

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso di Laurea Triennale in Matematica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Problema di Controllo Ottimo per COVID-19

Candidato:
Giuseppe Pesce
Matricola 1150078

Relatrice:
Alessandra Buratto

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | 1 |
| 1 Panoramica modello base | 3 |
| 2 Stime e valori per l'analisi del problema | 7 |
| 2.1 Valore statistico di vita | 7 |
| 2.2 Mortalità e diffusione del virus | 10 |
| 2.3 Costo di Testing | 12 |
| 2.4 Altri valori | 13 |
| 2.5 Tabella finale | 14 |
| 2.6 Dati del Veneto | 14 |
| 3 Risoluzione del problema | 17 |
| 3.1 Metodo di risoluzione | 17 |
| 3.2 Caso con $T=0$ e $Q=0$ | 20 |
| 3.3 Caso con $L=0$ | 23 |
| 4 Risultati finali | 27 |
| Bibliografia | 33 |

Introduzione

L'infezione da Covid-19, ovvero Coronavirus Disease 2019, dichiarata pandemia dall'OMS (Organizzazione Mondiale della Sanità) l'11 Marzo 2020, è stata, ed è ancora, una delle più grandi emergenze recenti. Oltre all'ingente numero di morti, questo virus ha modificato, e potenzialmente distrutto l'ordine sociale ed economico incidendo quindi sullo stile di vita delle persone ora e in un prossimo futuro.

Per questo motivo l'obiettivo di questa tesi consiste nel trovare la politica migliore, ovvero dal costo economico minore, per contrastare il Covid-19.

Il Covid-19 è stato scoperto a fine Dicembre 2019 a Wuhan, una città situata in Cina, e, nonostante le severe misure attuate nella provincia dell'Hubei, verso metà Febbraio il Covid-19 si è sparsa in altri paesi vicini come ad esempio la Corea del Sud, fino al primo paziente scoperto in Italia il 20 Febbraio 2020.

Seguendo Alvarez, Argente e Lippi in [1] per analizzare l'epidemia si utilizza un modello modificato del modello SIR introdotto da W.O. Kermack e A.G. McKendrick in [2], dove tutta la popolazione, che in seguito sarà normalizzata, N viene suddivisa in suscettibili S , cioè coloro che sono sani e possono essere contagiati, infetti I , cioè coloro che hanno attualmente l'infezione, e infine i recuperati R , ovvero coloro che sono stati infetti e poi sono guariti.

Per dare dei valori ai vari parametri, vengono utilizzati i dati globali forniti dall'OMS e quelli forniti dall'ISS e ISTAT per quanto riguarda l'Italia, trovando molti valori diversi da quelli forniti in [1], infatti visto che i dati sono ampiamente diversi tra un paese e l'altro si è deciso di analizzare in maniera particolare l'Italia.

A causa del fatto che una grande percentuale di persone infette è asintomatica, vi è un'enorme incertezza nei dati, soprattutto sul numero di infetti, quindi vengono diversi valori per dei singoli parametri; ciò implica che si risolvono diversi problemi di controllo ottimo.

Il pianificatore ha a disposizione due politiche: lo strumento di “Lockdown”, che gli permette di bloccare una parte della popolazione, e lo strumento di “Testing”, che gli permette di testare attraverso ad esempio dei tamponi le persone e, in caso di positività, metterli in quarantena. L’obbiettivo dei problemi consiste nel capire se con un sistema di tracciamento intelligente ed efficiente, come ad esempio l’applicazione “Immunì”, il solo strumento di testing può sostituire o meno la politica di lockdown.

La tesi consta di quattro capitoli:

1. Nel primo capitolo si presenta e si analizza il modello SIR, costruendo una funzione valore per il problema di controllo ottimo, seguendo Alvarez, Argente e Lippi in [1].
2. Nel secondo capitolo si analizzano i dati dell’OMS, dell’ISTAT e di ISS, oltre ai dati presi da altri studi, per poter dare dei valori ai vari parametri.
3. Il terzo capitolo è quello centrale, in cui si risolvono i due problemi di controllo ottimo, seguendo sempre Alvarez, Argente e Lippi in [1].
4. Infine nell’ultimo capitolo si analizzano i vari risultati e si sviluppano delle simulazioni, facendo delle considerazioni in merito.

Capitolo 1

Panoramica modello base

In questo capitolo viene presentata innanzitutto una versione modificata del modello SIR che sarà alla base della costruzione del problema, ripercorrendo quanto fatto da Alvarez, Argente e Lippi in [1].

Sia N_t la popolazione viva al tempo t , sia S_t il numero di persone suscettibili, cioè coloro che sono sani e non sono mai stati infettati, sia I_t il numero di persone infette, cioè coloro che hanno contratto il virus e sono attualmente, ovvero al tempo t , infetti e sia R_t il numero di persone recuperate, cioè coloro che hanno avuto in precedenza il virus e sono guariti. Quindi:

$$N_t = S_t + I_t + R_t \quad \forall t \geq 0. \quad (1.1)$$

Per quanto riguarda i recuperati, si ipotizza che questi siano diventati immuni alla malattia, infatti il numero di casi di ricadute, ovvero di persone che una volta guarite sono state nuovamente infette, è veramente basso e hanno tutti avuto sintomi molto lievi con carica virale molto bassa.

Si normalizza la popolazione iniziale, quindi $N_0 = 1$. Il pianificatore può bloccare, imponendo un lockdown una frazione $L_t \in [0, \bar{L}]$ della popolazione, con $\bar{L} < 1$, infatti alcuni servizi di base come ad esempio quello alimentare e quello sanitario non possono essere bloccati.

Realisticamente il lockdown non può essere completamente efficiente, infatti anche se si è sottoposti alla politica di blocco si può essere contagiati per esempio abitando insieme a un medico o recandosi ad acquistare gli alimentari, quindi viene introdotta una nuova variabile $\theta \in [0, 1]$ dove se $\theta = 0$ allora il lockdown è completamente inefficiente, al contrario se $\theta = 1$ è completamente efficiente

(realisticamente $\theta \notin \{0, 1\}$).

La frazione di persone che possono trasmettere il virus risulta essere $(1 - L\theta)$. Inoltre il pianificatore può testare un numero limitato di persone e, se infette, metterle in quarantena.

Le persone in quarantena vengono denotate con $Q_t \leq I_t$, si osservi che coloro che sono in quarantena vengono tolti dagli infetti attivi, ma sono comunque a rischio di morte o possono contribuire alla congestione del sistema sanitario.

Infine sia $\beta > 0$ la contagiosità del virus, ovvero se in media un infetto contagia 20 persone per unità di tempo, allora $\beta = 20$.

Con queste premesse si può scrivere la legge del moto delle persone Suscettibili S_t , cioè:

$$\dot{S}_t = -\beta[S_t(1 - \theta L_t)][(I_t - Q_t)(1 - \theta L_t)]. \quad (1.2)$$

Il fattore $(I_t - Q_t)(1 - \theta L_t)$ rappresenta la frazione di infetti che può trasmettere il virus, mentre $S_t(1 - \theta L_t)$ è la frazione di suscettibili che può venire a contatto con il virus, quindi, visto che i nuovi infetti dipendono dal prodotto tra i suscettibili e gli infetti, il blocco ha una valenza quadratica, che rende il Lockdown un mezzo importante per bloccare la trasmissione del virus.

Anche Q_t , ovvero le persone infette messe in quarantena, ha una grande importanza nell'evoluzione degli infetti, perché se si cerca di mettere in quarantena il maggior numero possibile di infetti, quindi se Q_t è molto vicino a I_t , allora $(Q_t - I_t)$ è molto piccolo.

Nel caso non si attui nessuna politica, quindi $Q = L = 0$, allora

$$\dot{S}_t = -\beta S_t I_t \quad (1.3)$$

e il numero di infetti cresce in maniera esponenziale.

Sia γ la frazione di infetti per unità di tempo che recupera o muore, essa coincide con il reciproco della durata prevista dell'infezione, allora:

$$\dot{I}_t = -\dot{S}_t - \gamma I_t. \quad (1.4)$$

Sia \bar{T} il numero massimo di persone che possono essere testate al tempo t e sia $T_t \leq \bar{T}$ il numero di persone che al tempo t vengono testate (sottoposte al tampone), risultano positive al virus e vengono messe in quarantena.

Se si sottrae il numero di persone che escono dalla quarantena, perché sono guarite o morte, che si ottiene moltiplicando Q_t per γ , al numero di persone

che vengono testate e messe in quarantena al tempo t , si ottiene la variazione per unità di tempo di Q_t . Allora Q_t segue la seguente legge del moto:

$$\dot{Q}_t = T_t - \gamma Q_t. \quad (1.5)$$

Si introduca una nuova funzione $\phi(I)$, con $0 < \phi(I) \leq \gamma$ ad indicare il numero di infetti che muore per unità di tempo, ovvero:

$$\phi(I) = [\rho + kI]\gamma. \quad (1.6)$$

Viene introdotta come funzione e quindi variabile non per l'evoluzione del Covid-19, ma dipende dal numero di infetti I , perché se vi è un grande numero di infetti vi è congestione del sistema sanitario e quindi la mortalità aumenta per la mancata assistenza sanitaria.

Quindi $[\rho + kI]$ è la percentuale di persone infette che moriranno quando la percentuale di infetti è I , mentre γ è il reciproco della durata prevista dell'infezione, in modo che $\phi(I)$ sia la mortalità per unità di tempo del virus.

Moltiplicando il numero di infetti con la mortalità per unità di tempo si ottiene la decrescita della popolazione viva. Allora N_t segue la seguente legge del moto:

$$-\dot{N}_t = \phi(I_t)I_t. \quad (1.7)$$

Sia ν la probabilità per unità di tempo che venga creato un vaccino o una cura, impostando a r il fattore di sconto per tutti i valori, allora l'intensità di attualizzazione è $\delta = r + \nu$.

Siano w le unità di produzione di ogni persona che non sia in lockdown o in quarantena, indipendentemente che sia infetta o meno. Si ipotizzi che l'unico fattore di morte sia il covid-19 e si imposti il problema con orizzonte infinito, considerato che il periodo del problema è breve visto che il valore di continuazione è nullo quando appare il vaccino. Allora, come illustrato da Argente, Alvarez e Lippi in [1], il pianificatore deve risolvere il problema di minimizzazione seguente:

$$V(S_0, I_0, Q_0) = \min_{\{L_t, T_t\}} \int_0^\infty e^{-(r+\nu)t} \left\{ wQ_t + wL_t(1 - Q_t) + \right. \quad (1.8)$$

$$+vsl\phi(I_t)I_t + c(T_t; S_t, I_t, Q_t) \Big\} dt$$

$$\begin{aligned} s.a : \quad \dot{S}_t &= -\beta[S_t(1 - \theta L_t)][(I_t - Q_t)(1 - \theta L_t)] \\ \dot{I}_t &= -\dot{S}_t - \gamma I_t \\ \dot{Q}_t &= T_t - \gamma Q_t \\ (S(0), I(0), Q(0)) &= (S_0, I_0, Q_0) \\ I_0 &> 0 \\ S_0 + I_0 &\leq N_0 \end{aligned}$$

Il flusso del costo dipende da quattro componenti:

Da wQ_t , perché gli agenti in quarantena non lavorano e quindi non possono produrre.

Da $wL_t(1 - Q_t)$, perché le persone che sono sottoposte al lockdown non possono lavorare.

Da $vsl\phi(I_t)I_t$, che è il costo dato dal valore dei morti ottenuto moltiplicando il “Valore Statistico di Vita” (vsl), che verrà discusso nel secondo capitolo, per $\phi(I)I$ che è la quantità degli infetti morti per unità di tempo

Da $c(T_t; \bullet)$, ovvero il costo che serve per tracciare e testare con i tamponi, dipende da (S, I, Q) perché in base alla quantità di suscettibili e infetti diventa più o meno difficoltoso e quindi costoso tracciare e trovare gli infetti.

Capitolo 2

Stime e valori per l'analisi del problema

In questo capitolo verranno analizzati i dati forniti da vari studi, da ISTAT, ISS e OMS in [10], [11] e [12] per poter dare dei valori ai parametri, in modo da poter risolvere il problema di controllo ottimo. Molte stime differiscono da [1], perché sono stati utilizzati studi differenti e dati recenti per l'assegnazione dei valori. In particolare vengono fornite delle stime di: vs_l , ρ , k , γ , β e $c(T, S, I, Q)$.

Infine verranno fornite delle stime per i parametri sopra elencati, utilizzando i soli dati forniti dal Veneto.

2.1 Valore statistico di vita

In questa sezione, seguendo [3] viene dato un valore economico alle vite perse a causa del virus, ciò risulta essenziale per lo studio del problema.

Si consideri che la pandemia aumenti la mortalità di un individuo, avente un'aspettativa di vita pari a LE anni, di un tasso δ , sia v il valore di un anno di vita misurato in anni di consumo pro capite, cioè per esempio se $v = 6$, un anno di vita pesa equivale a sei anni di consumo pro capite.

Una volta definiti δ , LE e v si indichi con $\alpha \approx \delta v LE$ la percentuale di consumo in cui la società è disposta a sacrificare.

Si suppone che il valore utilità di tutta la vita di una persona di età a sia:

$$V_a = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \bar{S}_{a,t} u(c_t) = u(c_0) + \beta S_{a+1} V_{a+1} \quad (2.1)$$

dove S_{a+1} è la probabilità che una persona di età a sopravviva un anno e $\bar{S}_{a,t} = S_{a+1} S_{a+2} \dots S_{a+t}$ è la probabilità che sopravviva t anni. Mentre $u(c)$ è il flusso di utilità del consumo c .

Sia $N = \sum_a N_a$ la popolazione totale, e si suppone che per un anno vi sia un incremento della mortalità pari a δ .

Sia $\lambda = 1 - \alpha$ la frazione del consumo ridotto, infatti α è la percentuale di consumo che si è disposti a rinunciare, allora si indichi con $V_a(\lambda, \delta)$ il valore utilità della vita di una persona di età a in cui il consumo e la mortalità vengono ridotti rispettivamente di un fattore (λ, δ) per un anno, per poi tornare alla normalità, ovvero $(\lambda, \delta) = (1, 0)$ alla fine di quell'anno, quindi:

$$V_a(\lambda, \delta) = u(\lambda c) + (S_{a+1} - \delta_{a+1}) V_{a+1}(1, 0). \quad (2.2)$$

Sia $W(\lambda, \delta)$ il benessere sociale utilitaristico di tutte le età, allora:

$$W(\lambda, \delta) = \sum_a N_a V_a(\lambda, \delta) = N u(\lambda c) + \sum_a (S_{a+1} - \delta_{a+1}) N_a V_{a+1}(1, 0) \quad (2.3)$$

Visto che l'obiettivo è quello di capire quanto sia importante il valore utilitaristico di vita rispetto al consumo, si imposti la seguente equazione:

$$W(\lambda, 0) = W(1, \delta)$$

e da qui si ottiene:

$$\begin{aligned} N u(\lambda c) + \sum_a S_{a+1} N_a V_{a+1}(1, 0) &= N u(c) + \sum_a a (S_{a+1} - \delta_{a+1}) N_a V_{a+1}(1, 0) \\ \implies u(c) - u(\lambda c) &= \sum_a \delta_{a+1} \omega_a V_{a+1}(1, 0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dove $\omega_a = \frac{N_a}{N}$, e si utilizzi la serie di Taylor su $u(\lambda c)$ attorno a $\lambda = 1$, per ottenere:

$$u(\lambda c) \approx u(c) + u'(c) c (\lambda - 1), \quad (2.5)$$

sostituendo in (2.4) si ottiene:

$$\alpha = 1 - \lambda \approx \sum_a \delta_{a+1} \omega_a \tilde{V}_{a+1} \quad (2.6)$$

dove $\tilde{V}_{a+1} = \frac{V_{a+1}(1,0)}{u'(c)c}$ che coincide con il valore di vita relativo al consumo annuo, infatti la divisione per l'utilità marginale del consumo, $u'(c)$, converte l'utilità in unità di consumo.

Facendo un semplice calcolo dall'equazione (2.2) si ottiene

$$V_a(1,0) = u(c) \sum_{t=0}^{\infty} S_a^-, t = u(c) LE_a \quad (2.7)$$

dove l'ultima equazione si ottiene dal fatto che la somma delle probabilità di sopravvivenza degli anni futuri coincide con l'aspettativa di vita. E quindi si ottiene $\tilde{V}_{a+1} = \frac{u(c)}{u'(c)c} LE_{a+1}$, dove $v = u(c)/(u'(c)c)$, che come si era già accennato è il numero di anni di consumo pro capite che equivalgono a un anno di vita persa. Considerando che il consumo pro capite, che lo si chiami con c , è circa due terzi il PIL pro capite, si ottiene che:

$$vsl = v LE c \approx \frac{2}{3} v LE w \quad (2.8)$$

Per stimare v si consideri che l' "U.S Environmental Protection Agency (2020)" stima un valore di 7,4 milioni di dollari per gli anni di vita di coloro compresi tra i 25 e 55, e quindi impostando $LE = 40$, visto che l'età media dello studio è di 40 anni e l'età media di vita è di 80 anni nel 2006, e impostando $c = 31.000$ il consumo pro capite in america nel 2006, si ottiene che:

$$v = \frac{7.400.000}{40 \bullet 31.000} \approx 6. \quad (2.9)$$

Si dimezzi questo valore di v , infatti considerando che la maggior parte dei morti aveva già patologie preesistenti, e considerando che durante e nei prossimi anni il consumo annuo pro capite cala drasticamente, si può impostare $v = 4$ nel caso base, ma si analizzino anche i casi con $v = 3$ e $v = 5$.

Per stimare LE , secondo uno studio realizzato da un gruppo di 11 ricercatori scozzesi in [4], le persone morte da Covid-19 avrebbero vissuto in media altri 12 anni, quindi $LE = 12$. E quindi si ottengono i seguenti valori: $vsl = 24w$,

$$vsl = 32w \text{ e } vsl = 40w.$$

2.2 Mortalità e diffusione del virus

In questa sezione vengono assegnati dei valori alla mortalità per unità di tempo $\phi(I)$ in funzione al numero di infetti e vengono assegnate anche delle stime sulla contagiosità del virus β .

Per analizzare il tasso di mortalità per unità di tempo del Covid-19, ovvero la probabilità che una persona infetta muoia in un'unità di tempo, bisogna prima analizzare la sostanziale differenza che vi è tra il tasso di mortalità del caso ("Case Fatality Ratio", CFR) e il tasso di mortalità dell'infezione ("Infection Fatality Ratio", IFR).

Come analizzato in uno studio di dodici ricercatori Italiani [6], il CFR è un dato molto incerto, infatti si ottiene dividendo il numero di morti per Covid-19, con il numero di infetti totale.

Quindi per esempio utilizzando i dati forniti dall' ISS, il CFR in Italia è ottenuto dalla divisione del numero di decessi, ovvero 35.563, per il numero totale dei casi confermati, ovvero 280.153, ottenendo quindi un CFR attuale pari al 12,69%.

Confrontando i vari valori di CFR nel mondo ottenuti con i dati dell'OMS, notiamo che è un valore molto variabile. Questo dipende da molti fattori, come per esempio la modalità di conteggio dei morti, infatti non c'è una linea guida per stabilire se una persona è morta "per" il Covid-19 o "con" il Covid-19, ma soprattutto vi è una grande incertezza sul numero di infetti.

A titolo di esempio in [5] viene fatto uno studio sul numero effettivo di infetti analizzando dei campioni casuali nella contea di Santa Clara in California, viene stimato un numero intorno ai 54.000 positivi in quella contea, quando i positivi confermati erano solo 954, quindi il numero delle persone effettivamente infette in questa contea è di 55 volte il numero di casi dichiarati, un numero estremamente grande.

Poiché l'IFR è intrinsecamente sovrastimato dal CFR, presumendo che il ceppo virale sia lo stesso in tutti i paesi, si può presumere che il valore minimo del CFR sia osservato come limite superiore minimo per IFR. Seguendo questa procedura, l'Università di Oxford ha utilizzato uno dei valori CFR minimi

(intorno allo 0,4%), ovvero da Israele, Australia e anche Islanda, e per tenere adeguatamente conto dei non rilevati asintomatici, che nei studi che verranno illustrati sotto sono il 50% circa del totale degli infetti, viene dimezzato per ottenere un $IFR = 0,2\%$.

Per l'epidemia di Covid-19, inoltre, esiste un modo indipendente per ottenere un risultato piuttosto imparziale sulla stima dell'IFR, utilizzando gli unici casi dove è stata testata la maggior parte della popolazione: la Diamond Princess, la nave da crociera ancorata nel porto di Yokohama dal 4 febbraio al 2 marzo, e la città di Vò Euganeo in Veneto.

Nella Diamond Princess tutti i 3711 passeggeri e l'equipaggio sono stati testati e 712 (19,2%) persone hanno avuto risultati positivi ai test. Di questi, 331 (46,5%) erano asintomatici al momento del test, tra i 381 pazienti sintomatici, 37 (9,7%) hanno richiesto cure ospedaliere e 9 sono deceduti (1,26% degli infetti).

Nella città di Vò Euganeo sono state testate in una prima indagine circa 2800 persone e in una seconda indagine circa 2300 persone su un totale di 3275 abitanti, di cui sono risultate positive un totale di 81 persone ed è stato registrato un solo decesso per coronavirus (1,24% degli infetti). In entrambi i casi $IFR = CFR \approx 1,25\%$, quindi le stime dell'IFR va dal 0,2% all'1,25%.

Si indichi con $\phi(I) = [\rho + kI]\gamma$ la mortalità del virus per unità di tempo, essa dipende da I perché più infetti ci sono, maggiore sarà la mortalità a causa di vari fattori come ad esempio la congestione del sistema sanitario. Alla variabile ρ , studiata in precedenza, vengono assegnati due valori, in modo da avere più stime, ovvero $\rho = 0,0065$ e $\rho = 0,01$.

Per calcolare k , il tasso di influenza nella mortalità delle problematiche riguardanti un gran numero di infetti, come per esempio la congestione del sistema sanitario, si consideri che in Italia, sempre secondo le stime in [6] la mortalità effettiva è del 5%. Questo è dovuto anche al fatto che ci sono pochi posti per la terapia intensiva, infatti sono circa 6.000 su un totale di 60 milioni di abitanti circa. In Germania, invece, su 82 milioni di abitanti vi sono circa 30.000 posti per la terapia intensiva.

Da ciò si può dedurre che i dati riguardanti la mortalità in Italia siano poco affidabili, anche se dimostra una grande rilevanza della congestione del sistema sanitario nella mortalità. Si consideri quindi $k = 0,05$, in modo che la mortalità aumenti dell'1% quando il 20% della popolazione è infetta.

Infine per calcolare $\phi()$ bisogna assegnare un valore a γ , ovvero al reciproco

della durata prevista dell'infezione, in modo da ottenere la mortalità del virus per unità di tempo.

Da uno studio a Wuhan di Wang et al. in [7] si è stimato che il tempo medio di incubazione del virus prima che inizino i primi sintomi è di 5,2 giorni, mentre la mediana del tempo di guarigione o di morte dopo che si sono presentati i primi sintomi è di 12,38 giorni, in questo modo si ottiene la durata prevista di infezione: $(5,2 + 12,38) = 18$ giorni. Quindi per calcolare γ basta fare il reciproco, ovvero $\gamma = \frac{1}{18}$.

Per quanto riguarda invece la diffusione del virus si utilizzino gli studi e i dati forniti da ISS.

β è un parametro che indica la contagiosità del virus prima di essere controllato attraverso varie politiche, ovvero indica il numero di persone che contagia un infetto per unità di tempo. Il valore di contagiosità di una persona infetta è noto come “fattore R_0 ”, l'ISS poco prima del Lockdown in Italia ha stimato che questo fattore R_0 fosse pari a 3, ovvero un infetto contagia 3 persone durante tutto il periodo di infezione. Attualmente l' R_t attualmente in Italia è pari a 1,18, essendo influenzato dal distanziamento sociale e le mascherine. Impostando β con una media tra i due, dividendo questo numero per la durata media dell'infezione, ovvero 18, si ottiene che $\beta = 0,11$ circa.

2.3 Costo di Testing

In questa sezione viene analizzato il costo di un test di positività al virus, come ad esempio un tampone, che, se positivo, comporta l'imposizione dell'individuo in quarantena, ovvero un periodo di totale isolamento finché il soggetto non guarisce o muore. Il costo non è definito né dalla mancanza di produzione di coloro che verranno messi in quarantena, né dalla produzione stessa di una tecnologia di tracciamento, come per esempio l'applicazione “Immuni”, il cui codice sorgente e tutte le componenti dell'applicazione inclusi gli sviluppi del software sono stati concessi gratuitamente allo stato Italiano dalla S.p.A “Bending Spoons”.

Il costo dipende, oltre alle persone che sono state testate e messe in quarantena T , anche dallo stato (S, I, Q) , minore è la percentuale di infetti nella popolazione, maggiore è la difficoltà di tracciamento, infatti se le persone vengono testate

in maniera casuale, per trovare T persone positive bisogna testare $T \frac{S+I-Q}{I-Q}$ persone. Si indichi con $c(T, S, I, Q)$ tale costo.

Se c'è una buona tecnologia di tracciamento allora il costo scende notevolmente:

$$c(T, S, I, Q) = \eta \left(T \left(\frac{S+I-Q}{I-Q} \right)^{1-\zeta} \right) \quad (2.10)$$

Dove $\zeta \in [0, 1]$ è l'efficacia della tecnologia di tracciamento, infatti se $\zeta = 0$ allora non c'è alcuna tecnologia e i campionamenti sono casuali, mentre se $\zeta = 1$ la tecnologia è pienamente efficiente e la percentuale di infetti attivi, cioè non in quarantena, rispetto alla popolazione è ininfluente nel costo di tracciamento. Ci si aspetta che $c(T, S, I, Q)$ con (S, I, Q) fissi sia una funzione crescente, positiva e convessa in T , ovvero

$$\frac{\partial c(T, S, I, Q)}{\partial T} > 0 \text{ e } \frac{\partial^2 c(T, S, I, Q)}{\partial T^2} > 0,$$

quindi si pongano queste caratteristiche alla funzione η .

Riassumendo, la funzione di costo $\eta(z)$ dipende dal numero di “attività” che devono essere eseguite per identificare T infettati, e si parametrizza il numero di attività come $z = T \left(\frac{S+I-Q}{I-Q} \right)^{1-\zeta}$, dove ogni “attività” è una combinazione di tracciamento e test.

Seguendo sempre Alvarez, Argente e Lippi in [1] si è impostato un costo quadratico, ovvero $\eta(z) = z^2 \alpha$, con $\alpha = 0,01$ in modo che se $z = 1$ il costo sarà pari a $\alpha = 0,01$.

2.4 Altri valori

Si assuma che il tempo sia espresso in anni, quindi se $t = 1$ vuol dire che è passato un anno.

Per dare un valore all'intensità di attualizzazione δ bisogna prima assegnare dei valori al tasso di sconto per tutti i valori r , e alla probabilità che venga creata una cura e un vaccino ν .

Si stima che il vaccino o una cura arrivi dopo circa un anno e mezzo, quindi $\nu = \frac{1}{1,5} = 0,6\bar{6}$, mentre viene scontato ogni valore al 5%, quindi $r = 0,05$.

Per quanto riguarda \bar{L} , l'ISTAT ha stimato che solo il 28% degli italiani du-

rante il lockdown sia uscito di casa per motivi lavorativi o familiari, quindi si imposti $\bar{L} = 0,7$.

Mentre per quanto riguarda l'efficacia del lockdown θ , è difficile riuscire a dare una stima sul suo valore, ma si assuma che almeno due persone su cinque non abbia avuto contatti con altre persone e almeno una persona su due ne ha, quindi si assegnano i seguenti valori: $\theta = 0,5$ e $\theta = 0,4$.

Infine si assuma che si inizi ad attuare una politica quando sia già presente un 1% di infetti nella popolazione e i recuperati siano 2%, in modo che $I_0 = 0,01$ e $S_0 = 0,97$.

2.5 Tabella finale

I vari valori si riassumono nella seguente tabella:

| Parametro | Valori | Significato |
|-----------|----------------------------|--|
| r | 0,05 | tasso annuale di sconto |
| ν | 0,66 | probabilità annuale di un vaccino o di una cura |
| vs_l | $24w$; $32w$; $40w$ | valore statistico di vita |
| ρ | 0,0065 ; 0,01 | IFR quando k non nullo / nullo |
| k | 0,05 | tasso di incidenza degli infetti nella mortalità |
| γ | $\frac{1}{18} \bullet 365$ | durata del virus in una persona rispetto a un anno |
| β | 0,11 \bullet 365 | incremento annuale di casi attivi se non controllati |
| θ | 0,5; 0,4 | efficacia del lockdown |
| \bar{L} | 0,7 | percentuale massima di persone su cui esercitare il lockdown |
| I_0 | 0,01 | infetti iniziali |
| S_0 | 0,97 | suscettibili iniziali |

2.6 Dati del Veneto

In questa sezione vengono analizzati i dati del Veneto per studiare in maniera approfondita la politica ottimale per il Veneto.

Nel Veneto, attualmente sono stati confermati 25138 infetti totali, con 2151 morti. In questa regione, rispetto a molte altre regioni italiane, sono state testate un buon numero di persone, infatti in poco più di sei mesi sono stati analizzati 1723891 tamponi per un totale di 683212 persone, quindi in media

al giorno veniva testato lo 0,074% della popolazione.

Si stima quindi che il numero di infetti sia solamente cinque volte maggiore, quindi il numero di casi totali pari a 125690, con una mortalità dello 0,017%. Essendo un'analisi su un numero molto ristretto di persone, si consideri la mortalità costante, quindi $k = 0$ e $\rho = 0,017$.

Per analizzare β sono stati analizzati i primi 14 giorni di Marzo 2020 in Veneto, e facendo una media del rapporto dei nuovi casi sugli infetti attuali, si ottiene un valore pari a $\beta = 0,16$.

Considerando che il lockdown in Veneto è iniziato l'11 Marzo 2020, e considerando che in media una persona inizia ad avere i sintomi dopo 5 giorni dal contatto con il virus, per ottenere I_0 si consideri dieci volte il numero degli infetti del 15 Marzo (inizialmente venivano testate poche persone), ottenendo un totale di 20000 infetti, che corrisponde al 0,41% della popolazione, ovvero $I_0 = 0,0041$. Mentre si imposti $S_0 = 0,985$ in modo che vi siano già 53000 guariti circa.

Si ottiene quindi la seguente tabella:

| Parametro | Valori |
|-----------|------------|
| ρ | 0,017 |
| k | 0 |
| β | 0,16 • 365 |
| I_0 | 0,0041 |
| S_0 | 0,985 |

Capitolo 3

Risoluzione del problema

In questo capitolo verranno risolti, utilizzando i modelli e i valori ottenuti nei due capitoli precedenti, due problemi di controllo ottimo: il primo dove il pianificatore ha solo a disposizione lo strumento di lockdown, mentre nel secondo ha a disposizione solo un buon sistema di tracciamento e test di positività.

Visto che il problema di pianificazione nel primo caso non è un problema convesso, seguendo [1] si risolvono i problemi utilizzando le condizioni sufficienti di Programmazione Dinamica e, in seguito, discretizzando il sistema e utilizzando il metodo delle differenze finite, vengono implementati dei codici MatLab forniti sempre da [1], modificando con i valori dei parametri ottenuti nel capitolo precedente, per ottenere un'ottima approssimazione della soluzione del problema.

3.1 Metodo di risoluzione

Per la risoluzione dei problemi si utilizzino le condizioni sufficienti di Programmazione Dinamica per un problema autonomo descritti in [8]. Dato il seguente problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizza} \quad \int_0^\infty e^{-\rho t} f_0(y(t; u), z(t, u), u(t), t) dt \\ & \text{soggetto a} \quad \dot{y}(t) = f(y(t), z(t), u(t)) \\ & \quad \quad \quad \dot{z}(t) = g(y(t), z(t), u(t)) \\ & \quad \quad \quad y(t) = x_1 \end{aligned}$$

$$z(t) = x_2$$

$$y(0) = x_1^0$$

$$z(0) = x_2^0$$

$$u(\bullet) \in C([0, +\infty); \Omega)$$

allora la funzione valore risulta essere

$$V(x_1, x_2) = \min_{u(\bullet) \in C([0, +\infty); \Omega)} \int_0^\infty e^{-\rho t} f_0(y(t; u), z(t, u), u(t), t) dt$$

e la funzione valore “a valore corrente”

$$v(x_1, x_2) = e^{\rho t} V(x_1, x_2)$$

Teorema 1. *Si supponga che la funzione valore $v(x_1, x_2)$ sia una funzione differenziabile con continuità che soddisfa all'equazione alle derivate parziali*

$$\begin{aligned} & -\rho v(x_1, x_2) + \min_{\alpha \in \Omega} \left\{ \frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \alpha) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_2} g(x_1, x_2, \alpha) + f_0(x_1, x_2, \alpha) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

e soddisfa inoltre a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} [v(x_1^*(t), x_2^*(t)) - v(x_1(t), x_2(t))] \geq 0 \quad (3.2)$$

Si suppone inoltre esista una funzione di controllo feedback continua

$$\phi(\bullet, \bullet, \bullet) : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow K$$

$$(t, x_1, x_2) \rightarrow \phi(t, x_1, x_2)$$

tale che

$$\begin{aligned} & -\rho v(x_1, x_2) + \frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \phi(t, x_1, x_2)) + \\ & + \frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_2} g(x_1, x_2, \phi(t, x_1, x_2)) + f_0(x_1, x_2, \phi(t, x_1, x_2)) = 0 \end{aligned}$$

allora una strategia ottima è

$$u^*(t) = \phi(t, y(t; u^*), z(t; u^*))$$

Per avere una soluzione numerica del problema si risolve il problema utilizzando il metodo numerico per problemi di controllo ottimo in tempo continuo descritto in [9].

Questo metodo consiste nel discretizzare il modello creando una griglia di punti formata dai due stati x_1, x_2 , dove si suppone che $x_1 \in [0, 1]$, $x_2 \in [0, 1]$ e $x_1 + x_2 \leq 1$, quindi

$$Grid_{x_1} = \{0, \Delta, \dots, (N-1)\Delta\}$$

$$Grid_{x_2} = \{0, \Delta, \dots, (N-1)\Delta\}$$

dove $\Delta = \frac{1}{N-1}$ e visto che $x_1(i) + x_2(j) \leq 1$, allora $\frac{i+j-2}{N-1} \leq 1$, ovvero $i + j \leq N + 1$. In seguito si analizzano i valori iterativi $v^k(i, j)$ e $u^k(i, j)$, dove $u^k(i, j)$ è il controllo ottimale all'iterazione k con lo stato $(x_1(i), x_2(j))$ e funzione valore v^{k-1} , mentre $v^k(i, j)$ è la funzione valore calcolata con lo stato $(x_1(i), x_2(j))$, controllo ottimo $u^k(i, j)$, che si ottiene iteratamente partendo da $v^0(i, j)$ che si ottiene utilizzando un controllo costante \bar{u} conoscendo il valore di v ai limiti della griglia, ovvero quando $x_1 = 0$ e quando $x_2 = 0$.

Si ottiene il controllo ottimale quando si ha convergenza del punto fisso della funzione valore iterativa o il controllo ottimale iterativo, ovvero $v^k(i, j) = v^{k-1}(i, j)$ oppure $u^k(i, j) = u^{k-1}(i, j)$, $\forall (i, j)$ ammissibili.

Una volta ottenuta la convergenza si suddivide lo spazio di due anni (visto che dopo un anno e mezzo si ipotizza esserci un vaccino o una cura, e quindi $v=u=0$) in intervalli giornalieri, ovvero $t = \{0, 1, \dots, 730\}$ e $Dt = \frac{1}{365}$, dove $\dot{x}(t) = \frac{x(t) - x(t-1)}{Dt}$ e in ogni istante $x_1(t)$, $x_2(t)$ vengono calcolati utilizzando il controllo ottimale calcolato in precedenza $u^{fin}(x_1(t-1), x_2(t-1))$.

Per calcolare le derivate della funzione valore negli stati si utilizza il metodo delle differenze finite descritto sempre in [9], ovvero

$$v_{x_1}^-(i, j) = \frac{v(x_1(i), x_2(j)) - v(x_1(i-1), x_2(j))}{x_1(i) - x_1(i-1)}$$

$$v_{x_2}^+(i, j) = \frac{v(x_1(i), x_2(j+1)) - v(x_1(i), x_2(j))}{x_2(j+1) - x_2(j)}$$

3.2 Caso con $T=0$ e $Q=0$

In questa sezione il pianificatore ha a disposizione solo lo strumento di blocco, quindi impostando in (1.8) $Q = 0$ e $I = 0$ si ottiene:

$$V(S_0, I_0, 0) = \min_{L_t} \int_0^\infty e^{-(r+\nu)t} \left\{ wL_t + vsl\phi(I_t)I_t \right\} dt \quad (3.3)$$

con la corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$(r + \nu) V(S, I) = \min_{L \in [0, L]} wL + vsl\phi(I)I + \\ -[\beta SI (1 - \theta L)^2] \partial_S V(S, I) + [\beta SI (1 - \theta L)^2 - \gamma I] \partial_I V(S, I) \quad (3.4)$$

Quindi chiamando:

$$v(L; S, I) = wL + vsl\phi(I)I - [\beta SI (1 - \theta L)^2] \partial_S V(S, I) + \\ + [\beta SI (1 - \theta L)^2 - \gamma I] \partial_I V(S, I) \quad (3.5)$$

si ottiene che

$$\frac{\partial v}{\partial L} = w - [2\theta\beta SI (1 - \theta L)] (\partial_I V(S, I) - \partial_S V(S, I)) \quad (3.6)$$

e anche

$$\frac{\partial^2 v}{\partial L^2} = 2\theta^2\beta SI (\partial_I V(S, I) - \partial_S V(S, I)) \quad (3.7)$$

che verrà analizzata più avanti se è positiva.

Esplicitando L e ponendo (3.6) uguale a 0 si ottiene

$$L = \frac{1}{\theta} \left[1 - \frac{w}{2\theta\beta SI (\partial_I V(S, I) - \partial_S V(S, I))} \right] \quad (3.8)$$

A questo punto, per risolvere il problema si utilizza il metodo numerico descritto nella sezione precedente. Si crea quindi una griglia di punti formata dal dominio di V ovvero (S, I) in cui ogni punto corrisponde al valore di $V(S_i, I_j)$, e in seguito, utilizzando i metodi di discretizzazione per problemi di controllo stocastico descritti in [9], si può risolvere una buona approssimazione del problema. Prima di tutto bisogna trovare il valore ai limiti della griglia, ovvero $V(0, I)$ e $V(S, 0)$ calcolati da (3.4). Nell'asse $S = 0$ si ottiene attraver-

so un conto immediato che $V(0, I) = 0 \quad \forall I \in (0, 1)$, mentre nell'asse $I = 0$ bisogna risolvere la seguente equazione alle derivate parziali:

$$(r + \nu)V(0, I) = vsI[\rho + kI]\gamma - \gamma I \partial_I V(0, I) \quad (3.9)$$

ottenendo quindi:

$$V(0, I) = vsI \left(\frac{\rho\gamma}{r + \nu + \gamma} + \frac{k\gamma I}{r + \nu + 2\gamma} \right), \quad \forall I \in (0, 1).$$

Sia $\Delta = S_i - S_{i-1} = I_{j+1} - I_j$, allora si utilizzi la seguente griglia:

$$Grid_S = \{0, \Delta, \dots, (N-1)\Delta\}$$

$$Grid_I = \{0, \Delta, \dots, (N-1)\Delta\}$$

con $S_1 = 0, S_2 = 0, \dots, S_N = (N-1)\Delta = 1$ e allo stesso modo $I_1 = 0, I_2 = 0, \dots, I_N = (N-1)\Delta = 1$. Definiamo inoltre

$$V_S^-(i, j) = \frac{V(S_i, I_j) - V(S_{i-1}, I_j)}{S_i - S_{i-1}}, \quad (3.10)$$

$$V_I^+(i, j) = \frac{V(S_i, I_{j+1}) - V(S_i, I_j)}{I_{j+1} - I_j}.$$

Sottraendo le due espressioni

$$V_I^+(i, j) - V_S^-(i, j) = \frac{1}{\Delta} [V(S_i, I_{j+1}) - 2V(S_i, I_j) + V(S_{i-1}, I_j)] \quad (3.11)$$

e sostituendo (3.10) in (3.7) otteniamo:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial L^2} = 2\theta^2 \beta S_i I_j (V_I^+(i, j) - V_S^-(i, j)). \quad (3.12)$$

Se $V_I^+(i, j) - V_S^-(i, j) < 0$ allora v è concava in L e il minimo si ottiene quando $L(i, j) = 0$ oppure $L(i, j) = \bar{L}$. Mentre se $V_I^+(i, j) - V_S^-(i, j) \geq 0$ allora v è convessa in L e il minimo si ottiene sostituendo (3.10) in (3.8), ovvero:

$$L^{0(k)}(i, j) = \frac{1}{\theta} \left[1 - \frac{w}{2\theta\beta S_i I_j (V_I^{+(k-1)}(i, j) - V_S^{-(k-1)}(i, j))} \right] \quad (3.13)$$

e

$$L^{(k)}(i, j) = \min\{\bar{L}, \max\{0, L^{0^{(k)}}(i, j)\}\}. \quad (3.14)$$

Ora discretizzando l'equazione HJB (3.4), moltiplicando ambo le parti per dt e sommando per $V(S_i, I_j)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} [1 + (r + \nu)dt]V(S_i, I_j) &= \min_{L \in [0, \bar{L}]} wLdt + vsl\phi(I_j)I_jdt + \\ &+ [\beta S_i I_j (1 - \theta L)^2]dt[V_I^+(i, j) - V_S^-(i, j)] - \gamma I_j dt V_I^-(i, j) + V(S_i, I_j) \end{aligned}$$

e attraverso (3.11) si ottiene

$$\begin{aligned} [1 + (r + \nu)dt]V(S_i, I_j) &= \min_{L \in [0, \bar{L}]} wLdt + vsl\phi(I_j)I_jdt + \\ &+ [\beta S_i I_j (1 - \theta L)^2] \frac{dt}{\Delta} [V(S_i, I_{j+1}) - 2V(S_i, I_j) + V(S_{i-1}, I_j)] + \\ &- \gamma I_j \frac{dt}{\Delta} [V(S_i, I_j) - V(S_i, I_{j-1})] + V(S_i, I_j). \end{aligned}$$

Assumendo $L^{(k)} = L$ per alleggerire la notazione, si ottiene:

$$\begin{aligned} V^{(k)}(S_i, I_j) &= \min_{L \in [0, \bar{L}]} wLdt + vsl\phi(I_j)I_jdt + \quad (3.15) \\ &+ [1 - (r + \nu)dt] \left[1 - 2 \frac{\beta S_i I_j (1 - \theta L)^2}{1 - (r + \nu)dt} \frac{dt}{\Delta} - \frac{\gamma I_j}{1 + (r + \nu)dt} \frac{dt}{\Delta} \right] V^{(k-1)}(S_i, I_j) + \\ &+ [1 - (r + \nu)dt] \left[\frac{\beta S_i I_j (1 - \theta L)^2}{1 - (r + \nu)dt} \frac{dt}{\Delta} \right] V^{(k-1)}(S_i, I_{j+1}) + \\ &+ [1 - (r + \nu)dt] \left[\frac{\beta S_i I_j (1 - \theta L)^2}{1 - (r + \nu)dt} \frac{dt}{\Delta} \right] V^{(k-1)}(S_{i-1}, I_j) + \\ &+ [1 - (r + \nu)dt] \left[\frac{\gamma I_j}{1 + (r + \nu)dt} \frac{dt}{\Delta} \right] V^{(k-1)}(S_i, I_{j-1}), \end{aligned}$$

dove dt serve per non aver pesi negativi e quindi deve soddisfare la condizione

$$1 - 2 \frac{\beta S_i I_j (1 - \theta L)^2}{1 - (r + \nu)dt} \frac{dt}{\Delta} - \frac{\gamma I_j}{1 + (r + \nu)dt} \frac{dt}{\Delta} > 0.$$

Dopo alcune semplificazioni:

$$2 \frac{\beta S_i I_j (1 - \theta L)^2}{1 - (r + \nu)dt} \frac{dt}{\Delta} \leq \frac{\beta dt(N - 1)}{1 - (r + \nu)dt}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\gamma I_j}{1 + (r + \nu)dt} \frac{dt}{\Delta} &\leq \frac{\gamma dt(N - 1)}{1 - (r + \nu)dt} \\ 1 &\geq [r + \nu + (N - 1)(\beta + \gamma)]dt \end{aligned}$$

si ottiene il limite superiore per dt

$$dt \leq \frac{1}{r + \nu + (N - 1)(\beta + \gamma)}.$$

Attraverso un codice MatLab fornito nell'appendice online sempre di [1], modificando opportunamente i parametri, si riesce ad ottenere una buona approssimazione del problema.

3.3 Caso con L=0

In questo caso, essendoci la variabile Q , bisogna introdurre una nuova variabile, ovvero $X = I - Q$, per portare il problema a un problema a due stati togliendo Q e I dall'equazione HJB. Si ottiene quindi che

$$\begin{aligned} \dot{S}_t &= -\beta S_t X_t \\ \dot{X}_t &= \beta S_t X_t - T_t - \gamma X_t \end{aligned}$$

dove $X_0 = I_0 > 0$ e $S_0 = 1 - X_0$.

In questo modo si sono tolti Q e I dal costo di tracciamento, quindi Q appare ancora nella mancata produzione di coloro che sono in quarantena e sia I che Q appaiono ancora nel tasso di mortalità.

Per togliere I dal tasso di mortalità si rende $\phi()$ costante imponendo $k=0$ e aumentando di poco ρ , mentre per togliere Q dalla mancata produzione e dal tasso di mortalità, si integra per parti il seguente integrale

$$\int_0^\infty (w + vsl\rho\gamma) e^{-(r+\nu)t} Q_t dt = \quad (3.16)$$

$$= \frac{(w + vsl\rho\gamma)Q_0}{r + \nu + \gamma} + \int_0^\infty (w + vsl\rho\gamma) \frac{e^{-(r+\nu)t}T_t}{r + \nu + \gamma} dt$$

In questo modo si può riscrivere l'equazione HJB con la funzione $V(S, I, Q) = \tilde{V}(S, I - Q) = \tilde{V}(S, X) + \frac{(w+vsl\rho\gamma)Q}{r+\nu+\gamma}$:

$$(r + \nu)\tilde{V}(S, X) = \min_{T \in [0, \bar{T}]} T \frac{w + vsl\rho\gamma}{r + \nu + \gamma} + \alpha T^2 \left(\frac{S + X}{X} \right)^{2-2\zeta} + vsl\rho\gamma X + \quad (3.17)$$

$$+ \beta S X [\partial_X \tilde{V}(S, X) - \partial_S \tilde{V}(S, X)] - (\gamma X + T) \partial_X \tilde{V}(S, X)$$

sia v :

$$v(T; S, X) = T \frac{w + vsl\rho\gamma}{r + \nu + \gamma} + \alpha T^2 \left(\frac{S + X}{X} \right)^{2-2\zeta} + vsl\rho\gamma X + \quad (3.18)$$

$$+ \beta S X [\partial_X \tilde{V}(S, X) - \partial_S \tilde{V}(S, X)] - (\gamma X + T) \partial_X \tilde{V}(S, X)$$

allora

$$\frac{\partial v(T; S, X)}{\partial T} = \frac{w + vsl\rho\gamma}{r + \nu + \gamma} + 2\alpha T \left(\frac{S + X}{X} \right)^{2-2\zeta} - \partial_X \tilde{V}(S, X) \quad (3.19)$$

e ponendola uguale a 0 si ottiene:

$$T = \left(\partial_X \tilde{V}(S, X) - \frac{w + vsl\rho\gamma}{r + \nu + \gamma} \right) \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{S + X}{X} \right)^{2\zeta-2} \quad (3.20)$$

mentre

$$\frac{\partial^2 v(T; S, X)}{\partial T^2} = 2\alpha \left(\frac{S + X}{X} \right)^{2-2\zeta} \geq 0. \quad (3.21)$$

Da ciò segue che $v(T; S, X)$ è convessa in T . Quindi procedendo come nella sezione precedente si ottiene

$$T^{(k)}(i, j) = \left(\frac{1}{\Delta} [V^{(k-1)}(S_i, X_j) - V^{(k-1)}(S_i, X_{j-1})] - \frac{w + vsl\rho\gamma}{r + \nu + \gamma} \right) \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{S + X}{X} \right)^{2\zeta-2}. \quad (3.22)$$

Per quanto riguarda la funzione HJB otteniamo, assumendo che $T^{(k)} = T$:

$$V(S_i, X_j) = \min_{T \in [0, \bar{T}]} T \frac{w + vsl\rho\gamma}{r + \nu + \gamma} dt + \alpha T^2 \left(\frac{S_i + X_j}{X_j} \right)^{2-2\zeta} dt + vsl\rho\gamma X_j dt + \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
 & +\beta S_i X_j \left[\frac{dt}{\Delta} [V(S_i, X_{j+1}) - 2V(S_i, X_j) + V(S_{i-1}, X_j)] + \right. \\
 & \left. -(\gamma X_j + T) \frac{dt[V(S_i, X_j) - V(S_{i-1}, X_j)]}{\Delta} + (1 - (r + \nu)dt)V(S_i, X_j) \right]
 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 V^{(k)}(S_i, X_j) = & \min_{T \in [0, \bar{T}]} T \frac{w + vsl\rho\gamma}{r + \nu + \gamma} dt + \alpha T^2 \left(\frac{S_i + X_j}{X_j} \right)^{2-2\zeta} dt + vsl\rho\gamma X_j dt + \\
 & [1 - (r + \nu)dt] \left[1 - 2 \frac{\beta S_i X_j}{1 - (r + \nu)dt} \frac{dt}{\Delta} - \frac{\gamma X_j - T}{1 + (r + \nu)dt} \frac{dt}{\Delta} \right] V^{(k-1)}(S_i, X_j) + \\
 & + [1 - (r + \nu)dt] \left[\frac{\beta S_i X_j}{1 - (r + \nu)dt} \frac{dt}{\Delta} \right] V^{(k-1)}(S_i, X_{j+1}) + \\
 & + [1 - (r + \nu)dt] \left[\frac{\beta S_i X_j}{1 - (r + \nu)dt} \frac{dt}{\Delta} \right] V^{(k-1)}(S_{i-1}, X_j) + \\
 & + [1 - (r + \nu)dt] \left[\frac{\gamma X_j - T}{1 + (r + \nu)dt} \frac{dt}{\Delta} \right] V^{(k-1)}(S_i, X_{j-1})
 \end{aligned}$$

Con dt che deve soddisfare

$$dt \leq \frac{1}{r + \nu + (N - 1)(\beta + \gamma)}$$

Capitolo 4

Risultati finali

Nel primo problema ($Q = 0$ e $T = 0$) vengono dapprima utilizzati i seguenti valori:

| Parametro | Valori |
|-----------|----------|
| vs_l | $32w$ |
| ρ | $0,0065$ |
| θ | $0,4$ |

Si ottiene che conviene imporre un lockdown dopo 27 giorni, che blocca gradualmente la popolazione, fino a raggiungere il 70% dopo circa 19 giorni, per poi allentarsi gradualmente in 22 giorni, per una durata complessiva di 41 giorni. Il costo totale di questa politica risulta $V = 0,313$ PIL pro capite annuo.

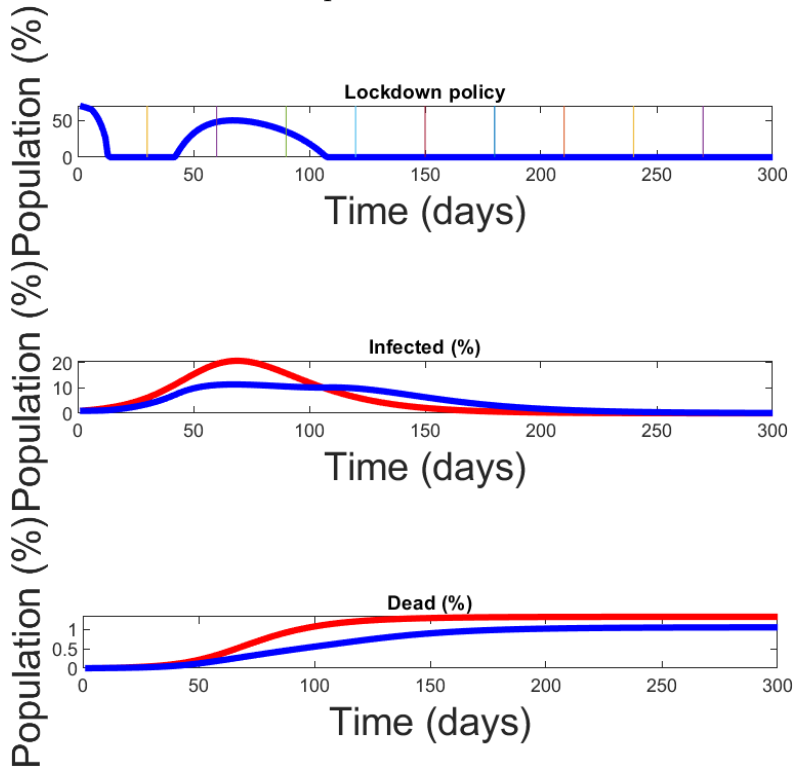
Si ipotizza poi un maggior valore della mortalità ($\rho = 0,01$), ovvero i seguenti valori:

| Parametro | Valori |
|-----------|--------|
| vs_l | $32w$ |
| ρ | $0,01$ |
| θ | $0,4$ |

Si ottiene che conviene imporre un lockdown completo (70%) immediato, che si allenta in 13 giorni, per poi riprendere dopo altri 30 giorni, che blocca gradualmente la popolazione, fino a raggiungere il 50% dopo circa 29 giorni, per poi allentarsi gradualmente in 34 giorni, per una durata complessiva di 76 giorni. Il costo totale di questa politica risulta $V = 0,3596$ PIL pro capite annuo.

Nelle seguenti immagini vengono mostrati la percentuale di lockdown, di infetti e di morti, la linea rossa mostra l'evoluzione degli infetti o dei morti se non

venisse attuata alcuna politica.



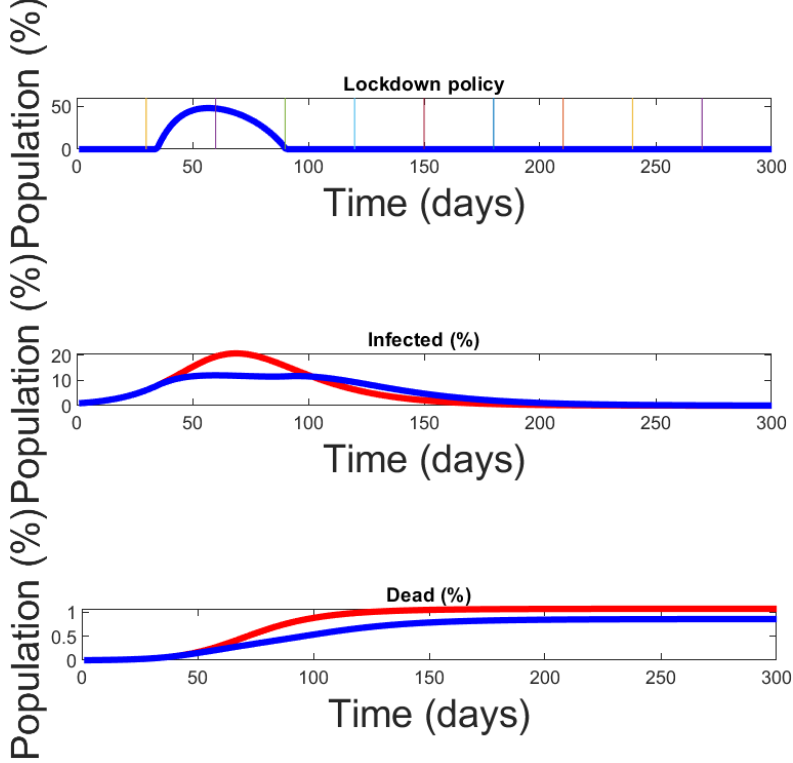
Una ulteriore analisi prevede una maggior efficacia del lockdown ($\theta = 0,5$), ovvero i seguenti valori:

| Parametro | Valori |
|-----------|----------------|
| vsl | $32w$ |
| ρ | $0,0065; 0,01$ |
| θ | $0,5$ |

Si ottiene che con un tasso di mortalità maggiore ($\rho = 0,01$), conviene imporre subito un primo lockdown completo, bloccando il 70% per 6 giorni, in seguito si allenta completamente in 3 giorni, per poi, dopo 27 giorni, riprendere e bloccare gradualmente la popolazione, fino a raggiungere il 60% dopo circa 23 giorni, per poi allentarsi gradualmente in 49 giorni, per una durata complessiva di 81 giorni. Il costo totale di questa politica risulta $V = 0,3276$ PIL pro capite annuo.

Mentre con un tasso di mortalità minore ($\rho = 0,0065$) conviene imporre un lockdown dopo 35 giorni, che blocca gradualmente la popolazione, fino a raggiungere il 50% dopo circa 13 giorni, per poi allentarsi gradualmente in 55

giorni, per una durata complessiva di 68 giorni. Il costo totale di questa politica risulta $V = 0,2941$ PIL pro capite annuo.



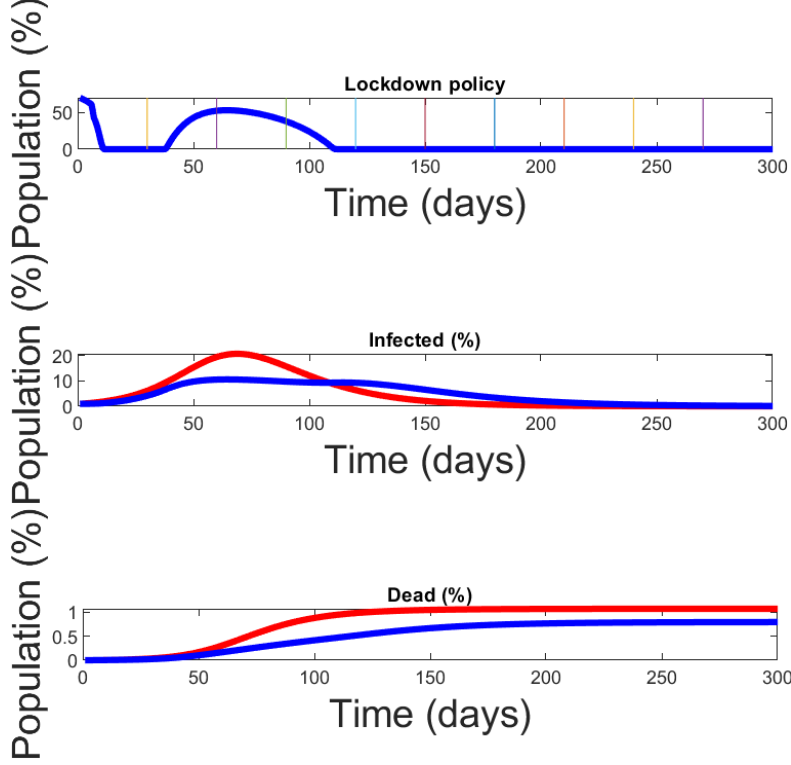
Considerando che il caso base prevede $\rho = 0,0065$ e $\theta = 0,5$, un'ulteriore analisi studia diversi valori di vita statistica ($vs_l = 24w$ e $vs_l = 40w$), ovvero i seguenti valori:

| Parametro | Valori |
|-----------|------------|
| vs_l | $24w; 40w$ |
| ρ | $0,0065$ |
| θ | $0,5$ |

Si ottiene che con un valore statistico di vita minore ($vs_l = 24w$) conviene impostare un lockdown dopo 35 giorni, che blocca gradualmente la popolazione, fino a raggiungere il 40% dopo circa 20 giorni, per poi allentarsi gradualmente in 31 giorni, per una durata complessiva di 51 giorni. Il costo totale di questa politica risulta $V = 0,2090$ PIL pro capite.

Mentre con un valore statistico di vita maggiore ($vs_l = 40w$) conviene imporre un lockdown completo (70%) immediato, che si allenta in 11 giorni, per poi riprendere dopo 26 giorni, che blocca gradualmente la popolazione, fino

a raggiungere il 54% dopo circa 28 giorni, per poi allentarsi gradualmente in 45 giorni, per una durata complessiva di 84 giorni. Il costo totale di questa politica risulta $V = 0,4037$ PIL pro capite.



In seguito viene illustrata una tabella riassuntiva dei risultati:

| vsl | ρ | θ | <i>giorni in lockdown</i> | V |
|-------|--------|----------|---------------------------|---------|
| 32w | 0,0065 | 0,4 | 41 | 0,3130w |
| 32w | 0,0065 | 0,5 | 68 | 0,2941w |
| 32w | 0,01 | 0,4 | 76 | 0,3596w |
| 32w | 0,01 | 0,5 | 81 | 0,3276w |
| 24w | 0,0065 | 0,5 | 51 | 0,2090w |
| 40w | 0,0065 | 0,5 | 84 | 0,4037w |

Per quanto riguarda il secondo problema di controllo ottimo ($L = 0$), si impongono i seguenti valori:

| Parametro | Valori |
|-----------|--------|
| ζ | 0,9 |
| ρ | 0,0125 |
| k | 0 |

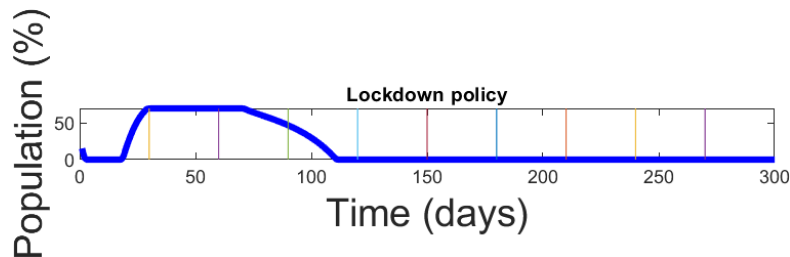
e analizzando i diversi valori di vita statistica ($vsl = 16w$, $vsl = 24w$ e $vsl = 40w$), si ottengono i seguenti risultati:

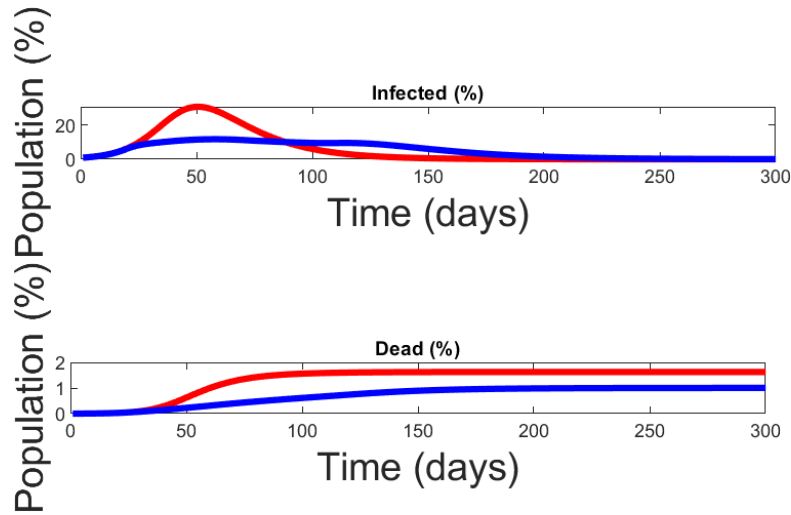
| vsl | V | %morti |
|-----|---------|--------|
| 24w | 0,1640w | 0,91 |
| 32w | 0,2457w | 0,86 |
| 40w | 0,3214w | 0,79 |

Per quanto riguarda il Veneto, con i seguenti valori:

| Parametro | Valori |
|-----------|------------|
| ρ | 0,017 |
| k | 0 |
| β | 0,16 • 365 |
| I_0 | 0,0041 |
| S_0 | 0,985 |

Si ottiene che conviene imporre un lockdown dopo 19 giorni, che blocca gradualmente la popolazione, fino a raggiungere il 70% dopo circa 11 giorni, che dura 42 giorni per poi allentarsi gradualmente in 38 giorni, per una durata complessiva di 91 giorni. Il costo totale di questa politica risulta $V = 0,453$ PIL pro capite annuo.





Mentre analizzando la politica ottimale per il Veneto con il secondo problema, si ottiene un valore di V pari a 0,3624 PIL pro capite annuo, con una percentuale di morti finale pari a 1,28.

Quindi la politica di solo “Testing”, risulta essere migliore, ovvero meno costosa rispetto alla politica di solo “Lockdown” anche se la percentuale di morti risulta leggermente maggiore.

Questa analisi ha chiaramente dei limiti, infatti oltre all’incertezza dei dati, sono state analizzati solo i costi economici principali e non sono stati considerati, ad esempio, gli “effetti cicatrice” sull’economia come il fallimento delle aziende o altro. Inoltre non vengono considerate altre importanti forme di mitigazione del virus come ad esempio il distanziamento sociale o l’uso della mascherina.

Bibliografia

- [1] F. Alvarez, D. Argente e F. Lippi *A Simple Planning Problem for COVID-19 Lockdown and Smart Tracing*. National Bureau of Economic Research, Aprile 2020.
- [2] Kermack, W. Ogilvy e A. G. McKendrick. *A contribution to the mathematical theory of epidemics*. Proceedings of the Royal Society of London, Royal Society, Regno Unito, Agosto 1927, pp.700-721.
- [3] Hall, Robert E., Charles I. Jones, e Peter J. Klenow. *Trading Off Consumption and COVID-19 Deaths*. Mimeo, Stanford University, 2020.
- [4] P. Hanlon, F. Chadwick, A. Shah, R. Wood, J. Minton, G. McCartney, C. Fischbacher, F. S. Mair, D. Husmeier, J. Matthiopoulos e D. A. McAllister *COVID-19 - exploring the implications of long-term condition type and extent of multimorbidity on years of life lost: a modelling study*. Wellcome Open Research, Aprile 2020.
- [5] Eran, Bendavid, B. Jay, e N. Sood. *We cannot trust current COVID-19 models* Sito web dell'autore, Stanford University, 2020.
- [6] G. De Natale, V. Ricciardi, G. De Luca, D. De Natale, G. Di Meglio, A. Ferragamo, V. Marchitelli, A. Piccolo, A. Scala, R. Somma, E. Spina e C. Troise. *The Covid-19 Infection in Italy: A Statistical Study of an Abnormally Severe Disease*. Journal of Clinical Medicine, vol. 9, Maggio 2020.
- [7] Huwen Wang, Zezhou Wang, Yinqiao Dong, Ruijie Chang, Chen Xu, Xiaoyue Yu, Shuxian Zhang, Lhakpa Tsamtag, Meili Shang, Jinyan Huang,

BIBLIOGRAFIA

- Ying Wang, Gang Xu, Tian Shen, Xinxin Zhang, e Yong Cai. *Phase-adjusted estimation of the number of coronavirus disease 2019 cases in Wuhan, China*. Cell Discovery 6, articolo 10, Febbraio 2020.
- [8] A. Buratto, L. Grosset e B. Viscolani. *Ottimizzazione Dinamica modelli economici e gestionali* Quinta edizione, Libreria Progetto, Padova, 2020.
- [9] Kushner, Harold, e P.I. G. Dupuis. *Numerical methods for stochastic control problems in continuous time* Vol. 24, seconda edizione, Springer, 2001.
- [10] WHO Coronavirus Disease (COVID-19) Dashboard, <<https://covid19.who.int/>>, 10 Settembre 2020.
- [11] COVID-19 Situazione in Italia, <<http://opendatadpc.maps.arcgis.com/apps/opsdashboard/index.html/b0c68bce2cce478eaac82fe38d4138b1>>, 17 Settembre 2020.
- [12] Dati della Sorveglianza integrata COVID-19 in Italia, <<https://www.epicentro.iss.it/coronavirus/sars-cov-2-dashboard>>, 10 Settembre 2020.