Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

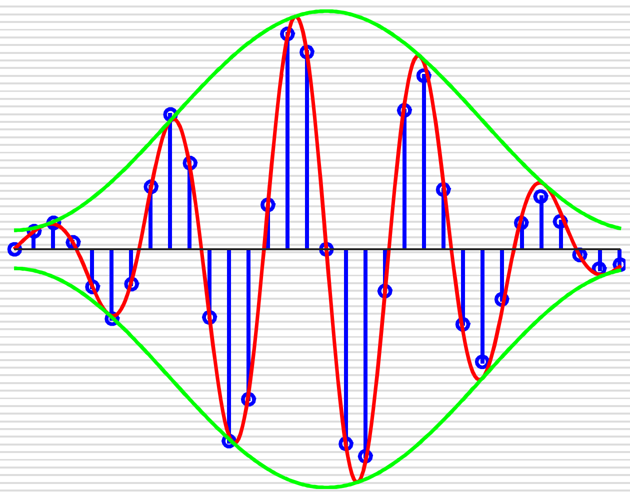
Кафедра теоретических основ радиотехники

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Тема 1

Дискретные сигналы

(Лекция 3)



3 неделя семестра

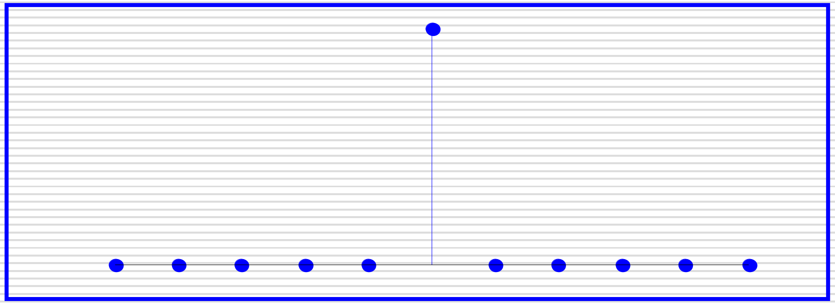
Z-преобразование

- Определение: $$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}$$
- z — *комплексная* переменная
- $X(z)$ — *комплексная* функция
- Область определения: $X(z)$ определена для тех z, при которых ряд *сходится*

Z-преобразование — примеры

- Единичная импульсная функция:

$$\delta(k) = x_0(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$



- z-преобразование:

- Область определения:

Полезные формулы для вычисления прямого z-преобразования

- Сумма *бесконечной* геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{при} \quad |q| < 1$$

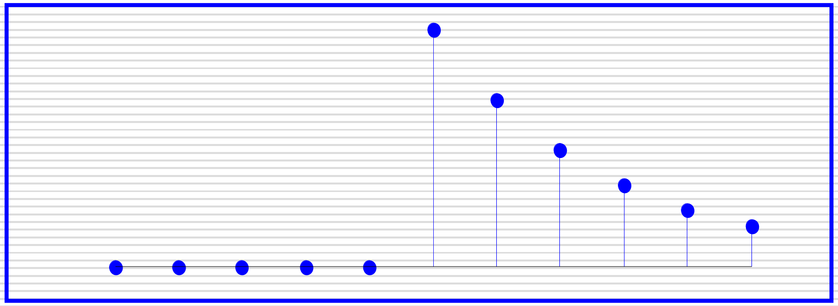
- Сумма *конечной* геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{N-1} q^k = \frac{1-q^N}{1-q}$$

Z-преобразование — примеры

- Дискретная экспоненциальная функция:

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ a^k, & k \geq 0. \end{cases}$$



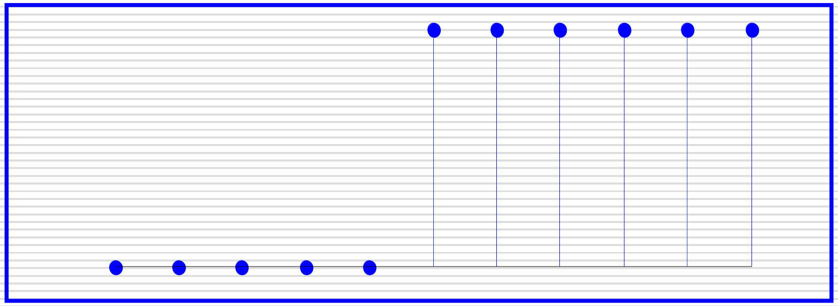
- z-преобразование:

- Область определения:

Z-преобразование — примеры

- Единичный скачок:

$$x(k)=\begin{cases}0, & k<0,\\ 1, & k\geq 0.\end{cases}$$

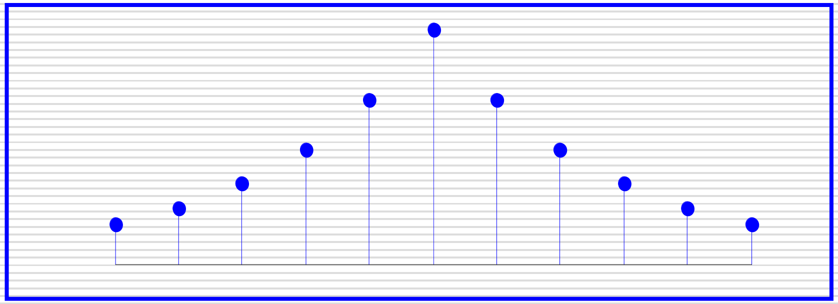


- Это частный случай экспоненты ($a=1$)
- z-преобразование:
- Область определения:

Z-преобразование — примеры

- Двусторонняя экспонента:

$$x(k) = a^{|k|}, \quad -\infty < k < +\infty$$



- z-преобразование:

- Область определения:

Z-преобразование

- Связь с преобразованием Фурье в дискретном времени (DTFT):

z-преобразование:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

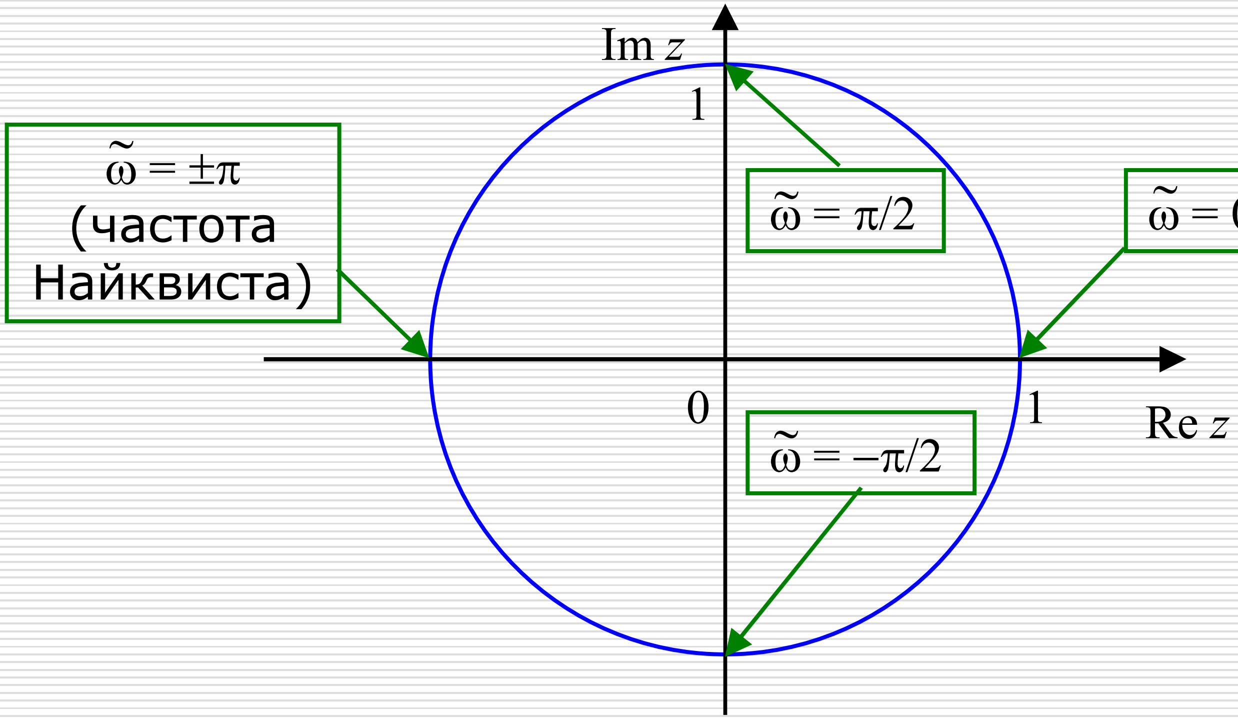
DTFT:

$$\dot{X}(\tilde{\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\tilde{\omega}k}$$

$$\dot{X}(\tilde{\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\tilde{\omega}}}$$

Z-преобразование

- Единичная окружность — *частотная ось* на z-плоскости



Z-преобразование — свойства

- Линейность
- Задержка
- Свертка
- Чередование знаков сигнала
- Инвертирование сигнала во времени

Вывод формул будет показан на лекции

Z-преобразование — свойства

- Линейность

  если $\{x_1(k)\} \leftrightarrow X_1(z)$ и $\{x_2(k)\} \leftrightarrow X_2(z)$,

  то $\{ax_1(k) + bx_2(k)\} \leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z)$

- Задержка

  $$\{x(k - k_0)\} \leftrightarrow X(z)z^{-k_0}$$

- Свертка

  $$\left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(k-m) \right\} \leftrightarrow X_1(z)X_2(z)$$

- Чередование знаков

  $$\{(-1)^k x(k)\} \leftrightarrow X(-z)$$

- Инверсия во времени

  $$\{x(-k)\} \leftrightarrow X(z^{-1})$$

Обратное Z-преобразование

- Формальное определение:

$$x(k) = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z) z^{k-1} dz$$

  - Интегрирование производится по произвольному замкнутому контуру, расположенному *в области определения* функции $X(z)$
- Обычно вычисление производится путем разложения функции $X(z)$ *на простые дроби*

Проблемы при обратном Z-преобразовании

- Дано Z-преобразование

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}} = \frac{-z^{-1} + 1}{0.25z^{-2} - z^{-1} + 1}$$

- Получим несколько элементов последовательности делением полиномов «в столбик» для двух этих вариантов записи

Важность области определения Z-преобразования

- Пример 1, область определения: $|z| > |a|$

$$x(k) = \begin{cases} a^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

- Пример 2, область определения: $|z| < |a|$

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k \geq 0 \\ -a^k, & k < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(-a^k\right) z^{-k} \underset{m=-k}{=}$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} a^{-m} z^m = -\frac{a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Обратное Z-преобразование: пример вычисления

1. Разложение на простые дроби:

$$X(z)=\frac{1}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}=\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.5z^{-1}\right)}=\frac{2}{1-z^{-1}}+\frac{-1}{1-0.5z^{-1}}$$

2. Каждому слагаемому соответствует два варианта последовательности отсчетов:

$$\frac{2}{1-z^{-1}}\Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{|z|>1}\quad x(k)=\begin{cases}2, & k\ge 0\\ 0, & k<0\end{cases} \\ \boxed{|z|<1}\quad x(k)=\begin{cases}0, & k\ge 0\\ -2, & k<0\end{cases}\end{array}$$

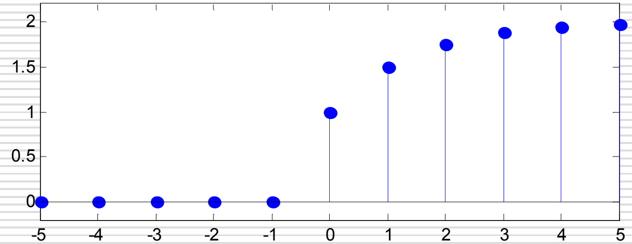
$$\frac{-1}{1-0.5z^{-1}}\Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{|z|>0.5}\quad x(k)=\begin{cases}-0.5^{k}, & k\ge 0\\ 0, & k<0\end{cases} \\ \boxed{|z|<0.5}\quad x(k)=\begin{cases}0, & k\ge 0\\ 0.5^{k}, & k<0\end{cases}\end{array}$$

Обратное Z-преобразование: пример вычисления

3. Комбинации этих вариантов дают три варианта обратного Z-преобразования:

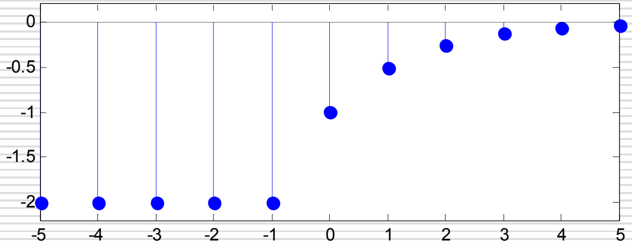
$|z| > 1$

$$x(k) = \begin{cases} 2 - 0.5^k, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$



$0.5 < |z| < 1$

$$x(k) = \begin{cases} -0.5^k, & k \geq 0, \\ -2, & k < 0. \end{cases}$$



$|z| < 0.5$

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k \geq 0, \\ -2 + 0.5^k, & k < 0. \end{cases}$$