Простейшая теория вероятностей

Высшая школа цифровой культуры
Университет ИТМО
dc@itmo.ru

Содержание

1 Приветственное слово

Здравствуйте, уважаемые слушатели. В этом семестре нам предстоит изучение прикладной статистики. Но чем же занимается статистика? В этом месте часто вспоминают известную злую шутку, говорящую, что в мире имеется три рода лжи: ложь вынужденная, которой есть оправдание; ложь наглая, для которой нет оправдания; и статистика. Впрочем, в пику этому высказыванию может быть приведена и другая цитата, уже из известного фильма: «Если бы не было статистики, мы бы даже не подозревали о том, как хорошо мы работаем». На самом деле первое высказывание не совсем справедливо и правомочно. Оно скорее относится к той статистике, которая собирается (к сбору данных), а не к той, которая отвечает за обработку этих самых данных. В наших лекциях пойдет речь о том, как умным образом обработать данные, и нигде не наврать. А когда все случайно, то очень непросто делать какие-либо неслучайные выводы. В этом и состоит сложность статистики, как науки.

На сегодняшний день статистике, конечно, нет необходимости лгать вынужденно или нагло; статистика решает важные задачи и обладает серьезными методами исследования, применяемыми в самых разнообразных областях знаний и деятельности современного человека. Статистика необходима и физикам, и биологам, и химикам, и инженерам. Статистикой пользуются лингвисты, историки, врачи, агрономы. Да если подумать, то, наверное, все в той или иной мере пользуются статистикой. Почему? Да потому что статистика работает с данными, а данных в настоящий момент много и они играют большую роль.

Как только возникает не единичный выброс, не отдельно стоящее явление, а массовое, целый набор данных, требуется применение статистических методов. Эти методы призваны выявить какую-то закономерность, порядок в данных, где, на первый взгляд, нет ничего и творится полный хаос. Во многих случаях для обнаружения какой-либо закономерности требуется проведение большого числа наблюдений при определенных условиях. Например, действенность того или иного медицинского препарата нельзя проверять только на одном испытуемом, ведь улучшение или ухудшение состояния пациента может быть вызвано многими факторами: индивидуальная переносимость препарата, активация иммунитета, специфическая реакция организма и многое-многое другое. Это лишь один из множества примеров, где могут применяться и применяются методы статистики.

Сами методы статистики во многом базируются на ветке математики, называемой теорией вероятностей. Часто статистику и вероятность и вовсе сливают вместе, называя изучаемую дисциплину чем-то вроде «Теория вероятностей и математическая статистика». Мы в своем курсе лекций тоже начнем не сразу со статистики, а сначала с необходимого аппарата теории вероятностей. В принципе, с понятием вероятности интуитивно знаком каждый из нас. Ведь идя на экзамен, мы хорошо себе представляем, на сколько вопросов из списка мы можем уверенно ответить, на сколько – худо-бедно, а на сколько вообще не можем. Зачем нам это знать? А очень просто: имея эти данные, мы оцениваем шансы получить ту или иную оценку. Вот она, интуитивная теория вероятностей. В первых нескольких лекциях мы попробуем интуитивное понятие о вероятности перенести на математический язык. Поехали!

2 Вероятностное пространство

2.1 Еще немного общих слов

Давайте немного подробнее обсудим ту схему, по которой мы планируем подобраться к изучению статистики. Будем перепрыгивать пропасть в два прыжка. В первых двух лекциях мы будем разбирать так называемую дискретную вероятность – теорию вероятностей в случае, когда пространство элементарных исходов (множество результатов случайного эксперимента) конечно. В этом случае все построения проводятся на пальцах, и в конце мы закончим двумя китами – важными для статистики законом больших чисел и частным случаем центральной предельной теоремы.

Затем еще в трех лекциях мы будем обсуждать уже общую теорию вероятностей, базируясь на интуитивных представлениях, полученных в первых двух лекциях. Вместо строгих доказательств, где это возможно, мы постараемся использовать «показательства» – геометрические образы, картинки, для объяснения тех или иных вещей. Интересующиеся слушатели могут найти строгие доказательства и обоснования большинства фактов в дополнительных материалах, приложенных к лекциям.

Почти все встречаемые и обсуждаемые понятия будут востребованы для понимания целей, аппарата и выводов статистики, так что мы рекомендуем тщательно в них разобраться.

2.2 Пространство элементарных исходов

Давайте для начала определим те объекты, с которыми имеет дело теория вероятностей. Теория вероятностей изучает математические модели массовых случайных экспериментов. Под экспериментом понимают определенный комплекс условий, в которых наблюдается то или иное явление. Можно утверждать, что одним из основных понятий теории вероятностей является понятие множества всех возможных результатов (или исходов) данного эксперимента.

Определение 2.2.1 *Пространством элементарных исходов называется множество Ω, содержащее всевозможные взаимоисключающие результаты данного эксперимента. Элементы ω множества Ω называются элементарными исходами.*

В данной лекции мы начнем с рассмотрения экспериментов, имеющих лишь конечное число исходов, тем самым $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. В принципе, природа эксперимента абсолютно не важна, но важно, что количество исходов конечно. Для понимания нового для нас понятия, приведем несколько примеров.

Пример 2.2.1 *Пусть случайный эксперимент заключается в однократном подбрасывании монеты, которая не может встать на ребро. Тогда, очевидно, пространство элементарных исходов состоит из двух элементов: выпал орел или выпала решка: $\Omega = \{Орел, Решка\}$. Для краткости исходы будем обозначать O, P, тогда $\Omega = \{O, P\}$.*

Несколько усложним предыдущий пример

Пример 2.2.2 *Пусть случайный эксперимент заключается в подбрасывании монеты, которая не может встать на ребро, n раз. Как будет в этом случае выглядеть пространство элементарных исходов? Элементарные исходы – это наборы вида $\omega = (a_1, a_2, ..., a_n)$, где a_i – либо орел, либо решка. Таким образом, пространство элементарных исходов Ω имеет вид*

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, ..., a_n),\ a_i \in \{O, P\}\}.$$

Например, при $n = 5$ исход (O, P, O, O, P) дословно означает, что в пяти бросаниях сначала выпал орел, потом выпала решка, затем дважды выпал орет, а затем снова решка.

Подумайте, а как в общем случае посчитать количество таких исходов? Мы ответим на этот вопрос несколько позже.

Приведем еще один стандартный пример.

Пример 2.2.3 *Предположим, что у нас есть некоторый цилиндр (шляпа), в которой 1 зеленый и 2 красных кролика. Случайный эксперимент заключается в вытаскивании наугад одного кролика. Можно ввести следующее пространство элементарных исходов $\Omega = \{Зеленый, Красный\}$. Легко видеть, что элементарные исходы не равновозможны, ведь шансов вытащить красного кролика больше, нежели зеленого.*

Можно описать пространство элементарных исходов иначе. Давайте занумеруем красных кроликов (то есть начнем их различать), тогда пространство элементарных исходов будет таким: $\Omega = \{Зеленый, Красный_1, Красный_2\}$. В этом примере все элементарные исходы оказываются равновозможными.

Пример 2.2.4 *Пусть дважды подбрасывается правильный тетраэдр, в вершинах которого которого написаны числа* $1, 2, 3, 4$. *Результат эксперимента — пара чисел* (i, j), *где* $i, j \in \{1, ..., 4\}$. *Например, результату* $(2, 3)$ *соответствует ситуация, представленная на экране. Как будет выглядеть пространство элементарных исходов? Можно описать его таким образом:*

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4) \end{array} \right\},$$

тогда все элементарные исходы будут равновозможны. По сути, в этом случае мы различаем первое и второе подбрасывания или, условно, считаем, что бросаем два различимых тетраэдра.

С другой стороны, пространство элементарных исходов может быть описано более коротко:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), \\ & (2,2), & (2,3), & (2,4), \\ & & (3,3), & (3,4), \\ & & & (4,4) \end{array} \right\}.$$

Здесь мы отождествляем пары $(1, 2)$ *и* $(2, 1)$ *и так далее. При таком описании пространства элементарных исходов у исходов вида* (i, j), *где* $i \neq j$ *шансов появиться в* 2 *раза больше, чем у исходов вида* (i, i).

2.3 События и операции над ними

Пусть Ω – пространство элементарных исходов. Введем важное для теории вероятностей понятие – понятие события.

Определение 2.3.1 *Событием* A *называется произвольное подмножество пространства элементарных исходов* Ω: $A \subset \Omega$.

Сразу приведем пример.

Пример 2.3.1 *Пусть случайный эксперимент заключается в трехкратном подбрасывании монеты, которая не может встать на ребро. Как мы знаем, пространство элементарных исходов – это тройки состояний монеты, где каждое состояние – это либо орел, либо решка:*

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, a_3),\ a_i \in \{O, P\}\}.$$

Тогда событие A – «выпало хотя бы два орла», состоит из следующих элементарных исходов:

$$A = \{(O, P, O), (O, O, P), (P, O, O), (O, O, O)\}.$$

Событие B – «не выпало ни одной решки», состоит лишь из одного элементарного исхода (O, O, O).

Так как события – это множества, то определены операции объединения событий, пересечения событий, разности событий, понятие дополнительного события. Дадим определения этим понятиям.

Определение 2.3.2 *Пусть Ω – пространство элементарных исходов, A, B – события. Тогда*

1. *Объединением событий A и B называют событие $A \cup B$, которое состоит из элементарных исходов, входящих либо в событие A, либо в B, то есть $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ или $\omega \in B\}$.*

2. *Пересечением событий A и B называют событие $A \cap B$, которое состоит из элементарных исходов, входящих одновременно как в событие A, так и в событие B, то есть $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ и $\omega \in B\}$.*

3. *Разностью событий A и B называют событие $A \backslash B$, которое состоит из элементарных исходов, входящих в событие A, но не входящих в событие B, то есть $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ и $\omega \notin B\}$.*

4. *Дополнительным событием к событию A называется событие $\overline{A}$, которое состоит из элементарных исходов, не входящих в A, то есть $\overline{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$.*

Пример 2.3.2 *Вернемся к рассмотрению примера с трехкратным подбрасыванием монеты. Напомним, что мы рассматривали два события: A – «выпало хотя бы два орла» и B – «не выпало ни одной решки»:*

$$A = \{(O, P, O), (O, O, P), (P, O, O), (O, O, O)\}, \quad B = \{O, O, O\}.$$

Тогда событие $\overline{B}$ заключается в том, что «выпала хотя бы одна решка». Событие $A \cap B$ заключается в том, что «выпало три орла» (не выпало ни одной решки), а событие $A \setminus B$ – «выпало ровно два орла».

Важно отметить следующее определение

Определение 2.3.3 *Пусть Ω – пространство элементарных исходов, а A, B – события. Если $A \cap B = \varnothing$, то события A и B называются несовместными.*

Иными словами, несовместные событие – это те события, которые не могут произойти одновременно.

Пример 2.3.3 *Снова вернемся к примеру с трехкратным подбрасыванием монеты. Событие B – не выпало ни одной решки и событие C – выпала одна решка, несовместны.*

Приведем еще важное для дальнейшего замечание, верное в случае конечного пространства элементарных исходов.

Замечание 2.3.1 *Множество всех подмножеств Ω, то есть множество всех событий, часто обозначают Σ.*

Пример 2.3.4 *Пусть пространство элементарных исходов состоит из трех элементов $\Omega = \{a, b, c\}$. Какие у этого пространства есть подмножества? Их всего 8, а именно:*

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

Значит, множество всех событий Σ состоит из восьми перечисленных элементов.

Замечание 2.3.2 *В случае, когда множество Ω конечно и содержит n элементов, множество всех его подмножеств тоже конечно и содержит 2^n элементов. В нашем примере это так – у трехэлементного множества множество всех подмножеств содержит $2^3 = 8$ элементов.*

Множество событий Σ обладает следующими важными свойствами: вместе с любыми двумя событиями $A, B \in \Sigma$, оно содержит их объединение, пересечение, разность, дополнительные события, то есть:

1. $A \cup B \in \Sigma$;
2. $A \cap B \in \Sigma$;
3. $A \setminus B \in \Sigma$;
4. $\overline{A} \in \Sigma$.

Определение 2.3.4 *Множество Σ, обладающее описанными выше четырьмя свойствами, называется алгеброй (в вероятности часто алгеброй событий).*

В третьей лекции мы усилим введенное понятие и будем говорить о σ-алгебре (в вероятности часто о σ-алгебре событий).

2.4 Простейшее вероятностное пространство

Разобравшись с понятиями элементарного эксперимента, пространства элементарных исходов и события, обратимся к центральному понятию теории вероятностей — понятию вероятностного пространства, включающему в себя все вышеизученное.

Определение 2.4.1 *Пусть имеется конечное пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, Σ – алгебра событий. Припишем каждому элементарному исходу ω_i число $\mathsf{p}_i \geq 0$ (называемое вероятностью элементарного исхода ω_i), потребовав, чтобы $\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 + ... + \mathsf{p}_n = 1$. Вероятностью $\mathsf{P}(A)$ события $A \in \Sigma$ называется число*

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i:\ \omega_i \in A} \mathsf{p}_i,$$

где сумма берется по всем элементарным исходам, входящим в событие A. Функция $\mathsf{P}(\cdot) : \Sigma \to \mathbb{R}$ называется вероятностной мерой.

Итак, повторяясь, вероятностью события A мы назвали число, равное сумме вероятностей всех элементарных исходов, входящих в событие A.

Определение 2.4.2 *Тройка $(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$, где Ω – пространство элементарных исходов, Σ – алгебра событий (множество всех событий), P – вероятностная мера, определенная на Σ, называется вероятностным пространством.*

Пример 2.4.1 *Рассмотрим толстую монету, то есть монету, которая может выпасть орлом, решкой, или встать на ребро, тем самым $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, где $\omega_1 =$ Орел, $\omega_2 =$ Решка, $\omega_3 =$ Ребро. Из чего состоит множество событий Σ? Как мы уже знаем, оно содержит 8 элементов, а именно: $\varnothing$ – «ничего не произошло», $\{\omega_1\}$ – «выпал орел», $\{\omega_2\}$ – «выпала решка», $\{\omega_3\}$ – «монета встала на ребро», $\{\omega_1, \omega_2\}$ – «или выпал орел, или выпала решка», $\{\omega_1, \omega_3\}$ – «или выпал орел, или монета встала на ребро», $\{\omega_2, \omega_3\}$ – «или выпала решка, или монета встала на ребро» и $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ – «что-то да произошло» = «или выпал орел, или выпала решка, или монета встала на ребро».*

Определим вероятности элементарных исходов ω_i следующим образом:

$$\mathsf{p}_1 = \mathsf{p}_2 = \frac{3}{8},\ \ \mathsf{p}_3 = \frac{1}{4}.$$

Ясно, что $\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 + \mathsf{p}_3 = 1$ и мы получили вероятностное пространство $(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$.

Как вычислить вероятность события $A = \{\omega_1, \omega_3\}$ – «или выпал орел, или монета встала на ребро»? Согласно определению, мы должны сложить вероятности тех элементарных исходов, которые входят в A. Таким образом,

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_3 = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$

Отметим свойства введенной конструкции.

Лемма 2.4.1 *Вероятностная мера обладает следующими свойствами:*

1. $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.
2. $0 \le \mathsf{P}(A) \le 1$ *для любого события* A.
3. $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$.
4. *Если* $A \cap B = \varnothing$, *то* $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$.
5. $\mathsf{P}(A \cup B) \le \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$.
6. $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$.
7. *Если* $A \subset B$, *то* $\mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$.
8. *Если* $A \subset B$, *то* $\mathsf{P}(A) \le \mathsf{P}(B)$.

Доказательство. 1. Ясно, что если событие – пустое множество, то суммирование в определении вероятности события идет по пустому множеству индексов, слагаемых в сумме нет, а потому сумма равна нулю. В свою очередь, так как событие Ω включает в себя все элементарные исходы, то сумма включает в себя все числа p_i, а их сумма, по определению, равна единице.
2. Так как все слагаемые суммы неотрицательны, то и сама сумма всегда неотрицательна. С другой стороны, сумма всех возможных p_i равна единице, а больше быть не может.
3. Распишем левую и правую части:

$$\sum_{i:\ w_i \in A \cup B} \mathsf{p}_i = \sum_{i:\ \omega_i \in A} \mathsf{p}_i + \sum_{i:\ \omega_i \in B} \mathsf{p}_i - \sum_{i:\ \omega_i \in A \cap B} \mathsf{p}_i.$$

Докажем формулу перебором случаев (их всего 4). Если $\omega_i \notin A \cup B$, то $\omega_i \notin A, \omega_i \notin B, \omega_i \notin A \cap B$, тем самым p_i не возникает ни в одной из рассматриваемых сумм. Если $\omega_i \in A, \omega_i \notin B$, то $\omega_i \in A \cup B$, $\omega_i \notin A \cap B$. Тем самым, p_i возникает в левой сумме и в первой сумме после знака равенства, тем самым равенство уравновешено. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

4. Это свойство элементарно следует из предыдущего, так как, в силу свойства 1, $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$.
5. Это свойство моментально следует из свойства 3 и того факта, что $\mathsf{P}(A \cap B) \geq 0$.
6. Так как $A \cap \overline{A} = \varnothing$ и $A \cup \overline{A} = \Omega$, то

$$1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(A \cup \overline{A}) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\overline{A}).$$

7. Так как $B = A \cup (B \setminus A)$, причем $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$, то по свойству 4

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A),$$

откуда и следует утверждение.
8. Следует из предыдущего пункта, пункта 2 и неравенства

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A) \geq \mathsf{P}(A)$$

$\square$

Замечание 2.4.1 *Все эти свойства легко иллюстрируются, если в качестве событий рассматривать множества A на плоскости, для которых определена площадь $\mathsf{P}(A)$.*

Определение 2.4.3 *Пусть A – событие. Если $A = \varnothing$, то событие называют невозможным. Если $A = \Omega$, то событие называют достоверным.*

На самом деле, свойства 3 и 5 могут быть обобщены, а именно

Лемма 2.4.2 *Пусть $A_1, ..., A_n$ – события, тогда*

1. $\mathsf{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i)$.

2. *Справедлива формула включений-исключений:*

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathsf{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathsf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... +$$

$$(-1)^{n-1}\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n).$$

Первое утверждение означает, что вероятность объединения произвольного числа событий не превосходит суммы вероятностей этих событий. Вторая же формула показывает, как эту вероятность посчитать. Оба утверждения легко доказываются по индукции с использованием вышеописанных свойств, так что мы не будем останавливаться на их доказательстве. Полезно проиллюстрировать формулу включений-исключений при $n = 3$, воспользовавшись аналогией с площадью и кругами на плоскости. Сделайте это. Пример интересного применения последней формулы мы покажем чуть позже.

2.5 Классическое определение вероятности

Частным случаем общей описанной схемы является так называемая классическая вероятностная схема. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ – пространство элементарных исходов, причем все они равновозможны, а значит $\mathsf{p}_1 = \mathsf{p}_2 = ... = \mathsf{p}_n = \frac{1}{n}$. Тогда вероятность произвольного события A вычисляется, как

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где $|A|$ ($|\Omega|$) – количество элементов в множестве A (Ω). Последнюю формулу часто читают так: вероятность события A равна отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу равновозможных элементарных исходов.

Пример 2.5.1 *Предположим, что у нас есть некоторая урна с шарами, в которой* 5 *зеленых и* 10 *красных шаров. Случайный эксперимент заключается в вытаскивании наугад одного шара. Какова вероятность события A, что вытащен красный шар? Как мы уже отмечали, если выбрать пространство элементарных исходов $\Omega = \{\text{Зеленый}, \text{Красный}\}$, состоящим из двух элементов, то элементарные исходы не будут равновозможными, а значит классическая вероятностная схема не применима.*
Будем считать, что все шары различны и занумеруем их. Тогда $\Omega = \{\text{Зеленый}_1, ..., \text{Зеленый}_5, \text{Красный}_1, ..., \text{Красный}_{10}\}$, и каждый исход равновозможен. Событию A благоприятствуют 10 *элементарных исходов $A = \{\text{Красный}_1, ..., \text{Красный}_{10}\}$. Так как $|A| = 10$, $|\Omega| = 15$, то*

$$\mathsf{P}(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

3 Отступление про комбинаторику

Для использования классической вероятностной схемы требуется уметь подсчитывать количество элементарных исходов, удовлетворяющих тем или иным требованиям, или число шансов. Говоря грубо, комбинаторика как раз занимается подсчетом числа шансов.

3.1 Умножение шансов

Один из основных принципов комбинаторики, так называемая теорема об умножении, заключается в следующем: если элемент первого множества можно выбрать k способами, а элемент второго множества m способами, то упорядоченную пару элементов (первый элемент из первого множества, а второй из второго) можно выбрать $k \cdot m$ способами. Если говорить более формально, то справедлива следующая теорема

Теорема 3.1.1 (Об умножении шансов) *Пусть имеется два множества $A = \{a_1, ..., a_n\}$ и $B = \{b_1, ..., b_m\}$. Тогда существует ровно $n \cdot m$ различных пар (a_i, b_j), где первый элемент принадлежит множеству A, а второй – множеству B.*

Доказательство. Для элемента $a_1 \in A$ существует ровно m различных пар: $(a_1, b_1), (a_1, b_2), ..., (a_1, b_m)$. Аналогично для элементов $a_2, ..., a_n$. То есть всего $n \cdot m$ штук. □

Пример 3.1.1 *Пусть опыт заключается в подбрасывании трех различных монет, ни одна из которых не может встать на ребро. Сколько существует элементарных исходов у данного опыта? Имеем три множества A_1, A_2, A_3, каждое из которых состоит из двух элементов: $A_i = \{Орел, Решка\}$. По предыдущей теореме, возможно ровно $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ различных исходов. Перечислите все эти исходы, чтобы убедиться в этом наглядно!*

Вернемся к ранее рассмотренному примеру.

Пример 3.1.2 *Пусть случайный эксперимент заключается в подбрасывании монеты, которая не может встать на ребро, n раз. Элементарные исходы – это наборы вида $\omega = (a_1, a_2, ..., a_n)$, где a_i – либо орел, либо решка. Тем самым,*

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, ..., a_n),\ a_i \in \{O, P\}\}.$$

Рассуждая аналогично предыдущему примеру получаем, что $|\Omega| = 2^n$.

Пример 3.1.3 *Сколько существует четырехзначных чисел, все цифры которых различны? Ясно, что на первое место может встать любая цифра из десяти, кроме нуля, тем самым имеется 9 возможностей. На второе место любая цифра из десяти, кроме той, что была поставлена на первое место, а значит снова имеется 9 возможностей. На третье место может встать любая цифра из десяти, кроме тех, что были поставлены на первое и на второе места, откуда остается 8 возможностей. Аналогично, на четвертое место остается 7 вариантов. Значит, всего $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ четырехзначных чисел, все цифры которых различны.*

3.2 Урновые схемы

Многие задачи комбинаторики сводятся к так называемым урновым схемам. Предположим, что есть ящик, содержащий n занумерованных шаров. Эксперимент заключается в выборе k шаров. Результат этого выбора – набор из k шаров (k подряд идущих номеров). Нас интересует вопрос: сколько различных элементарных исходов возможно у этого эксперимента? На этот вопрос сложно дать однозначный ответ, не уточнив следующие детали:

1. Что считать различными результатами выбора?

2. Как организован выбор?

Начнем с результатов выбора. Мы будем различать два типа выбора: с учетом порядка и без учета порядка. Что это значит?

1. Выбор с учетом порядка: два набора шаров (номеров) считаются различными, если они отличаются составом или порядком номеров. Так, например, наборы $(2, 3, 1)$ и $(3, 1, 2)$ отличаются порядком, а наборы $(2, 3, 4)$ и $(1, 2, 3)$ – составом.

2. Выбор без учета порядка: два набора шаров (номеров) считаются различными, если они отличаются только составом номеров. Так, например, наборы $(1, 2, 3)$ и $(3, 2, 1)$ не отличаются, а наборы $(2, 3, 4)$ и $(1, 2, 3)$ – отличаются.

Теперь обсудим организацию выбора. Мы будем различать два типа организации: с возвращением и без возвращения. Итак,

1. Выбор с возвращением: каждый вынутый шар возвращается в ящик. Выбор всегда осуществляется из полного ящика. В наборе номеров могут встречаться повторения.

2. Выбор без возвращения: вынутый шар в ящик не возвращается. Каждый раз в количество шаров в ящике уменьшается на 1. В наборе номеров повторений быть не может.

Согласно теореме об умножении шансов, возникает $2 \cdot 2 = 4$ схемы выбора. Покажем, как вычислять количество шансов в каждой из них.

Теорема 3.2.1 (Выбор без возвращения с учетом порядка)
Количество различных исходов в случае выбора k элементов из n без возвращения с учетом порядка равно

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Доказательство. Доказательство немедленно следует из теоремы об умножении шансов. Действительно, на первое место может встать любой из n элементов. На второе – уже любой из $(n-1)$, на третье – любой из $(n-2)$ и так далее. $\square$

Число A_n^k часто называют числом размещений из n элементов по k элементов, а элементарные исходы – размещениями.

Пример 3.2.1 *Сколько существует способов выдать троим игрокам по одной карте из колоды в* 36 *карт? Ясно, что в данном случае важен не только состав выданных карт, но и порядок, поэтому ответом служит*

$$A_{36}^3 = 36 \cdot 35 \cdot 34 = 42840.$$

Следствие 3.2.2 *В множестве из* n *элементов возможно ровно* $n!$ *перестановок.*

Теорема 3.2.3 (Выбор с возвращением и с учетом порядка) *Количество различных исходов в случае выбора* k *элементов из* n *с возвращением и с учетом порядка равно* n^k.

Доказательство. Доказательство немедленно следует из теоремы об умножении шансов. На любое из k место может встать любой из n элементов, так как выбор происходит с возвращением. $\square$

Пример 3.2.2 *Пятеро человек заходят в лифт на первом этаже десятиэтажного дома. Сколько существует вариантов их распределения по этажам? Ясно, что каждый человек может выйти на одно из этажей от* 2 *до* 10*, то есть у каждого человека есть* 9 *вариантов. Тем самым, всего*

$$9^5 = 59049$$

вариантов.

Теорема 3.2.4 (Выбор без возвращения и без учета порядка) *Количество различных исходов в случае выбора* k *элементов из* n *без возвращения без учета порядка равно*

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказательство. Обозначим искомое число C_n^k. Как нами уже доказано, количество различных исходов в случае выбора k элементов из n без возвращения с учетом порядка равно A_n^k. В то же время, теперь нам не важен порядок выбранных элементов. Так как в множестве из k элементов существует ровно $k!$ перестановок, то по теореме об умножении шансов

$$C_n^k \cdot k! = A_n^k,$$

откуда и получается требуемое утверждение. □

Число C_n^k часто называют числом сочетаний из n элементов по k элементов, а элементарные исходы – сочетаниями.

Пример 3.2.3 *Сколько существует способов выдать одному игроку три карты из колоды в 36 карт? В отличие от ранее разобранного примера, нам важен только состав карт на руках, а не порядок их выдачи, поэтому ответом служит*

$$C_{36}^3 = \frac{A_{36}^3}{3!} = 7140$$

вариантов.

Для полноты картины посчитаем число шансов и для последней схемы.

Теорема 3.2.5 (Выбор с возвращением и без учета порядка) *Количество различных исходов в случае выбора k элементов из n с возвращением и без учета порядка равно*

$$C_{n+k-1}^k.$$

Мы не будем останавливаться подробно на этой схеме вот по какой причине. В описанных урновых схемах с выбором без возвращения, и в схеме с выбором с возвращением и с учетом порядка все варианты удовлетворяют классическому определению вероятности, то есть все они равновозможны. В последней же схеме, в случае выбора с возвращением и без учета порядка, исходы заведомо неравновозможны, что показывает следующий простейший пример.

Пример 3.2.4 *Пусть опыт заключается в двукратном подбрасывании монеты, которая не может встать на ребро. Возможные (равновозможные) исходы этого опыта: $(O, O), (O, P), (P, O), (P, P)$. Но последняя схема заведомо не различает исходы $(O, P), (P, O)$, что делает все 3 исхода неравновозможными.*

3.3 Несколько примеров

Для иллюстрации некоторых приемов использования комбинаторики для решения задач по теории вероятностей, приведем несколько примеров.

3.3.1 Гипергеометрическое распределение

Рассмотрим следующий пример. Пусть из урны, содержащей N шаров, среди которых K красных из $N-K$ белых, выбирают наудачу без возвращения n шаров. Какова вероятность события A, что будет выбрано ровно k красных шаров и $n-k$ белых?

Не будем учитывать порядок вытащенных шаров, при этом все шары будем считать различными (например, пронумеруем их), чтобы работать в рамках классической вероятностной схемы. Тогда общее число элементарных исходов – это количество способов выбрать n элементов из N элементов. Согласно теореме, способов это сделать C_N^n, то есть $|\Omega| = C_N^n$. Далее, посчитаем число благоприятных для нас исходов. Имея всего K красных (различных!) шаров, у нас есть C_K^k способов выбрать из них k красных шаров. $(n-k)$ белых шаров мы выбираем и $N-K$ шаров, и таких способов C_{N-K}^{n-k}. По теореме об умножении шансов, число благоприятствующих нам исходов равно $|A| = C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}$, а значит

$$\mathsf{P}(A) = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Пример 3.3.1 *Из десяти вопросов к экзамену студент уверенно знает* 4 *и может дать основные определения в остальных* 6. *В наудачу взятом билете два вопроса (вопросы распределены случайно). Экзаменатор огласил правила игры:*

- *если студент уверенно отвечает на оба вопроса, он получает оценку отлично;*
- *если студент уверенно отвечает на один вопрос и дает определения на второй, он получает оценку хорошо;*
- *если студент отвечает только определения на оба вопроса, он получает оценку удовлетворительно;*
- *иначе студент получает оценку неудовлетворительно.*

Какова вероятность того, что студент сохранит стипендию?

Чтобы сохранить стипендию, студент должен либо ответить безукоризненно на оба вопроса, либо ответить на один вопрос безукоризненно, а по второму сформулировать определения. Пусть событие A – студент безукоризненно ответил на оба вопроса, а событие B – студент ответил на один вопрос безукоризненно, а по второму только сформулировал определения. Тогда

$$\mathsf{P}(A) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}, \ \mathsf{P}(B) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}.$$

В итоге,

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

3.3.2 Задача о рассеянной секретарше

Рассмотрим популярную задачу на применение формулы включений-исключений — задачу о рассеянной секретарше. Предположим, что имеется n писем и n конвертов, и каждому письму предназначается ровно один конверт. Письма по конвертам должна разложить секретарша, однако секретарша была занята и положила письма в конверты случайно, но так, чтобы в каждом конверте было ровно по одному письму. Какова вероятность того, что хотя бы одно письмо найдет своего получателя?

Занумеруем письма числами $1, 2, ..., n$. Пусть событие A_i заключается в том, что i-ое по счету письмо попало в свой конверт. Нас интересует вероятность события $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$. Воспользуемся ранее обозначенной формулой включений-исключений.

Какова вероятность события A_i? Всего есть $|\Omega| = n!$ способов распределить n писем по n конвертам. При этом для i-ого письма есть всего одна возможность: попасть в нужный конверт, остальные письма могут располагаться как угодно. Значит, $|A_i| = (n-1)!$ и

$$\mathsf{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Какова вероятность события $A_i \cap A_j$? Теперь два письма с номерами i и j должны попасть в свои конверты, а остальные могут располагаться произвольно, поэтому $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ и

$$\mathsf{P}(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

рассуждая аналогично, получим, что для различных $i_1, ..., i_k$

$$\mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = \frac{1}{n(n-1)...(n-(k-1))}.$$

Напомним формулу включений-исключений:

$$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathsf{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathsf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... +$$

$$(-1)^{n-1} \mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n).$$

Посчитаем, сколько слагаемых во второй сумме. Сколько пар индексов можно образовать, если каждый индекс меняется в диапазоне от 1 до n, индексы не могут повторяться, и нам не важен порядок (из двух пар (i, j) и (j, i) нас интересует та, у которой $i < j$). Их ровно C_n^2. Аналогично, в третьей сумме C_n^3 индексов и так далее. Тем самым,

$$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} + C_n^3 \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - ... + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} =$$

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

Полезно вспомнить, что так как для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо разложение

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

то

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ...$$

и при $n \to \infty$ искомая вероятность стремится к

$$1 - e^{-1} \sim 0.632.$$

4 Условная вероятность. Независимость

4.1 Понятие условной вероятности

Попробуем ответить на следующий вопрос. Пусть бросается игральный кубик и известно, что выпало четное число очков. Какова вероятность события, что выпало 4 очка? Нам стала известна дополнительная информация. Как это учесть в вероятности события?

Давайте сначала будем работать в рамках классической вероятностной схемы, после чего обобщим определение на произвольную ситуацию.

Итак, мы хотим вычислить так называемую условную вероятность $\mathsf{P}(B|A)$ события B – выпало 4 очка при условии, что произошло событие A – выпало четное число очков. Мы всегда будем считать, что вероятность $\mathsf{P}(A)$ события A положительна, то есть событие A не является невозможным. В рамках классической вероятностной схемы эта вероятность равна

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|}.$$

Так как событие A состоит из трех элементарных исходов $A = \{2, 4, 6\}$, а событие B из одного $B = \{4\}$, то $A \cap B = \{4\}$ и искомая условная вероятность

$\mathsf{P}(B|A) = \frac{1}{3}$. С другой стороны, поделив числитель и знаменатель на $|\Omega|$, придем к

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(A)}.$$

Тем самым, при поиске условной вероятности, мы ищем долю исходов, благоприятствующих событию B среди всех исходов события A. В итоге, мы приходим к общему определению.

Определение 4.1.1 *Пусть дано вероятностное пространство. Условной вероятностью события B при условии, что произошло событие A в случае, когда $\mathsf{P}(A) > 0$, называется вероятность*

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(A)}.$$

Отметим также важный момент, который сразу следует из определения. Если $\mathsf{P}(A) > 0$ и $\mathsf{P}(B) > 0$, то

$$\mathsf{P}(A\cap B) = \mathsf{P}(A)\cdot\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)\cdot\mathsf{P}(A|B).$$

Пример 4.1.1 *Предположим, что социологическим опросам доверяет* 70 *процентов жителей. Те, кто доверяют опросам, всегда отвечают искренне, а те, кто не доверяют – наугад. Социолог Петя включил в анкету очередного опроса вопрос «Доверяете ли вы социологическим опросам?». Какова вероятность, что случайно выбранный респондент ответит «да»? Какова вероятность, что он действительно доверяет, если он ответил «да»?*
Ясно, что событие A – респондент ответил «да» разбивается на две несовместные ветки: респондент доверял опросам (событие B) и ответил «да», и респондент не доверял опросам (событие C) и ответил «да». Нас интересует вероятность

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}((A\cap B)\cup(A\cap C)) = \mathsf{P}(A\cap B) + \mathsf{P}(A\cap C).$$

Имеем

$$\mathsf{P}(A\cap B) = \mathsf{P}(B)\cdot\mathsf{P}(A|B) = 0.7\cdot 1 = 0.7,$$

так как доверяющий человек всегда говорит искренне. Далее,

$$\mathsf{P}(A\cap C) = \mathsf{P}(C)\mathsf{P}(A|C) = 0.3\cdot 0.5 = 0.15,$$

так как недоверяющий человек отвечает наугад, а значит с вероятностью 0.5 *говорит «да». Итого*

$$\mathsf{P}(A) = 0.85.$$

Найдем теперь вероятность $\mathsf{P}(B|A)$*:*

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{0.7}{0.85} \sim 0.82.$$

Используя индукцию легко показать, что для любых событий $A_1, A_2, ..., A_n$ справедливо равенство

$$\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2|A_1)\mathsf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot ... \cdot \mathsf{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}),$$

если все условные вероятности определены.

4.2 Независимость событий

Пусть A и B – два события. Логично считать, что события A и B независимы, если вероятность наступления события B не зависит от того, наступило событие A или нет, то есть $\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)$. Записывая это рассуждение мы считаем, что $\mathsf{P}(A) > 0$. Но тогда, так как

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(A)},$$

то

$$\frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(A)} = \mathsf{P}(B) \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B).$$

Из последнего видно, что если B не зависит от A, то и A не зависит от B, конечно, в случае $\mathsf{P}(B) > 0$. Поэтому кажется логичным ввести следующее определение

Определение 4.2.1 *События* A *и* B *называются независимыми, если*

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B).$$

Пример 4.2.1 *Из колоды в* 52 *карты случайно извлекают* 2 *карты. Пусть событие* A *– обе карты красного цвета, событие* B *– среди извлеченных карт имеется король. Выяснить, зависимы ли эти события.*
Так как всего 26 *карт красного цвета, то*

$$\mathsf{P}(A) = \frac{C_{26}^2}{C_{52}^2} = \frac{25}{102}.$$

В свою очередь, событие B означает, что либо вытащено два короля, либо один король и один не король. Тогда

$$\mathsf{P}(B) = \frac{C_4^2 + C_4^1 \cdot C_{48}^1}{C_{52}^2} = \frac{33}{221}.$$

Событие $A \cap B$ означает, что обе карты красного цвета, причем хотя бы одна карта – король. Тогда

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \frac{C_2^2 + C_2^1 \cdot C_{24}^1}{C_{52}^2} = \frac{49}{1326}.$$

Прямой проверкой убеждаемся, что

$$\mathsf{P}(A \cap B) \neq \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B),$$

а значит события зависимы.

Отметим интересную связь независимых и несовместных событий, а именно справедлива следующая лемма

Лемма 4.2.1 *Пусть события A и B несовместны, то есть $A \cap B = \emptyset$. Тогда они независимы лишь в том случае, когда $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$.*

Эта лемма моментально доказывается алгебраически, используя соответствующие определения. Но попробуйте подумать, почему это так с точки зрения логики? Зависимость между рассматриваемыми событиями следует из того, что если $A \cap B = \emptyset$, то $A \subset \overline{B}$, а значит при наступлении события A событие B не возникает.

При решении задач часто бывает полезным следующее наблюдение, которое мы сформулируем в виде леммы.

Лемма 4.2.2 *Пусть события A, B независимы. Тогда независимы события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.*

Доказательство. Все утверждения доказываются примерно одинаково. Обоснуем, например, что события A и $\overline{B}$ независимы. Так как

$$A \cap \overline{B} = A \cap (\Omega \setminus B) = (A \cap \Omega) \setminus (A \cap B) = A \setminus (A \cap B)$$

и $(A \cap B) \subset A$, то

$$\mathsf{P}(A \cap \overline{B}) = \mathsf{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B).$$

Пользуясь независимостью, получаем

$$= \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A)(1 - \mathsf{P}(B)) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(\overline{B}).$$

□

4.3 Независимость в совокупности

Часто приходится рассматривать не одно, два, а куда больше событий. Для них вводится понятие независимости в совокупности.

Определение 4.3.1 *События* $A_1, A_2, ..., A_n$ *называются независимыми в совокупности, если для любого* $1 \leq k \leq n$ *и любых натуральных чисел* $i_1, ..., i_k$ *таких, что* $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$ *выполняется*

$$\mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = \mathsf{P}(A_{i_1})\mathsf{P}(A_{i_2}) \cdot ... \cdot \mathsf{P}(A_{i_k}).$$

Иными словами, при независимости в совокупности событий независим любой поднабор этих событий.

Сравним введенное понятие с понятием попарной независимости. Конечно, попарная независимость (то есть независимость любых двух взятых событий) следует из независимости в совокупности, достаточно просто взять $k = 2$. Обратное, вообще говоря, неверно, что показывается следующий пример.

Пример 4.3.1 *Рассмотрим правильный тетраэдр, одна грань которого покрашена в красный цвет, другая – в синий, а третья – в зеленый. Четвертая же грань содержит все три цвета: красный, синий и зеленый. Тетраэдр случайным образом бросается на ровную поверхность. Событие «выпал какой-то цвет» означает, что тетраэдр лежит на стороне, которая содержит рассматриваемый цвет. Пусть событие* A *заключается в том, что выпал красный цвет, событие* B *– выпал синий цвет, событие* C *– выпал зеленый цвет. Тогда* $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(C) = \frac{1}{2}$, *так как каждый цвет присутствует на двух гранях из четырех. Кроме того,* $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A \cap C) = \mathsf{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$, *так как одновременно два цвета присутствуют только на одной грани, а значит*

$$\frac{1}{4} = \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

то есть события A *и* B *независимы. Аналогично, события* B *и* C *и события* A *и* C *независимы, откуда следует, что события* A, B, C *попарно независимы. Будут ли они независимы в совокупности? Так как* $\mathsf{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$, *ведь все цвета встречаются только на одной грани, то*

$$\frac{1}{4} = \mathsf{P}(A \cap B \cap C) \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C).$$

Значит, события A, B, C, *являясь попарно независимыми, независимыми в совокупности не являются.*

Подумайте, а следует ли из того, что для набора событий $A_1, A_2, ..., A_n$ выполняется равенство

$$\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)...\mathsf{P}(A_n)$$

независимость в совокупности этих событий? На самом деле ответ нет, а значит требования в определении нельзя ослабить.

4.4 Схема Бернулли

Обсудим одну из самых популярных вероятностных моделей, называемую схемой Бернулли. На основе нее мы в ходе данной лекции попробуем показать все основные понятия теории вероятностей, которые встретятся в дальнейшем, в том числе в приложениях к статистике.

Предположим, что у нас есть фальшивая монетка, которая выпадает орлом с вероятностью $p \in [0, 1]$, а решкой – с вероятностью $q = 1 - p$. Вместо слова орел мы часто будем употреблять слово «успех», а вместо слова решка – слово «неудача». Само подбрасывание часто называют словом испытание. Будем подбрасывать монету n раз и будем считать, что подбрасывания монеты независимы. Тогда элементарный исход ω, как мы знаем, – это последовательность $\omega = (a_1, a_2, ..., a_n)$, где $a_i \in \{\text{О}, \text{Р}\}$, а пространство элементарных исходов – это множество всех таких элементарных исходов.

Определение 4.4.1 *Схемой Бернулли называется последовательность независимых в совокупности испытаний, в каждом из которых возможно два исхода: успех и неудача, причем вероятность успеха в каждом испытании одна и та же и равна $p \in [0, 1]$, а вероятность неудачи – $q = 1 - p$.*

Замечание 4.4.1 *Под независимостью в совокупности испытаний понимается независимость в совокупности любых событий, относящихся к разным испытаниям.*

Зададимся вопросом: какова вероятность события $B(n, k)$ получить ровно $0 \leq k \leq n$ успехов в n испытаниях. Для этого рассмотрим один из благоприятных для нас исходов

$$\omega = (\text{У}, ..., \text{У}, \text{Н}, ..., \text{Н}),$$

который означает, что первые k раз произошел успех, а остальные $n - k$ раз произошла неудача. Так как подбрасывания независимы, и, грубо говоря, $\mathsf{P}(\text{У}) = p, \mathsf{P}(\text{Н}) = q$, то $\mathsf{P}(\omega) = p^k q^{n-k}$. Событие $B(n, k)$ содержит такие элементарные исходы ω, у которых ровно k раз встречается У и ровно $n - k$ раз встречается Н. Все эти исходы равновероятны, события, отвечающие этим исходам, несовместны, и всего таких исходов C_n^k. Тем самым,

$$\mathsf{P}(B(n, k)) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Легко и полезно заметить, что

$$\mathsf{P}(B(n,0)) + \mathsf{P}(B(n,1)) + ... + \mathsf{P}(B(n,n)) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

Кстати, последняя сумма есть не что иное, как

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mathsf{P}(\omega)$$

и так как она равна единице, то мы получаем вероятностное пространство. Набор вероятностей $\{\mathsf{P}(B(n,0)), \mathsf{P}(B(n,1)), ..., \mathsf{P}(B(n,n))\}$ часто называют биномиальным распределением и обозначают Bin_p.

Пример 4.4.1 *Пусть стрелок совершает* 4 *независимых выстрела по мишени, причем вероятность попадания в каждом из выстрелов одинакова и равна* $p = 0.8$. *Найти вероятность того, что стрелок попал ровно* 3 *раза. Согласно схеме Бернулли, нам нужно найти вероятность события* $B(4,3)$, *а она равна*

$$\mathsf{P}(B(4,3)) = C_4^3(0.8)^3(0.2)^1 = 0.4096.$$