

Заочное, 6005, Вычислительная техника,
Алгебра, Контрольная работа №1,
Комплексные числа и многочлены, 1 вариант

Содержание

1	Выполнить действия	2
1.1	Деление комплексных чисел (Complex numbers division)	2
1.2	Мнимая единица (Imaginary unit)	3
1.3	Ответ	3
2	Найти решения уравнения и нарисовать их на комплексной прямой	3
2.1	Формула нахождения дескриминанта (Discriminant)	3
2.1.1	Представить квадрат в виде умножения (Difference of squares)	3
2.1.2	Умножение комплексных чисел (Complex numbers multiplication)	4
2.1.3	Дескриминант (Discriminant)	4
2.1.4	Сложение комплексных чисел (Complex number addition)	4
2.1.5	Дескриминант (Discriminant)	4
2.2	Формула нахождения корней квадратного уравнения (Quadratic formula)	4
2.2.1	(Factoring)	4
2.2.2	Квадратный корень (Square root)	5
2.2.3	Знаменатель (Denominator)	5
2.2.4	Корни x_1 и x_2	5
2.3	График (Plot)	5
2.4	Ответ	6
3	Найти все значения и записать ответ в показательной форме	6
3.1	Polar form	6
3.1.1	Абсолютная величина (Absolute value)	6
3.1.2	Угол	6
3.2	Формула Муавра и извлечение корней из комплексных чисел (De Moivre's formula)	6
3.3	Корни	6
3.4	Ответ	7

4	Разложить на множители многочлен	7
4.1	Теорема Безу (Polynomial remainder theorem)	7
4.2	(Polynomial synthetic division)	7
4.3	Разложение многочлена на множители (Polynomial factoring)	7
4.4	Ответ	7
5	Выделить целую часть дроби	7
5.1	(Polynomial long division)	8
5.2	Ответ	8
6	Разложить дробь на простейшие	8
6.1	Factorize denominator	8
6.2	Разложение дроби на простейшие, используя неопределенные коэффициенты	8
6.3	if $x = -2$	9
6.4	if $x = 2$	9
6.5	if $x = 0$	9
6.6	(Simplifying)	10
6.7	Ответ	10

1 Выполнить действия

$$\frac{3-i}{2+i} + i^{11}(-2+3i)$$

1.1 Деление комплексных чисел (Complex numbers division)

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{3-i}{2+i} &= \\
&= \frac{3-1i}{2+1i} \\
&= \frac{3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1}{2^2 + 1^2} + \frac{(-1) \cdot 2 - 3 \cdot 1}{2^2 + 1^2}i \\
&= \frac{6 + (-1)}{4 + 1} + \frac{-2 - 3}{4 + 1}i \\
&= \frac{5}{5} + \frac{-5}{5}i \\
&= 1 - 1i \\
&= 1 - i
\end{aligned} \quad (2)$$

$$1 - 1i + i^{11}(-2 + 3i)$$

1.2 Мнимая единица (Imaginary unit)

$$\begin{aligned} -i &= \sqrt{-1} \\ i &= \sqrt{-1} \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\ i^4 &= i^3 \cdot i = -i^2 = 1 \\ i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^6 &= i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1 \\ i^7 &= i^6 \cdot i = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\ i^8 &= i^7 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1 \\ i^9 &= i^8 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^{10} &= i^9 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1 \\ i^{11} &= i^{10} \cdot i = -1 \cdot i = -i \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} 1 - i + i^{11}(-2 + 3i) &= \\ &= 1 - i + (-i)(-2 + 3i) \\ &= 1 - i - i(-2 + 3i) \\ &= 1 - i + 2i - 3i^2 \\ &= 1 + i - 3i^2 \\ &= 1 + i - 3 \cdot (-1) \\ &= 1 + i + 3 \\ &= 4 + i \end{aligned} \tag{4}$$

1.3 Ответ

$$4 + i$$

2 Найти решения уравнения и нарисовать их на комплексной прямой

$$2z^2 + (5 - 4i)z - 5i = 0$$

2.1 Формула нахождения дискриминанта (Discriminant)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (5 - 4i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5i)$$

2.1.1 Представить квадрат в виде умножения (Difference of squares)

$$\begin{aligned} (5 - 4i)^2 &= \\ &= (5 - 4i)(5 - 4i) \end{aligned} \tag{5}$$

2.1.2 Умножение комплексных чисел (Complex numbers multiplication)

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

$$\begin{aligned}(5 - 4i)(5 - 4i) &= \\&= (5 \cdot 5 - (-4) \cdot (-4)) + ((-4) \cdot 5 + 5 \cdot (-4))i \\&= (25 - 16) + ((-20) + (-20))i \\&= 9 + (-40)i \\&= 9 - 40i\end{aligned}\tag{6}$$

2.1.3 Дискриминант (Discriminant)

$$\begin{aligned}\Delta &= \\&= (5 - 4i)(5 - 4i) - 4 \cdot 2 \cdot (-5i) \\&= 9 - 40i - 4 \cdot 2 \cdot (-5i) \\&= 9 - 40i - 8 \cdot (-5i) \\&= 9 - 40i - (-40i) \\&= 9 - 40i + 40i\end{aligned}\tag{7}$$

2.1.4 Сложение комплексных чисел (Complex number addition)

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\begin{aligned}9 - 40i + 40i &= \\&= 9 - 40i + 0 + 40i \\&= (9 + 0) + (-40 + 40)i \\&= 9 + 0i \\&= 9\end{aligned}\tag{8}$$

2.1.5 Дискриминант (Discriminant)

$$\Delta = 9$$

2.2 Формула нахождения корней квадратного уравнения (Quadratic formula)

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\x_{1,2} &= \frac{-(5 - 4i) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2}\end{aligned}$$

2.2.1 (Factoring)

$$\begin{aligned}-(5 - 4i) &= \\&= -1(5 - 4i) \\&= -1 \cdot 5 - 1 \cdot (-4i) \\&= -5 + 4i\end{aligned}\tag{9}$$

2.2.2 Квадратный корень (Square root)

$$x_{1,2} = \frac{-5 + 4i \pm 3}{2 \cdot 2}$$

2.2.3 Знаменатель (Denominator)

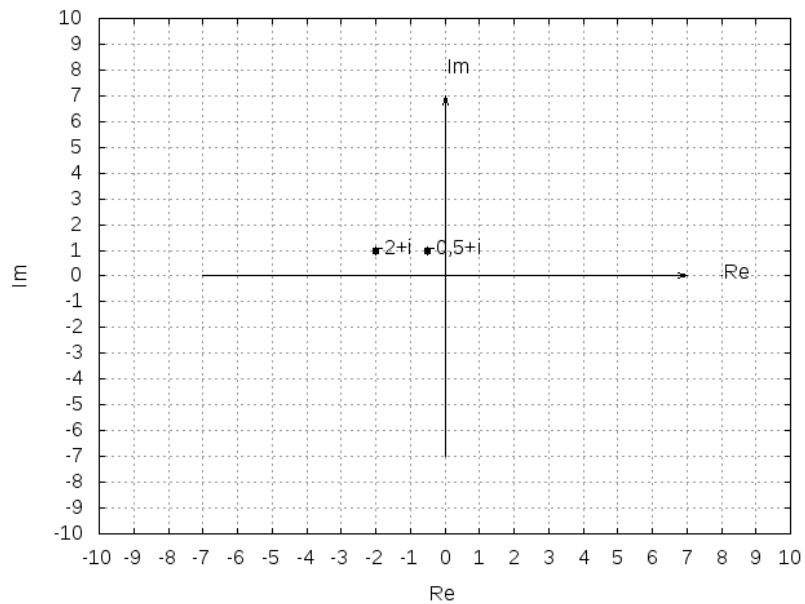
$$x_{1,2} = \frac{-5 + 4i \pm 3}{4}$$

2.2.4 Корни x_1 и x_2

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-5 + 4i \pm 3}{4} \\ x_1 &= \frac{-5 + 4i + 3}{4} = \\ &= \frac{-2 + 4i}{4} \\ &= \frac{-1 + 2i}{2} = \\ &= -0,5 + i \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-5 + 4i - 3}{4} = \\ &= \frac{-8 + 4i}{4} \\ &= -2 + i \end{aligned} \tag{11}$$

2.3 График (Plot)



2.4 Ответ

$$\begin{aligned} -0,5 + i \\ -2 + i \end{aligned} \quad (12)$$

3 Найти все значения и записать ответ в показательной форме

$$\sqrt[4]{16i}$$

3.1 Polar form

3.1.1 Абсолютная величина (Absolute value)

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{0^2 + 16^2} = 16 \quad (13)$$

3.1.2 Угол

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad (14)$$

3.2 Формула Муавра и извлечение корней из комплексных чисел (De Moivre's formula)

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) = \sqrt[n]{r} e^{i\varphi} \quad (15)$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

3.3 Корни

$$\omega_0 = 2 \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi \cdot 0}{4} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi \cdot 0}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{8}} \quad (16)$$

$$\omega_1 = 2 \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi \cdot 1}{4} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi \cdot 1}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right) = 2e^{i\frac{5\pi}{8}} \quad (17)$$

$$\omega_2 = 2 \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi \cdot 2}{4} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi \cdot 2}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right) = 2 \left(\cos \frac{-7\pi}{8} + i \sin \frac{-7\pi}{8} \right) = 2e^{-i\frac{7\pi}{8}} \quad (18)$$

$$\omega_3 = 2 \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi \cdot 3}{4} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi \cdot 3}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8} \right) = 2 \left(\cos \frac{-3\pi}{8} + i \sin \frac{-3\pi}{8} \right) = 2e^{-i\frac{3\pi}{8}} \quad (19)$$

3.4 Ответ

$$2e^{\frac{i\pi}{8}} \quad (20)$$

$$2e^{\frac{5i\pi}{8}} \quad (21)$$

$$2e^{-\frac{7i\pi}{8}} \quad (22)$$

$$2e^{-\frac{3i\pi}{8}} \quad (23)$$

4 Разложить на множители многочлен

$$f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$$

4.1 Теорема Безу (Polynomial remainder theorem)

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^4 + 1^3 - 1^2 + 1 - 2 = \\ &= 1^4 + 1^3 - (1)^2 + 1^2 - 2 \\ &= 1 + 1 - 1 + 1 - 2 \\ &= 2 - 2 \\ &= 0 \\ &\Rightarrow x - 1 \end{aligned} \quad (24)$$

4.2 (Polynomial synthetic division)

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ & & 1 & 2 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

4.3 Разложение многочлена на множители (Polynomial factoring)

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + x + 2 &= \\ &= x^3 + x + 2(x^2 + 1) \\ &= x(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1) \\ &= (x + 2)(x^2 + 1) \end{aligned} \quad (25)$$

4.4 Ответ

$$(x + 2)(x^2 + 1)(x - 1)$$

5 Выделить целую часть дроби

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 1}{x^2 + 2}$$

5.1 (Polynomial long division)

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2 \overline{) \begin{array}{r} x^3 + 6x^2 + 1 \\ - x^3 \\ \hline 6x^2 - 2x + 1 \\ - 6x^2 \\ \hline - 2x + 11 \end{array}}
 \end{array}$$

5.2 Ответ

$$x + 6$$

6 Разложить дробь на простейшие

$$\frac{2x^2 - 4}{x^3 - 4x}$$

6.1 Factorize denominator

$$\begin{aligned}
 x^3 - 4x &= \\
 &= x^2 \cdot x - 4x \\
 &= x(x^2 - 4) \\
 &= x(x^2 - 2^2) \\
 &= x((x - 2)(x + 2)) \\
 &= x(x - 2)(x + 2)
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\frac{2x^2 - 4}{x^3 - 4x} = \frac{2x^2 - 4}{x(x - 2)(x + 2)} \tag{27}$$

6.2 Разложение дроби на простейшие, используя неопределенные коэффициенты

$$\begin{aligned}
 \frac{2x^2 - 4}{x(x - 2)(x + 2)} &= \\
 &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2} \\
 &= \frac{A(x - 2)(x + 2)}{x(x - 2)(x + 2)} + \frac{B(x + 2)x}{x(x - 2)(x + 2)} + \frac{C(x - 2)x}{x(x - 2)(x + 2)} \\
 &= \frac{A(x - 2)(x + 2) + B(x + 2)x + C(x - 2)x}{x(x - 2)(x + 2)}
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$A(x - 2)(x + 2) + B(x + 2)x + C(x - 2)x$$

$$2x^2 - 4 = A(x - 2)(x + 2) + B(x + 2)x + C(x - 2)x \tag{29}$$

6.3 if $x = -2$

$$\begin{aligned}
2x^2 - 4 &= \\
&= 2 \cdot -2^2 - 4 \\
&= 2 \cdot 4 - 4 \\
&= 8 - 4 \\
&= 4
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
A(-2-2)(-2+2) + B(-2+2) \cdot (-2) + C(-2-2) \cdot (-2) &= \\
&= C(-2-2) \cdot (-2)
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
4 &= C(-4) \cdot (-2) \\
4 &= C8 \\
4 &= 8C \\
C &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

6.4 if $x = 2$

$$\begin{aligned}
2x^2 - 4 &= \\
&= 2 \cdot 2^2 - 4 \\
&= 2 \cdot 4 - 4 \\
&= 8 - 4 \\
&= 4
\end{aligned} \tag{32}$$

$$A(2-2)(2+2) + B(2+2) \cdot (2) + C(2-2) \cdot (2) = B(2+2) \cdot (2) \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
4 &= B(2+2) \cdot (2) \\
4 &= B(4) \cdot (2) \\
4 &= B(8) \\
4 &= 8B \\
B &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

6.5 if $x = 0$

$$2x^2 - 4 = = 2 \cdot 0^2 - 4 = -4 \tag{34}$$

$$A(0-2)(0+2) + B(0+2) \cdot 0 + C(0-2) \cdot 0 = A(0-2)(0+2) \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
-4 &= A(0-2)(0+2) \\
-4 &= A(-2) \cdot 2 \\
-4 &= A(-4) \\
-4 &= -4A \\
A &= 1
\end{aligned}$$

6.6 (Simplifying)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2} &= \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}\end{aligned}\tag{36}$$

6.7 Ответ

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}$$