Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

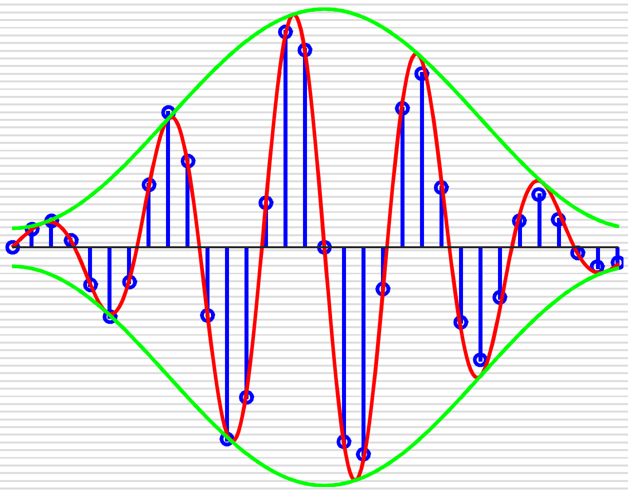
Кафедра теоретических основ радиотехники

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Тема 1

Дискретные сигналы

(Лекция 2)



2 неделя семестра

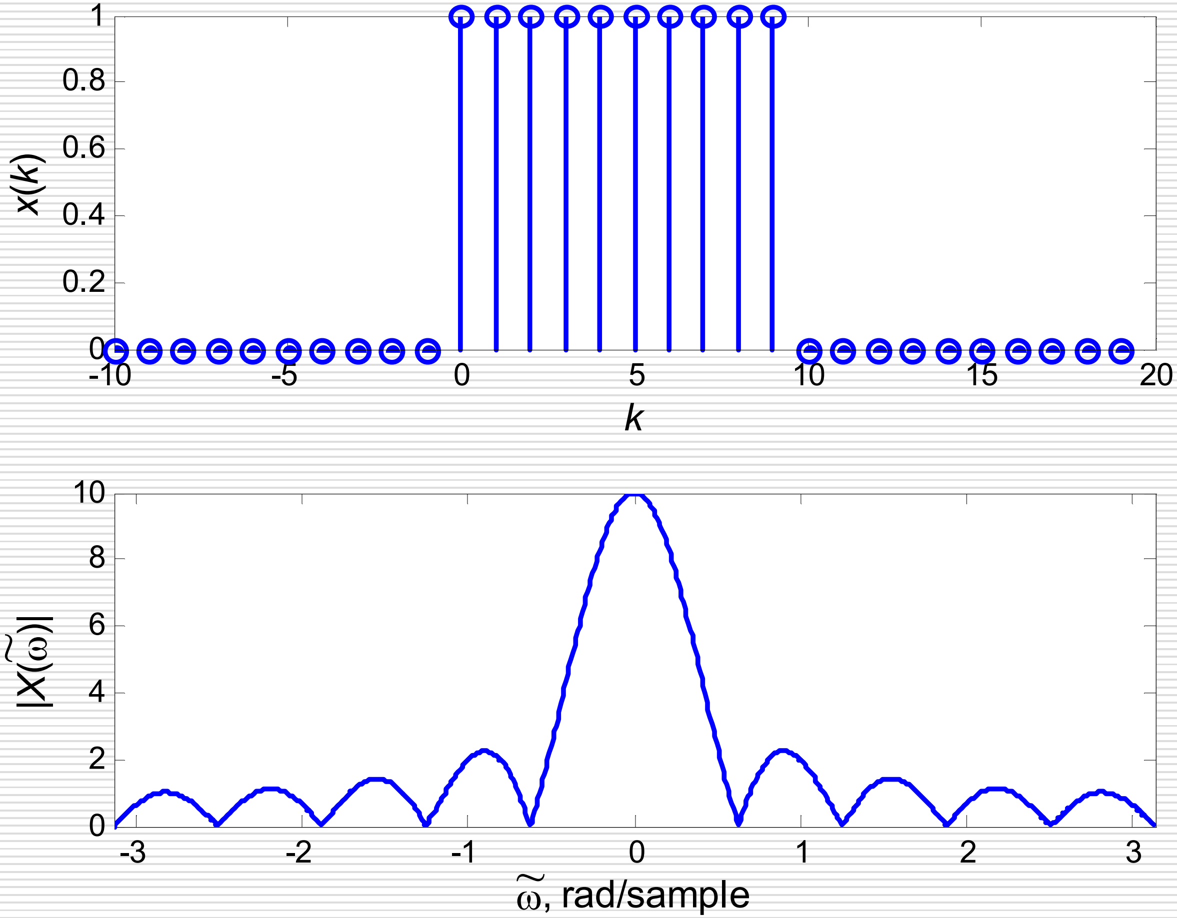
Спектр дискретного сигнала

- Спектр Фурье — мера сходства сигнала с комплексными экспонентами разной частоты
- Мера сходства сигналов измеряется их *взаимной корреляцией* (*скалярным произведением*)
- Преобразование Фурье *в дискретном времени* (*Discrete-Time Fourier Transform*, *DTFT*):

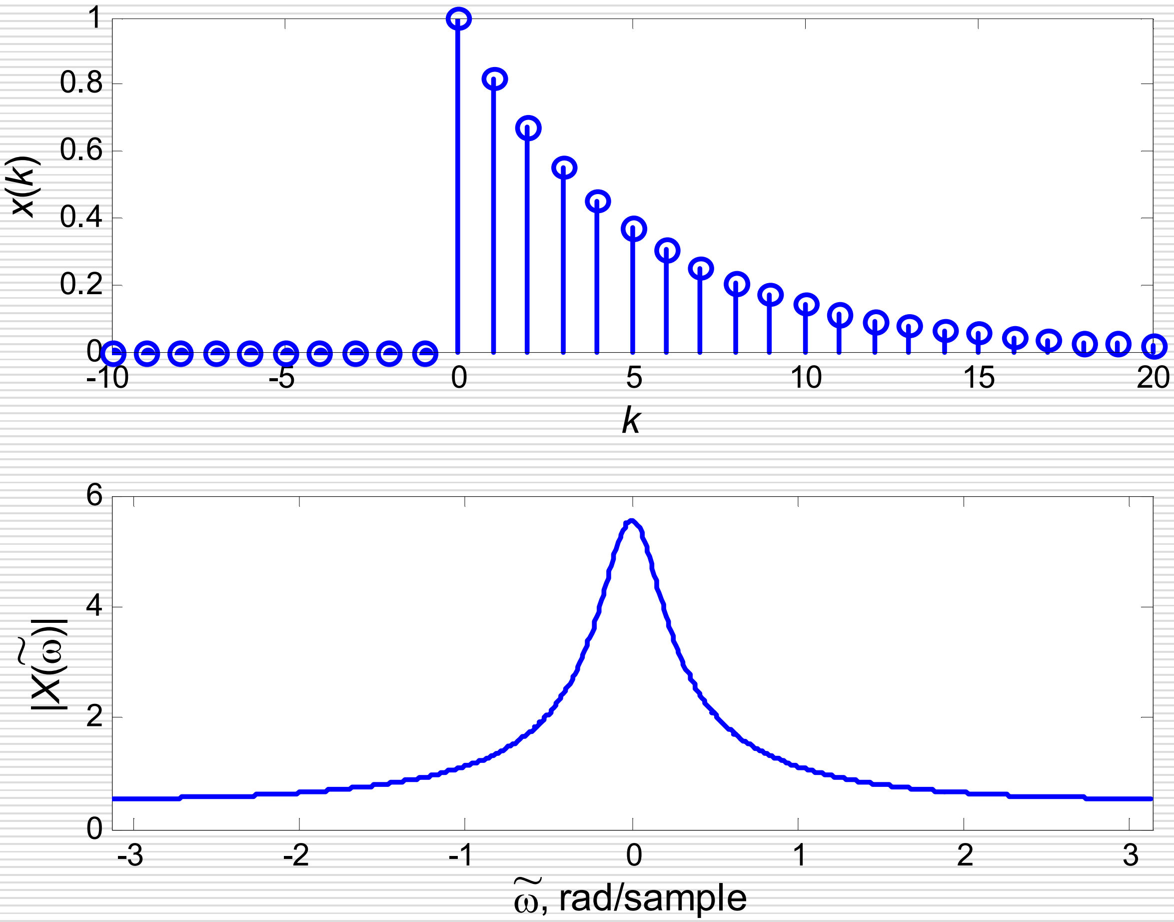
$$\dot{X}(\tilde{\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\tilde{\omega}k}$$

Спектр периодичен
с периодом 2π рад/отсчет

Спектр дискретного прямоугольного импульса



Спектр дискретного одностороннего экспоненциального импульса



Обратное преобразование Фурье в дискретном времени

- Формула прямого DTFT фактически представляет собой *разложение периодического спектра в ряд Фурье*
- Формула обратного DTFT аналогична формуле *вычисления коэффициентов комплексного ряда Фурье*:

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dot{X}(\tilde{\omega}) e^{j\tilde{\omega}k} d\tilde{\omega}$$

Свойства преобразования Фурье в дискретном времени

- Линейность
- Спектр задержанного сигнала
- Значения $X(0)$ и $X(\pi)$
- Спектр свертки
- Спектр произведения
- Чередование знаков сигнала
- Инвертирование сигнала во времени

Вывод формул будет показан на лекции

Свойства преобразования Фурье в дискретном времени

- Линейность

если $\{x_1(k)\} \leftrightarrow X_1(\tilde{\omega})$ и $\{x_2(k)\} \leftrightarrow X_2(\tilde{\omega})$,

то $\{ax_1(k) + bx_2(k)\} \leftrightarrow aX_1(\tilde{\omega}) + bX_2(\tilde{\omega})$

- Задержка

$$\{x(k - k_0)\} \leftrightarrow X(\tilde{\omega}) \exp\left(-j\tilde{\omega}k_0\right)$$

- Значение X(0)

$$X(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)$$

- Значение X(π)

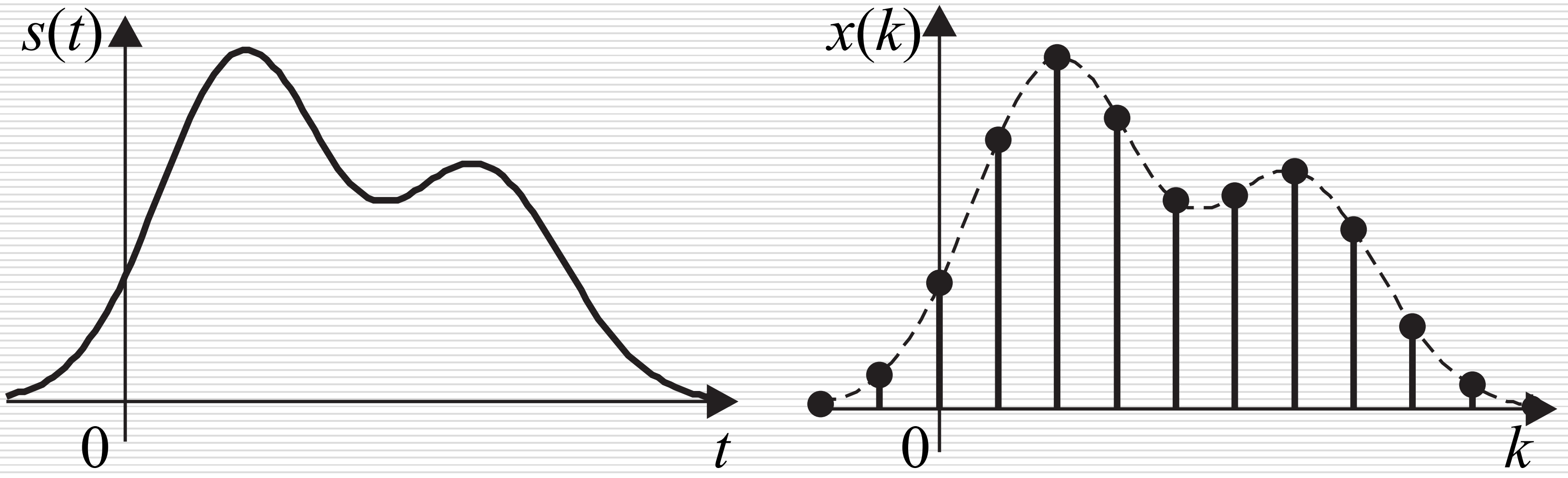
$$X(\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x(k)$$

Свойства преобразования Фурье в дискретном времени

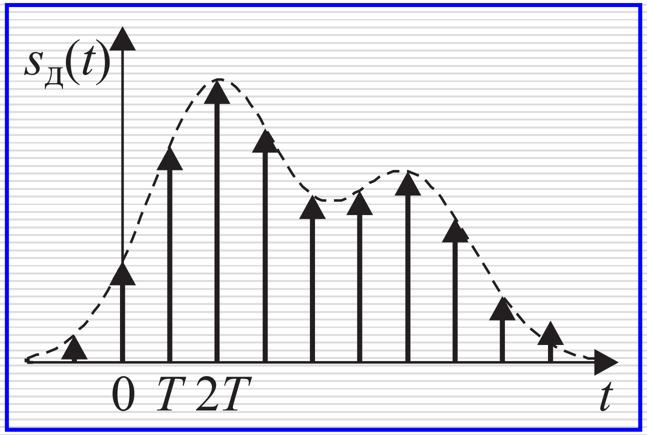
- Свертка $\left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(k-m) \right\} \leftrightarrow X_1(\tilde{\omega}) X_2(\tilde{\omega})$
- Произве-дение $\{x_1(k) x_2(k)\} \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\omega'=-\pi}^{+\pi} X_1(\omega') X_2(\tilde{\omega}-\omega') d\omega'$
- Чередование знаков $\{(-1)^k x(k)\} \leftrightarrow X(\tilde{\omega} \pm \pi)$
- Инверсия во времени $\{x(-k)\} \leftrightarrow X(-\tilde{\omega})$

Дискретизация аналоговых сигналов

- $x(k) = s(kT)$
  - T: интервал дискретизации
  - $F_д = 1/T$: частота дискретизации
  - $\omega_д = 2\pi F_д = 2\pi/T$: круговая частота дискретизации



Связь спектров аналогового и дискретизированного сигналов



$$X(\tilde{\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT)e^{-j\tilde{\omega}k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT)e^{-j\frac{\tilde{\omega}}{T}kT} =$$

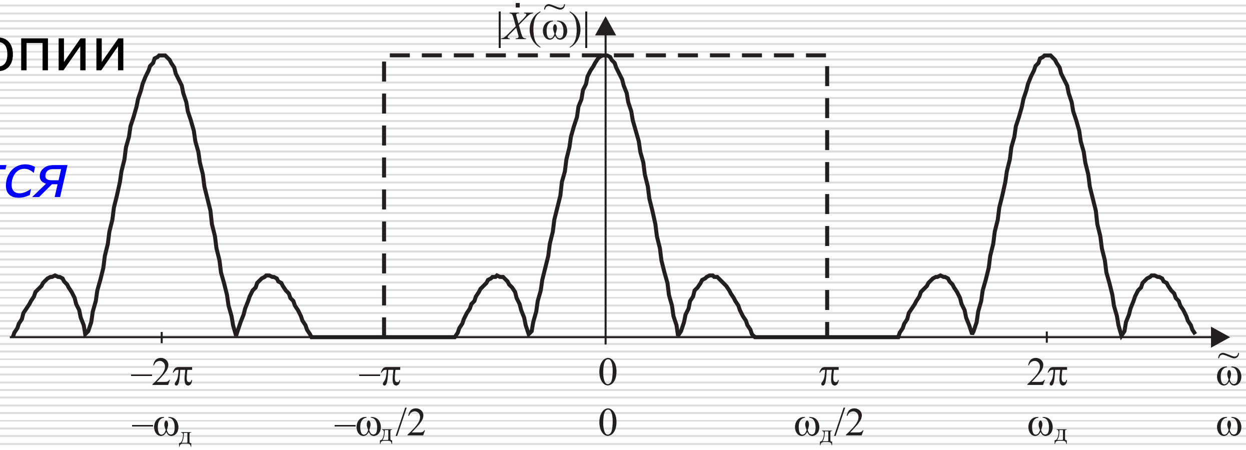
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\frac{\tilde{\omega}}{T}t} \delta(t-kT)dt \right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\frac{\tilde{\omega}}{T}t} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\frac{\tilde{\omega}}{T}t} \left(\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \right) dt =$$

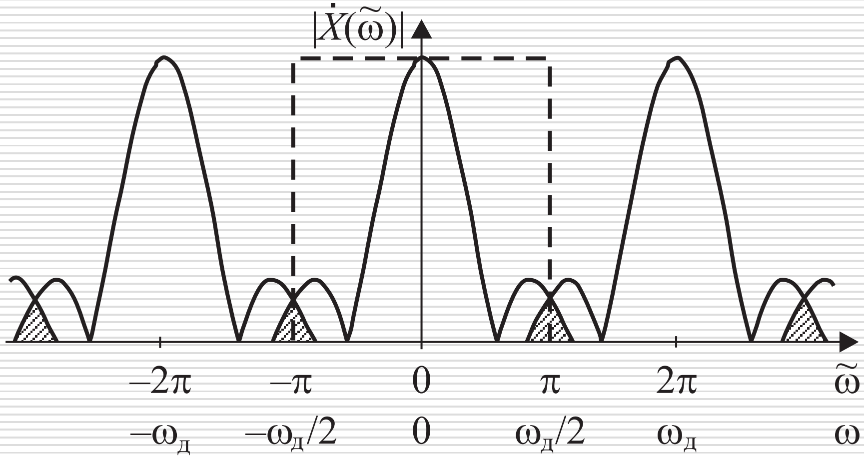
$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\left(\frac{\tilde{\omega}}{T}-\frac{2\pi n}{T}\right)t} dt \right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}\left(\frac{\tilde{\omega}}{T} - n\omega_{\text{д}} \right)$$

Спектр дискретизированного сигнала

- Сдвинутые копии спектра *не перекрываются*



- Сдвинутые копии спектра *перекрываются*
  - Частота дискретизации *недостаточно велика*



Теорема Котельникова

- Если спектр $S(\omega)$ аналогового сигнала $s(t)$ удовлетворяет условию
$$S(\omega) = 0 \quad \text{при} \quad |\omega| > \omega_{\text{в}},$$
то сигнал можно ***точно*** восстановить по дискретным отсчетам $x(k) = s(kT)$, если период дискретизации $T < \pi/\omega_{\text{в}}$ $\quad (F_{\text{д}} > 2F_{\text{в}},\ \omega_{\text{д}} > 2\omega_{\text{в}})$
- Формула восстановления:
$$\boxed{s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}}$$

Восстановление аналогового сигнала по дискретным отсчетам