ЛЕКЦИЯ 5.2 КВАДРАТИЧНЫЕ СПЛАЙНЫ.
ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ

1. Квадратичные сплайны S_2

Функция $y = f(x)$ задана таблицей 1. Точки x_i - узлы интерполяции. Квадратичные сплайны – это сплайны второй степени, т.е. состоящие из квадратных трёхчленов. В частности, можно построить интерполяционный квадратичный сплайн S_2. На каждом отрезке между соседними узлами он совпадает с многочленом степени $m = 2$, удовлетворяет условиям интерполяции по всей таблице и непрерывен со своими производными до некоторого порядка p включительно. Число $m - p$ называется дефектом сплайна. На отрезке $[x_{i-1};\ x_i]$ сплайн S_2 равен квадратному трёхчлену $P_{2,i}$, который определяется тремя коэффициентами $a_i,\ b_i, c_i$:

$$P_{2,i}(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i,$$

Табл. 1. Функция $y = f(x)$

i	x_i	y_i
0	x_1	y_1
1	x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n

$i = 1, \dots, n$. Всего имеются n отрезков $[x_{i-1};\ x_i]$, поэтому нужно построить n квадратных трёхчленов, т.е. найти $3n$ неизвестных коэффициентов. Условия интерполяции дадут $2n$ уравнений:

$$
\begin{cases}
P_{2,1}(x_0) = y_0, \\
P_{2,1}(x_1) = y_1, \\
P_{2,2}(x_1) = y_1, \\
\vdots \\
P_{2,n-1}(x_{n-1}) = y_{n-1}, \\
P_{2,n}(x_{n-1}) = y_{n-1}, \\
P_{2,n}(x_n) = y_n.
\end{cases}
$$

Первое и последнее уравнения системы – это условия интерполяции в крайних узлах. Во внутренних узлах должны «стыковаться» трёхчлены на соседних отрезках, поэтому для каждого внутреннего узла записаны два условия. Всего получаются $2(n-1)+2=2n$ уравнений.

Таким образом, условие непрерывности сплайна уже использовано. Нужны ещё n уравнений для замыкания системы. Если дефект сплайна равен единице, то $p=1$, т.е. его производная также должна быть непрерывна. Это даёт нам ещё $n-1$ уравнение:

$$P'_{2,i}(x_i) = P'_{2,i+1}(x_i),$$

$i=1,\dots,n-1$. Здесь записано условие «стыковки» производных трёхчленов на соседних отрезках во внутреннем узле. Всего получилось $3n-1$ уравнение. Не хватает одного уравнения. Его можно получить из какого-либо граничного условия. Например, если известно значение производной в левом крайнем узле, то добавляется уравнение $P'_{2,1}(x_0) = y'_0$. Получаем систему линейных уравнений, решаем и по найденным коэффициентам строим квадратные трёхчлены для каждого отрезка интерполяции.

2. Другой подход к построению квадратичного сплайна

Существуют другие подходы к построению сплайнов. Можно «стыковать» многочлены не в узлах, как в сплайне S_m, который мы рассматривали до сих пор, а в некоторых промежуточных точках. Посмотрим, как это делается, на примере квадратичного сплайна.

Дополнительно к узлам x_i введём систему точек $\tilde{x}_0 = x_0 < \tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < \cdots <$ $< \tilde{x}_{n+1} = x_n$, где

$$\tilde{x}_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2},$$

$i=1,\dots,n$, т.е. первая и $(n+1)$-я дополнительные точки совпадают с узлами x_0 и x_n, а остальные n точек находятся посередине между соседними узлами интерполяции x_{i-1} и x_i. «Кусочки» сплайна – квадратные трёхчлены $P_{2,i}$ – строятся на отрезках $[\tilde{x}_{i-1};\ \tilde{x}_i\ ]$,

$i = 2, \ldots, n$. При этом крайние «кусочки» $P_{2,1}$ и $P_{2,n+1}$ строятся на половинах крайних отрезках $[x_0;\ x_1]$ и $[x_{n-1};\ x_n]$ соответственно. Всего получается $n + 1$ квадратный трёхчлен, каждый определяется тремя коэффициентами. Поэтому надо найти $3n + 3$ неизвестных.

Для каждого трёхчлена $P_{2,i}$ имеется одно условие интерполяции:

$$\begin{cases} P_{2,1}(x_0) = y_0, \\ P_{2,2}(x_1) = y_1, \\ \vdots \\ P_{2,n}(x_{n-1}) = y_{n-1}, \\ P_{2,n+1}(x_n) = y_n. \end{cases}$$

Всего $n + 1$ уравнение.

Условие непрерывности сплайна даёт ещё n уравнений:

$$P_{2,i}(\tilde{x}_i\ ) = P_{2,i+1}(\tilde{x}_i\ ),$$

$i = 1,2, \ldots, n$ (во внутренних точках $\tilde{x}_i$ «стыкуются» соседние трёхчлены).

Если потребовать, чтобы дефект сплайна был равен единице, то $p = 1$, т.е. его производная должна быть непрерывна. Это даёт ещё n уравнений:

$$P'_{2,i}(\tilde{x}_i\ ) = P'_{2,i+1}(\tilde{x}_i\ ),$$

$i = 1,2, \ldots, n$ (во внутренних точках $\tilde{x}_i$ «стыкуются» производные соседних трёхчленов).

Итак, получилось $3n + 1$ уравнение для нахождения $3n + 3$ коэффициентов $n + 1$ квадратичного полинома. Как и ранее, для замыкания системы надо добавить еще два граничных условия. Они также могут быть разные. Например, краевые условия на производную:

$$\begin{cases} P'_{2,i}(x_0) = y'_0, \\ P'_{2,i+1}(x_n) = y'_n. \end{cases}$$

Получаем систему линейных уравнений. Далее решается система, и по найденным коэффициентам строятся квадратные трёхчлены для каждого отрезка интерполяции.