



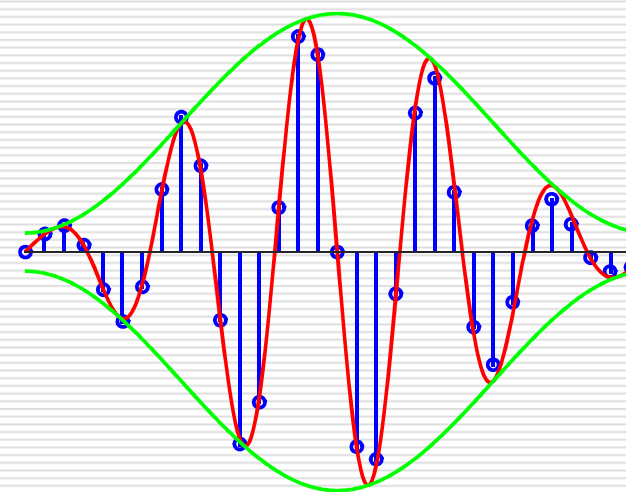
Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет «ЛЭТИ»
Кафедра теоретических основ
радиотехники



ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Тема 3

Дискретное преобразование Фурье (Лекция 2)



ДПФ как дискретная фильтрация

- Прямое ДПФ можно записать так:

$$\dot{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(j2\pi \frac{n}{N}(N-k)\right)$$

- Это свертка сигнала с импульсной характеристикой вида

$$h_n(k) = \exp\left(j2\pi \frac{n}{N}k\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

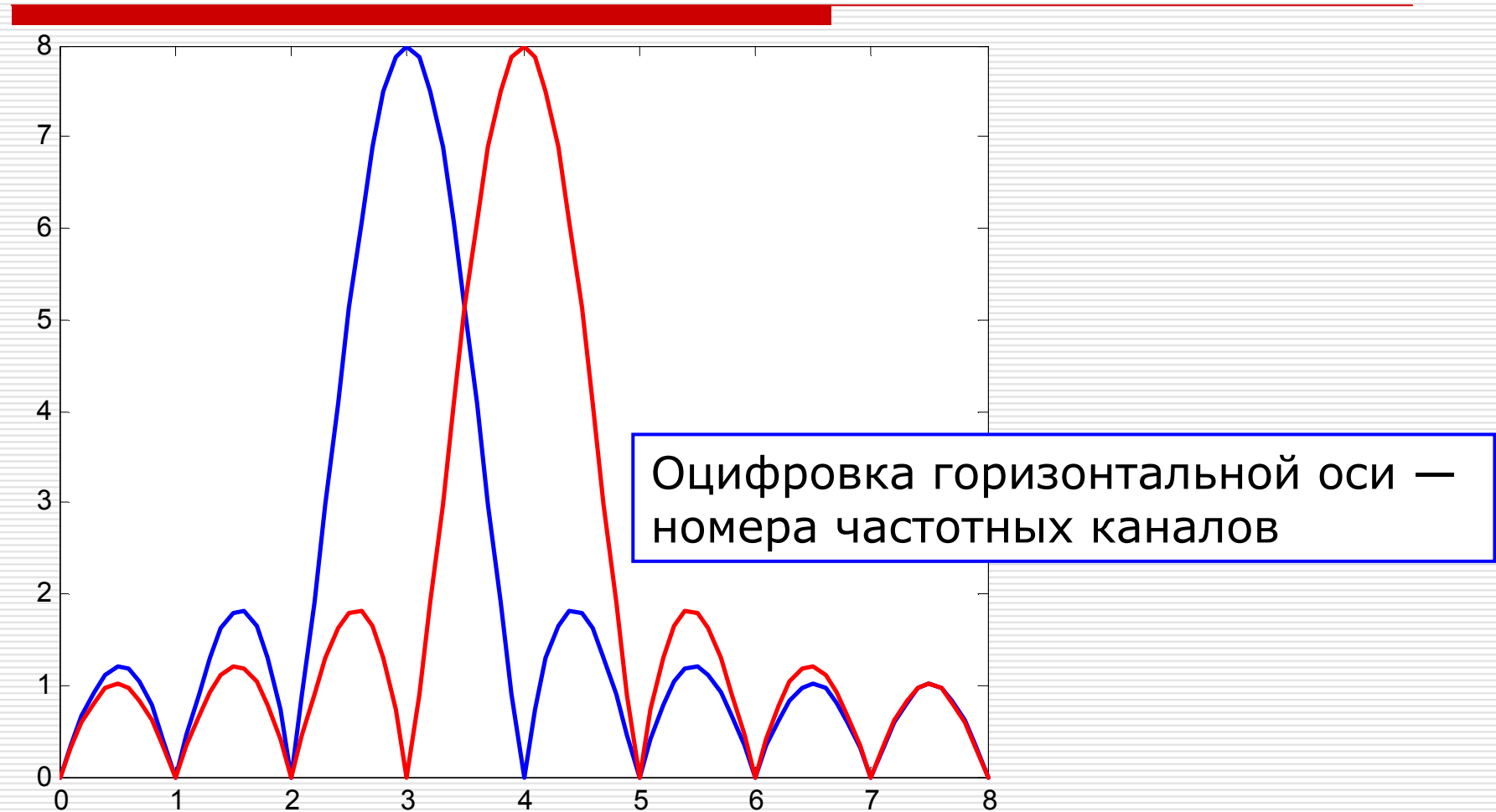
ДПФ как дискретная фильтрация

- Функция передачи и АЧХ эквивалентного фильтра

$$H_n(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\omega_n} z^{-1}} \quad \left| \dot{K}_n(\omega) \right| = \frac{\left| \sin \left(\frac{N}{2} (\omega - \omega_n) \right) \right|}{\left| \sin \left(\frac{1}{2} (\omega - \omega_n) \right) \right|}$$

Частота, соответствующая n -му спектральному отсчету: $\omega_n = \frac{2\pi}{N} n$

ДПФ: АЧХ эквивалентных фильтров

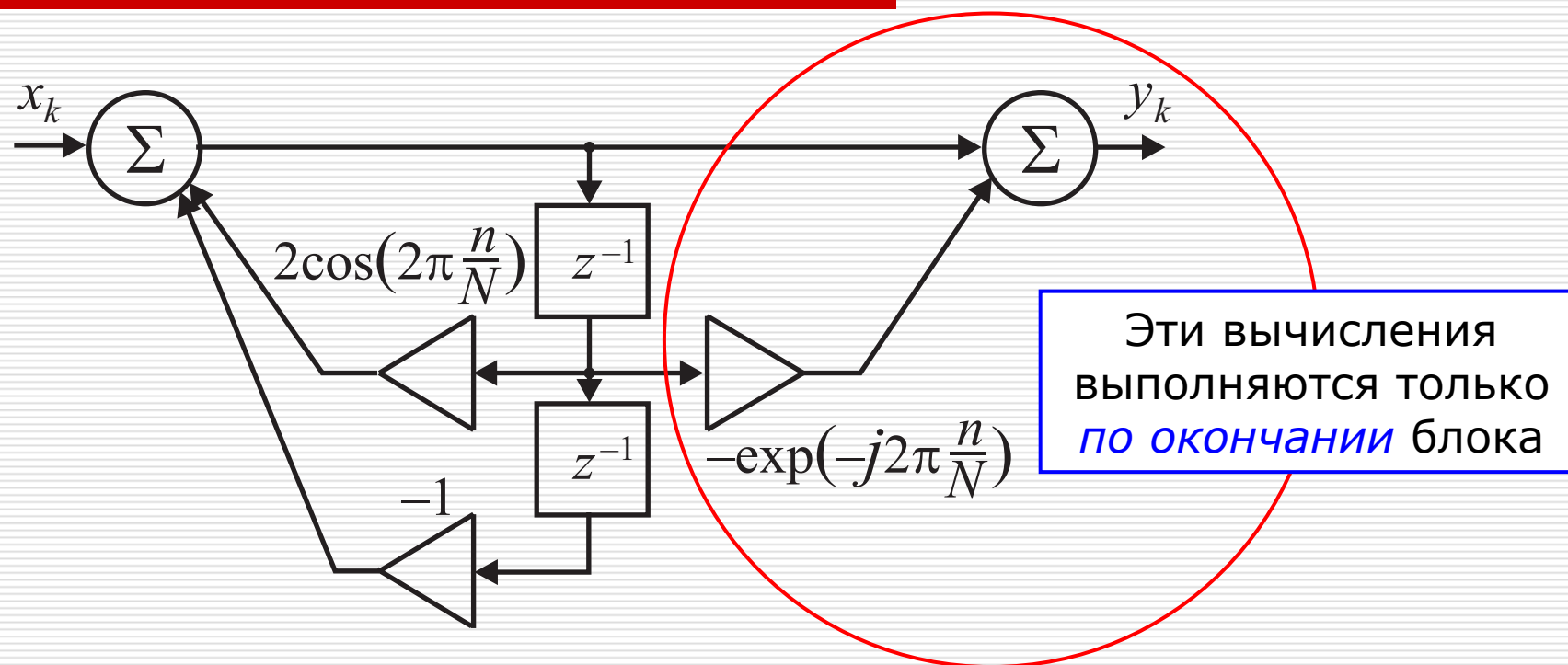


Реализация эквивалентного фильтра: алгоритм Герцеля (Hoertzel)

- Обрабатываем сигнал *блоками*
 - Можно удалить z^{-N} в числителе
- Искусственно переходим к фильтру *второго порядка*
 - При обработке вещественного сигнала это снижает число операций

$$H_n(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega_n} z^{-1}} = \frac{1 - e^{-j\omega_n} z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_n)z^{-1} + z^{-2}}$$

Реализация эквивалентного фильтра: алгоритм Герцеля



В процессе поступления отсчетов работает только *рекурсивная* часть фильтра

Число вещественных операций:

- $N + 2$ умножений
- $2N + 1$ сложение

Дискретная фильтрация с помощью ДПФ

- ❑ Перемножение ДПФ соответствует *круговой* свертке последовательностей
- ❑ Дискретная фильтрация соответствует *линейной* свертке последовательностей
- ❑ Нужно представить линейную свертку с помощью круговой
 - Этого можно добиться путем *дополнения* сворачиваемых последовательностей *нулями*

Линейная свертка последовательностей

Исходные сигналы

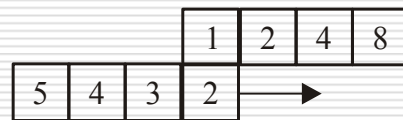
x_1 :

1	2	4	8
---	---	---	---

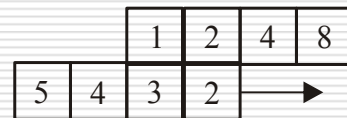
x_2 :

2	3	4	5
---	---	---	---

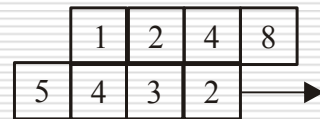
Вычисление линейной свертки



$$y(0) = 1 \times 2 = 2$$



$$y(1) = 1 \times 3 + 2 \times 2 = 7$$



$$y(2) = 1 \times 4 + 2 \times 3 + 4 \times 2 = 18$$



$$y(3) = 1 \times 5 + 2 \times 4 + 4 \times 3 + 8 \times 2 = 41$$

Вычисление линейной свертки с помощью круговой свертки

Исходные сигналы

$$x_1: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_2: \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Вычисление круговой свертки

$y(0) = 1 \times 2 = 2$

$y(1) = 1 \times 3 + 2 \times 2 = 7$

$y(2) = 1 \times 4 + 2 \times 3 + 4 \times 2 = 18$

$y(3) = 1 \times 5 + 2 \times 4 + 4 \times 3 + 8 \times 2 = 41$

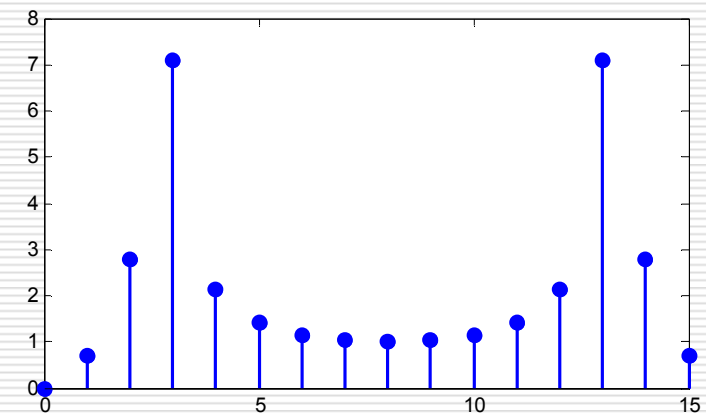
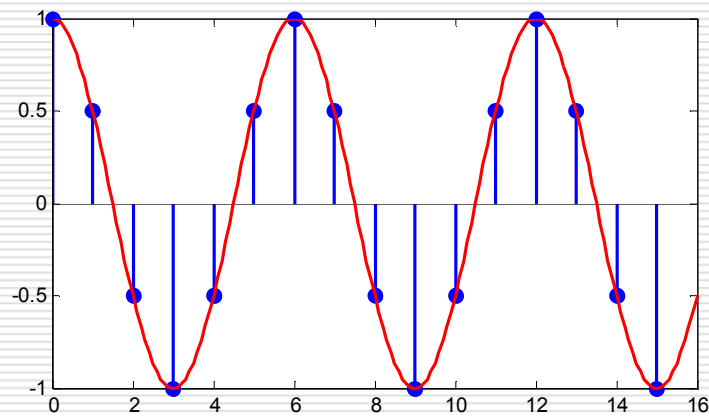
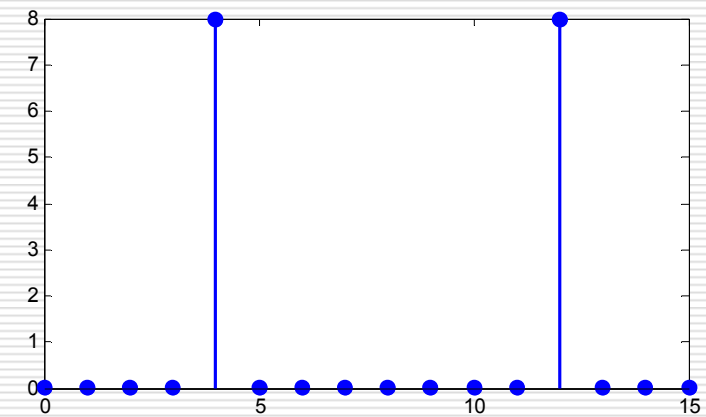
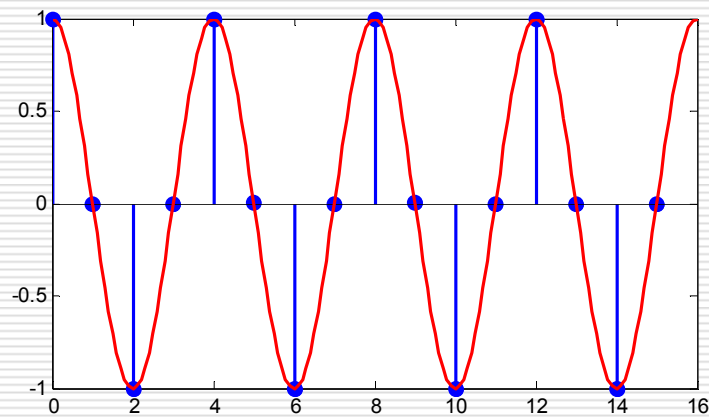
Секционирование свертки

- Метод *перекрывтия с суммированием* (*overlap-add*)
 - Входной сигнал разбивается на *неперекрывающиеся* блоки
 - Каждый блок фильтруется, в результате его длина увеличивается на $N_h - 1$ отсчетов (N_h — длина импульсной характеристики)
 - *Нужно* рассчитать *оба* переходных процесса
 - При фильтрации с помощью ДПФ *нужно* дополнение нулями
 - Выходные блоки объединяются, при этом крайние $N_h - 1$ отсчетов *перекрываются* и *суммируются*

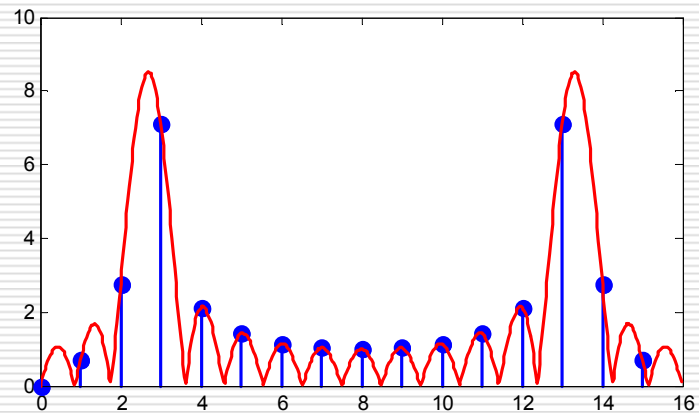
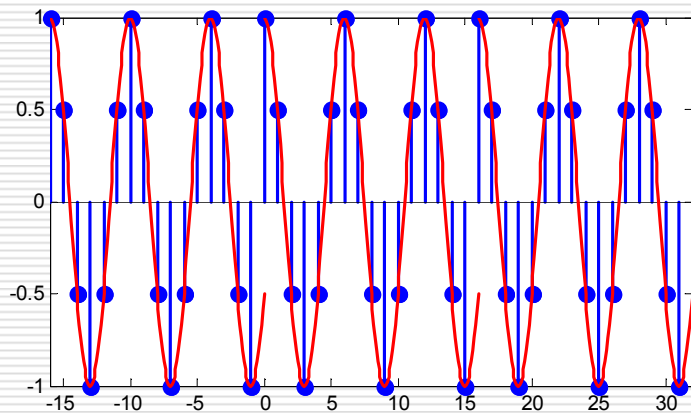
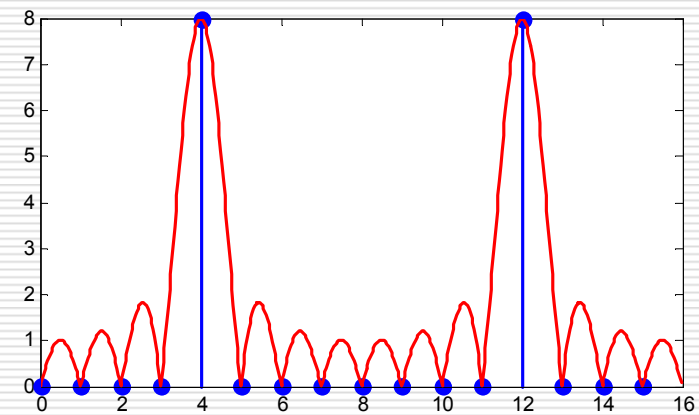
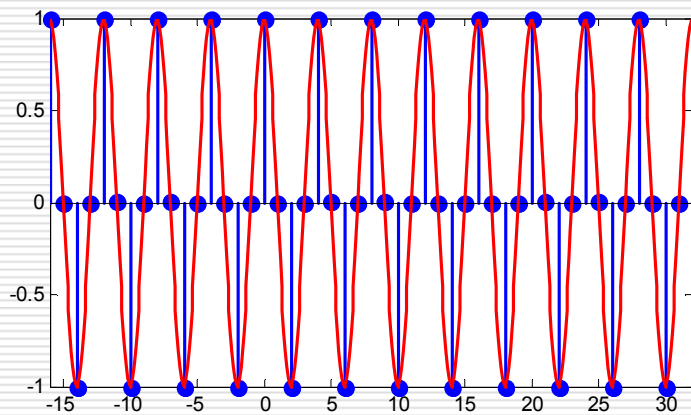
Секционирование свертки

- Метод *перекрывтия с накоплением* (*overlap-save*)
 - Входной сигнал разбивается на блоки, *перекрывающиеся* на $N_h - 1$ отсчетов
 - Каждый блок фильтруется
 - *Не нужно* рассчитывать финальный переходный процесс
 - При фильтрации с помощью ДПФ *не нужно* дополнение нулями
 - У выходных блоков *отбрасываются* «хвосты» длиной $N_h - 1$ отсчетов с *левой* стороны
 - Выходные блоки объединяются *без перекрывтия*

Растекание спектра (трактовка через периодическое продолжение сигнала)



Растекание спектра (трактовка через дополнение нулями)



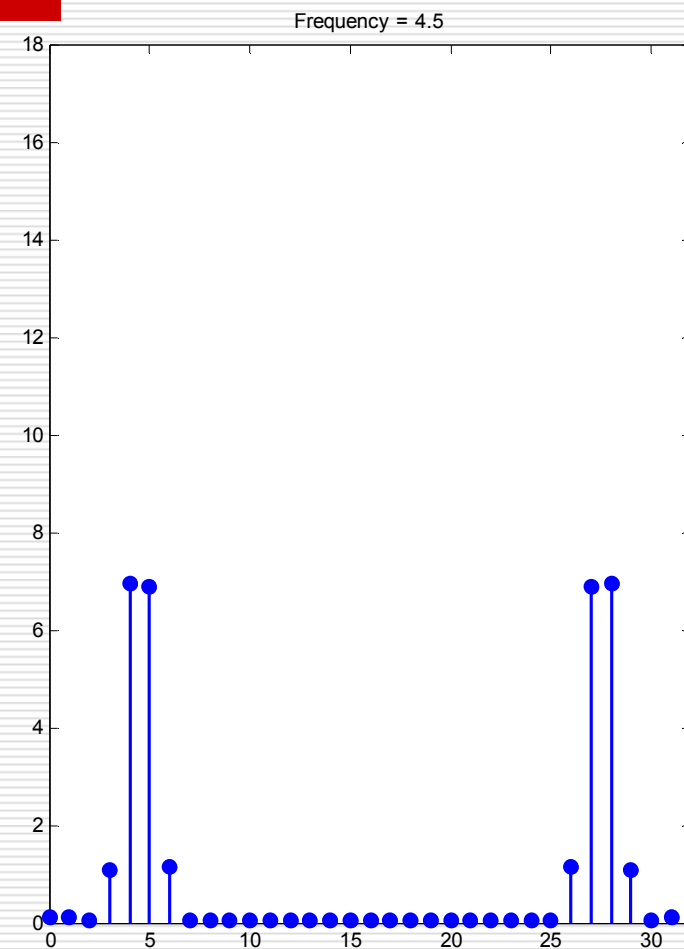
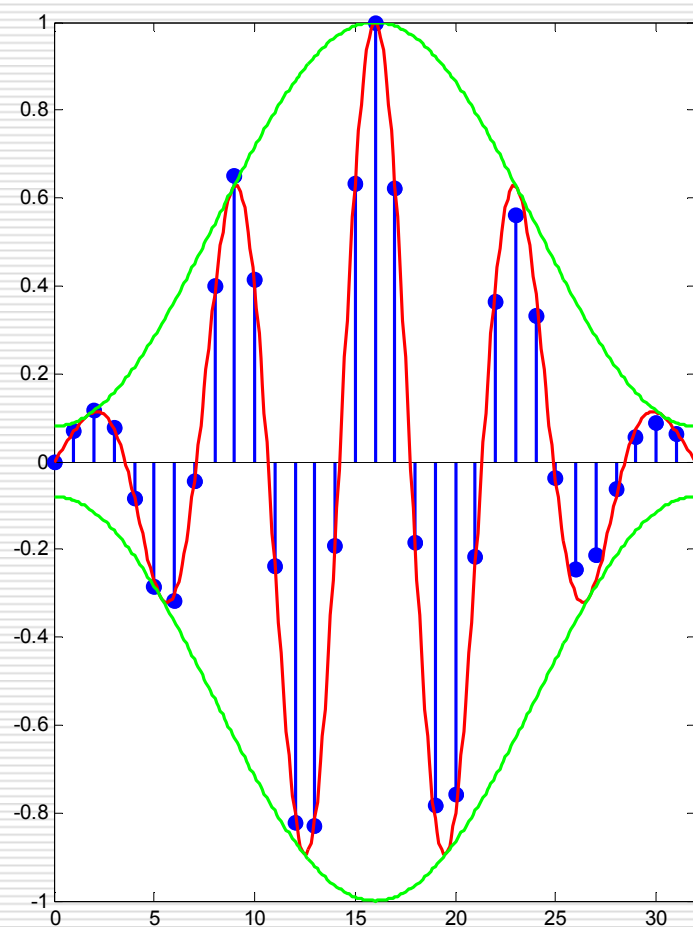
Весовые функции (окна)

- Для уменьшения растекания спектра сигнал умножается на спадающую к краям весовую функцию (*ОКНО*) $w(k)$

$$\dot{X}_w(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)w(k)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

- В результате *уменьшаются боковые лепестки* эквивалентных ДПФ-фильтров *за счет расширения главного лепестка*

Влияние окна на результат вычисления ДПФ



Широко распространенные окна

□ **Прямоугольное:** $w(k) = 1, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$

- Боковые лепестки $-13,2$ дБ
- Ширина главного лепестка $0,8828$

□ **Ханна:** $w(k) = 0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right)$

- Боковые лепестки $-31,5$ дБ
- Ширина главного лепестка $1,4844$

□ **Хэмминга:** $w(k) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right)$

- Боковые лепестки $-41,8$ дБ
- Ширина главного лепестка $1,3242$

Широко распространенные окна

□ Окно **Кайзера:**

$$w(k) = \frac{\left| I_0 \left(\beta \sqrt{1 - \left(\frac{2k - (N-1)}{N-1} \right)^2} \right) \right|}{|I_0(\beta)|}$$

□ При $\beta = 4$

- Боковые лепестки $-31,3$ дБ
- Ширина главного лепестка $1,2227$

□ При $\beta = 9$

- Боковые лепестки $-65,9$ дБ
- Ширина главного лепестка $1,7187$

Широко распространенные окна

- Соотношение между шириной главного лепестка и уровнем боковых лепестков

