



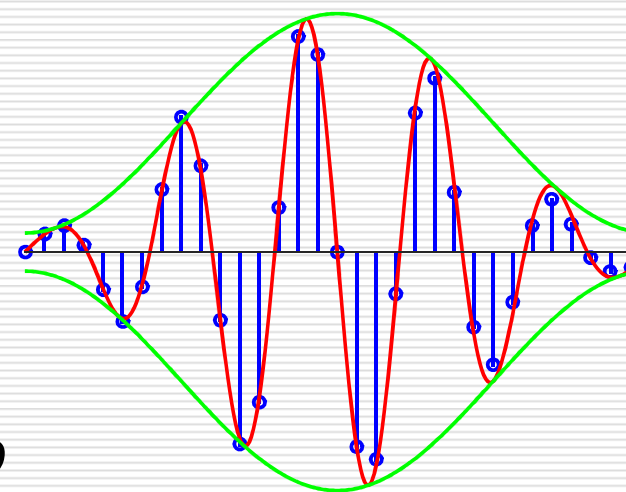
*Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет «ЛЭТИ»
Кафедра теоретических основ
радиотехники*



ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

*Базовый курс
(бакалавры и специалисты)*

*Александр Борисович Сергиенко
к.т.н., доц. каф. ТОР*



Виды занятий

□ Лекции

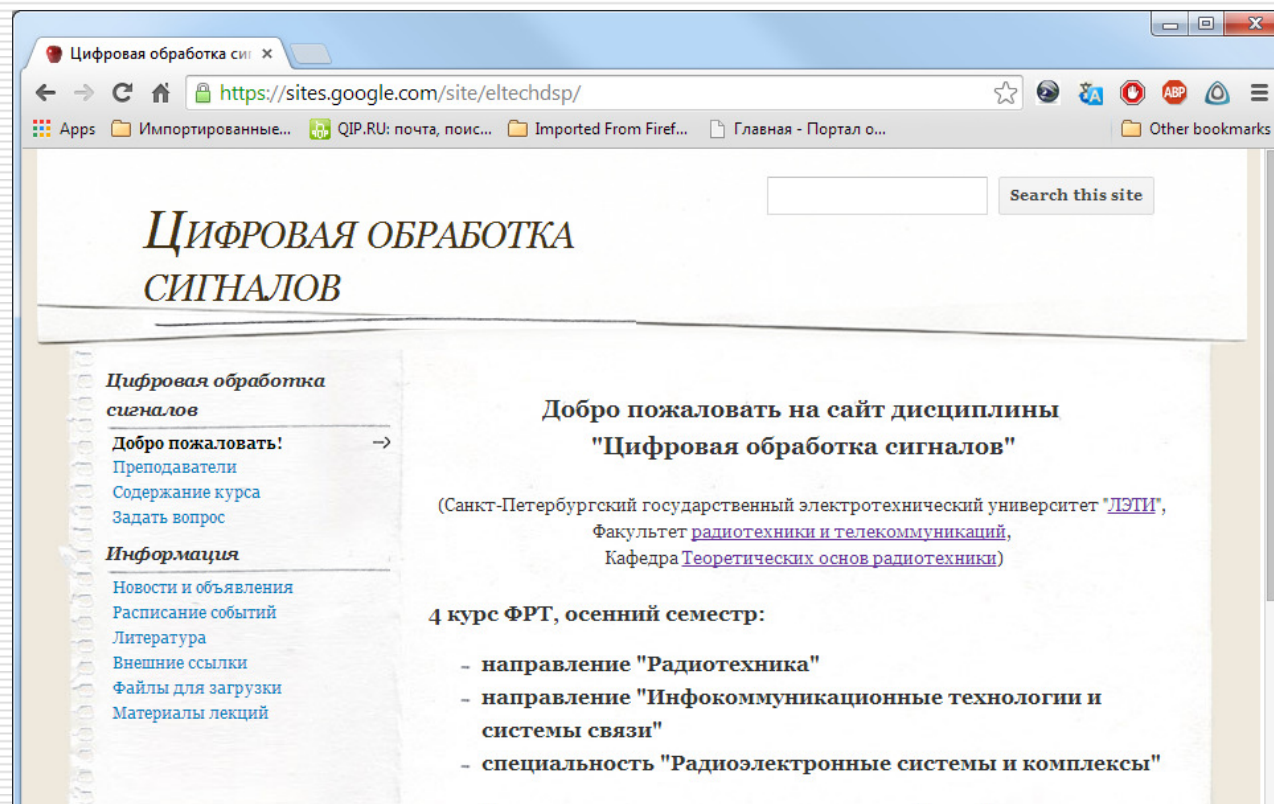
- *Рассказ* об основных принципах
- *Демонстрация* моделей
- Зачетные *тесты*

□ Лабораторные работы

- *Программирование* анализа и обработки сигналов в MATLAB

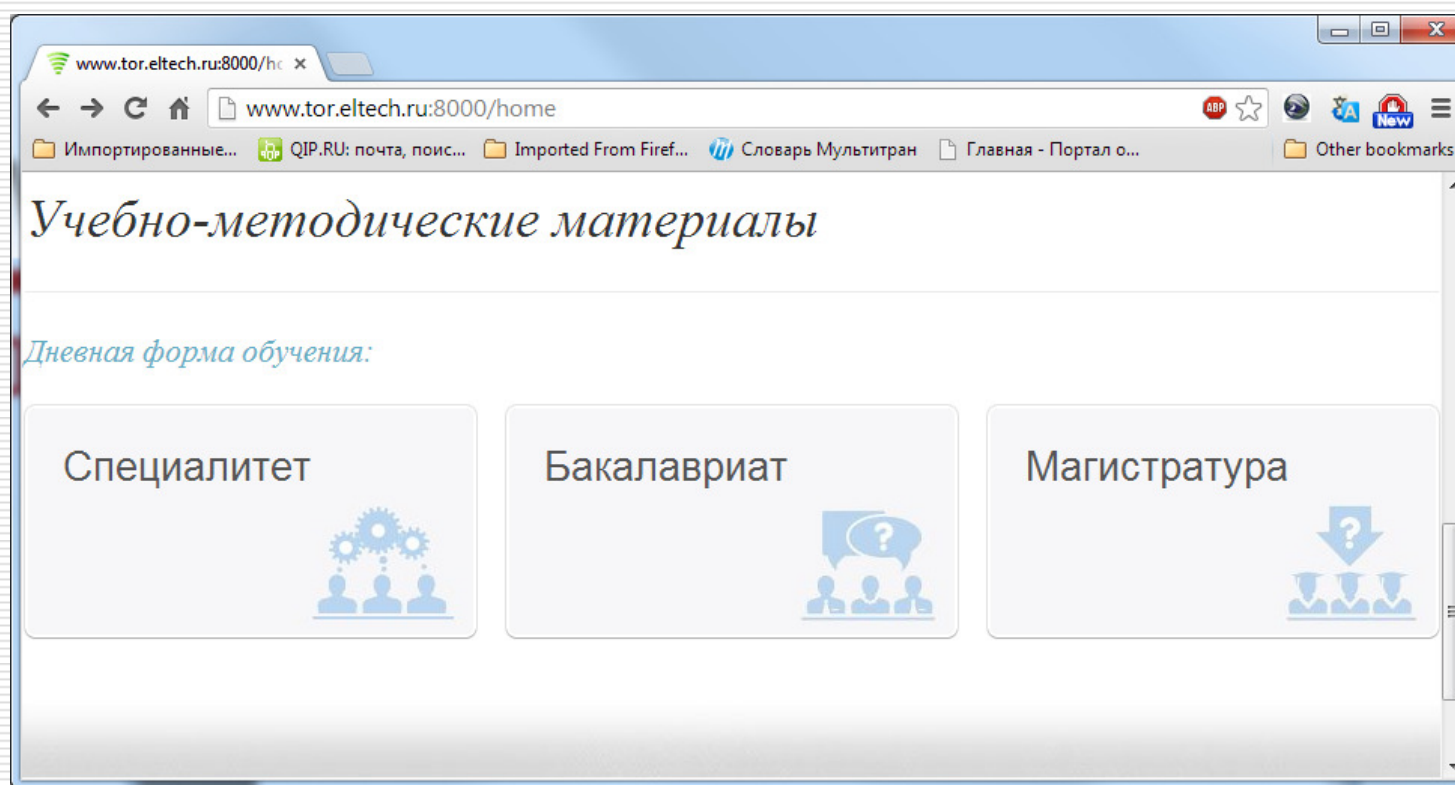
Web-сайт курса

□ sites.google.com/site/eltechdsp



Web-сайт кафедры ТОР

□ tor.eltech.ru



Дифференцированный зачет: набор баллов в течение семестра

□ *Домашние задания*

(2 шт., 7→9 и 13→15 недели):

3 задачи × 4 балла

■ Итого за домашние задания: **0...24** балла

□ *Тесты*

(2 шт., 8-я и 17-я недели):

■ *Теория* (~45 мин): 10 вопросов × 2 балла

■ *Задачи* (~45 мин): 2 задачи × 4 балла

■ Итого за тесты: **0...56** баллов

□ **Итого** за семестр: **0...80** баллов

Дифференцированный зачет: лабораторные работы и оценка

- ❑ Лабораторные работы:
 - Необходимо **выполнить** и **защитить**
5 лабораторных работ
- ❑ Итоговая оценка (в зависимости от
числа баллов, при условии защиты л/р):
 - **0...39** — «неудовлетворительно»
 - **40...54** — «удовлетворительно»
 - **55...69** — «хорошо»
 - **70...80** — «отлично»

Содержание курса

1. Дискретные сигналы
2. Дискретные системы
3. Спектральный анализ дискретных сигналов
4. Методы синтеза дискретных фильтров
5. Эффекты квантования
6. Многоскоростная обработка сигналов

Основная литература

❑ Учебное пособие



❑ Лабораторные работы

- Файлы с описаниями лабораторных работ размещаются на web-сайте курса

Необходимые знания из предыдущих курсов

☐ **Радиотехнические цепи и сигналы**

- Спектр, корреляция, свойства линейных цепей с постоянными параметрами...

☐ **Математический аппарат радиотехники**

- Линейные пространства, линейные операторы...

☐ **Алгебра и геометрия**

- Матрицы, их свойства и операции с ними...

Тема 1

Дискретные сигналы (Лекция 1)

Дискретный сигнал

- Дискретный сигнал — это *последовательность чисел (отсчетов)*, $\{x(k)\}$
- Цифровая обработка сигналов — это *математические операции* над числами
 - У этих операций **нет физического смысла!**
- Происхождение последовательности $\{x(k)\}$ может быть любым:
 - Отсчеты аналогового сигнала: $x(k) = s(kT)$
 - Финансовые показатели:
USD ЦБ РФ (03.02.2016) = 77.9273 руб.
 - Генетический код:
...ATGCGTATTTTTACCGCGAGCCTGGCCACG...

Свертка и корреляция в дискретном времени

- Взаимная корреляционная функция (ВКФ):

$$B_{12}(\Delta k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2^*(k - \Delta k)$$

- Автокорреляционная функция (АКФ):

$$B(\Delta k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) x^*(k - \Delta k)$$

- Энергия:

$$E = B(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2$$

- Свертка:

$$y(k) = x_1(k) * x_2(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(k - m)$$

Сигналы как векторы

- ❑ Отсчеты — координаты в многомерном пространстве: $\mathbf{x} = \{x(k)\}$
- ❑ Скалярное произведение: $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = B_{12}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2^*(k)$
- ❑ Норма (евклидова): $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{E} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2}$
- ❑ Расстояние между сигналами (евклидово): $d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_1(k) - x_2(k)|^2}$

Сигналы конечной и бесконечной длительности

□ Сигнал *бесконечной* длительности:

$$\{x(k)\}, \quad -\infty < k < +\infty$$

□ Сигнал *конечной* длительности:

$$\{x(k)\}, \quad k_1 \leq k \leq k_2$$

За пределами интервала $k_1 \dots k_2$ сигнал
не определен!

Преобразование бесконечного сигнала в конечный

□ Пусть $\{x(k)\}$ — бесконечный сигнал, $\{y(k)\}$ — конечный ($k = k_1 \dots k_2$)

□ Простое выделение фрагмента:

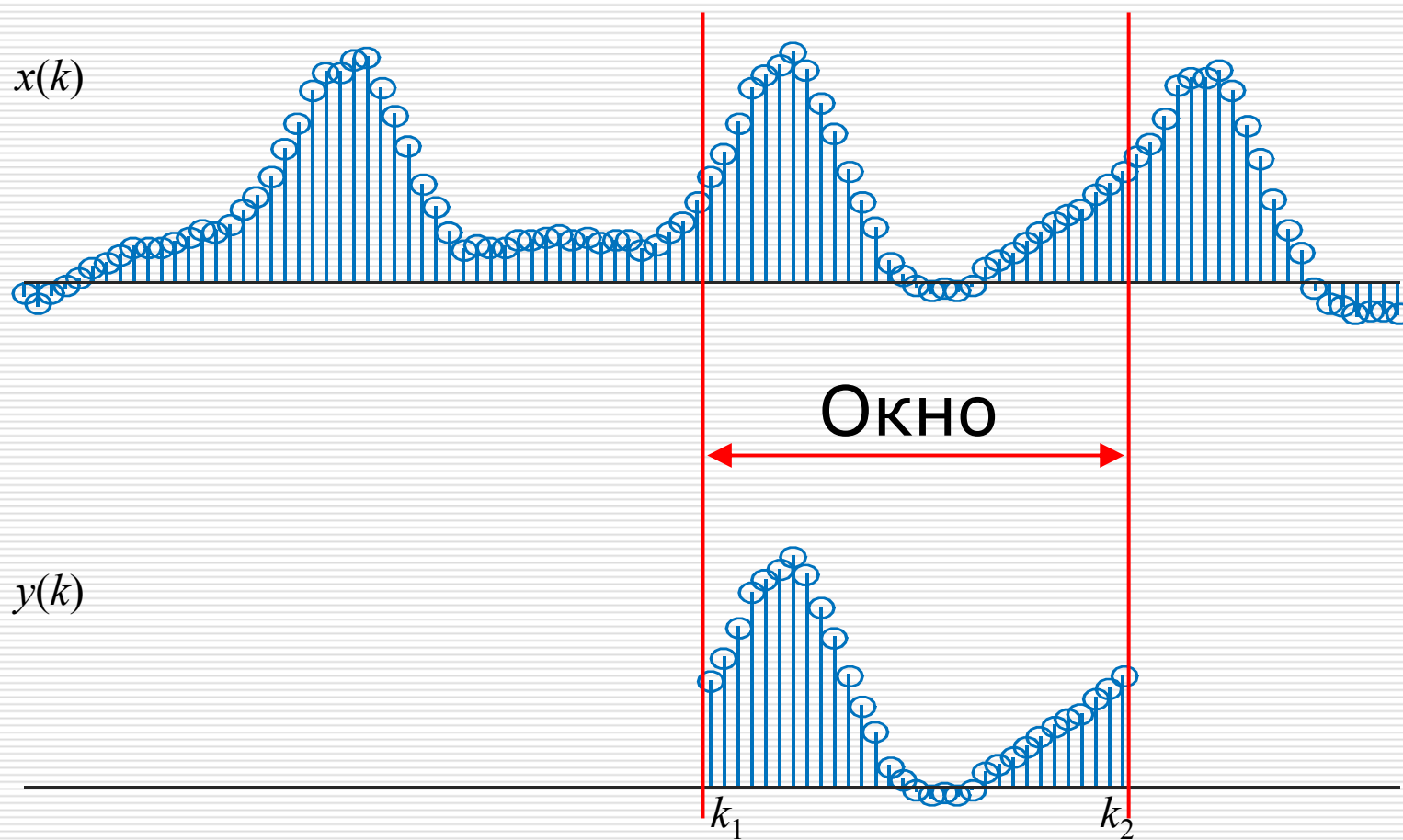
$$y(k) = x(k), \quad k_1 \leq k \leq k_2$$

□ Более общий вариант — обработка произвольным *окном* (*windowing*):

$$y(k) = x(k) w(k), \quad k_1 \leq k \leq k_2$$

■ $w(k)$ — *весовая функция* (*окно*, *window*), отличная от нуля только при $k = k_1 \dots k_2$

Обработка окном — иллюстрация



Преобразование конечного сигнала в бесконечный

□ Пусть $\{y(k)\}$ — конечный сигнал ($k = k_1 \dots k_2$), $\{x(k)\}$ — бесконечный

□ Вариант 1 — *дополнение нулями*:

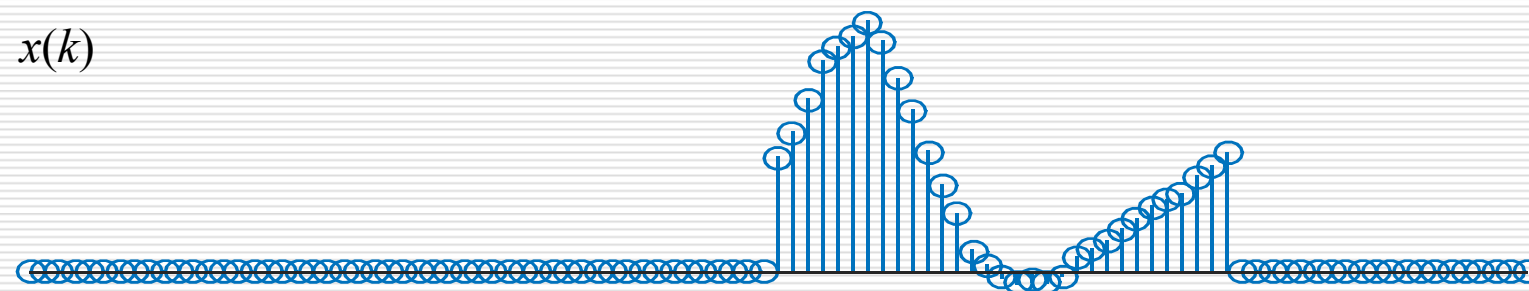
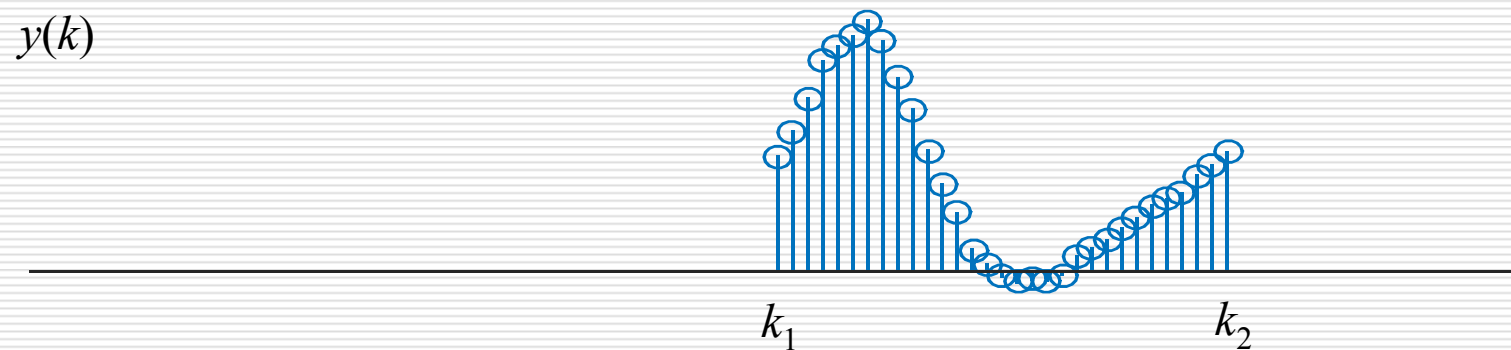
$$x(k) = \begin{cases} y(k), & k_1 \leq k \leq k_2, \\ 0 & k < k_1 \text{ или } k > k_2 \end{cases}$$

□ Вариант 2 — *периодическое продолжение*:

■ Пусть $k_1 = 0$ и $k_2 = N - 1$:

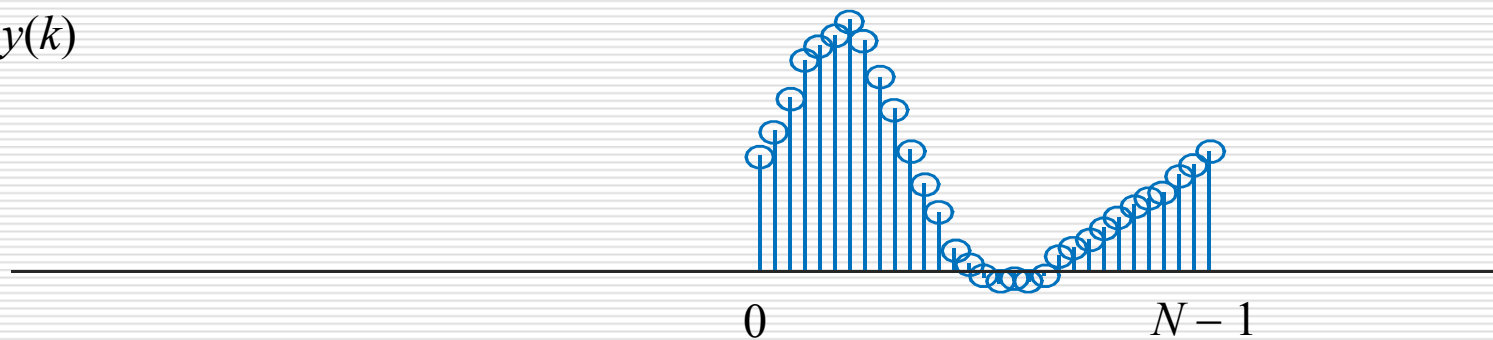
$$x(k) = y(k \bmod N)$$

Дополнение нулями — иллюстрация

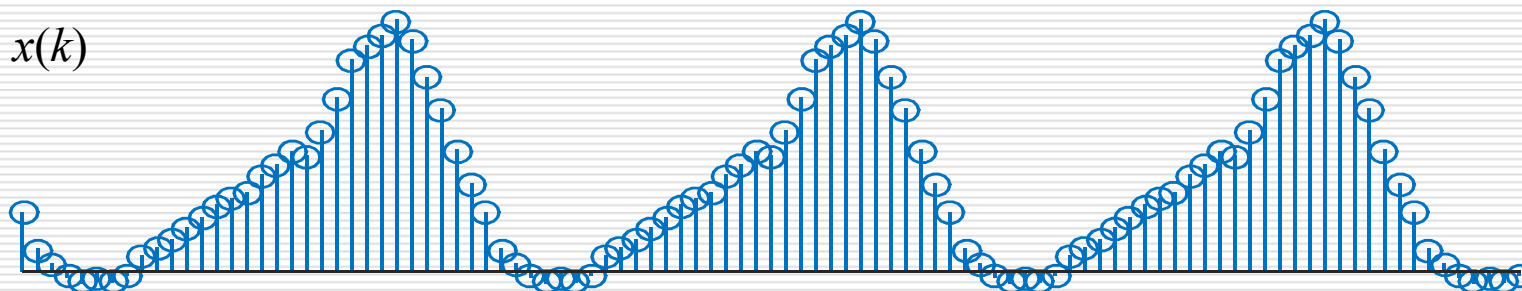


Периодическое продолжение — иллюстрация

$y(k)$



$x(k)$



Периодичность дискретных сигналов

- Определение периодического дискретного сигнала:

$$x(k + N) = x(k) \text{ для любого } k$$

- N — период

- Период N является целочисленным.
Следствие:

- Аналоговый *периодический* сигнал после дискретизации может оказаться *непериодическим*

Дискретный гармонический сигнал (комплексный)

- Сигнал бесконечной длительности:

$$\dot{x}(k) = \dot{A}e^{j\tilde{\omega}k}$$

- Частота $\tilde{\omega}$ имеет смысл *изменения фазы* между отсчетами
 - Единица измерения — *радиан на отсчет (rad/sample)*
- A — комплексная амплитуда

Дискретный гармонический сигнал — возможная непериодичность

- Дискретный гармонический сигнал *не всегда периодичен*:

$$\dot{A}e^{j\tilde{\omega}k} = \dot{A}e^{j\tilde{\omega}(k+N)} = \dot{A}e^{j\tilde{\omega}k}e^{j\tilde{\omega}N} \Rightarrow$$

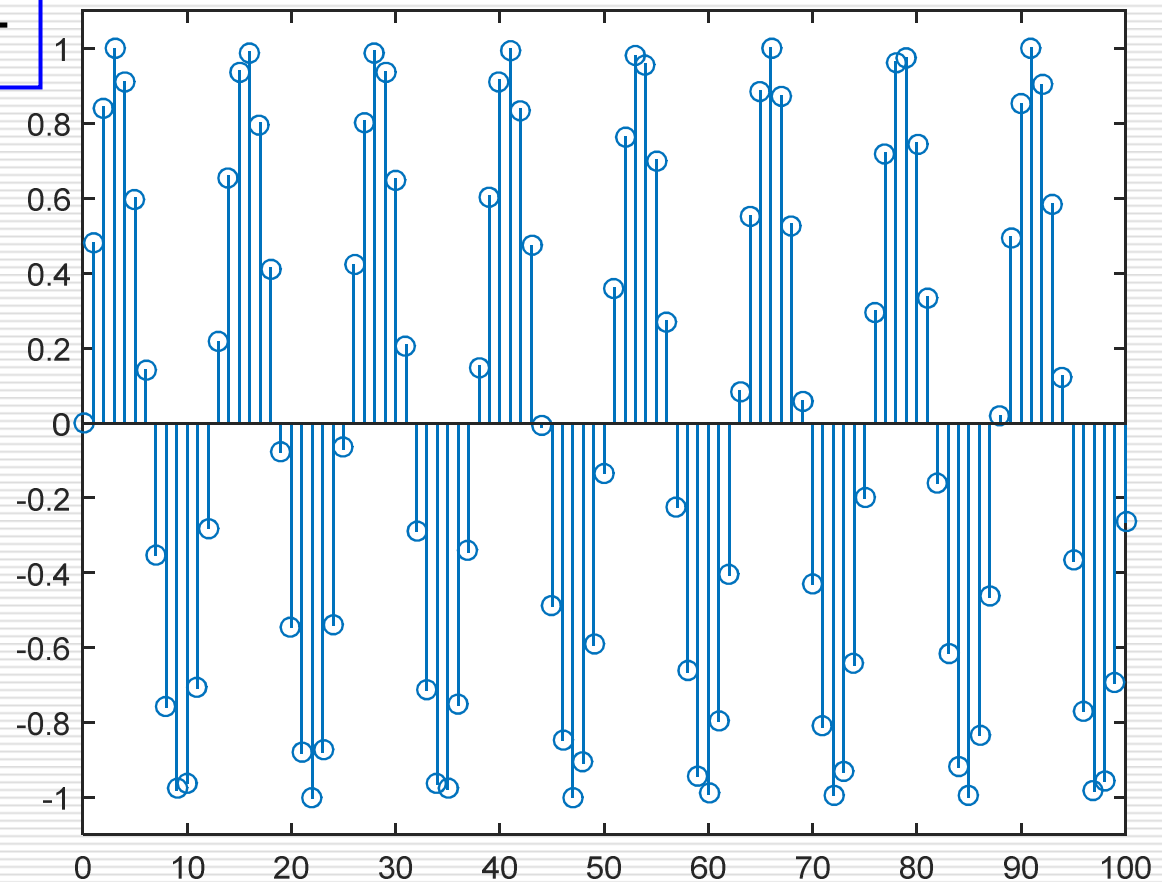
$$\Rightarrow e^{j\tilde{\omega}N} = \exp\left(j2\pi\frac{\tilde{\omega}}{2\pi}N\right) = 1$$

- Отношение $\tilde{\omega}/(2\pi)$ должно быть *рациональной дробью*:

$$\frac{\tilde{\omega}}{2\pi} = \frac{p}{q}, \quad p \text{ и } q \text{ — целые числа}$$

Непериодичность дискретного сигнала — иллюстрация

$\tilde{\omega} = 0.5$ рад/отсчет



Дискретный гармонический сигнал — ложные частоты

- Пусть $x_1(k) = \dot{A}e^{j\tilde{\omega}_1 k}$
- Изменим частоту на величину, кратную 2π рад/отсчет ($\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_1 + 2\pi m$):

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(k) &= \dot{A}e^{j\tilde{\omega}_2 k} = \dot{A}e^{j(\tilde{\omega}_1 + 2\pi m)k} = \\ &= \dot{A}e^{j\tilde{\omega}_1 k} e^{j2\pi m k} = \dot{x}_1(k) e^{j2\pi m k} = \dot{x}_1(k)\end{aligned}$$

- Понятие частоты *неоднозначно*
- *Основной* диапазон частот: $-\pi \leq \tilde{\omega} \leq +\pi$

Ложные частоты — иллюстрация

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1 &= 3 \\ \tilde{\omega}_2 &= 3 + 2\pi \\ &\text{(рад/отсчет)}\end{aligned}$$

