



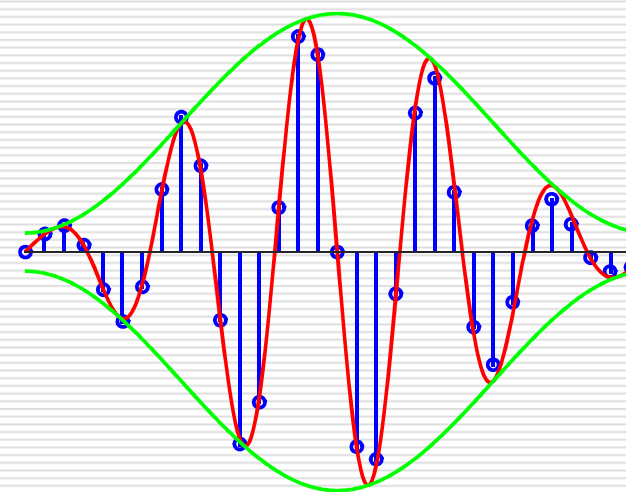
*Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет «ЛЭТИ»  
Кафедра теоретических основ  
радиотехники*



# ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

## Тема 2

### Дискретные системы (Лекция 3)



# Полюсы и вычеты

- Представляем  $H(z)$  в виде суммы простых дробей

$$H(z) = \frac{r_1}{1-p_1z^{-1}} + \frac{r_2}{1-p_2z^{-1}} + \dots + \frac{r_n}{1-p_nz^{-1}} +$$
$$+k_0 + k_1z^{-1} + \dots + k_{m-n}z^{-(m-n)}$$

Вычеты

Полюсы

Целая часть

# Расчет импульсной характеристики

---

- Простые дроби соответствуют *экспоненциальным* слагаемым

$$\frac{r_i}{1 - p_i z^{-1}} \leftrightarrow r_i (p_i)^k, \quad k \geq 0$$

- Комплексно-сопряженные пары дают *затухающие синусоиды*

$$\begin{aligned} r_i (p_i)^k + r_i^* (p_i^*)^k &= 2 \operatorname{Re}[r_i (p_i)^k] = \\ &= 2 |r_i| \cdot |p_i|^k \cos(k \arg p_i + \arg r_i) \end{aligned}$$

# Расчет импульсной характеристики: пример

□ Функция передачи:

$$H(z) = \frac{0.0528 + 0.0797z^{-1} + 0.1295z^{-2} + 0.1295z^{-3} + 0.0797z^{-4} + 0.0528z^{-5}}{1 - 1.8107z^{-1} + 2.4947z^{-2} - 1.8801z^{-3} + 0.9537z^{-4} - 0.2336z^{-5}}$$

□ Параметры простых дробей (MATLAB):

```
[r, p, k] = residuez([0.0528 0.0797 0.1295 0.1295 0.0797 0.0528], ...  
                    [1 -1.8107 2.4947 -1.8801 0.9537 -0.2336])
```

r =  
0.0415 + 0.0510i  
0.0415 - 0.0510i  
-0.3290 - 0.0599i  
-0.3290 + 0.0599i  
0.8538 + 0.0000i

p =  
0.2788 + 0.8973i  
0.2788 - 0.8973i  
0.3811 + 0.6274i  
0.3811 - 0.6274i  
0.4910 + 0.0000i

k =  
-0.2260

# Расчет импульсной характеристики: пример

## □ Модули и фазы вычетов и полюсов:

```
>> [abs(r) angle(r)]
ans =
    0.0658    0.8874
    0.0658   -0.8874
    0.3344   -2.9614
    0.3344    2.9614
    0.8538         0
```

Комплексные  
вычеты  
и полюсы

← Вещественные  
вычет и полюс →

```
>> [abs(p) angle(p)]
ans =
    0.9396    1.2696
    0.9396   -1.2696
    0.7341    1.0250
    0.7341   -1.0250
    0.4910         0
```

## □ Представление в виде простых дробей:

$$\begin{aligned}
 H(z) = & -0.2260 + \frac{0.0658e^{j0.8874}}{1 - 0.9396e^{j1.2696}z^{-1}} + \frac{0.0658e^{-j0.8874}}{1 - 0.9396e^{-j1.2696}z^{-1}} + \\
 & + \frac{0.3344e^{-j2.9614}}{1 - 0.7341e^{j1.0250}z^{-1}} + \frac{0.3344e^{j2.9614}}{1 - 0.7341e^{-j1.0250}z^{-1}} + \frac{0.8538}{1 - 0.4910z^{-1}}
 \end{aligned}$$

# Расчет импульсной характеристики: пример

---

## □ Обратное z-преобразование:

$$\begin{aligned} h(k) = & -0.2260 \delta(k) + \\ & + 0.1316 \times 0.9396^k \cos(0.8874 + 1.2696 k) + \\ & + 0.6688 \times 0.7341^k \cos(-2.9614 + 1.0250 k) + \\ & + 0.8538 \times 0.4910^k, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

Вывод формулы будет показан на лекции

# Устойчивость дискретных систем

---

- При нулевом входном сигнале в системе могут существовать *свободные колебания*
- Вид свободных колебаний определяется *начальными условиями*
- Система называется *устойчивой*, если при любых начальных условиях свободные колебания являются *затухающими*:

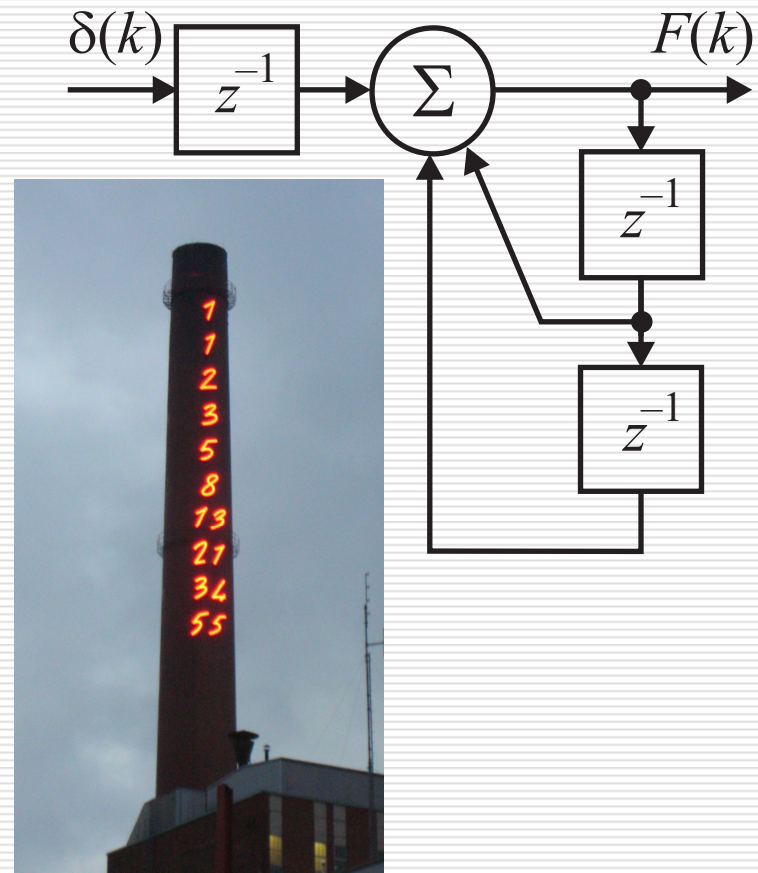
$$\text{При } x(k) = 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = 0$$

Условие  
устойчивости

- Слагаемые  $r_i(p_i)^k$  затухают при  $|p_i| < 1$

# Последовательность Фибоначчи как ИХ дискретного фильтра

- Определение последовательности Фибоначчи:
  - $F(0) = 0$
  - $F(1) = 1$
  - $F(k) = F(k - 1) + F(k - 2)$
- Записав функцию передачи фильтра, можно получить прямую (*нерекурсивную*) формулу для расчета





# Пространство состояний

---

$$\mathbf{s}(k + 1) = \mathbf{A} \mathbf{s}(k) + \mathbf{B} x(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C} \mathbf{s}(k) + D x(k)$$

- $\mathbf{s}$  — вектор состояния  
(содержимое элементов памяти)
- $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, D$  — параметры,  
описывающие систему
- Связь с функцией передачи:

Чему равны полюсы  
функции передачи?

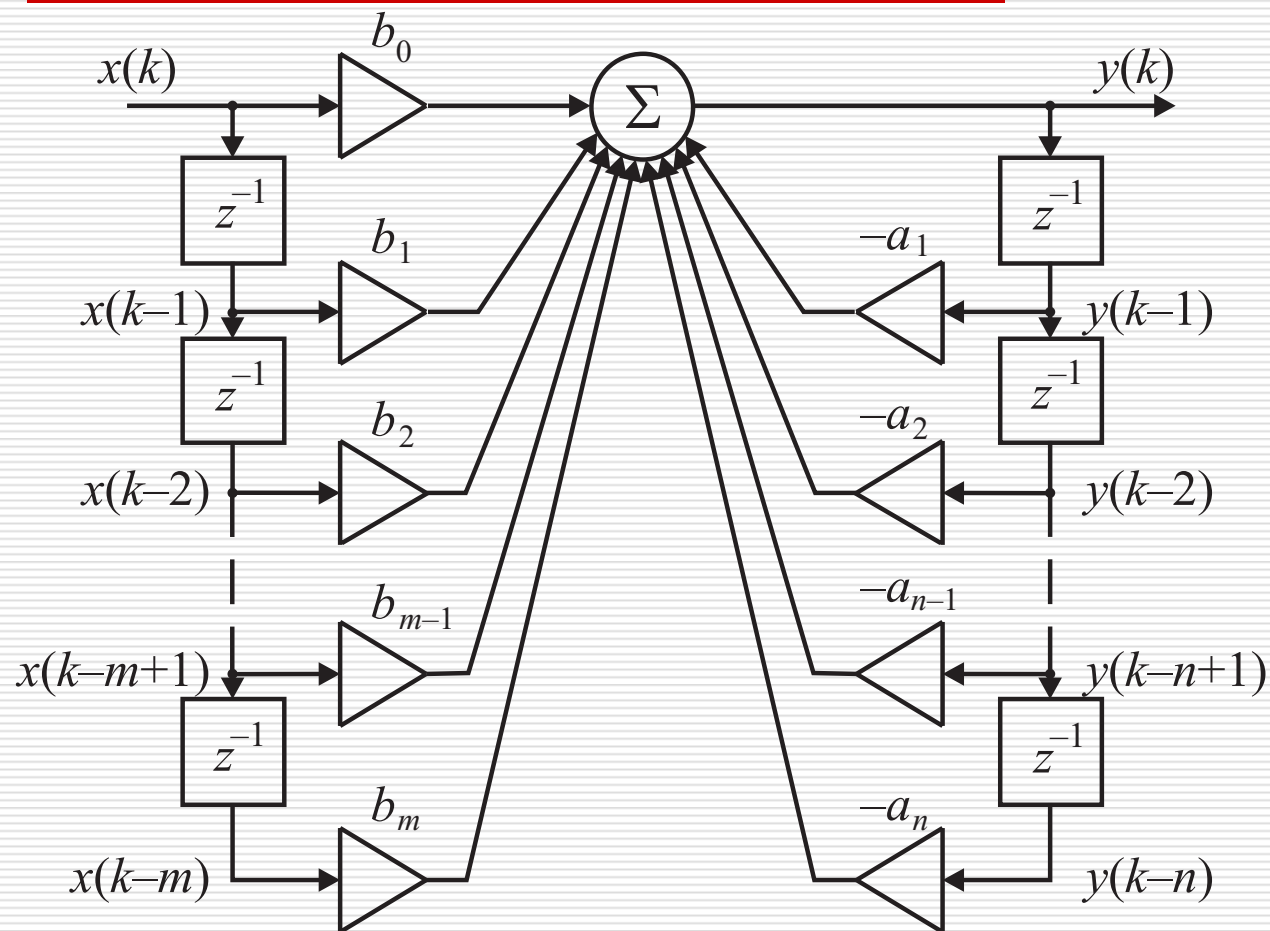
$$H(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + D$$

# Формы реализации дискретных систем

---

- Для реализации одной и той же функции передачи можно по-разному организовать вычисление выходного сигнала
- Различие в том, что именно является внутренним состоянием системы
- При абсолютно точных вычислениях все формы эквивалентны друг другу
- Рассматриваем следующие формы:
  - Прямая
  - Каноническая
  - Транспонированная

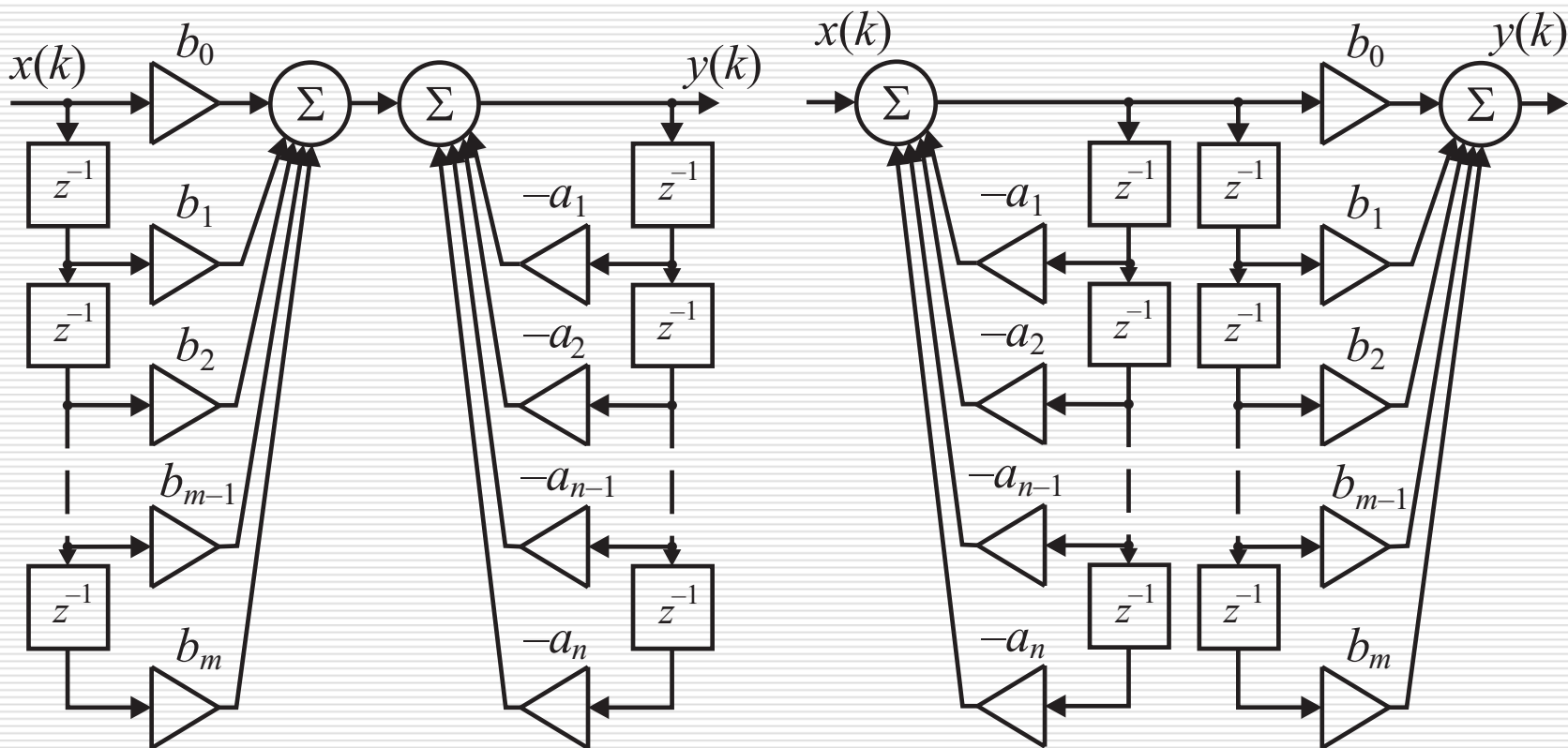
# Прямая форма



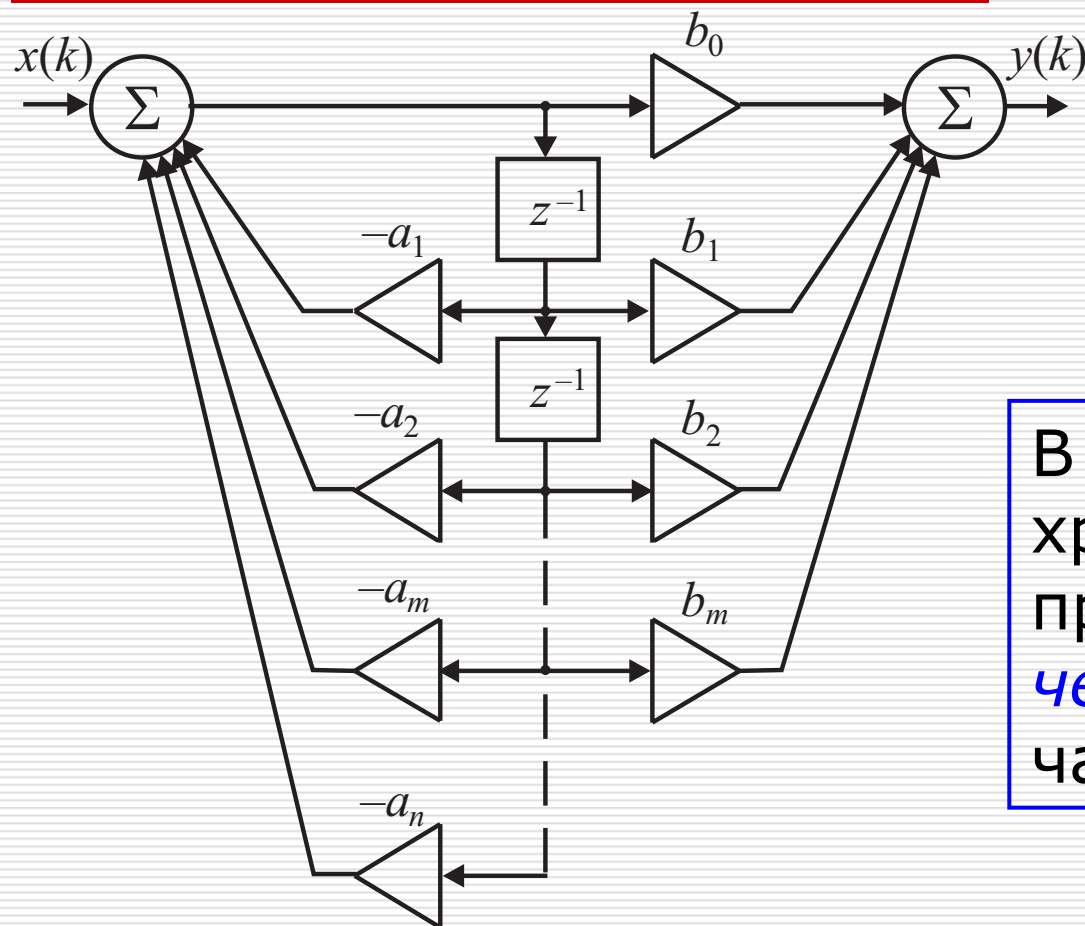
Вычисления  
реализо-  
ваны  
непосред-  
ственно  
по формуле  
алгоритма  
дискретной  
фильтрации

# Каноническая форма — идея получения

Меняем местами рекурсивную и нерекурсивную части фильтра

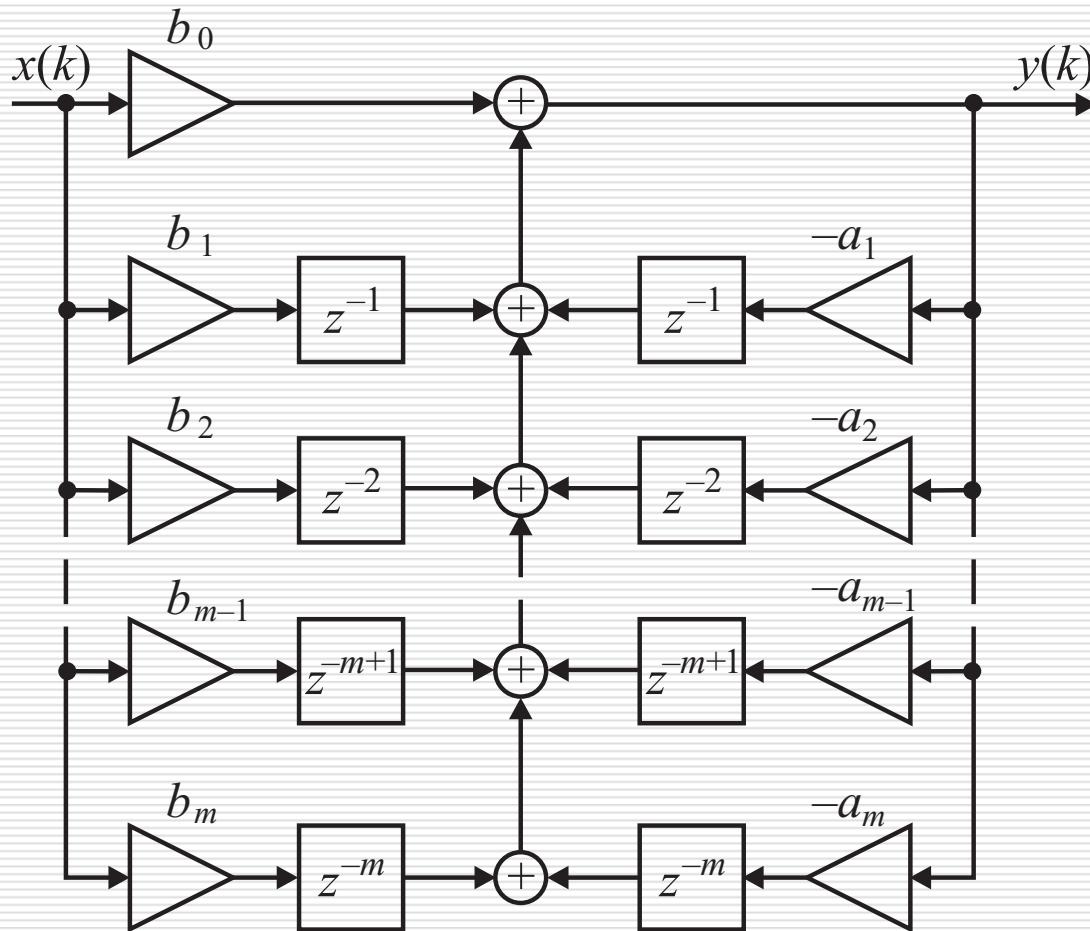


# Каноническая форма



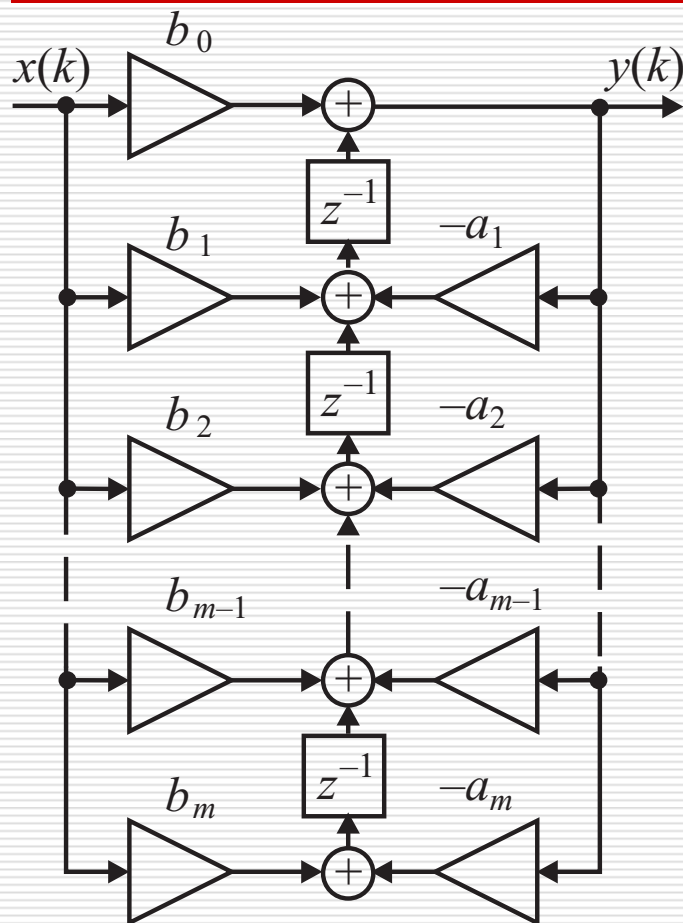
В линии задержки хранится сигнал, прошедший *только через рекурсивную* часть фильтра

# Транспонированная форма — идея получения



Меняем  
местами  
задержку  
и умножение

# Транспонированная форма



Элементы памяти  
*не образуют*  
линию задержки

Возможно  
*распараллеливание*  
операций сложения  
и умножения

# Последовательная (каскадная) форма

Идея — факторизация функции передачи:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)\dots$$

Используются секции *второго* порядка

