ЛЕКЦИЯ 4.2 МИНИМИЗАЦИЯ ОЦЕНКИ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА ИНТЕРПОЛЯЦИИ

В первой части лекции была поставлена задача минимизации глобальной оценки погрешности полиномиальной интерполяции, которая особенно актуальна для больших таблиц. Более точно она формулируется так: как выбрать узлы интерполяции, чтобы глобальная оценка погрешности была минимально возможной для данной интерполируемой функции. Ключ к решению дают многочлены Чебышева. Самое важное их свойство для решения задачи заключается в том, что нормированные многочлены Чебышева являются наименее отклоняющимися (по модулю) от нуля на данном отрезке среди всех нормированных многочленов данной степени.

Теперь займемся задачей наилучшего приближения функции интерполяционными многочленами. Она формулируется следующим образом. Функция $y = f(x)$ задана формулой. Требуется выбрать интерполяционную сетку $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ таким образом, чтобы построенный по ней многочлен P_n наименее уклонялся от f на протяжении всей таблицы интерполяции.

Для более точной математической формулировки введем понятие *равномерной нормы* функции на отрезке. Пусть функция g определена на отрезке $[a; b]$. Величина

$$\|g\| = \sup_{x \in [a;b]} |g(x)|$$

называется равномерной нормой g на $[a; b]$. Тогда рассматриваемая задача является проблемой минимизации $\|f - P_n\|$ в классе полиномов P_n степени n на отрезке $[a; b]$, содержащем все узлы интерполяции. Минимизация производится за счет выбора интерполяционной сетки $\{x_j\}_{j=0}^{n}$.

Применение равномерной сетки с большим числом узлов не дает решения задачи. Более того, при $n \to \infty$ величина $\|f - P_n\|$ может неограниченно возрастать. Это явление известно как *феномен Рунге*. Рассмотрим *функцию Рунге*

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

на отрезке $[-1; 1]$. Очевидно, что она бесконечно дифференцируема, в таблице 1 приведены оценки абсолютных значений ее производных $f^{(n)}$ в точке $x = 1$. Видно, что они быстро возрастают, а из этого следует, что верхняя оценка погрешности $V(P_n)$ (см. (6), лекция 2.1) увеличивается с ростом n; вообще, можно доказать, что для равномерных сеток узлов

$$\lim_{n\to\infty} \|f - P_n\| = \infty. \quad (1)$$

Табл. 1. Значения производных функции Рунге в точке $x = 1$

n	1	2	3	4	5	6
$\left\|f^{(n)}(1)\right\|$	0,08	0,22	0,80	3,64	19,77	250

На рис. 1 изображены графики функции Рунге на отрезке $[-1; 1]$ и интерполяционных многочленов P_n, построенных на равномерных сетках, степеней $n = 3, 5, 7, 12$. Можно наблюдать значительные отклонения P_n от кривой функции Рунге вблизи концов интервала, увеличивающиеся с ростом n.

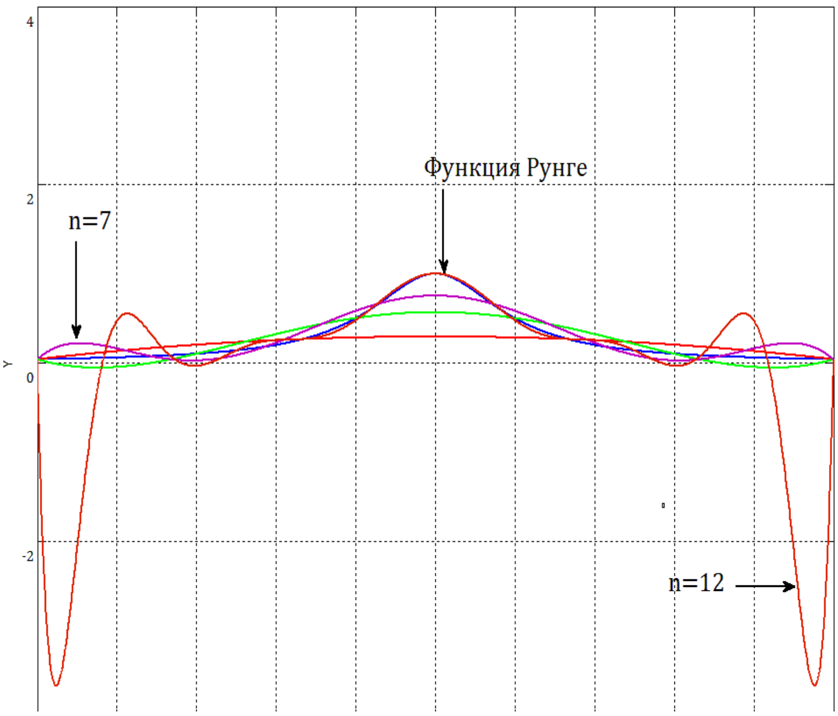

Рис. 1. Графики функции Рунге и её интерполяционных многочленов

Описанный эффект представляет собой проявление общего закона, формулируемого *теоремой Фабера*.

Теорема 1 (Фабера). Какова бы ни была стратегия выбора узлов интерполяции, найдется непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция f, для которой выполняется предельное соотношение (1).

Это утверждение отрицает возможность решения задачи равномерного приближения при какой-либо фиксированной стратегии построения интерполяционной сетки (например, равномерной). Но дело в том, что рассматриваемая задача была поставлена с другой стороны: по данной функции построить оптимальную интерполяционную сетку. Теоретическую возможность этого обосновывает следующая теорема.

Теорема 2 (Марцинкевича). Для любой непрерывной на $[a;b]$ функции f существует такая последовательность интерполяционных сеток, что построенные по ней интерполяционные полиномы равномерно сходятся к f, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\|f-P_n\|=0.$$

Эта теорема утверждает, что решение задачи существует для любой непрерывной функции. Приступим к его построению.

Пусть функция f приближена интерполяционным многочленом P_n степени n по узлам $x_0, x_1, \dots, x_n$; $[a;b]$ — отрезок, содержащий все узлы. Из (6) лекции 2.1 следует

$$\|f-P_n\|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\|Q_{n+1}\|. \tag{2}$$

Минимизируем правую часть оценки (2) за счет выбора узлов интерполяции. Многочлен $Q_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ — нормированный, поэтому согласно (6) лекции 4.1

$$\|Q_{n+1}\|\ge(b-a)^{n+1}2^{1-2(n+1)}=\left\|\bar{T}_{n+1}^{[a;b]}\right\| \tag{3}$$

(многочлены Q_{n+1}, $\bar{T}_{n+1}^{[a;b]}$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, для них понятия $\max$ и $\sup$ эквивалентны). Если взять в качестве узлов интерполяции корни полинома $\bar{T}_{n+1}^{[a;b]}$

$$x_m=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi(2m-1)}{2(n+1)}, \tag{4}$$

$m=1,\dots,n+1$, то Q_{n+1} совпадет с $\bar{T}_{n+1}^{[a;b]}$:

$$Q_{n+1}(x)=\bar{T}_{n+1}^{[a;b]}(x)=(b-a)^{n+1}2^{1-2(n+1)}T_{n+1}\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right).$$

Таким образом, в (3) будет достигнуто равенство, и правая часть оценки (2) станет минимальной.

Итак, при выборе узлов интерполяции (4), являющихся нулями полинома

$$\bar{T}_{n+1}^{[a;b]}(x) = (b-a)^{n+1}2^{1-2(n+1)}T_{n+1}\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right),$$

где T_{n+1}— многочлен Чебышева степени $n+1$, имеет место наилучшая из оценок (2)

$$\|f-P_n\| \le \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}2^{1-2(n+1)}}{(n+1)!}.$$

Для любых других интерполяционных сеток правая часть оценки (2) будет выше.

Пример. Пусть задана функция

$$f(t) = 6\frac{t^3+3}{t+3}\sin(t^3+2).$$

Рассмотрим интерполяционные приближения этой функции на отрезке $[-1;1]$. Одно приближение P_4 полиномом 4-й степени с равномерным расположением узлов с шагом $h = 0{,}5$, $x_0 = -1, \dots, x_4 = 1$. Второе приближение PT_4 с узлами, совпадающими с корнями полинома Чебышева T_5 степени 5

$$x_m = \cos\frac{\pi(2m-1)}{10},$$

$m = 1, \dots, 5$. Построив полиномы P_4 и PT_4, вычислим также функции погрешностей $R_4(x) = |f(x) - P_4(x)|$, $RT_4(x) = |f(x) - PT_4(x)|$. Они оказались таковы, что наибольшая погрешность на отрезке приближения меньше для узлов Чебышева. Графики погрешностей приведены на рис. 2. Синяя линия – график R_4, красная - RT_4. Хотя в некоторых частях отрезка приближение с равномерными узлами лучше.

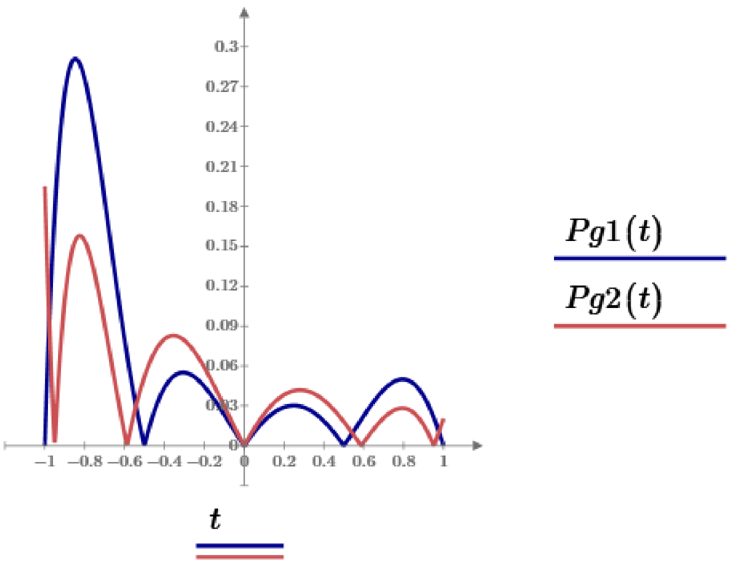

Рис. 2. Графики погрешностей приближения функции примера на с.4