Цифровая обработка сигналов, весна 2016 г.

Домашнее задание № 1

Методика решения задач

Задача № 1

Условие: $X(z) = \dfrac{0.9 - 15.4z^{-1} - 7.7z^{-2}}{1 + 17.3z^{-1} + 100z^{-2}}$.

Выделение целой части: $X(z) = \dfrac{0.977 - 14.0679z^{-1}}{1 + 17.3z^{-1} + 100z^{-2}} - 0.077$.

Расчет полюсов: $1 + 17.3z^{-1} + 100z^{-2} = 0$, $\quad z^2 + 17.3z + 100 = 0$,

$$p_{1,2} = \frac{-17.3 \pm \sqrt{300 - 400}}{2} = \frac{-17.3 \pm j\sqrt{100}}{2} = -8.65 \pm j5 = 10\, e^{\pm j5\pi/6}.$$

Разложение на простые дроби:

$$X(z) = \frac{0.977 - 14.0679z^{-1}}{\left(1 - (-8.65 + j5)z^{-1}\right)\left(1 - (-8.65 - j5)z^{-1}\right)} - 0.077 =$$

$$= \frac{0.4885 + j2.2439}{1 - (-8.65 + j5)z^{-1}} + \frac{0.4885 - j2.2439}{1 - (-8.65 + j5)z^{-1}} - 0.077 = \frac{2.2965e^{j1.3564}}{1 - 10e^{j5\pi/6}z^{-1}} + \frac{2.2965e^{-j1.3564}}{1 - 10e^{-j5\pi/6}z^{-1}} - 0.077.$$

Модуль обоих полюсов равен 10, следовательно, возможны две области сходимости z-преобразования:

- $0 < |z| < 10$, последовательность $\{x(k)\}$ бесконечная *левосторонняя*. Данная область *содержит единичную окружность*, поэтому соответствующая последовательность $\{x(k)\}$ *имеет* Фурье-спектр.
- $10 < |z| < \infty$, последовательность $\{x(k)\}$ бесконечная правосторонняя. Данная область *не содержит* единичную окружность, поэтому соответствующая последовательность $\{x(k)\}$ *не имеет* Фурье-спектра.

В соответствии с условием задачи необходимо выбрать последовательность, имеющую Фурье-спектр, поэтому область сходимости z-преобразования представляет собой крут $0 < |z| < 10$, а искомая последовательность $\{x(k)\}$ является бесконечной *левосторонней*.

В реальных вариантах задач полюсы могут быть как вещественными, так и комплексными, а искомые последовательности могут быть и правосторонними, и левосторонними, и двусторонними.

Слагаемым вида $X(z) = 1/(1 - az^{-1})$ соответствуют левосторонние последовательности $x(k) = -a^k$, $\quad k < 0$, поэтому во временной области получаем следующее:

$$x(k) = \left(-2.2965e^{j1.3564}\left(10e^{j5\pi/6}\right)^k - 2.2965e^{-j1.3564}\left(10e^{-j5\pi/6}\right)^k\right)u(-k-1) - 0.077\delta(k) =$$

$$= \begin{cases} -2.2965e^{j1.3564}\left(10e^{j5\pi/6}\right)^k - 2.2965e^{-j1.3564}\left(10e^{-j5\pi/6}\right)^k, & k < 0, \\ -0.077, & k = 0, \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

Здесь $\delta(k)$ и $u(k)$ одиночный дискретный импульс и единичный дискретный скачок соответственно:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0, \end{cases} \qquad u(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$

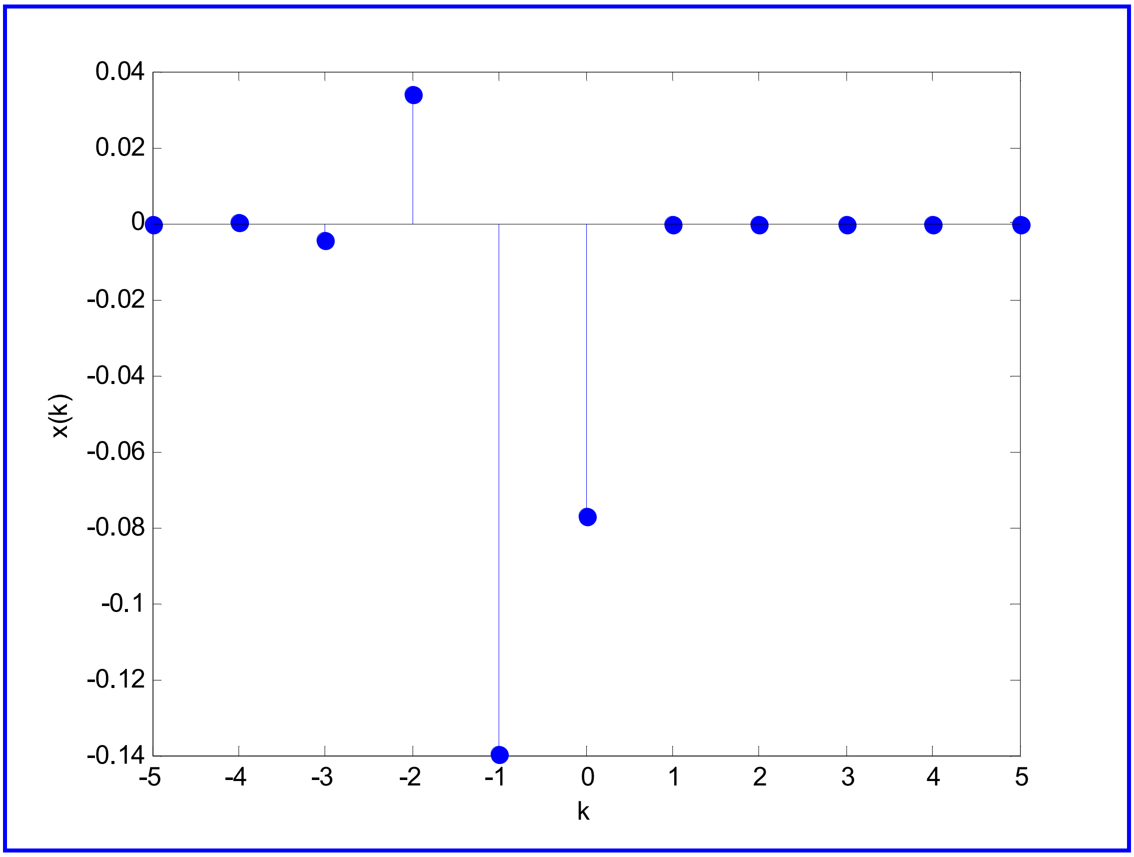
Наконец, суммируем комплексно-сопряженные слагаемые, чтобы получить вещественный результат:

$$x(k) = -4.593 \times 10^k \times \cos\left(\frac{5\pi}{6}k + 1.3564\right)u(-k-1) - 0.077\delta(k) =$$

$$= \begin{cases} -4.593 \times 10^k \times \cos\left(\frac{5\pi}{6}k + 1.3564\right), & k < 0, \\ -0.077, & k = 0, \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

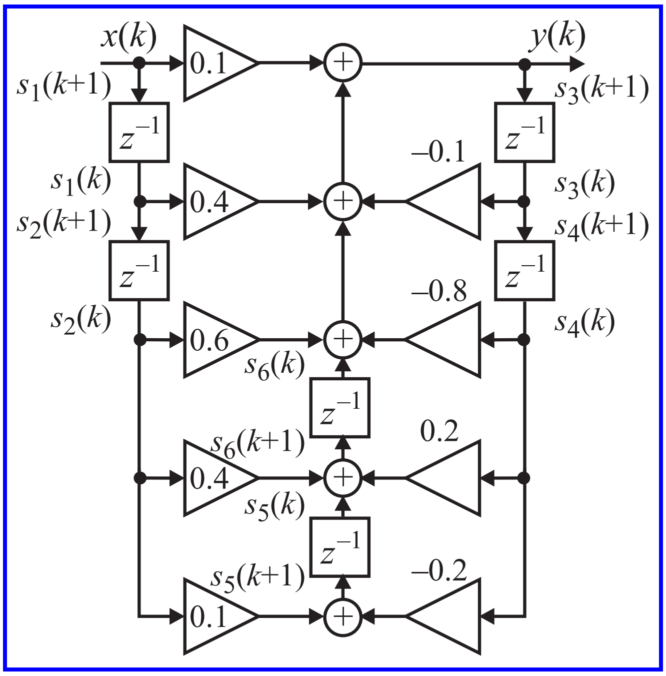
Таблица отсчетов для $k = -5 \ldots +5$ и график данного фрагмента последовательности:

$\boldsymbol{k}$	**–5**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**+1**	**+2**	**+3**	**+4**	**+5**
$\boldsymbol{x(k)}$	-3.1×10^{-5}	4.4×10^{-4}	–0.0045	0.034	–0.14	–0.077	0	0	0	0	0



Задача № 2

В качестве примера рассматривается схема фильтра, представляющего собой гибрид прямой и транспонированной форм реализации:



> В реальных вариантах задач структурную схему необходимо изобразить исходя из приведенной в условии задачи информации о форме реализации секций фильтра и способе их соединения.

Элементами вектора состояния являются сигналы, проходящие через элементы задержки. Выходные сигналы относятся к номеру отсчета *k*, входные — к номеру отсчета *k* + 1. Нумерация элементов вектора состояния произвольная, пример нумерации показан на рисунке.

> В реальных вариантах задач размер вектора состояния лежит в пределах от 4 до 8.

Далее необходимо выразить значения $s_i(k+1)$ и $y(k)$ через $s_i(k)$ и $x(k)$:

$$s_1(k+1) = x(k)$$
$$s_2(k+1) = s_1(k)$$
$$s_3(k+1) = 0.4s_1(k) + 0.6s_2(k) - 0.1s_3(k) - 0.8s_4(k) + s_6(k) + 0.1x(k)$$
$$s_4(k+1) = s_3(k)$$
$$s_5(k+1) = 0.1s_2(k) - 0.2s_4(k)$$
$$s_6(k+1) = 0.4s_2(k) + 0.2s_4(k) + s_5(k)$$
$$y(k) = 0.4s_1(k) + 0.6s_2(k) - 0.1s_3(k) - 0.8s_4(k) + s_6(k) + 0.1x(k)$$

Переходим к матричной форме записи:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} s_1(k+1) \\ s_2(k+1) \\ s_3(k+1) \\ s_4(k+1) \\ s_5(k+1) \\ s_6(k+1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & -0.1 & -0.8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \\ s_3(k) \\ s_4(k) \\ s_5(k) \\ s_6(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} x(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & -0.1 & -0.8 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \\ s_3(k) \\ s_4(k) \\ s_5(k) \\ s_6(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}(k)} + \underbrace{0.1}_{D} x(k)$$

Отсюда видно, что параметры пространства состояний равны:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0.4&0.6&-0.1&-0.8&0&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0.1&0&-0.2&0&0\\0&0.4&0&0.2&1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\0\\0.1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0.4&0.6&-0.1&-0.8&0&1\end{bmatrix},\quad D=0.1$$

Задача № 3

Условие:

$\tilde{\omega}$	$\dot{K}(\tilde{\omega})$
0	1
$\pi/2$	$-2j$
2.5	0
π	0

Нулевые значения коэффициента передачи дают положение трех нулей функции передачи на z-плоскости: $z=e^{\pm j2.5}=-0.8\pm j0.6$ и $z=e^{j\pi}=-1$. Это позволяет получить числитель функции передачи с точностью до постоянного множителя:

$$b_0\left(1-(-0.8+j0.6)z^{-1}\right)\left(1-(-0.8-j0.6)z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)=b_0\left(1+2.6z^{-1}+2.6z^{-2}+z^{-3}\right)$$

Условие $K(0)=1$ означает $H(1)=1$, то есть

$H(1)=\dfrac{b_0(1+2.6+2.6+1)}{1+a_1+a_2+a_3}=1$, отсюда $7.2b_0=1+a_1+a_2+a_3$. (1)

Условие $K(\pi/2)=-2j$ означает $H(\exp(j\pi/2))=H(j)=-2j$, то есть

$H(j)=\dfrac{b_0(1-j2.6-2.6+j)}{1-ja_1-a_2+ja_3}=-j2$, отсюда

$b_0(-1.6-j1.6)=-j2(1-ja_1-a_2+ja_3)=-j2-2a_1+j2a_2+2a_3$.

Поскольку коэффициенты фильтра должны быть вещественными, это уравнение превращается в два — отдельно для вещественной и мнимой частей (это то же самое, что добавить еще одно условие для симметричной отрицательной частоты: $K(-\pi/2)=+2j$):

- Вещественная часть: $-1.6\,b_0=-2a_1+2a_3$. (2)
- Мнимая часть: $-1.6b_0=-2+2a_2$. (3)

Объединяя условия (1), (2) и (3), получаем систему линейных уравнений, которую необходимо решить относительно b_0, a_1 и a_2, выразив их через остающийся в качестве параметра коэффициент a_3:

$$\begin{aligned}7.2\,b_0-a_1-a_2&=1+a_3\\-1.6\,b_0+2a_1&=2a_3\\-1.6\,b_0-2a_2&=-2\end{aligned}$$

Решение системы дает $b_0=\dfrac{5+5a_3}{18}$, $a_1=\dfrac{2+11a_3}{9}$, $a_2=\dfrac{7-2a_3}{9}$.

Окончательный вид искомой функции передачи:

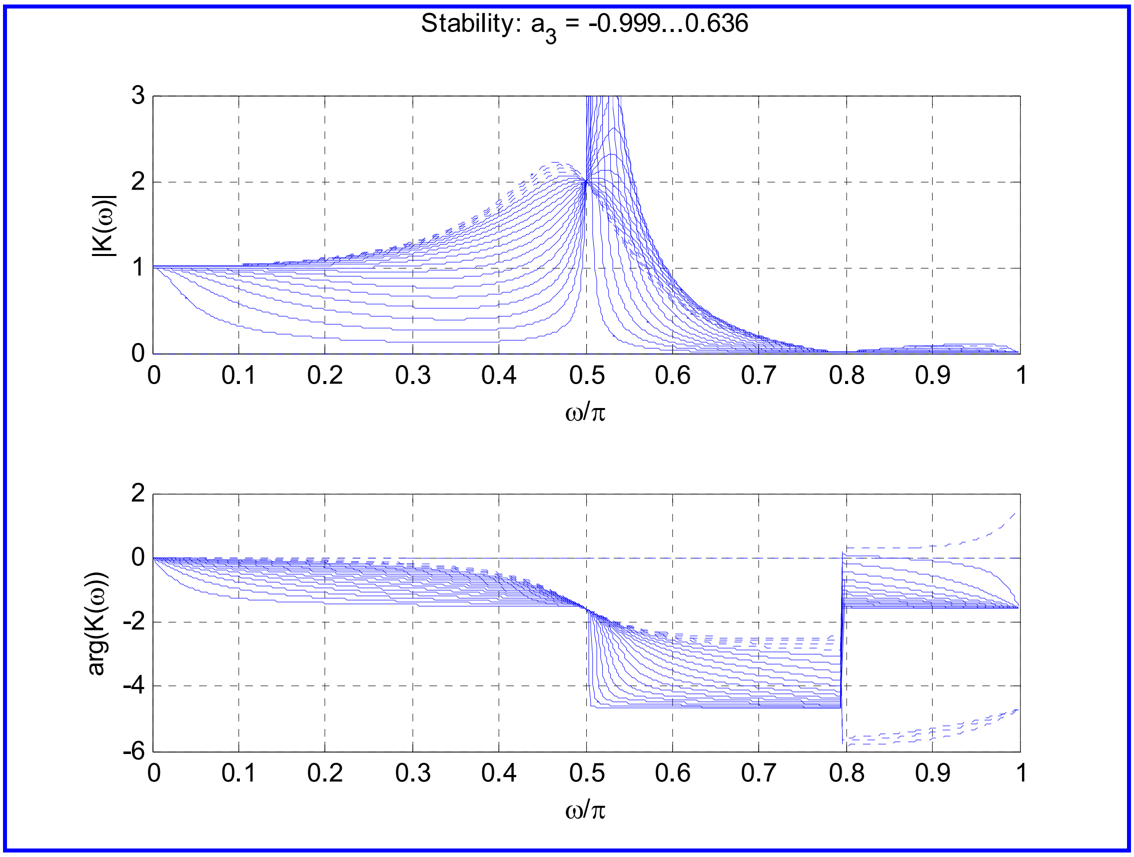
$$H(z)=\frac{5+5a_3}{18}\times\frac{1+2.6z^{-1}+2.6z^{-2}+z^{-3}}{1+\dfrac{2+11a_3}{9}z^{-1}+\dfrac{7-2a_3}{9}z^{-2}+a_3z^{-3}}$$

Для проверки вводим полученные формулы для коэффициентов фильтра в проверочную MATLAB-программу **`dz1_prob3_check.m`**:

```
% введите здесь формулы для коэффициентов фильтра
b0 = (5+5*a3)/18;
b1 = 2.6*b0;
b2 = 2.6*b0;
b3 = b0;
a1 = (2+11*a3)/9;
a2 = (7-2*a3)/9;
% конец формул для коэффициентов фильтра
```

Проверочная программа может использоваться в MATLAB или в его бесплатном аналоге Octave (**`https://www.gnu.org/software/octave/`**).

Сгенерированный программой график имеет следующий вид.



На графиках показаны АЧХ и ФЧХ фильтра, получающиеся при 21 значении коэффициента a_3: от -1 до $+1$ с шагом 0.1. Если при соответствующем значении a_3 фильтр является устойчивым, графики АЧХ и ФЧХ выводятся сплошными линиями, в противном случае — пунктирными.

Горизонтальная ось оцифрована значениями частоты, нормированными к частоте Найквиста, то есть значениями $\tilde{\omega}/\pi$.

Над верхним графиком указан диапазон значений a_3, при котором фильтр оказывается устойчивым. Диапазон определяется численно, путем перебора значений a_3 с шагом 0.001, нахождения модулей полюсов функции передачи и сравнения максимального из них с единицей. При сравнении используется строгое неравенство, поэтому реальные границы интервала не будут включены в указанный диапазон.

Полученные графики показывают, что фильтр рассчитан правильно, так как при всех значениях a_3 частотная характеристика проходит через заданные точки:

- На нулевой частоте АЧХ = 1, ФЧХ = 0.
- На частоте 0.5 ($\pi/2$ рад/отсчет) АЧХ = 2, ФЧХ = $-\pi$.
- На частоте ≈0.8 (2.5 рад/отсчет) АЧХ = 0.
- На частоте 1 (π рад/отсчет) АЧХ = 0.

Фильтр оказался устойчивым при $-0.999 \le a_3 \le 0.636$.

Выбираем для построения графиков АЧХ и ФЧХ 5 значений a_3 из диапазона устойчивости: –0.9, –0.5, 0, 0.3, 0.6. Комплексная частотная характеристика рассчитывается как $\dot{K}(\omega) = H(e^{j\omega})$.

Для получения графиков можно использовать ту же MATLAB-программу **dz1_prob3_check.m**, заменив в ней набор частот, используемых для построения графиков. Для этого необходимо отредактировать строку, которая исходно имеет следующий вид:

```
a3_plots = -1:0.1:1; % набор значений a3 для построения графиков ЧХ
```

Чтобы получить набор графиков для указанных выше значений a_3, данная строка должна иметь следующий вид:

```
a3_plots = [-0.9 -0.5 0 0.3 0.6]; % набор значений a3 для построения графиков ЧХ
```

Полученные графики показаны ниже (диапазон значений вертикальной оси, цвета кривых и толщина линий настроены вручную).