



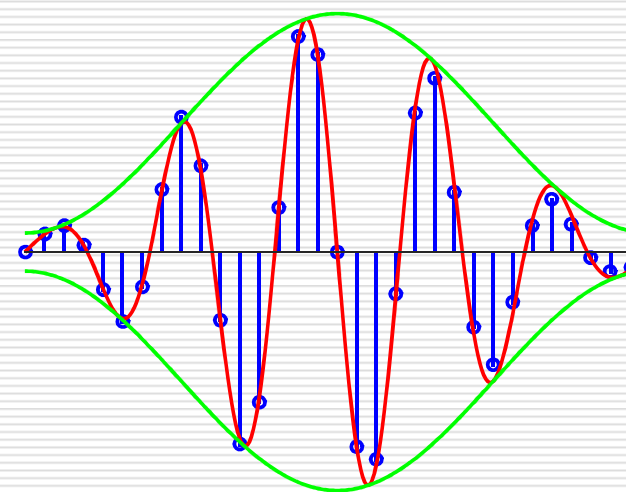
Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет «ЛЭТИ»
Кафедра теоретических основ
радиотехники



ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Тема 2

Дискретные системы (Лекция 2)



Алгоритм дискретной фильтрации

- В общем случае *причинная* дискретная система вычисляет *линейную комбинацию* некоторого числа *ВХОДНЫХ* и *предыдущих ВЫХОДНЫХ* отсчетов

$$y(k) = b_0x(k) + b_1x(k-1) + \dots + b_mx(k-m) - a_1y(k-1) - a_2y(k-2) - \dots - a_ny(k-n)$$

В курсе РТЦС буквы *a* и *b* используются наоборот!

В курсе РТЦС при всех слагаемых знак «+»!

Разностное уравнение

- Переносим все отсчеты выходного сигнала на левую сторону равенства:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) = \\ = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m)$$

- *Порядок* фильтра — максимальная используемая задержка: $\max(m, n)$
- Соотношение между m и n в дискретных системах может быть *любым*

Способы описания дискретных систем

- ☐ Импульсная характеристика
- ☐ Функция передачи
- ☐ Нули и полюсы
 - Все пропускающие (фазовые) фильтры
- ☐ Полюсы и вычеты
 - Расчет импульсной характеристики
 - Устойчивость дискретных систем
- ☐ Пространство состояний

Импульсная характеристика

- Импульсная характеристика $\{h(k)\}$ — реакция системы на единичный импульс $\{\delta(k)\}$

- **Важно:**

импульсная характеристика определяется
при нулевых начальных условиях



Связь между входным и выходным сигналами

- Произвольный сигнал можно представить линейной комбинацией единичных отсчетов:

$$x(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)x_0(k-m)$$

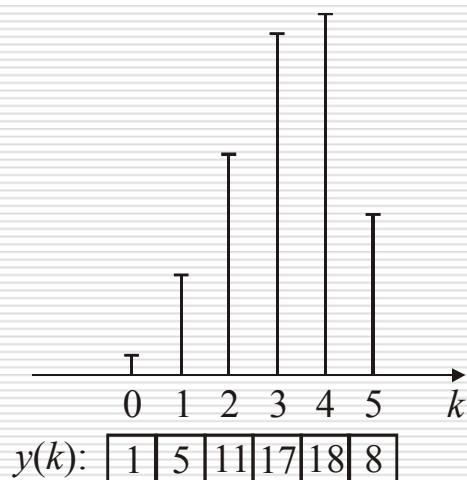
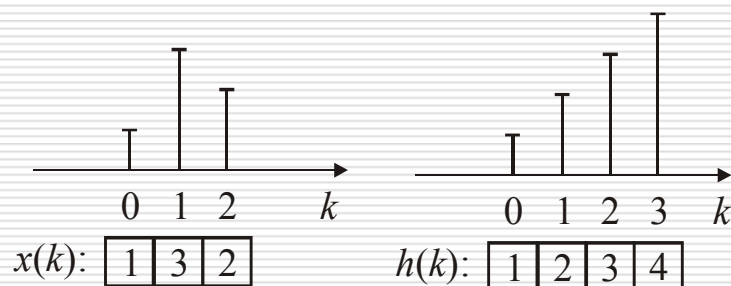
- После преобразования системой:

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(k-m)$$

Дискретная
свертка

Вычисление дискретной свертки

Процедура вычисления



$$k=0: \quad x(m): \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$h(0-m): \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow$$

$$y(0) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$k=1: \quad x(m): \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$h(1-m): \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow$$

$$y(1) = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5$$

$$k=2: \quad x(m): \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$h(2-m): \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow$$

$$y(2) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 11$$

$$k=3: \quad x(m): \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$h(3-m): \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow$$

$$y(3) = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 17$$

$$k=4: \quad x(m): \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$h(4-m): \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 & \\ \hline \end{array} \rightarrow$$

$$y(4) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18$$

$$k=5: \quad x(m): \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$h(5-m): \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow$$

$$y(5) = 2 \cdot 4 = 8$$

Функция передачи

□ Отношение

z -преобразований
выхода и входа:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k}$$

□ Из алгоритма фильтрации:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}}$$

□ ЧХ:

$$\dot{K}(\tilde{\omega}) = H(e^{j\tilde{\omega}}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-j\tilde{\omega}k}$$

Частотные характеристики

- Амплитудно-частотная характеристика: $|\dot{K}(\tilde{\omega})|$
- Фазочастотная характеристика: $\varphi_K(\tilde{\omega}) = \arg \dot{K}(\tilde{\omega})$
- Фазовая задержка: $\tau_{\phi}(\tilde{\omega}) = -\frac{\varphi_K(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}}$
- Групповая задержка: $\tau_{\text{гр}}(\tilde{\omega}) = -\frac{d\varphi_K(\tilde{\omega})}{d\tilde{\omega}}$

Нули и полюсы

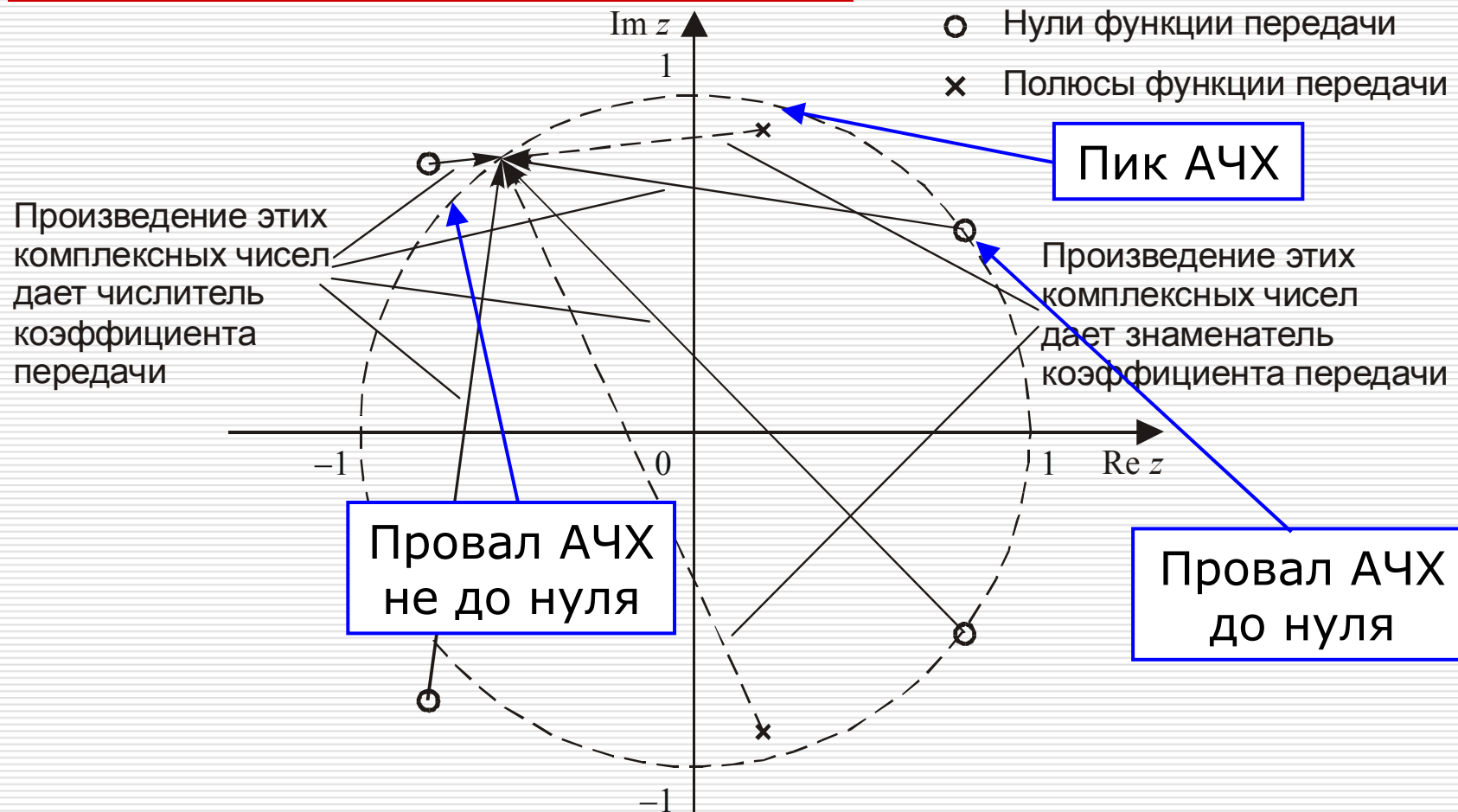
- Раскладываем числитель и знаменатель $H(z)$ *на множители*:

The diagram illustrates the factorization of the transfer function $H(z)$. It features three labeled boxes with arrows pointing to the corresponding parts of the equation:

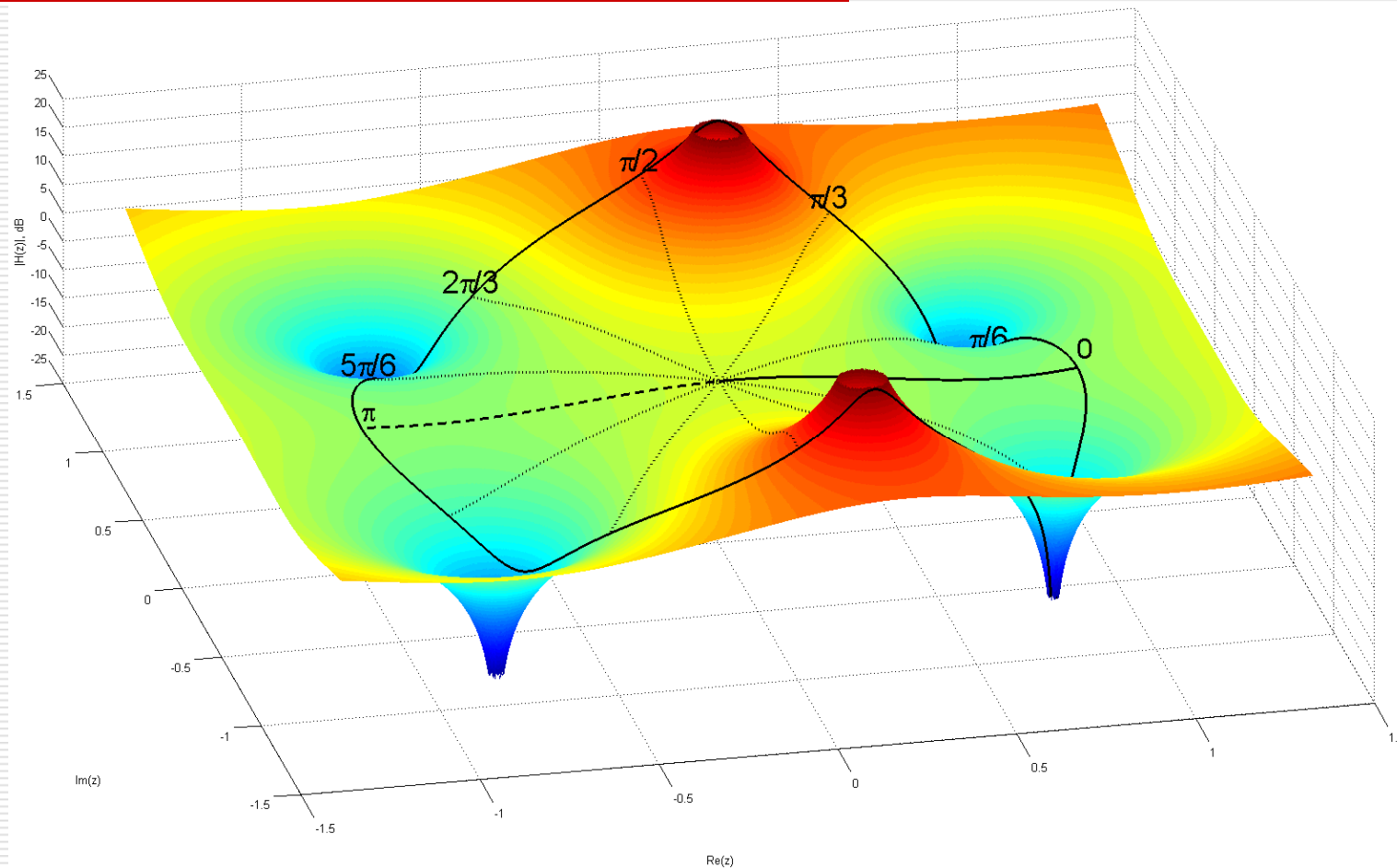
- A box labeled "Нули функции передачи" (Zeros of the transfer function) has three arrows pointing to the numerator factors $(1 - z_1 z^{-1})$, $(1 - z_2 z^{-1})$, and $(1 - z_m z^{-1})$.
- A box labeled "Коэффициент усиления" (Gain coefficient) has an arrow pointing to the coefficient k .
- A box labeled "Полюсы функции передачи" (Poles of the transfer function) has three arrows pointing to the denominator factors $(1 - p_1 z^{-1})$, $(1 - p_2 z^{-1})$, and $(1 - p_n z^{-1})$.

$$H(z) = k \frac{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \dots (1 - z_m z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_n z^{-1})}$$

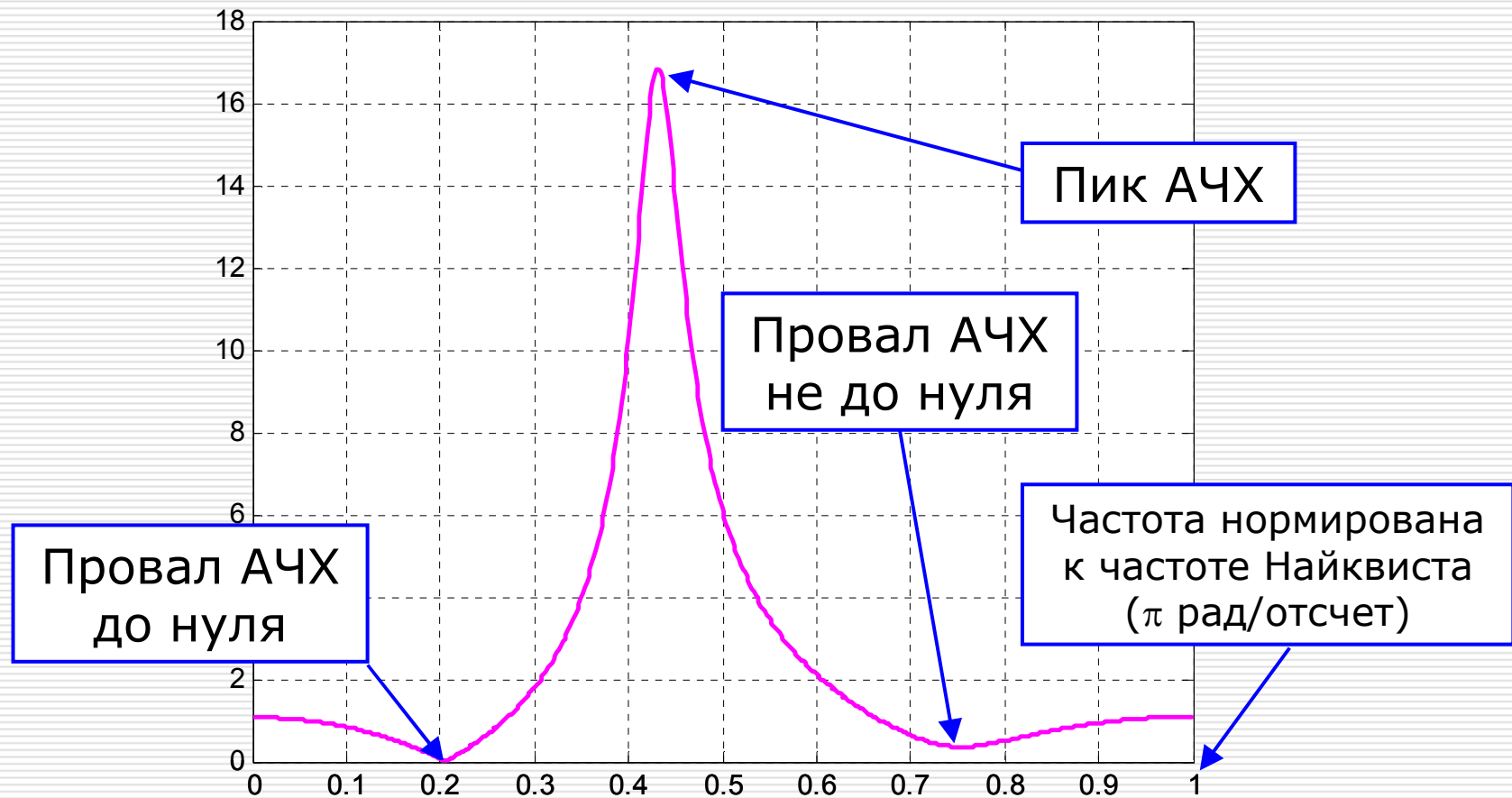
Связь АЧХ с расположением нулей и полюсов



Модуль функции передачи на комплексной плоскости



АЧХ, соответствующая приведенной карте нулей и полюсов



Всепропускающие (фазовые) фильтры (all-pass)

□ АЧХ строго равна единице

□ Фильтр первого порядка: $H(z) = k \frac{1 - z_1 z^{-1}}{1 - p_1 z^{-1}}$

□ Условие для нулей и полюсов:

$$z_1 = \frac{1}{p_1^*} \quad |z_1| = \frac{1}{|p_1|} \quad \arg z_1 = \arg p_1 \quad |k| = |p_1|$$

□ Условие для функции передачи:

$$H(z) = e^{j\varphi} \frac{a_n^* + a_{n-1}^* z^{-1} + a_{n-2}^* z^{-2} + \dots + a_1^* z^{-(n-1)} + z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}}$$

Фазовый фильтр — модуль функции передачи на комплексной плоскости

