ЛЕКЦИЯ 10.2 ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В этой части мы изучим итерационные методы. В них строится последовательность приближённых решений (итераций), сходящаяся к точному решению. При достижении заданной точности вычисление прекращается, и последняя итерация выдаётся за решение задачи. При этом надо так выбрать начальную итерацию, чтобы последовательность сходилась к точному решению. Поэтому для итерационных методов, кроме собственно расчётной формулы метода, нужны:

- множество начальных итераций, для которых метод сходится (это мы называем областью сходимости);
- оценки погрешности решения на каждом шаге.

1. Метод простой итерации

Постановка задачи прежняя: надо решить систему

$$A\overline{x} = \overline{b}, \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Пусть система (1) приведена к эквивалентному виду

$$\overline{x} = B\overline{x} + \overline{c}, \tag{2}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Преобразование системы к виду (2) само по себе является нетривиальной задачей и требует индивидуального подхода. Ведь от матрицы B зависит сходимость итерационной последовательности. Проще всего взять $B = E - A$, $\overline{c} = \overline{b}$. В этом случае метод простой итерации называется *методом последовательных приближений*. В следующем пункте описан другой несложный способ перехода к (2).

Итак, требуется построить итерационную последовательность для решения системы (2). Пусть взято некоторое начальное приближение $\overline{x}^{(0)}$. Подставив его в правую часть (2), получим некоторый вектор, который примем за следующую итерацию: $\overline{x}^{(1)} = B\overline{x}^{(0)} + \overline{c}$. По этому же правилу вычислим вторую итерацию: $\overline{x}^{(2)} = B\overline{x}^{(1)} + \overline{c}$, и так далее. Произвольное приближение вычисляется по формуле

$$\overline{x}^{(k)} = B\overline{x}^{(k-1)} + \overline{c}, \tag{3}$$

$k = 1, 2, \dots$. Это и есть *расчётная формула метода простой итерации*. В развёрнутом виде она выглядит так:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = b_{11}x_1^{(k-1)} + b_{12}x_2^{(k-1)} + \cdots + b_{1n}x_n^{(k-1)} + c_1, \\ x_2^{(k)} = b_{21}x_1^{(k-1)} + b_{22}x_2^{(k-1)} + \cdots + b_{2n}x_n^{(k-1)} + c_2, \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n^{(k)} = b_{n1}x_1^{(k-1)} + b_{n2}x_2^{(k-1)} + \cdots + b_{nn}x_n^{(k-1)} + c_n. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим проблему сходимости и оценки погрешности. Следующая теорема даёт достаточное условие сходимости и априорную оценку погрешности.

Теорема 1. Пусть $\|B\| < 1$. Тогда итерационная последовательность (3) сходится к точному решению $\overline{x}$ системы (2) при любой начальной итерации $\overline{x}^{(0)}$и имеет место оценка погрешности

$$\Delta\overline{x}^{(k)} = \left\| \overline{x} - \overline{x}^{(k)} \right\| \le \|B\|^k \cdot \left\| \overline{x} - \overline{x}^{(0)} \right\| = \|B\|^k \Delta\overline{x}^{(0)}, \tag{4}$$

$k = 0, 1, \dots$.

Доказательство. Пусть $\overline{x}$ — точное решение (2), $\overline{x}^{(k)}$ — k-е приближение к нему. Вычтем (3) из (2):

$$\overline{x} - \overline{x}^{(k)} = B\left(\overline{x} - \overline{x}^{(k-1)}\right) \tag{5}$$

Перейдём в этом равенстве к нормам и применим свойство матричной нормы:

$$\left\|\overline{x} - \overline{x}^{(k)}\right\| = \left\|B\left(\overline{x} - \overline{x}^{(k-1)}\right)\right\| \le \|B\| \cdot \left\|\overline{x} - \overline{x}^{(k-1)}\right\|. \tag{6}$$

Равенство (5) справедливо для любого k, поэтому в нём можно заменить k на $k-1$:

$$\overline{x} - \overline{x}^{(k-1)} = B\left(\overline{x} - \overline{x}^{(k-2)}\right) \Rightarrow \left\|\overline{x} - \overline{x}^{(k-1)}\right\| = \left\|B\left(\overline{x} - \overline{x}^{(k-2)}\right)\right\| \le$$

$$\leq \|B\| \cdot \left\|\overline{x} - \overline{x}^{(k-2)}\right\|.$$

Подставляя эту оценку в (6), получаем

$$\left\|\overline{x} - \overline{x}^{(k)}\right\| \leq \|B\|^2 \cdot \left\|\overline{x} - \overline{x}^{(k-2)}\right\|.$$

Применяя каждый раз таким же образом (5), в конце концов, приходим к доказываемой оценке. А так как по условию $\|B\| < 1$, то очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty} \left\| \overline{x} - \overline{x}^{(k)}\right\| = 0$, а это и означает сходимость итерационной последовательности. ■

Замечание. Оценка (4) показывает, что на каждом шаге погрешность уменьшается в $\|B\|$ раз. В таком случае говорят, что метод сходится *со скоростью геометрической прогрессии* со знаменателем $q = \|B\| < 1$. Такая скорость называется *линейной*. Очевидно, что чем меньше $\|B\|$, тем выше скорость сходимости.

Оценка (4) непригодна для практического применения, поскольку она использует неизвестный вектор $\overline{x}$. Для получения критерия остановки процесса требуется другая, апостериорная, оценка.

Теорема 2. Пусть $\|B\| < 1$. Тогда итерационная последовательность (3) сходится к точному решению $\overline{x}$ системы (2) при любой начальной итерации $\overline{x}^{(0)}$и имеет место оценка погрешности

$$\Delta\overline{x}^{(k)} = \left\| \overline{x} - \overline{x}^{(k)}\right\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \left\|\overline{x}^{(k)} - \overline{x}^{(k-1)}\right\|, \tag{7}$$

$k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Понятно, что здесь достаточно доказать оценку (7). Для этого преобразуем (5):

$$\overline{x} - \overline{x}^{(k)} = B\left(\overline{x} - \overline{x}^{(k-1)}\right) = B\left(\overline{x} - \overline{x}^{(k)} + \overline{x}^{(k)} - \overline{x}^{(k-1)}\right) =$$

$$= B\left(\overline{x} - \overline{x}^{(k)}\right) + B\left(\overline{x}^{(k)} - \overline{x}^{(k-1)}\right).$$

Теперь переходим к нормам:

$$\left\|\overline{x} - \overline{x}^{(k)}\right\| = \left\|B\left(\overline{x} - \overline{x}^{(k)}\right) + B\left(\overline{x}^{(k)} - \overline{x}^{(k-1)}\right)\right\| \leq$$

$$\leq \left\|B\left(\overline{x} - \overline{x}^{(k)}\right)\right\| + \left\|B\left(\overline{x}^{(k)} - \overline{x}^{(k-1)}\right)\right\| \leq \|B\| \cdot \left\|\overline{x} - \overline{x}^{(k)}\right\| +$$

$$+\|B\| \cdot \left\|\overline{x}^{(k)} - \overline{x}^{(k-1)}\right\|.$$

Из последнего неравенства получаем

$$\left\|\overline{x}-\overline{x}^{(k)}\right\|(1-\|B\|)\leq\|B\|\cdot\left\|\overline{x}^{(k)}-\overline{x}^{(k-1)}\right\|,$$

откуда и следует (7). ■

Полученная оценка позволяет сформулировать условие остановки итерационного процесса. Если требуется найти решение с заданной точностью ε, то $\overline{x}^{(k)}$ следует вычислять до достижения неравенства

$$\frac{\|B\|}{1-\|B\|}\cdot\left\|\overline{x}^{(k)}-\overline{x}^{(k-1)}\right\|\leq\varepsilon,$$

или

$$\left\|\overline{x}^{(k)}-\overline{x}^{(k-1)}\right\|\leq\varepsilon_1,$$

где

$$\varepsilon_1=\frac{1-\|B\|}{\|B\|}\varepsilon.$$

В заключение этого пункта внесём ясность в вопрос о том, какую норму надо использовать при применении теорем 1-3. Нормы $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ называются *эквивалентными*, если существуют положительные постоянные $\gamma_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\beta\alpha}$, для которых при $\overline{x}\neq\overline{0}$

$$\frac{\|\overline{x}\|_\beta}{\|\overline{x}\|_\alpha}\leq\gamma_{\alpha\beta},\frac{\|\overline{x}\|_\alpha}{\|\overline{x}\|_\beta}\leq\gamma_{\beta\alpha}.$$

Пусть условие теоремы 1 выполнено для подчинённой векторной норме $\|\cdot\|_\alpha$ матричной нормы. Тогда для эквивалентной $\|\cdot\|_\alpha$ нормы $\|\cdot\|_\beta$ имеем

$$\left\|\overline{x}-\overline{x}^{(k)}\right\|_\beta\leq\gamma_{\alpha\beta}\left\|\overline{x}-\overline{x}^{(k)}\right\|_\alpha\leq\gamma_{\alpha\beta}\|B\|_\alpha^n\cdot\left\|\overline{x}-\overline{x}^{(0)}\right\|_\alpha\leq$$

$$\leq\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\beta\alpha}\|B\|_\alpha^n\cdot\left\|\overline{x}-\overline{x}^{(0)}\right\|_\beta.$$

Таким образом, итерационная последовательность сходится к точному решению и по норме $\|\cdot\|_\beta$. В силу неравенств

$$\frac{1}{n}\|A\|_\infty\leq\|A\|_1\leq n\|A\|_\infty$$

лекции 10.1 все введённые в п. 2 лекции 10.1 нормы эквивалентны, поэтому при выполнении условия $\|B\|<1$ по любой из них гарантирована сходимость последовательности (3) по любой другой норме и справедливы оценки (4), (7).

2. Метод Якоби

Осуществим переход от системы (1) к (2) следующим простым способом. Предполагая, что $a_{ii} \neq 0$, выразим в i-м уравнении (1) x_i через остальные переменные:

$$x_i = -\frac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1 - \cdots - \frac{a_{i,i-1}}{a_{ii}}x_{i-1} - \frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}}x_{i+1} - \cdots - \frac{a_{in}}{a_{ii}}x_n + \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

В результате приходим к системе

$$\begin{cases} x_1 = & b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \cdots + b_{1n}x_n + c_1, \\ x_2 = b_{21}x_1 + & b_{23}x_3 + \cdots + b_{2n}x_n + c_2, \\ \quad\vdots & \vdots \\ x_i = b_{i1}x_1 + \cdots + b_{i,i-1}x_{i-1} + & b_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + b_{in}x_n + c_i, \\ \quad\vdots & \vdots \\ x_n = b_{n1}x_1 + \cdots + b_{n,n-1}x_{n-1} & + c_n, \end{cases}$$

где

$$b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}},$$

$i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$,

$$c_i = \frac{b_i}{a_{ii}},$$

$i = 1, \dots, n$. Это система вида (2) с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b_{n1} & & \cdots & b_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Метод Якоби — это метод простой итерации для системы (2), полученной описанным способом (некоторые авторы называют методом Якоби общий метод простой итерации из п. 1 или, наоборот, методом простой итерации описанный здесь метод Якоби).

Итерационная последовательность строится по (3), расчётная формула в развёрнутом виде выглядит так:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = & b_{12}x_2^{(k-1)} + b_{13}x_3^{(k-1)} + \cdots + b_{1n}x_n^{(k-1)} + c_1, \\ x_2^{(k)} = b_{21}x_1^{(k-1)} + & b_{23}x_3^{(k-1)} + \cdots + b_{2n}x_n^{(k-1)} + c_2, \\ \quad\vdots & \vdots \\ x_i^{(k)} = b_{i1}x_1^{(k-1)} + \cdots + b_{i,i-1}x_{i-1}^{(k-1)} + & b_{i,i+1}x_{i+1}^{(k-1)} + \cdots + b_{in}x_n^{(k-1)} + c_i, \\ \quad\vdots & \vdots \\ x_n^{(k)} = b_{n1}x_1^{(k-1)} + \cdots + b_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)} & + c_n, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \dots$, начальная итерация $\overline{x}^{(0)}$ задана.

Естественно, для этого метода справедливы утверждения о сходимости и оценки погрешности предыдущего пункта.

3. Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой модификацию метода Якоби, заключающуюся в следующем. При вычислении очередного приближения переменной $x_i^{(k)}$ используются не $(k-1)$-е итерации $x_1^{(k-1)}, \dots, x_{i-1}^{(k-1)}$, как в методе простой итерации, а найденные на текущем k-м шаге $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$. Тогда расчётная формула будет выглядеть так:

$$\begin{cases}
x_1^{(k)} = b_{12}x_2^{(k-1)} + b_{13}x_3^{(k-1)} + \dots + b_{1n}x_n^{(k-1)} + c_1, \\
x_2^{(k)} = b_{21}x_1^{(k)} + b_{23}x_3^{(k-1)} + \dots + b_{2n}x_n^{(k-1)} + c_2, \\
x_3^{(k)} = b_{31}x_1^{(k)} + b_{32}x_2^{(k)} + b_{34}x_4^{(k-1)} + \dots + b_{3n}x_n^{(k-1)} + c_2, \\
\quad\vdots \\
x_i^{(k)} = b_{i1}x_1^{(k)} + \dots + b_{i,i-1}x_{i-1}^{(k)} + b_{i,i+1}x_{i+1}^{(k-1)} + \dots + b_{in}x_n^{(k-1)} + c_i, \\
\quad\vdots \\
x_n^{(k)} = b_{n1}x_1^{(k)} + \dots + b_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} + c_n,
\end{cases}$$

$k = 1, 2, \dots$. Если определить треугольные матрицы

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(тогда $B = B_1 + B_2$), то расчётную формулу метода Зейделя можно записать в матричном виде:

$$\overline{x}^{(k)} = B_1\overline{x}^{(k)} + B_2\overline{x}^{(k-1)} + \overline{c}. \qquad (8)$$

Далее приведены без доказательств утверждения о сходимости и оценках погрешности метода Зейделя.

Теорема 3. Пусть $\|B_1\| + \|B_2\| < 1$. Тогда итерационная последовательность (8) сходится к точному решению $\overline{x}$ системы (2) при любой начальной итерации $\overline{x}^{(0)}$и имеет место оценка погрешности

$$\Delta\overline{x}^{(k)} = \left\| \, \overline{x} - \overline{x}^{(k)} \right\| \le q^k \cdot \left\| \overline{x} - \overline{x}^{(0)} \right\| = q^k \Delta\left(\overline{x}^{(0)}\right),$$

где $k = 0, 1, \dots$,

$$q = \frac{\|B_2\|}{1 - \|B_1\|} < 1.$$

Замечание. Из теоремы следует, что метод Зейделя также имеет линейную скорость сходимости, как и метод простой итерации, причём чем меньше $\|B_2\|$, тем она выше.

Оценка погрешности априорная, она неприменима практически. Апостериорная оценка даётся следующей теоремой.

Теорема 4. Пусть $\|B\| < 1$. Тогда итерационная последовательность (8) сходится к точному решению $\overline{x}$ системы (2) при любой начальной итерации $\overline{x}^{(0)}$ и имеет место оценка погрешности

$$\Delta\overline{x}^{(k)} = \left\| \, \overline{x} - \overline{x}^{(k)} \right\| \le \frac{\|B_2\|}{1 - \|B\|} \cdot \left\| \overline{x}^{(k)} - \overline{x}^{(k-1)} \right\|,$$

$k = 1, 2, \dots$.

Несмотря на то, что метод Зейделя является улучшением метода Якоби, он не обязательно сходится быстрее метода Якоби. Возможны случаи, когда метод Зейделя сходится медленнее метода Якоби. Причина в том, что они ориентированы на решение различных классов систем (1): последний — с близкими к диагональным матрицами A, первый — с близкими к нижнетреугольным (см. замечания к теоремам 1, 3).

Пример. Решить систему методом итераций

$$\begin{cases} 2x_1 + 10x_2 - 6x_3 = 72, \\ -3x_1 + x_2 + 25x_3 = -92, \\ 20x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -32. \end{cases}$$

Запишем её в матричном виде:

$$A\overline{x} = \overline{b},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -6 \\ -3 & 1 & 25 \\ 20 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 72 \\ -92 \\ -32 \end{pmatrix}.$$

Попытаемся исключить неизвестные из уравнений и привести к виду $\overline{x} = B\overline{x} + \overline{c}$. Система примет вид

$$\begin{cases} x_1 = -5x_2 + 3x_3 + 36, \\ x_2 = 3x_1 - 25x_3 - 92, \\ x_3 = 10x_1 - 2x_2 + 16, \end{cases}$$

таким образом,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & -25 \\ 10 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

норма матрицы $\|B\|_1$=28. Применение метода итераций не гарантирует сходимости.

Приведем систему к виду $\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c}$ другим образом. В системе переставим уравнения:

$$\begin{cases} 20x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -32, \\ 2x_1 + 10x_2 - 6x_3 = 72, \\ -3x_1 + x_2 + 25x_3 = -92. \end{cases}$$

Затем точно так же исключим неизвестные:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 - 1{,}6 \\ x_2 = -0{,}2x_1 + 0{,}6x_3 + 7{,}2 \\ x_3 = 0{,}12x_1 - 0{,}04x_2 - 3{,}68 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}12 & -0{,}04 & 0 \end{pmatrix},$$

норма матрицы $\|B\|_1 = 0{,}8 < 1$. Решим систему методом итераций. В таблице 1 дана последовательность векторов приближения.

Табл. 1. Последовательность векторов приближения в примера на с. 7

x_1	$-1{,}6$	$-0{,}5280$	$-0{,}9536$	$-1{,}0337$	$-0{,}9952$	$-0{,}9975$	$-1{,}0008$
x_2	$7{,}2$	$5{,}3120$	$4{,}8096$	$5{,}0172$	$5{,}0146$	$4{,}9962$	$4{,}9995$
x_3	$-3{,}68$	$-4{,}1600$	$-3{,}9558$	$-3{,}9868$	$-4{,}0047$	$-4{,}0000$	$-3{,}9996$

Последовательность итераций приводит к решению с точностью $\varepsilon = 1{,}7 \cdot 10^{-2}$. Эта величина вычислена как $\left\|\bar{x}^{(6)} - \bar{x}^{(5)}\right\|$. Точное решение системы

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$\left\|\bar{x}^{(6)} - \bar{x}\right\| = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$.

Поэтому фактическая погрешность приближенного решения равна $1{,}0 \cdot 10^{-3}$.