точки пересечения касательной с осью OX), получаем

$$f\left(x^{(k-1)}\right) + f'\left(x^{(k-1)}\right)\left(x^{(k)} - x^{(k-1)}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f\left(x^{(k-1)}\right)}{f'\left(x^{(k-1)}\right)}, \tag{4}$$

$k = 1, 2, \ldots$. Это и есть расчётная формула. Для корректности метода необходимо неравенство нулю производной в некоторой окрестности корня.

Понятно, что последовательность $\left\{x^{(k)}\right\}$ может не сходиться к корню. На рисунке 7 показано, как первая итерация вышла за пределы отрезка локализации $[a; b]$. Теорема 2 даёт некоторые достаточные условия сходимости.

Теорема 2. Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема на $[a; b]$, кроме того, пусть производные f', f'' сохраняют знак на $[a; b]$. Тогда итерационная последовательность $\left\{x^{(k)}\right\}$ сходится к корню x при любом начальном приближении $x^{(0)} \in [a; b]$.

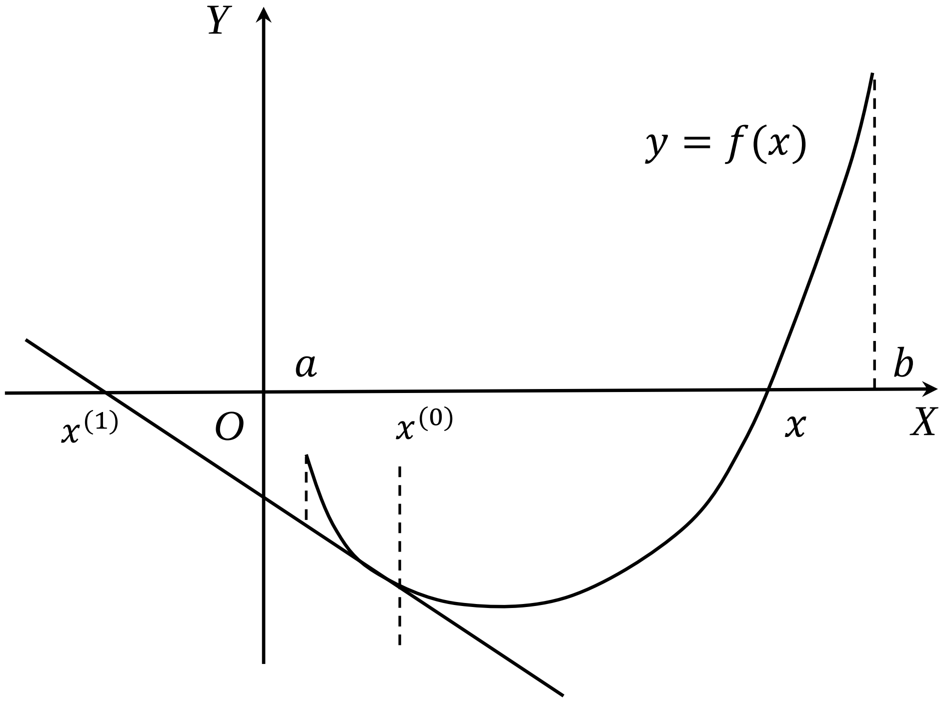

Рис. 7. Расходимость метода касательных

Скорость сходимости метода определяет теорема 3.

Теорема 3. Пусть функция f удовлетворяет условиям:

$$|f'(x)| \geq m_1 > 0, |f''(x)| \leq M_2 < \infty, \ x \ \in [\ a; b];$$

Тогда последовательность $\{x^{(k)}\}$ метода Ньютона полностью принадлежит отрезку $[a; b]$ и сходится к корню x. При этом справедливы неравенства

$$\left|x - x^{(k+1)}\right| \leq \frac{M_2}{2m_1}\left|x - x^{(k)}\right|^2,$$

$$\left|x - x^{(k+1)}\right| \leq \frac{M_2}{2m_1}\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right|^2,$$

$k = 0, 1, 2, \dots .$

Из первого неравенства следует, что метод Ньютона имеет второй порядок сходимости, т.е. он самый быстрый из изученных нами. А второе позволяет оценивать погрешность новой итерации. Поэтому критерием останова может служить выполнение неравенства

$$\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right|^2 < \varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2m_1}{M_2}\varepsilon.$$

Эта оценка применяется для останова по достижении заданной точности корня.

Пример. Для уравнения $\sin x = 0$ построим несколько последовательных приближений к корню по формуле (4): $x_0 = 1{,}16$, $x_1 = -0{,}598$, $x_2 = 0{,}083$, $x_3 = -2 \cdot 10^{-4}$. Но метод может и не сходиться. В качестве начального приближения возьмем $x^{(0)} = 1{,}1656$. Методом Ньютона получим следующие приближения (см. табл. 2).

Табл. 2. Итерации метода Ньютона в примере на с. 8. Метод расходится

k	0	1	2	3	4	5	6
$x^{(k)}$	$1{,}1656$	$-1{,}1658$	$1{,}1667$	$-1{,}1718$	$1{,}2001$	$-1{,}373$	$3{,}6176$
$f(x^{(k)})$	$0{,}919$	$-0{,}9191$	$0{,}9195$	$-0{,}9215$	$0{,}9321$	$-0{,}9805$	$-0{,}4583$

При таком начальном приближении итерационная последовательность не сходится к корню.

Табл. 3. Итерации метода Ньютона в примере на с. 8. Метод сходится

$x^{(k)}$	$1{,}1655$	$-1{,}1652$	$1{,}1638$	$-1{,}1558$	$1{,}1139$	$-0{,}9204$	$0{,}394$	$-0{,}0217$
$f(x^{(k)})$	$0{,}919$	$-0{,}9189$	$0{,}9183$	$-0{,}9151$	$0{,}8974$	$-0{,}7959$	$0{,}3839$	$-0{,}0217$

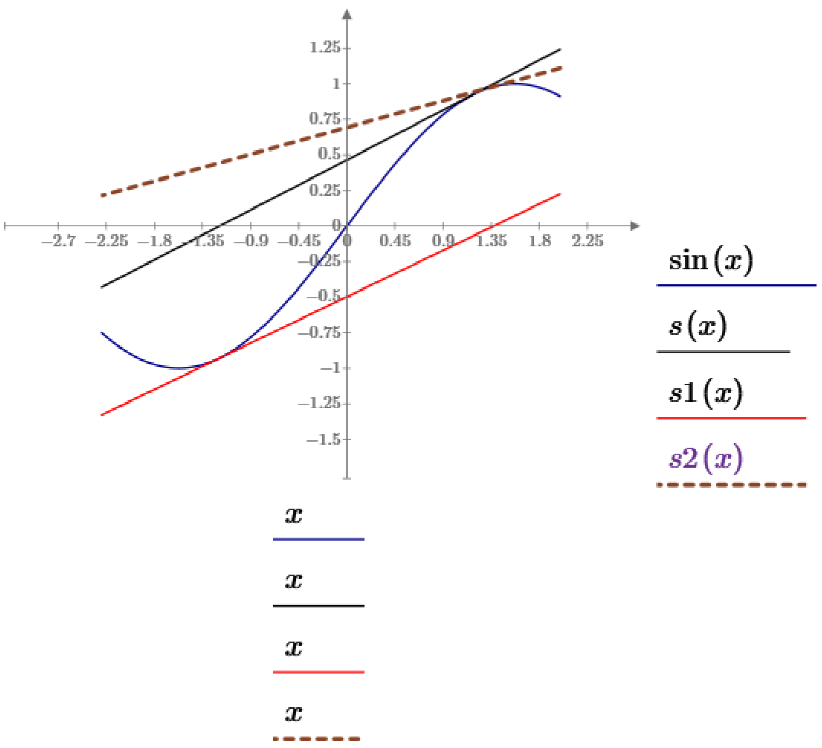

Рис. 8. Расходимость метода Ньютона в примере на с. 8

Изменим начальное приближение всего лишь на $0{,}0001$: $x^{(0)} = 1{,}1655$. В таблице 3 показано, что последовательность метода Ньютона сходится к корню $x = 0$.

Последовательность, не сходящаяся к корню $x = 0$, приведена на рисунке 8. Взято начальное приближение $x_0 = 1{,}17$. Прямые s, $s1$, $s2$ – первая, вторая и третья касательные соответственно.