ЛЕКЦИЯ 13.2 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

1. Алгоритм метода

Метод простой итерации знаком нам по линейным системам. Он обобщается и на нелинейный случай.

Итак, надо найти приближённое решение нелинейной системы

$$\bar{F}(\bar{x}) = \bar{0}, \tag{1}$$

где $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор неизвестных, $\bar{F}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ – нелинейная вектор-функция от вектора $\bar{x}$. Система (1) приводится к эквивалентной

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{x}) \tag{2}$$

в векторной форме, или в развёрнутом виде

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

Такой переход сам по себе является нетривиальной задачей и требует индивидуального подхода. Ведь от функции $\bar{\varphi}$ зависит сходимость итерационной последовательности. Очень простой способ - переписать систему как

$$\bar{x} = \bar{x} + A\bar{F}(\bar{x}),$$

где A - невырожденная матрица. Тогда

$$\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{x} + A\bar{F}(\bar{x}).$$

Итерационный процесс реализуется точно так же, как в одномерном случае. Берётся начальная итерация $\bar{x}^{(0)}$ из области локализации, подставляется в правую часть уравнения $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{x})$, полученное значение принимается за следующую итерацию $\bar{x}^{(1)}$; $\bar{x}^{(1)}$ опять подставляется в правую часть и т.д. Расчётная формула выглядит так:

$$\bar{x}^{(k)} = \bar{\varphi}\left(\bar{x}^{(k-1)}\right), \tag{3}$$

$k = 1, 2, \dots$.

Если итерационная последовательность $\{\bar{x}^{(k)}\}$ имеет предел $\bar{x}$ и функция $\bar{\varphi}$ непрерывна в области локализации, то этот предел является решением системы. Это доказывается предельным переходом в равенстве (2):

$$\lim_{k\to\infty} \bar{x}^{\,(k)} = \lim_{k\to\infty} \bar{\varphi}\big(\bar{x}^{\,(k-1)}\big) = \bar{\varphi}\left(\lim_{k\to\infty} \bar{x}^{\,(k-1)}\right) \Rightarrow \bar{x} \; = \bar{\varphi}(\bar{x}\,).$$

Получили, что предел $\bar{x}$ удовлетворяет уравнению, а поскольку по определению области локализации в ней только одно решение, то предел $\bar{x}$ совпадает с ним.

2. Сходимость и оценка погрешности

Рассмотрим погрешность итерации $\bar{x}^{(k+1)}$. Для этого вычтем из расчётной формулы (3) уравнение (2). Получаем

$$\bar{x}^{\,(k+1)} - \bar{x} = \bar{\varphi}\big(\bar{x}^{\,(k)}\big) - \bar{\varphi}(\bar{x}).$$

Это векторное равенство расписываем покомпонентно и для разности $\varphi_i\big(\bar{x}^{\,(k)}\big) - \varphi_i(\bar{x})$ записываем формулу конечных приращений функции нескольких переменных:

$$x_i^{(k+1)} - x_i = \varphi_i\big(\bar{x}^{\,(k)}\big) - \varphi_i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_i\big(\bar{\xi}^{\,(k)}\big)\Big(x_j^{(k)} - x_j\Big), \tag{4}$$

$i = 1, \dots, n$. Предполагаем, что все функции φ_i удовлетворяют требованиям этой формулы: они определены и непрерывны в некоторой замкнутой области пространства $\mathbb{R}^n$, содержащей отрезок, соединяющий точки $\bar{x}^{\,(k)}$ и $\bar{x}$; имеют внутри неё непрерывные частные производные по всем аргументам; $\bar{\xi}^{\,(k)}$ – некоторая точка на отрезке от $\bar{x}^{\,(k)}$ к $\bar{x}$.

Серию n равенств (4) запишем в матричной форме:

$$\bar{x}^{\,(k+1)} - \bar{x} = \bar{\varphi}'\big(\bar{\xi}^{\,(k)}\big)\big(\bar{x}^{\,(k)} - \bar{x}\big),$$

где

$$\bar{\varphi}'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1(\bar{x}) & \dfrac{\partial}{\partial x_2}\varphi_1(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_n}\varphi_1(\bar{x}) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\varphi_2(\bar{x}) & \dfrac{\partial}{\partial x_2}\varphi_2(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_n}\varphi_2(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\varphi_n(\bar{x}) & \dfrac{\partial}{\partial x_2}\varphi_n(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_n}\varphi_n(\bar{x}) \end{pmatrix};$$

$\overline{\varphi}'$- функциональная матрица частных производных вектор-функции $\overline{\varphi}$ (Якоби), $\overline{\varphi}'\left(\bar{\xi}^{\,(k)}\right)$ – матрица Якоби в точке $\bar{\xi}^{\,(k)}$. Отсюда следует оценка абсолютной погрешности *(k+1)*-й итерации:

$$\Delta\bar{x}^{\,(k+1)} = \left\|\bar{x}^{\,(k+1)} - \bar{x}\right\| = \left\|\overline{\varphi}'\left(\bar{\xi}^{\,(k)}\right)\left(\bar{x}^{\,(k)} - \bar{x}\right)\right\| \le$$
$$\le \left\|\overline{\varphi}'\left(\bar{\xi}^{\,(k)}\right)\right\| \cdot \left\|\bar{x}^{\,(k)} - \bar{x}\right\| \tag{5}$$

(предполагаем, что применяется согласованная матричная норма, тогда норма произведения матрицы $\overline{\varphi}'\left(\bar{\xi}^{\,(k)}\right)$ на вектор $\bar{x}^{\,(k)} - \bar{x}$ не превосходит произведения их норм).

Из оценки (5) можно вывести достаточное условие сходимости. Пусть M_{ij} – максимум модуля частной производной $\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_i(\bar{x})$ в некоторой замкнутой области D пространства $\mathbb{R}^n$, содержащей отрезок, соединяющий точки $\bar{x}^{\,(k)}$ и $\bar{x}$:

$$M_{ij} = \max_{\bar{x}\in D}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_i(\bar{x})\right|.$$

Составим матрицу M из чисел M_{ij}:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда очевидно, что

$$\left\|\overline{\varphi}'\left(\bar{\xi}^{\,(k)}\right)\right\| \le \|M\|,$$

и из (5) следует

$$\Delta\bar{x}^{\,(k+1)} = \left\|\bar{x}^{\,(k+1)} - \bar{x}\right\| \le \left\|\bar{\varphi}'\left(\bar{\xi}^{\,(k)}\right)\right\| \cdot \left\|\bar{x}^{\,(k)} - \bar{x}\right\| \le \|M\| \cdot \left\|\bar{x}^{\,(k)} - \bar{x}\right\|. \tag{6}$$

Отсюда получаем достаточное условие сходимости. Если

$$\|M\| \le q < 1, \tag{7}$$

то в силу (6)

$$\Delta\bar{x}^{\,(k+1)} \le q\left\|\bar{x}^{\,(k)} - \bar{x}\right\|.$$

Последовательно применяем эту оценку:

$$\Delta\bar{x}^{\,(k)} = \left\|\bar{x}^{\,(k)} - \bar{x}\right\| \le q\left\|\bar{x}^{\,(k-1)} - \bar{x}\right\| \le \cdots \le q^k\left\|\bar{x}^{\,(0)} - \bar{x}\right\|.$$

Приходим к выводу, что

$$\Delta\bar{x}^{\,(k)} = \left\|\bar{x}^{\,(k)} - \bar{x}\right\| \le q^k\left\|\bar{x}^{\,(0)} - \bar{x}\right\|,$$

а это говорит о том, что при условии (7) метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q, т.е. его сходимость линейная.

Проверять условие (7) можно по любой матричной норме, согласованной с какой-либо векторной. Все введённые нами в лекции 10.1 нормы эквивалентны, поэтому сходимость по какой-то одной означает сходимость по остальным. В различных нормах условия сходимости, которые надо проверить для чисел M_{ij}, принимают такие формы:

$$\|M\|_1 < 1 \ \Leftrightarrow \ \sum_{i=1}^{n} M_{ij} < 1, j = 1, \dots, n,$$

$$\|M\|_\infty < 1 \ \Leftrightarrow \ \sum_{j=1}^{n} M_{ij} < 1, i = 1, \dots, n.$$

Матричная норма-один подчинена векторной норме-один (октаэдрической), матричная норма-бесконечность подчинена векторной норме-бесконечность (кубической).

Поскольку скорость сходимости линейная, можно использовать тот же критерий останова, что был описан для упрощённого метода Ньютона в лекции 13.1.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} f_1(x; y) = 2xe^{-y} + y = 0, \\ f_2(x; y) = 1{,}5ye^{y} + x = 0. \end{cases}$$

Если привести её к эквивалентному виду

$$\begin{cases} x = x - \lambda(2xe^{-y} + y), \\ y = y - \lambda(1{,}5ye^{y} + x), \end{cases}$$

то

$$\begin{cases} \varphi_1(x; y) = x - \lambda(2xe^{-y} + y), \\ \varphi_2(x; y) = y - \lambda(1{,}5ye^{y} + x), \end{cases}$$

и якобиан функции φ есть

$$A(x; y) = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda e^{-y} & -\lambda(-2xe^{-y} + 1) \\ -\lambda & 1 - 1{,}5\lambda(e^{y} + ye^{y}) \end{pmatrix}.$$

Будем строить итерации к решению $(0; 0)$. В его окрестности норма матрицы A меньше 1 при $\lambda = 0{,}5$. Последовательность приближений к решению приведена в таблице 1.

Для полученной последней итерации левая часть исходной системы равна

$$\begin{cases} f_1\left(x^{(k)}; y^{(k)}\right) = 0{,}004, \\ f_2\left(x^{(k)}; y^{(k)}\right) = -0{,}003. \end{cases}$$

В рассмотренном случае метод простой итерации сходится.

Табл. 1. Последовательность приближений в примере на с. 4

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^{(k)}$	0,4	−0,068	0,143	0,014	0,037	0,012	0,012	0,004
$y^{(k)}$	0,4	−0,248	−0,04	−0,077	−0,025	−0,024	−0,012	−0,005