Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

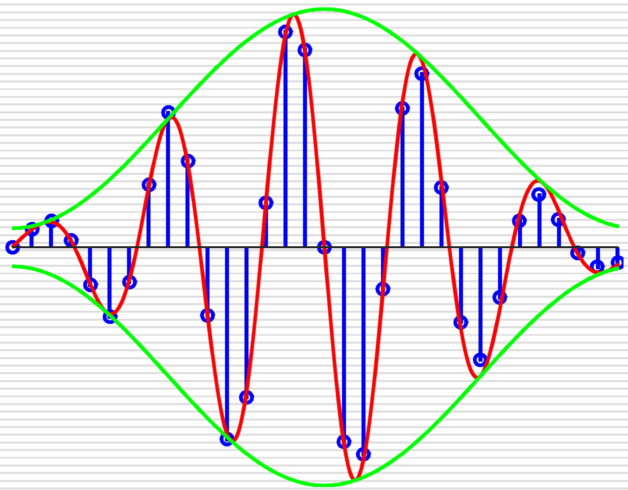
Кафедра теоретических основ радиотехники

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Тема 2

Дискретные системы

(Лекция 4)



7 неделя семестра

Нерекурсивные фильтры

- Функция передачи содержит *только числитель* (знаменатель равен 1)
- Функция передачи имеет *только нули* (и тривиальный полюс при $z = 0$)
- Отсчеты импульсной характеристики *совпадают* с коэффициентами полинома функции передачи: $h(k) = b_k$
- Прямая и каноническая формы *совпадают* друг с другом
- Всегда *устойчивы*

Симметричные фильтры

- Важный класс нерекурсивных фильтров *с линейной ФЧХ* (постоянной групповой задержкой)
- Четная симметрия: $b_k = b_{N-k}$
  - ФЧХ: $\varphi_K(\tilde{\omega}) = -\tilde{\omega}\, N/2$
- Нечетная симметрия: $b_k = -b_{N-k}$
  - ФЧХ: $\varphi_K(\tilde{\omega}) = -\pi/2\ \mathrm{sign}(\tilde{\omega}) - \tilde{\omega}\, N/2$
- Групповая задержка: $\tau_{\text{гр}}(\tilde{\omega}) = N/2$

N — порядок фильтра

Симметричные фильтры

- Ограничения на вид частотной характеристики

Тип	Порядок фильтра	Тип симметрии	$K(0)$	$K(\pi)$
I	Четный	Четный	Любой	Любой
II	Нечетный	Четный	Любой	0
III	Четный	Нечетный	0	0
IV	Нечетный	Нечетный	0	Любой

Системы первого порядка

- Функция передачи: $$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$
- Нуль: $-b_1/b_0$
- Полюс: $-a_1$ (устойчивость: $|a_1| < 1$)
- Вещественный фильтр:
  - Коэффициенты b_0, b_1, a_1 *вещественные*
  - Импульсная характеристика *вещественная*
  - Частотная характеристика *симметричная*

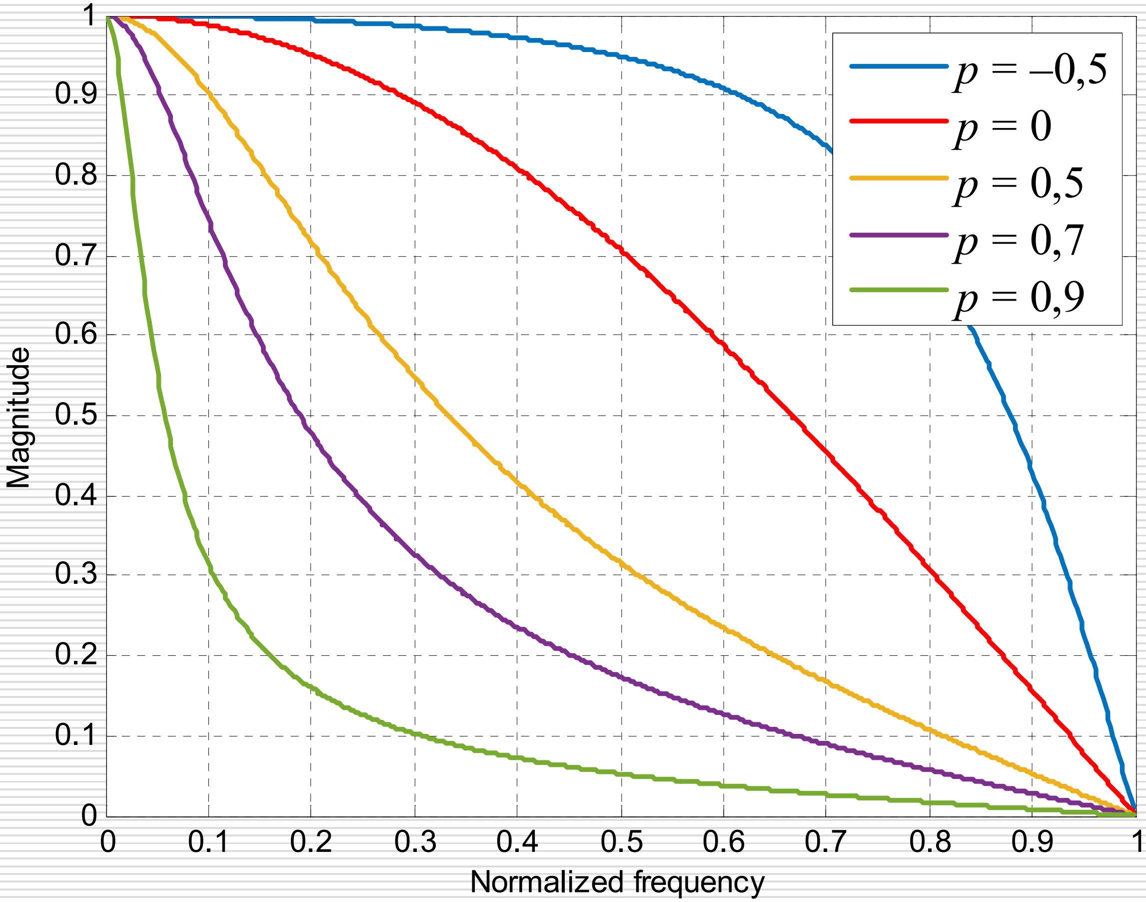
Фильтр нижних частот первого порядка

- Постановка задачи: $K(0) = 1,\qquad K(\pi) = 0$
- Условие $K(\pi) = 0$:
  - Функция передачи имеет нуль при $z = -1$
- Окончательный результат:

$$\boxed{H(z) = \frac{1-p}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-pz^{-1}}}$$

  - Свободный коэффициент p регулирует *частоту среза* ФНЧ
  - Условие устойчивости: $|p| < 1$

Фильтр нижних частот первого порядка



Влияние положения полюса p на АЧХ

$$H(z) = \frac{1-p}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-pz^{-1}}$$

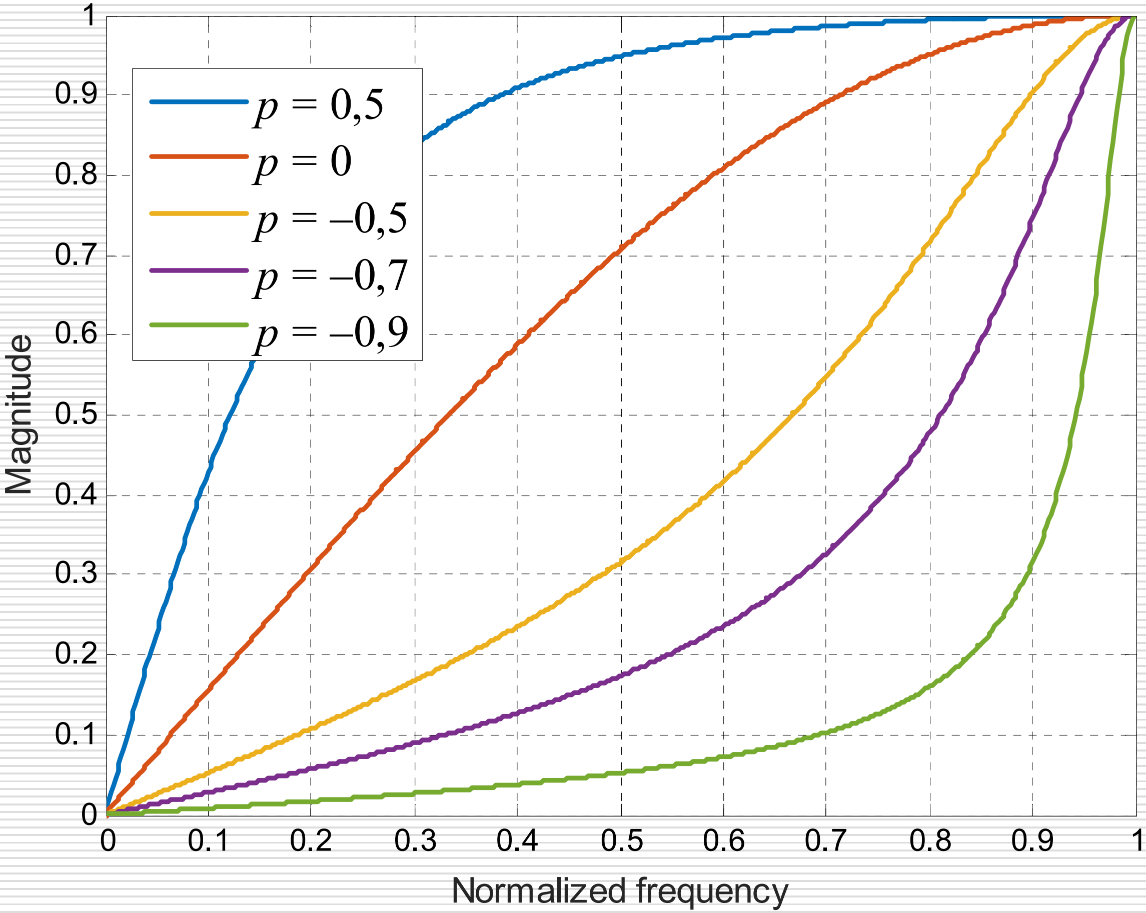
Фильтр верхних частот первого порядка

- Постановка задачи: $K(0) = 0, \qquad K(\pi) = 1$
- Условие $K(0) = 0$:
  - Функция передачи имеет нуль при $z = 1$
- Окончательный результат:

$$\boxed{H(z) = \frac{1+p}{2}\,\frac{1-z^{-1}}{1-pz^{-1}}}$$

  - Свободный коэффициент p регулирует *частоту среза* ФВЧ
  - Условие устойчивости: $|p| < 1$

Фильтр верхних частот первого порядка



Влияние положения полюса p на АЧХ

$$H(z) = \frac{1+p}{2}\frac{1-z^{-1}}{1-pz^{-1}}$$

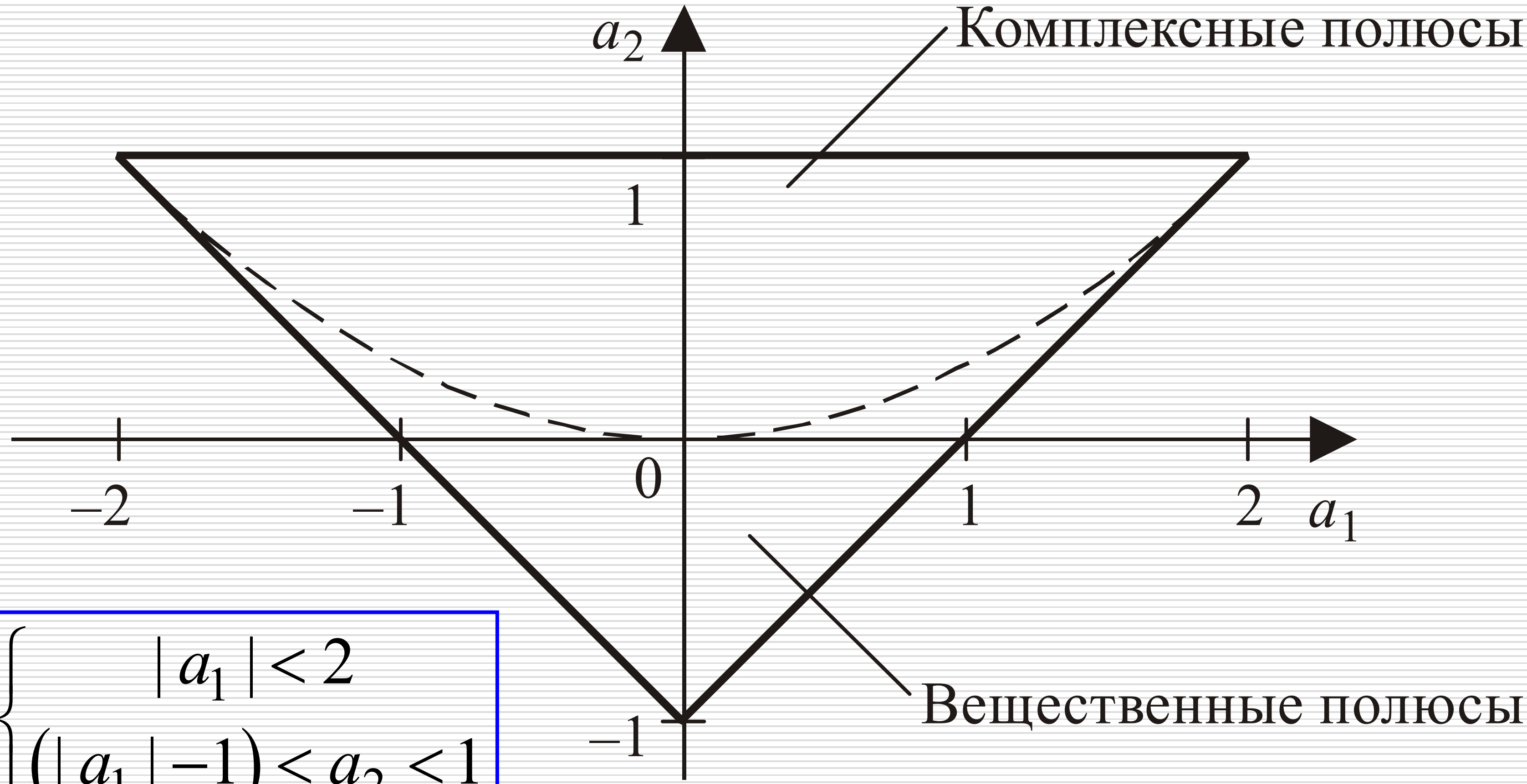
Системы второго порядка

- Функция передачи:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

- Вещественный фильтр:
  - Коэффициенты b_0, b_1, b_2, a_1, a_2 *вещественные*
  - Импульсная характеристика *вещественная*
  - Частотная характеристика *симметричная*

Системы второго порядка — условие устойчивости



$$\begin{cases} |a_1| < 2 \\ (|a_1| - 1) < a_2 < 1 \end{cases}$$

Резонатор второго порядка

- Постановка задачи:

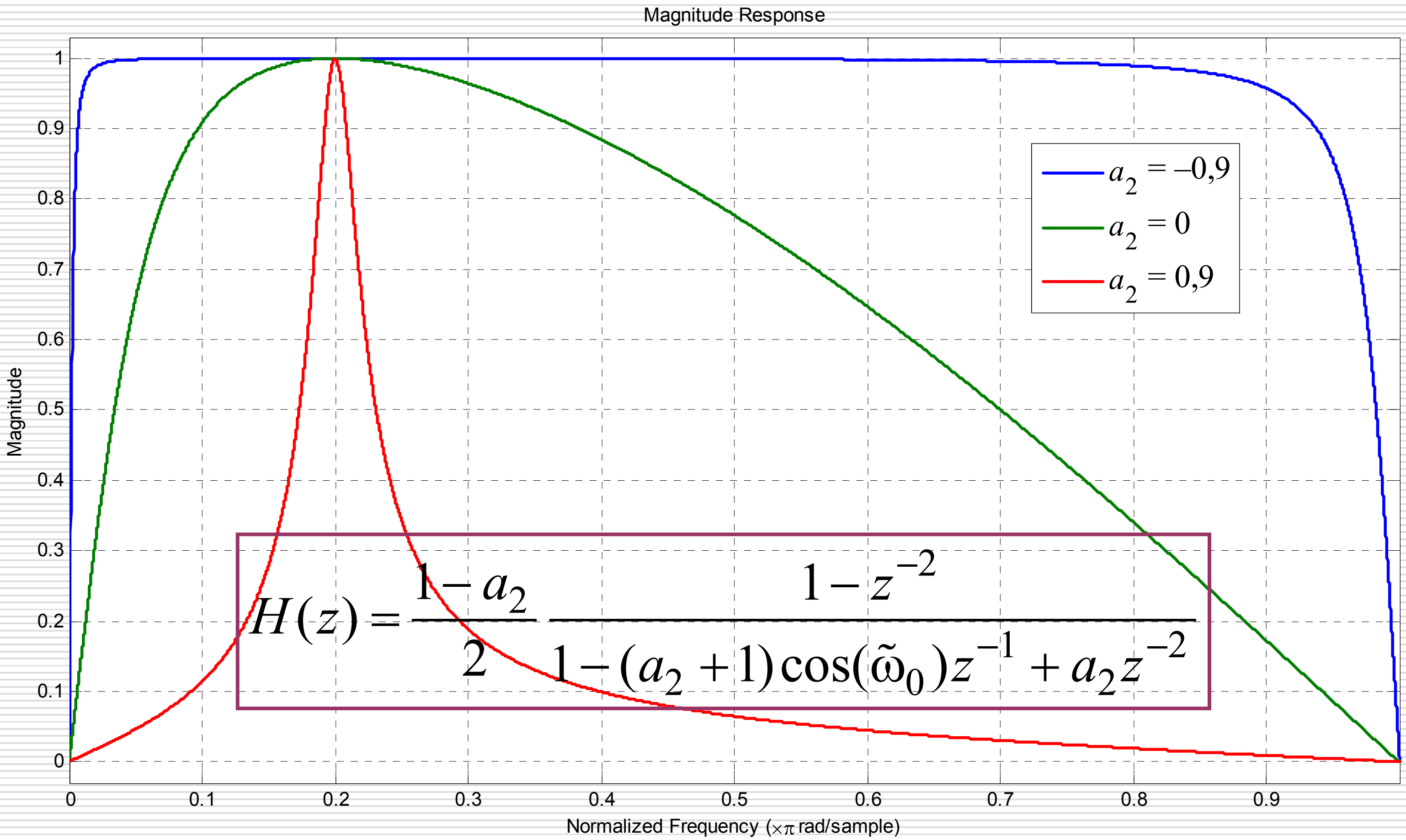
  $K(0) = 0$, $K(\pi) = 0$, $|K(\widetilde{\omega}_0)| = 1$ — максимум

- Условия $K(0) = 0$ и $K(\pi) = 0$:
  - Функция передачи имеет нули при $z = \pm 1$
- Окончательный результат:

$$\boxed{H(z) = \frac{1-a_2}{2} \frac{1-z^{-2}}{1-(a_2+1)\cos(\tilde{\omega}_0)z^{-1} + a_2 z^{-2}}}$$

  - Свободный коэффициент a_2 регулирует *полосу пропускания*
  - Условие устойчивости: $|a_2| < 1$

Резонатор второго порядка



$$H(z) = \frac{1 - a_2}{2} \frac{1 - z^{-2}}{1 - (a_2 + 1)\cos(\tilde{\omega}_0) z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Режекторный фильтр второго порядка

- Постановка задачи:

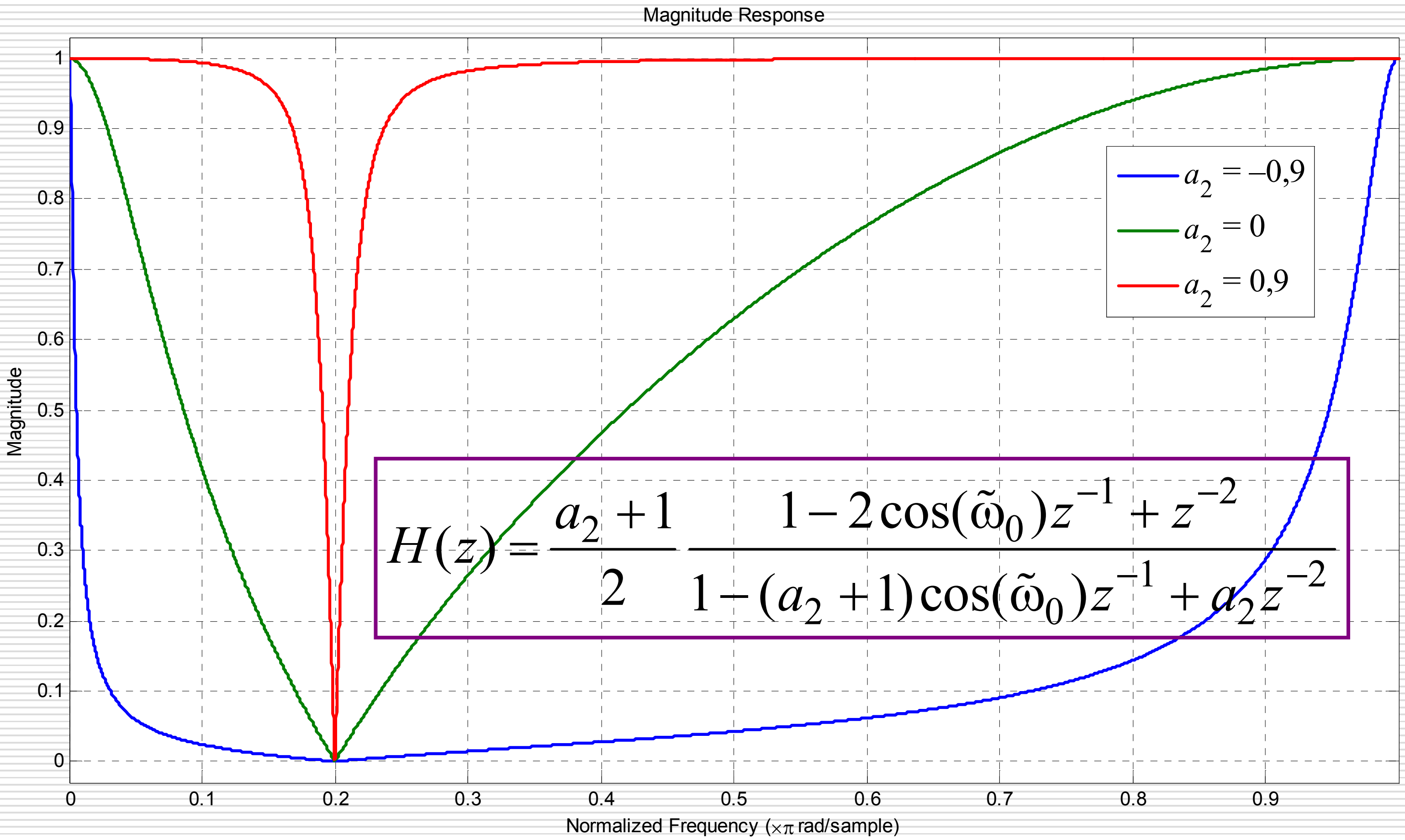
  $K(0) = 1$, $\quad K(\pi) = 1$, $\quad K(\tilde{\omega}_0) = 0$

- Условие $K(\tilde{\omega}_0) = 0$:
  - Функция передачи имеет нули при $z = \exp(\pm j\tilde{\omega}_0)$
- Окончательный результат:

$$\boxed{H(z) = \frac{a_2 + 1}{2} \frac{1 - 2\cos(\tilde{\omega}_0) z^{-1} + z^{-2}}{1 - (a_2 + 1)\cos(\tilde{\omega}_0) z^{-1} + a_2 z^{-2}}}$$

  - Свободный коэффициент a_2 регулирует *полосу режекции*
  - Условие устойчивости: $|a_2| < 1$

Режекторный фильтр второго порядка



$$H(z) = \frac{a_2 + 1}{2} \frac{1 - 2\cos(\tilde{\omega}_0) z^{-1} + z^{-2}}{1 - (a_2 + 1)\cos(\tilde{\omega}_0) z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Преобразование случайного процесса в дискретной системе

- Преобразование корреляционной функции: $$R_y(\Delta k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) B_h(\Delta k - m)$$
- Дисперсия на выходе: $$\sigma_y^2 = R_y(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) B_h(m)$$
- Если на входе белый шум:

$$R_y(\Delta k) = \sigma_x^2 B_h(\Delta k) \qquad \sigma_y^2 = \sigma_x^2 B_h(0) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{\infty} h^2(k)$$