Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

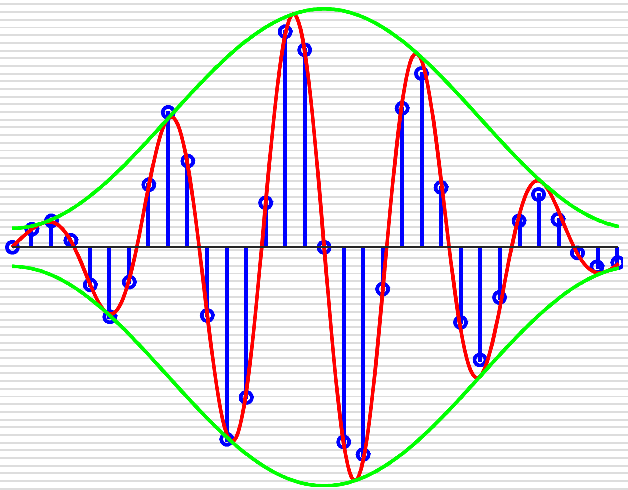
Кафедра теоретических основ радиотехники

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Тема 4

Методы синтеза дискретных фильтров

(Лекция 1)



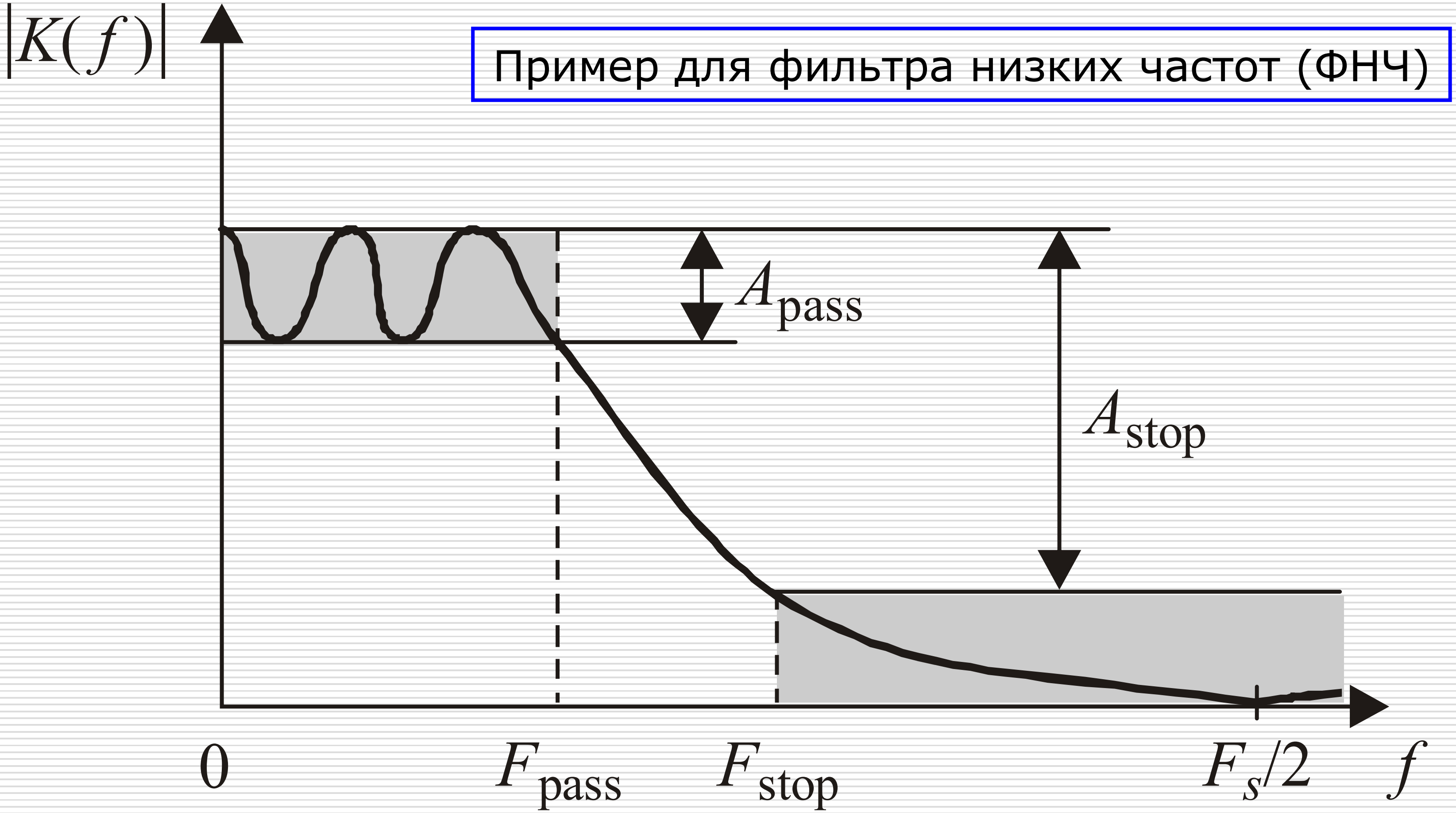
11 неделя семестра

Постановка задачи синтеза

- Проектирование (*синтез*) дискретного фильтра — выбор таких наборов коэффициентов $\{b_i\}$ и $\{a_i\}$, при которых характеристики получающегося фильтра удовлетворяют заданным требованиям

Задание требований к проектируемым фильтрам

Пример для фильтра низких частот (ФНЧ)



Классификация методов синтеза

- На основе аналогового *прототипа*
  - Билинейное преобразование
  - Инвариантная импульсная характеристика
- *Прямые* (без использования прототипа)
  - Субоптимальные
    - Оконный метод
  - Оптимальные
    - Минимизация квадратической ошибки
    - Минимаксный метод

Метод инвариантной импульсной характеристики

- Производится дискретизация импульсной характеристики аналогового прототипа:

$$h_д(k) = T\,h_а(kT)$$

- Связь частотных характеристик:

$$\dot{K}_д(\tilde{\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{K}_а\left(\frac{\tilde{\omega}}{T} - \frac{2\pi n}{T}\right)$$

- «Хвосты» частотных характеристик накладываются друг на друга
  - АЧХ прототипа на частотах выше частоты Найквиста должна быть пренебрежимо малой

Метод инвариантной импульсной характеристики

- И.Х. аналоговой цепи с сосредоточенными параметрами:

$$h_{\text{а}}(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{p_i t}, \quad t \geq 0$$

- Дискретизированная И.Х.:

$$h_{\text{д}}(k) = T \sum_{i=1}^{N} A_i e^{(p_i T)k}, \quad k \geq 0$$

- Функция передачи:
  - полюсы: $e^{p_i T}$
  - вычеты: TA_i

$$H(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{TA_i}{1 - e^{p_i T} z^{-1}}$$

Билинейное преобразование

- Синтез на основе функции передачи аналогового прототипа $H(p)$
  - Функция передачи аналоговой цепи — *дробно-рациональная* функция лапласовской частоты p
  - Функция передачи дискретной системы — *дробно-рациональная* функция переменной z
  - Замена для переменной p ($p = f(z)$) должна быть *дробно-рациональной функцией*

Билинейное преобразование

- Связь частотных характеристик аналоговой и дискретной систем должна сводиться к трансформации частотной оси: $K_{\text{а}}(\omega_{\text{а}}) = K_{\text{д}}(\tilde{\omega}_{\text{д}})$
  - Это позволит сохранить все «вертикальные» параметры прототипа (пульсации в полосе пропускания, подавление в полосе задерживания и т.п.)
  - Функция $p = f(z)$ должна *отображать единичную окружность на мнимую ось*:

$$f(e^{j\tilde{\omega}_{\text{д}}}) = j\omega_{\text{а}}$$

Билинейное преобразование

- Простейшая функция $p = f(z)$, удовлетворяющая требованиям: $$\boxed{p = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = 2f_{\text{д}}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

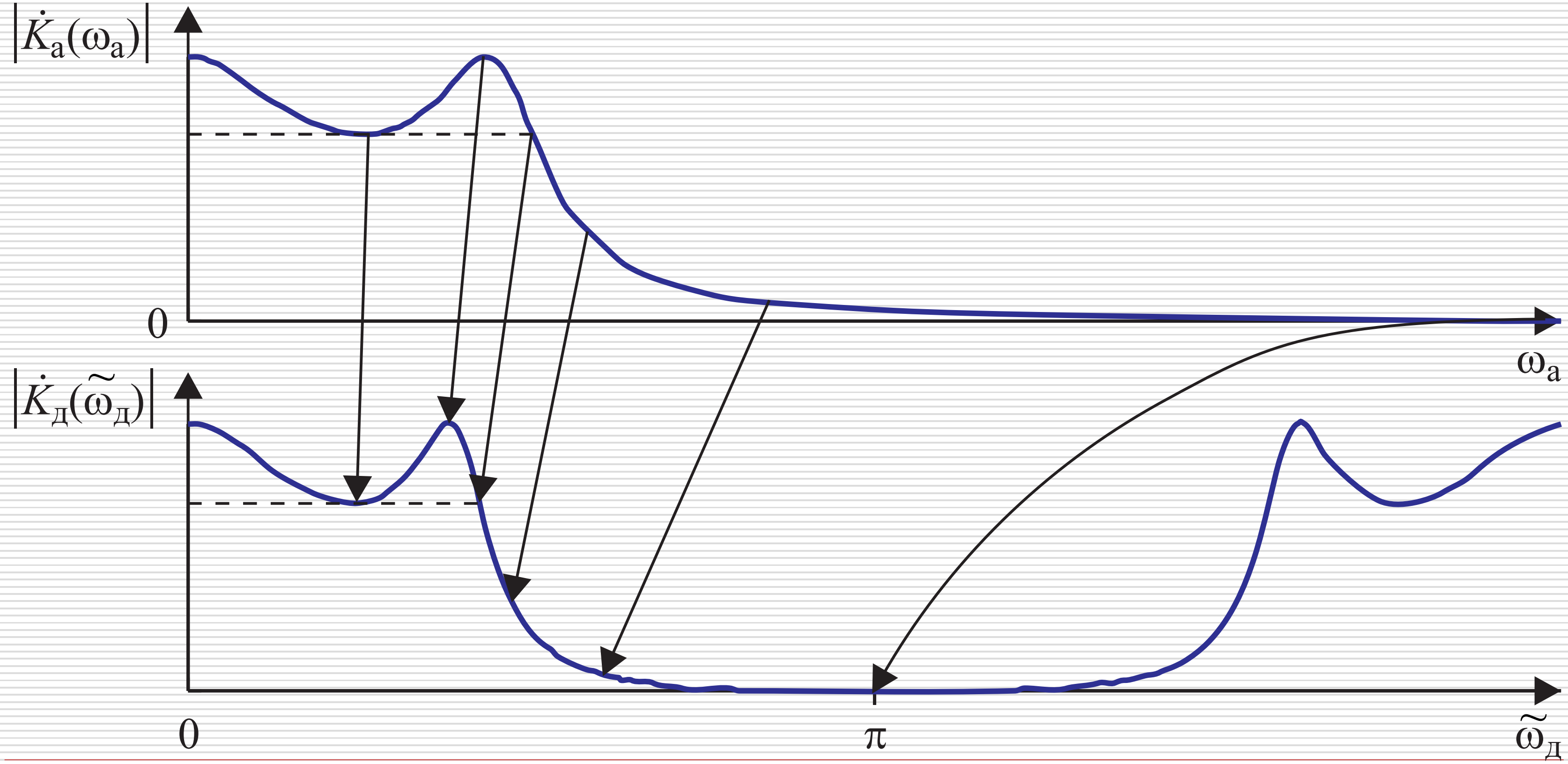
- Трансформация частотной оси:

$$\frac{2}{T}\frac{e^{j\tilde{\omega}_{\text{д}}}-1}{e^{j\tilde{\omega}_{\text{д}}}+1} = \frac{2}{T}\frac{e^{j\tilde{\omega}_{\text{д}}/2}-e^{-j\tilde{\omega}_{\text{д}}/2}}{e^{j\tilde{\omega}_{\text{д}}/2}+e^{-j\tilde{\omega}_{\text{д}}/2}} = j\frac{2}{T}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\tilde{\omega}_{\text{д}}}{2}\right) = j\omega_{\text{а}}$$

$$\boxed{\omega_{\text{а}} = \frac{2}{T}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\tilde{\omega}_{\text{д}}}{2}\right)}$$

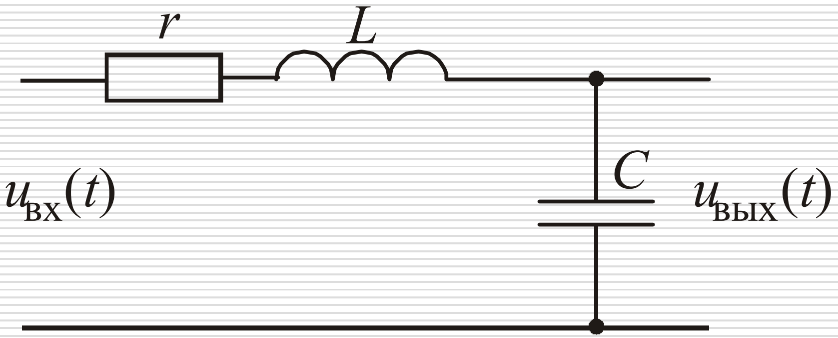
Билинейное преобразование

- Трансформация частотной оси



Билинейное преобразование — пример

- Одиночный колебательный контур



$$\dot{K}(\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

- Функция передачи прототипа ($j\omega \to p$):

$$H(p) = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{Q\omega_0}p + \dfrac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

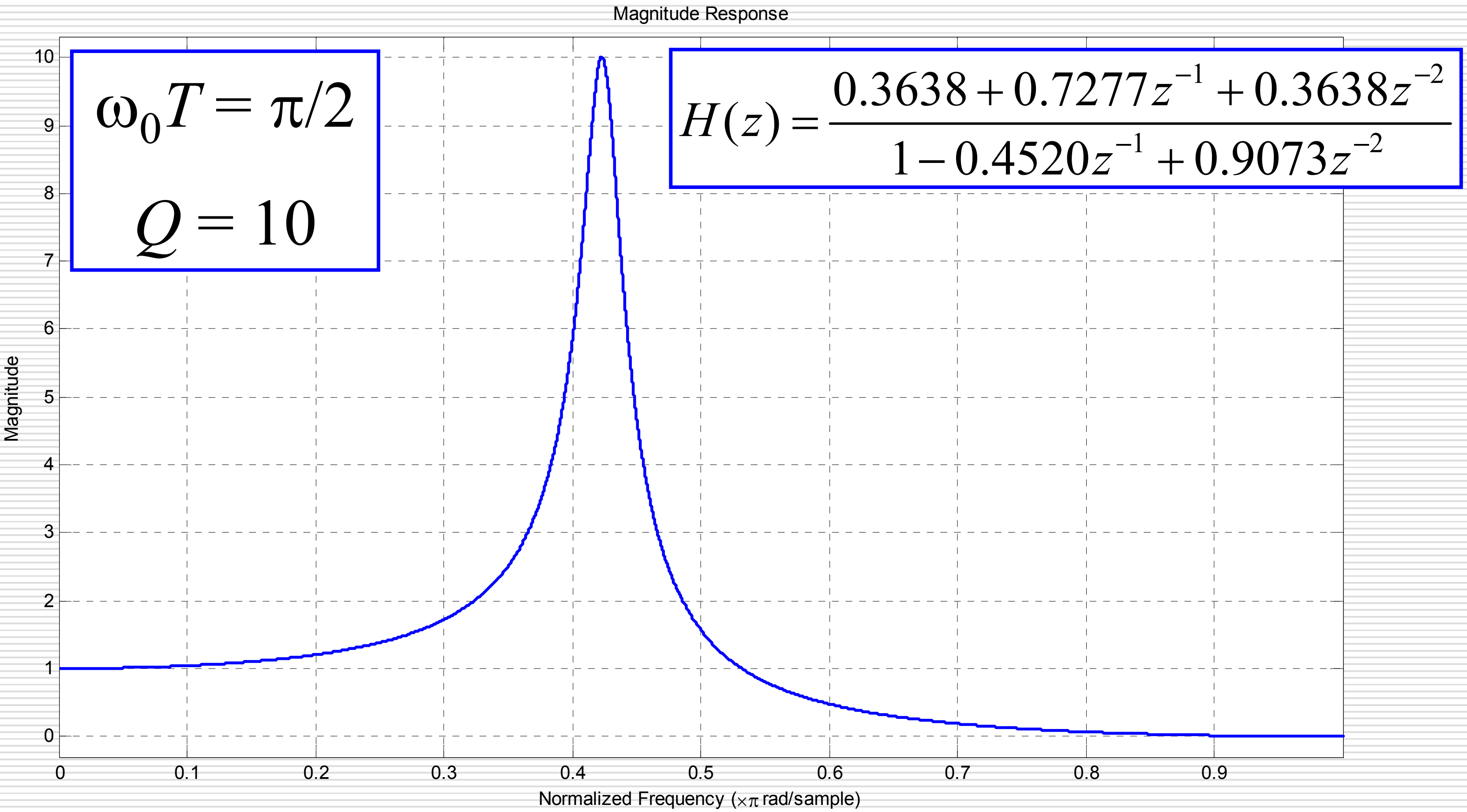
Билинейное преобразование — пример

- Замена переменной $p = \dfrac{2}{T}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

$$H(z) = \frac{1}{1+\dfrac{1}{Q\omega_0}\dfrac{2}{T}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+\dfrac{1}{\omega_0^2}\left(\dfrac{2}{T}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2} =$$

$$= \frac{(\omega_0 T)^2 Q}{\left((\omega_0 T)^2+4\right)Q+2\omega_0 T} \times \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+\dfrac{2\left((\omega_0 T)^2-4\right)Q}{\left((\omega_0 T)^2+4\right)Q+2\omega_0 T}z^{-1}+\dfrac{\left((\omega_0 T)^2+4\right)Q-2\omega_0 T}{\left((\omega_0 T)^2+4\right)Q+2\omega_0 T}z^{-2}}$$

Билинейное преобразование — пример



Идеализированные дискретные фильтры

- Способы расчета импульсной характеристики
  - По частотной характеристике: $h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dot{K}(\tilde{\omega}) e^{j\tilde{\omega}k} d\tilde{\omega}$
  - Во временной области:

    Одиночный импульс $\delta(k) \rightarrow$

    $\rightarrow$ Восстановление аналогового сигнала $\left(s(t) = \sin(\pi t/T)/(\pi t/T)\right) \rightarrow$

    $\rightarrow$ Фильтрация аналогового сигнала $\rightarrow$

    $\rightarrow$ Дискретизация $\rightarrow \{h(k)\}$

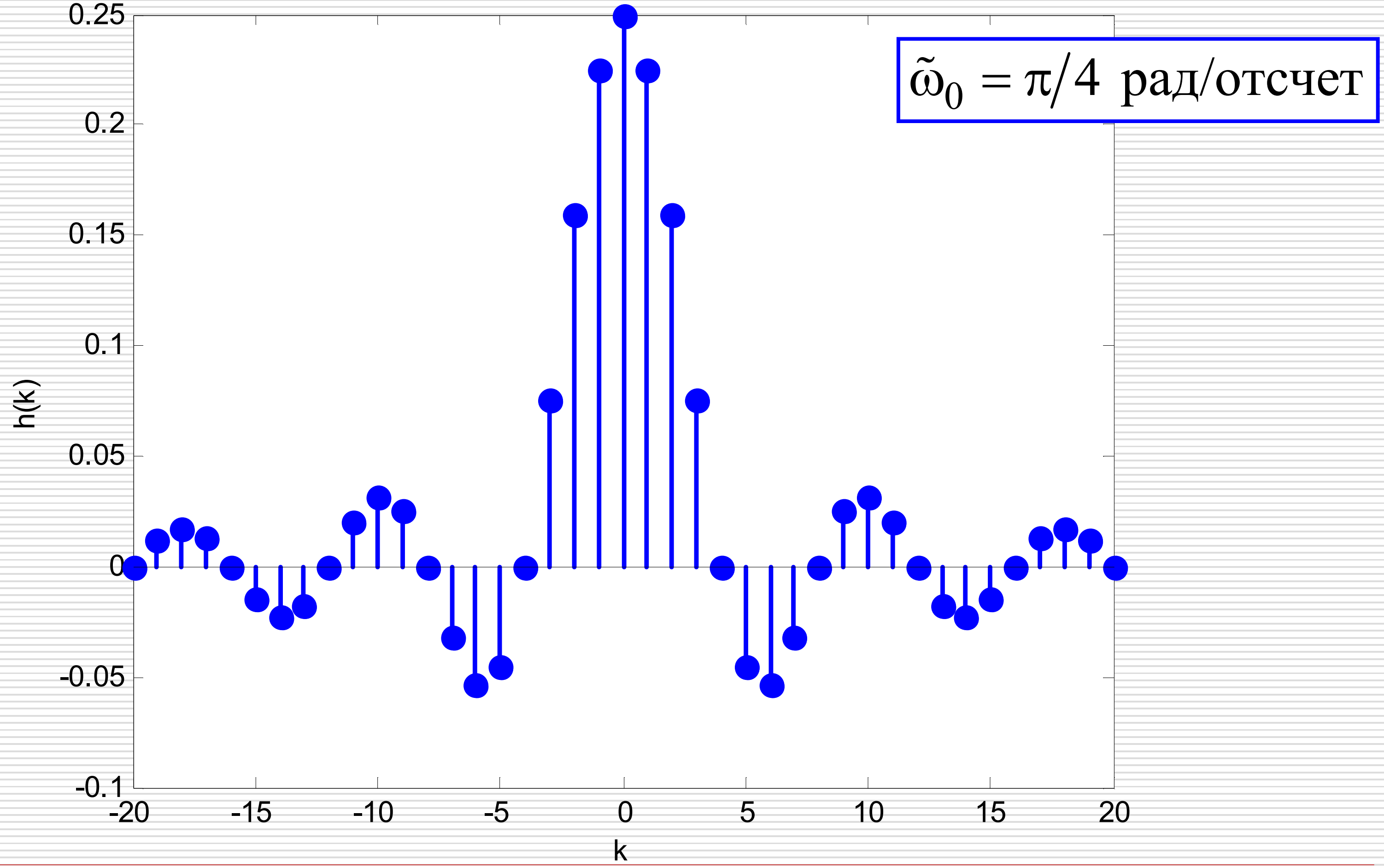
Идеализированные фильтры — расчет по частотной характеристике

- Фильтр нижних частот с частотой среза $\tilde{\omega}_0$:

$$\dot{K}(\tilde{\omega}) = \begin{cases} 1, & |\tilde{\omega}| < \tilde{\omega}_0 \\ 0, & \tilde{\omega}_0 < |\tilde{\omega}| < \pi \end{cases}$$

$$h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tilde{\omega}_0}^{+\tilde{\omega}_0} e^{j\tilde{\omega}k} d\tilde{\omega} = \frac{e^{j\tilde{\omega}_0 k} - e^{-j\tilde{\omega}_0 k}}{2\pi jk} = \frac{\tilde{\omega}_0}{\pi} \frac{\sin(\tilde{\omega}_0 k)}{\tilde{\omega}_0 k}$$

Идеальный фильтр нижних частот



Идеализированные фильтры — расчет во временной области

- Дифференцирующий фильтр:

$$s_{\text{вх}}(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{ds_{\text{вх}}(t)}{dt} = \frac{\pi}{T}\frac{(\pi t/T)\cos(\pi t/T) - \sin(\pi t/T)}{(\pi t/T)^2}$$

$$h(k) = s_{\text{вых}}(kT) = \frac{\pi}{T}\frac{\pi k\cos(\pi k) - \sin(\pi k)}{(\pi k)^2} = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \dfrac{(-1)^k}{kT}, & k \neq 0 \end{cases}$$

Идеальный дифференцирующий фильтр