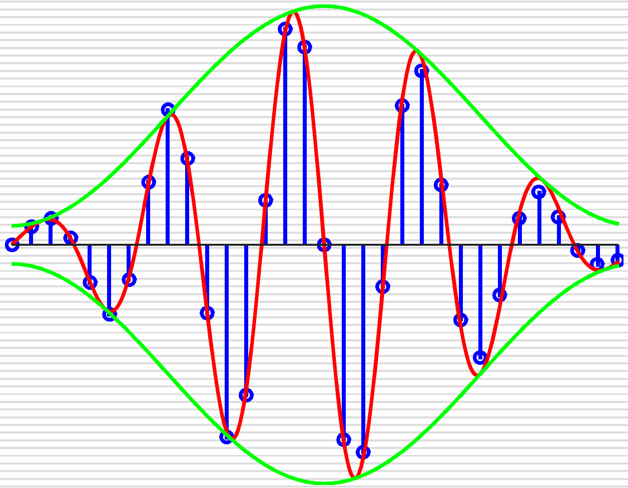
Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет «ЛЭТИ»
Кафедра теоретических основ
радиотехники

# ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

## Тема 3

## Дискретное преобразование Фурье

## (Лекция 1)





9 неделя семестра

# Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

- Применяется к сигналам *конечной* длительности ($k = 0, 1, \ldots, N-1$)
- Прямое: $$\dot{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$
- Обратное: $$x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \dot{X}(n)\exp\left(j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

# ДПФ и спектральные представления бесконечных сигналов

- При дополнении нулями:

$$\dot{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi n}{N}k}$$

$$\dot{X}(\tilde{\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\tilde{\omega}k}$$

$$\boxed{\dot{X}(n) = \dot{X}(\tilde{\omega})\Big|_{\tilde{\omega}=\frac{2\pi n}{N}}}$$

- ДПФ представляет собой *отсчеты спектра* бесконечного сигнала, *дополненного нулями*

# ДПФ и спектральные представления бесконечных сигналов

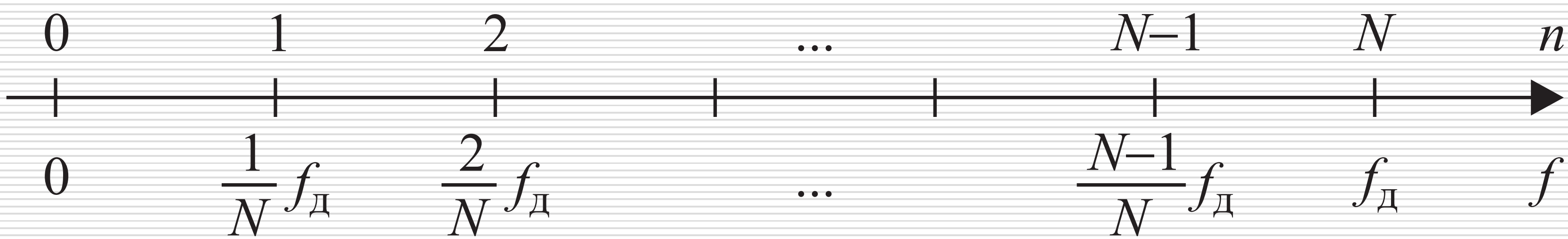
- При периодическом продолжении:

$$x(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\dot{X}(n)}{N}\exp\left(j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

- $\dot{X}(n)/N$ — коэффициенты *комплексного ряда Фурье* для *периодически продолженного* сигнала

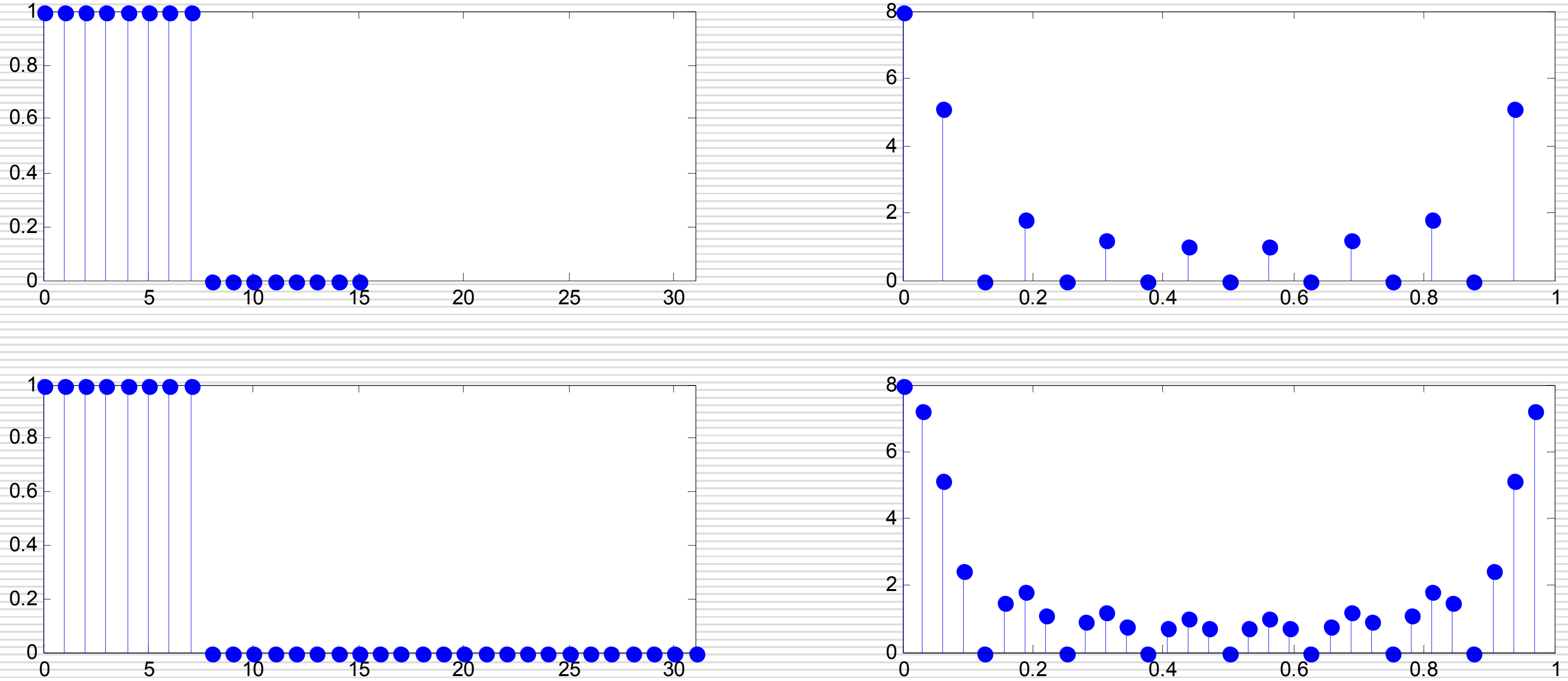
# Частотная шкала ДПФ

- Первый элемент ($X(0)$) соответствует нулевой частоте
- Последний элемент ($X(N-1)$) соответствует *почти* частоте дискретизации
- Шаг частотной сетки равен $f_д/N$



# Дополнение сигнала нулями

- Получим отсчеты спектра бесконечного сигнала на *более частой* сетке частот



# Свойства ДПФ

- Линейность
- Задержка (циклический сдвиг на $\Delta k$)
  - ДПФ умножается на $\exp(-j\,2\pi\,\Delta k\,n/N)$
- ДПФ произведения сигналов
  - *Круговая* свертка их ДПФ
- ДПФ *круговой* свертки сигналов
  - Произведение их ДПФ

$$y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2\big((k-m)\,\mathrm{mod}\,N\big) \qquad \dot{Y}(n) = \dot{X}_1(n)\dot{X}_2(n)$$

# Матрица ДПФ

- Линейное преобразование: $\mathbf{X} = \mathbf{D}\,\mathbf{x}$
- $\mathbf{D}$ — матрица ДПФ:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{4\pi}{N}} & \ldots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{-j\frac{4\pi}{N}} & e^{-j\frac{8\pi}{N}} & \ldots & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & \ldots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

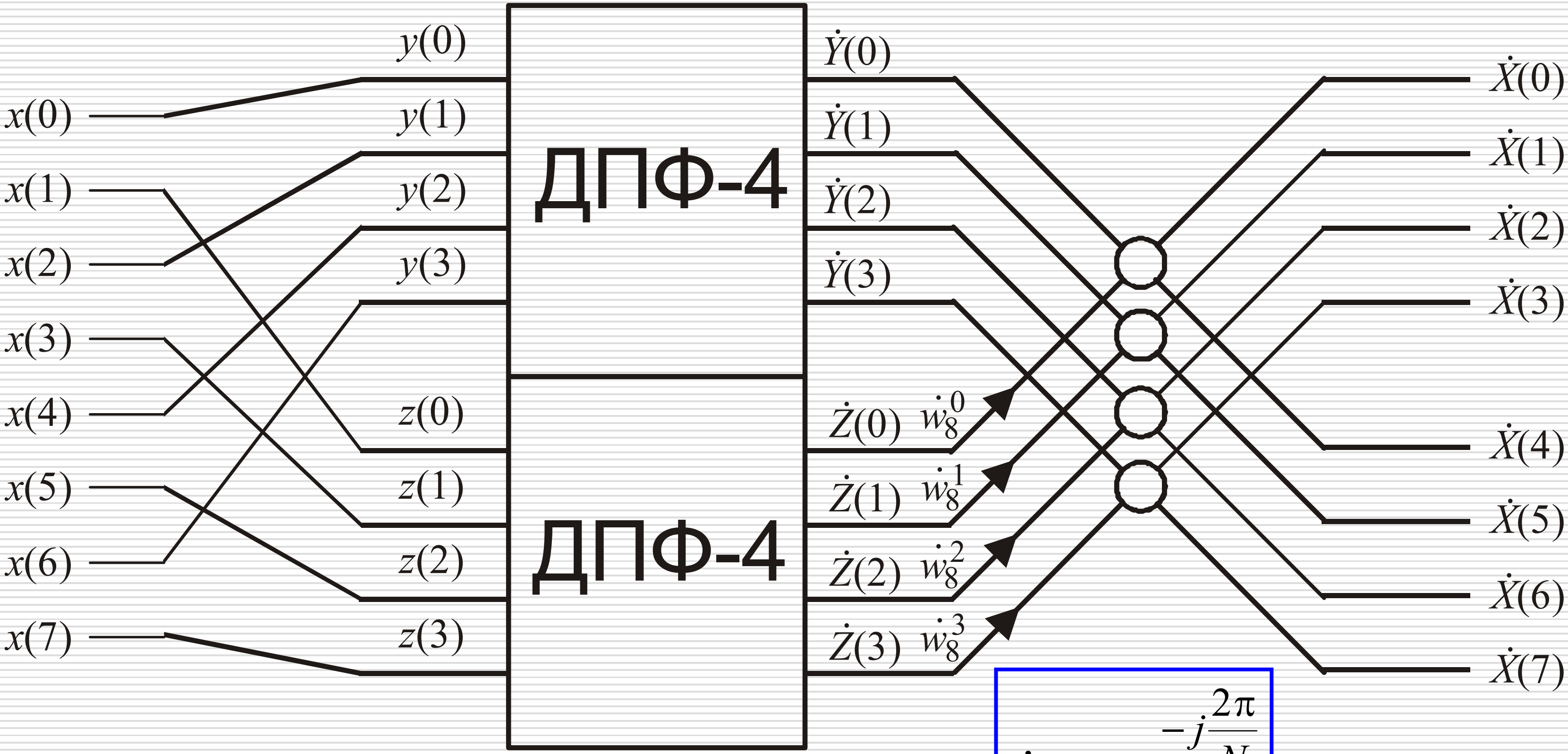
# Алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ)

- Расчет ДПФ по прямой формуле требует $\sim N^2$ комплексных умножений и сложений (*квадратичная* зависимость)
- Можно уменьшить число операций, оптимально организовав вычисления
- Такие алгоритмы получили название *быстрого преобразования Фурье* (*БПФ*; *Fast Fourier Transform*, *FFT*)

# БПФ: алгоритм Кули–Тьюки (Cooley–Tukey)

- Идея: если $N$ можно *разложить на множители*, вычисляем несколько ДПФ меньшего размера и объединяем результаты
- Последовательности меньшей длины получаются путем *прореживания во времени* (Decimation In Time, DIT)

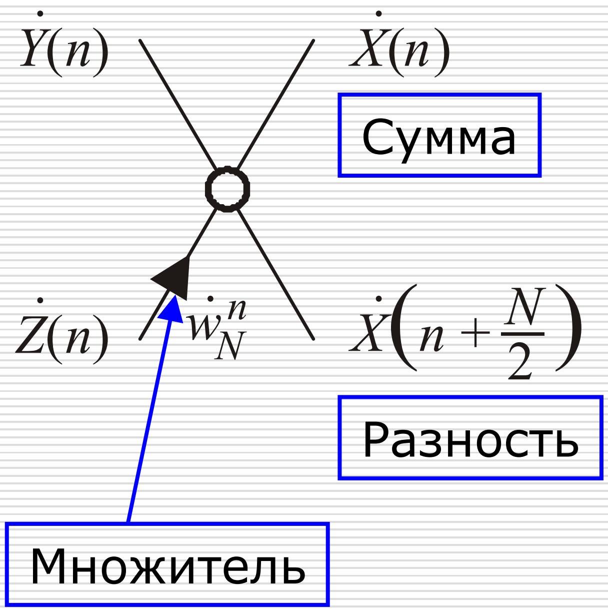
# БПФ: алгоритм Кули–Тьюки, прореживание по времени



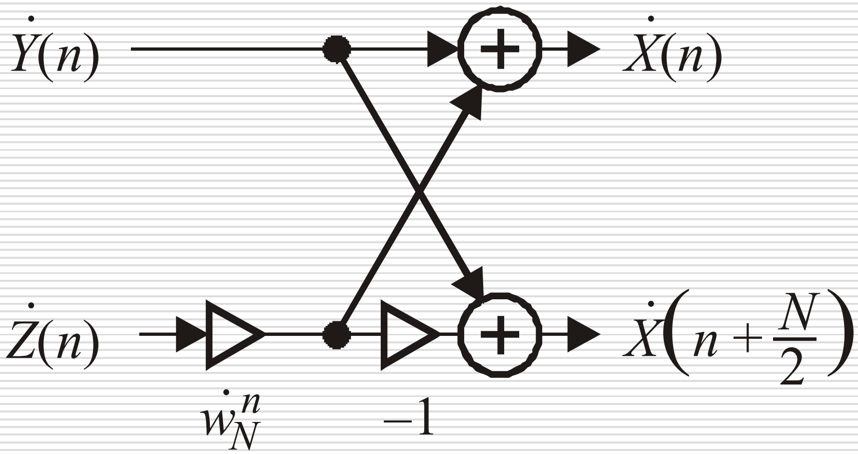

$$\dot{w}_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

# Основной структурный блок БПФ: «Бабочка» (Butterfly)

- Обозначение



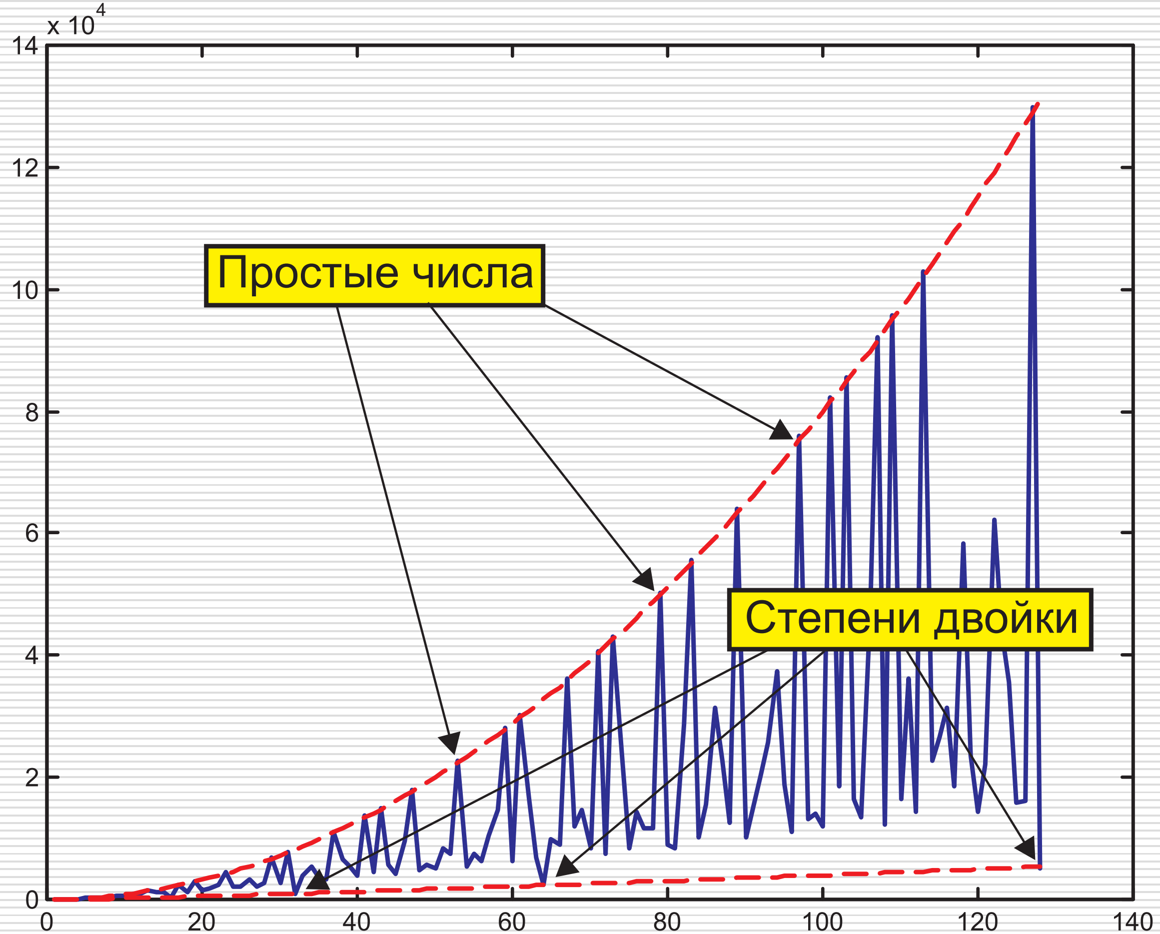

- Структурная схема



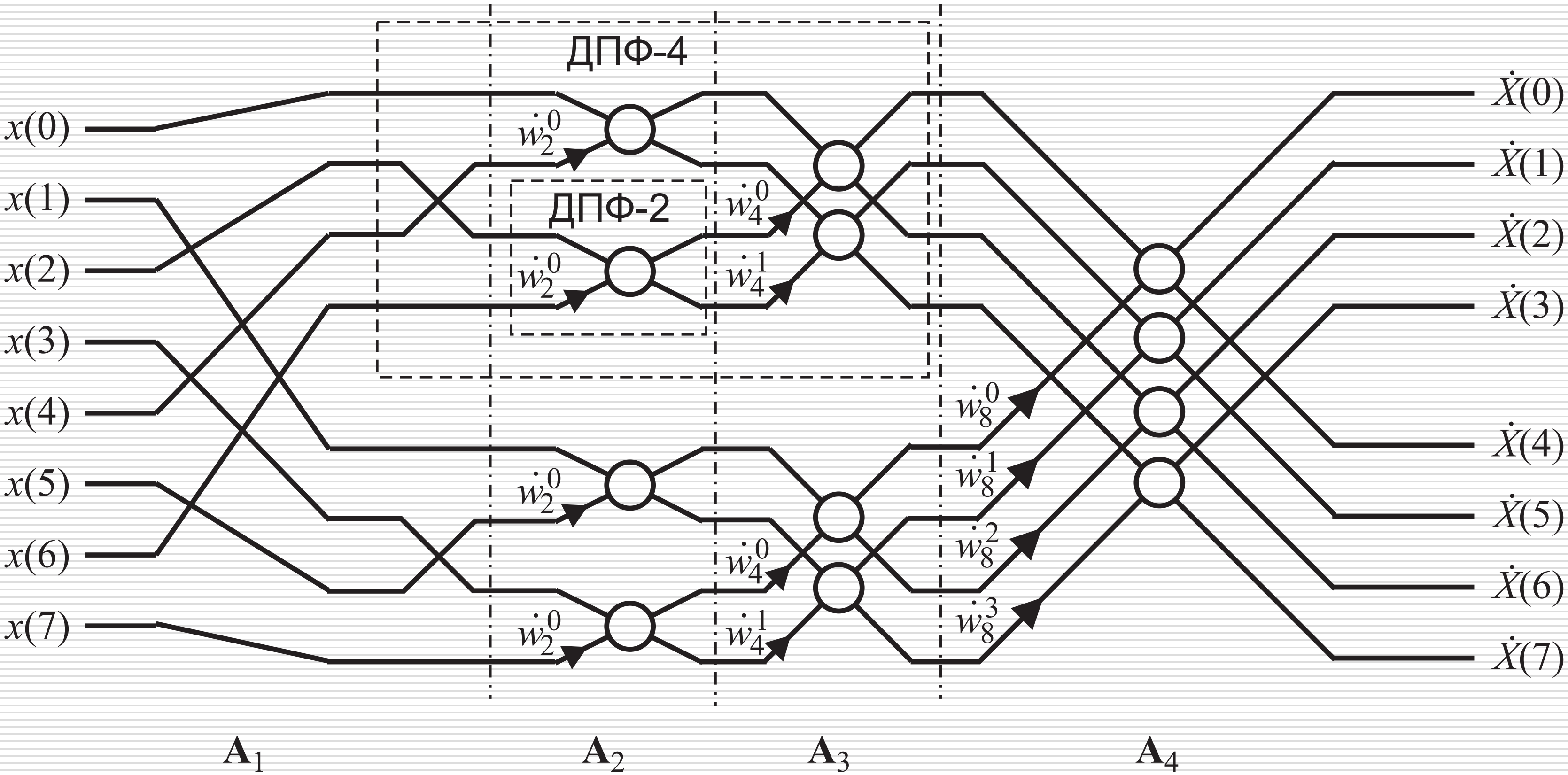
# БПФ: алгоритм Кули–Тьюки, число операций

- По прямой формуле: $N^2$ операций
- По быстрому алгоритму:
  - Два меньших ДПФ: $2(N/2)^2 = N^2/2$ операций
  - Объединение результатов: $N/2$ операций
  - Итого: $N^2/2 + N/2 = N(N+1)/2$ операций (почти *двукратный* выигрыш)
- Если $N/2$ тоже четно, можно продолжить прореживание
- Максимальный выигрыш при $N = 2^n$
  - Число операций $\sim \mathbf{N \log_2 N}$

# БПФ: алгоритм Кули–Тьюки, зависимость числа операций от $N$



# БПФ, алгоритм Кули–Тьюки, полная структура для $N = 8$



# БПФ, алгоритм Кули–Тьюки, математическая основа

Матрица ДПФ представляется в виде произведения *разреженных* матриц

$$\mathbf{A}_{\mathrm{DFT}} = \mathbf{A}_4\mathbf{A}_3\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & \\ & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & & 1 & & & & & \\ & 1 & & \dot{w}_4^1 & & & & \\ 1 & & -1 & & & & & \\ & 1 & & -\dot{w}_4^1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & \\ & & & & & 1 & & \dot{w}_4^1 \\ & & & & 1 & & -1 & \\ & & & & & 1 & & -\dot{w}_4^1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & \dot{w}_8^1 & & \\ & & 1 & & & & \dot{w}_8^2 & \\ & & & 1 & & & & \dot{w}_8^3 \\ 1 & & & & -1 & & & \\ & 1 & & & & -\dot{w}_8^1 & & \\ & & 1 & & & & -\dot{w}_8^2 & \\ & & & 1 & & & & -\dot{w}_8^3 \end{bmatrix}$$

# Бит-реверсная адресация

- Матрица $\mathbf{A}_1$ отвечает за перестановку отсчетов сигнала по следующему закону:
- Этот закон называется *бит-реверсной адресацией*
- Такая адресация *аппаратно* реализована в специальных микропроцессорах для обработки сигналов

- $0 \leftrightarrow 0$
- $1 \leftrightarrow 4$
- $2 \leftrightarrow 2$
- $3 \leftrightarrow 6$
- $4 \leftrightarrow 1$
- $5 \leftrightarrow 5$
- $6 \leftrightarrow 3$
- $7 \leftrightarrow 7$

Объяснение закона перестановки будет приведено на лекции

# Быстрое преобразование Фурье: выводы

- БПФ не является приближенным алгоритмом, ускорение достигается за счет *оптимальной организации вычислений*
- Наибольшее ускорение возможно, если $N$ — *степень двойки*
- Алгоритм БПФ рассчитывает *все* спектральные отсчеты одновременно. Если необходимо получить лишь *некоторые* из них, другие методы могут оказаться экономнее