



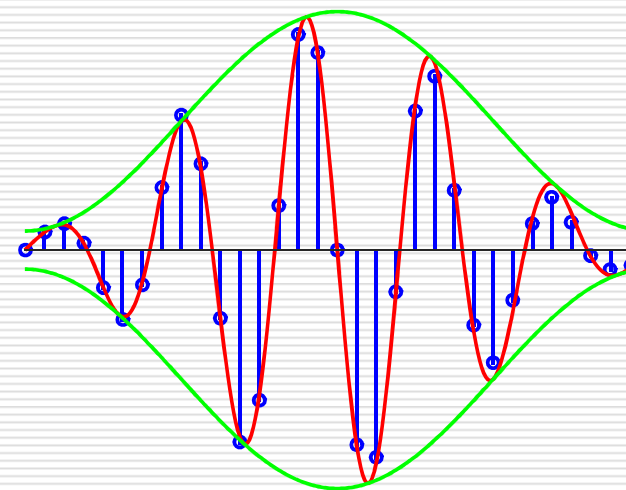
*Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет «ЛЭТИ»  
Кафедра теоретических основ  
радиотехники*



# ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

## Тема 4

### Методы синтеза дискретных фильтров (Лекция 2)



# Прямые методы синтеза дискретных фильтров

---

- Субоптимальные
  - Оконный метод
- Оптимальные
  - Минимизация квадратической ошибки
  - Минимаксный метод

# Оконный метод — идея

---

- ❑ Не является оптимальным
- ❑ Дает простую процедуру, пригодную для синтеза любых *нерекурсивных* фильтров
- ❑ Идея: бесконечная импульсная характеристика *идеального* фильтра с помощью *окна* превращается в конечную импульсную характеристику *реализуемого* фильтра

# Оконный метод — процедура синтеза

---

1. Выбирается *идеальная* частотная характеристика (периодическая)  $K_{\text{и}}(\tilde{\omega})$
2. Обратное преобразование Фурье дает *бесконечную* импульсную характеристику идеального фильтра  $h_{\text{и}}(k)$
3. Импульсная характеристика преобразуется в *конечную* умножением на спадающее к краям *окно*:  $h_{\text{в}}(k) = h_{\text{и}}(k) w(k), \quad k = k_0 \dots k_0 + N$
4. Сдвигом получаем *причинную* систему ( $N$  — порядок фильтра):

$$h(k) = h_{\text{в}}(k + k_0), \quad k = 0 \dots N$$

# Оконный метод — свойства Ч.Х.

---

- Частотная характеристика — свертка идеальной Ч.Х. и спектра окна

$$\dot{K}(\tilde{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dot{K}_{\text{и}}(\omega') \dot{W}(\tilde{\omega} - \omega') d\omega'$$

- Искажения идеальной Ч.Х.:
  - Появляются *переходные зоны* между полосами пропускания и задерживания
  - Появляются *пульсации* в полосах пропускания
  - Появляются *боковые лепестки* в полосах задерживания

# Оконный метод — окна

---

- Наиболее распространено окно *Кайзера*
  - Оптимальный компромисс между *шириной переходной зоны* и *уровнем боковых лепестков*

$$w(k) = \frac{\left| I_0 \left( \beta \sqrt{1 - \left( \frac{2k - N}{N} \right)^2} \right) \right|}{|I_0(\beta)|}, \quad 0 \leq k \leq N$$

# Оконный метод — окно Кайзера

---

## □ Оценка параметра $\beta$

$$\beta = \begin{cases} 0, & \alpha < 21, \\ 0,5842(\alpha - 21)^{0,4} + 0,07886(\alpha - 21), & 21 \leq \alpha \leq 50, \\ 0,1102(\alpha - 8,7), & \alpha > 50. \end{cases}$$

## □ Оценка порядка фильтра

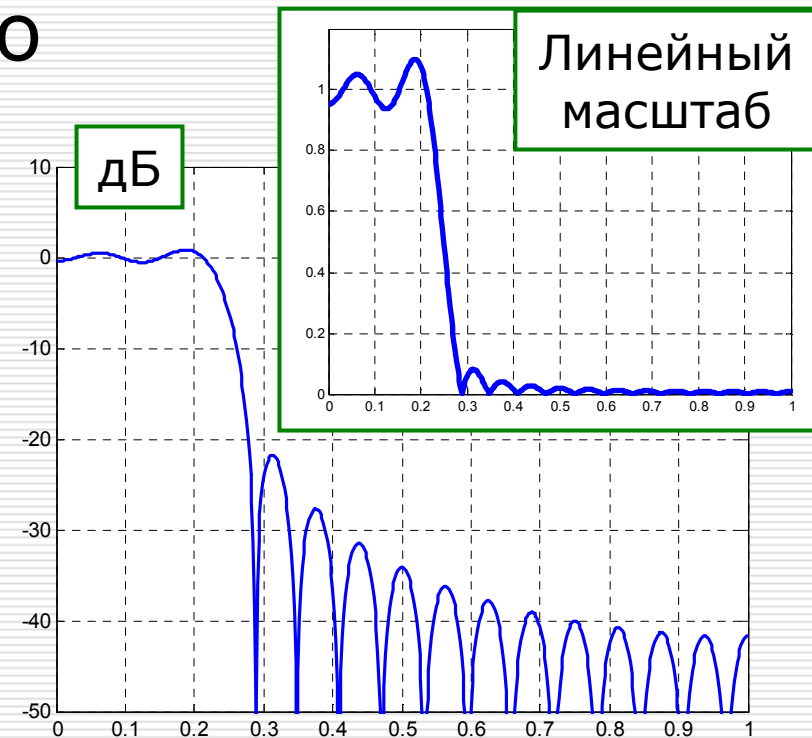
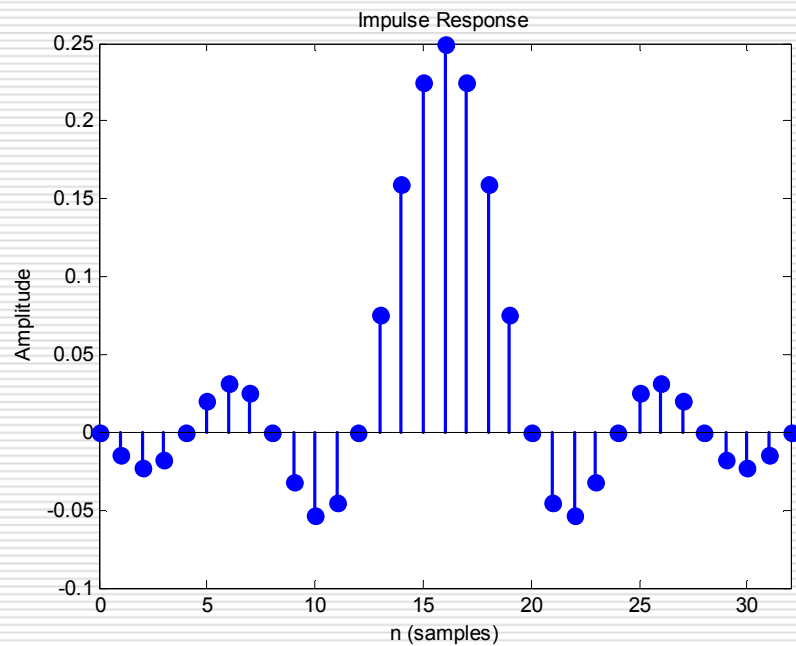
$$n = \frac{\alpha - 7,95}{2,285 \Delta\tilde{\omega}}$$

$\alpha$  — подавление боковых лепестков (дБ)

$\Delta\tilde{\omega}$  — ширина самой узкой переходной зоны (рад/отсчет)

# Оконный метод — пример

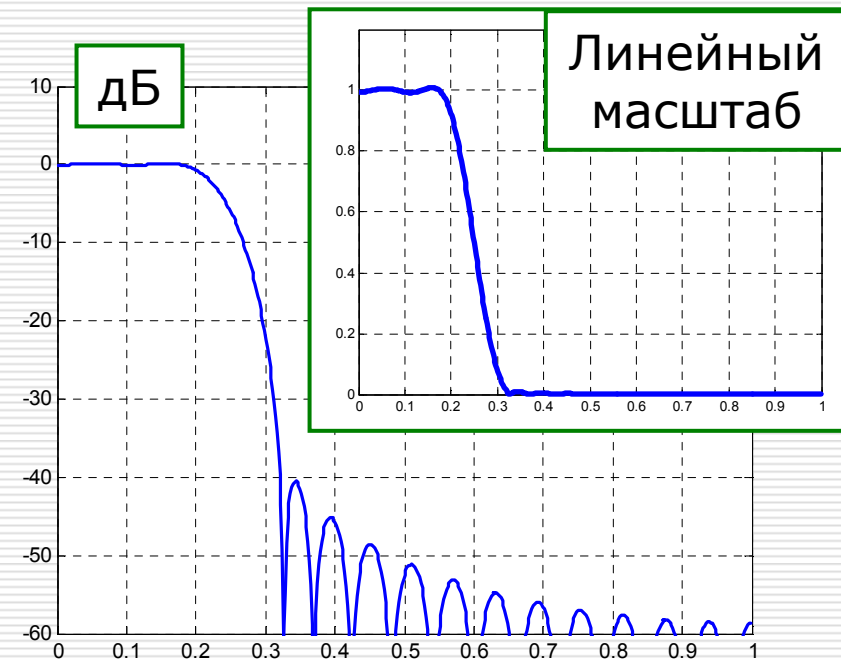
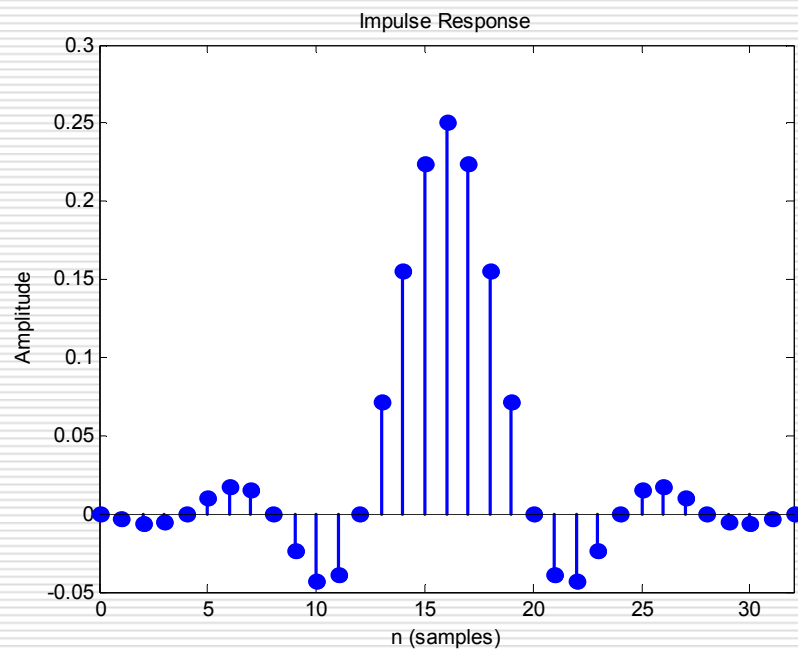
- ❑ ФНЧ, частота среза  $\pi/4$  рад/отсчет,  $N = 32$
- ❑ Прямоугольное окно



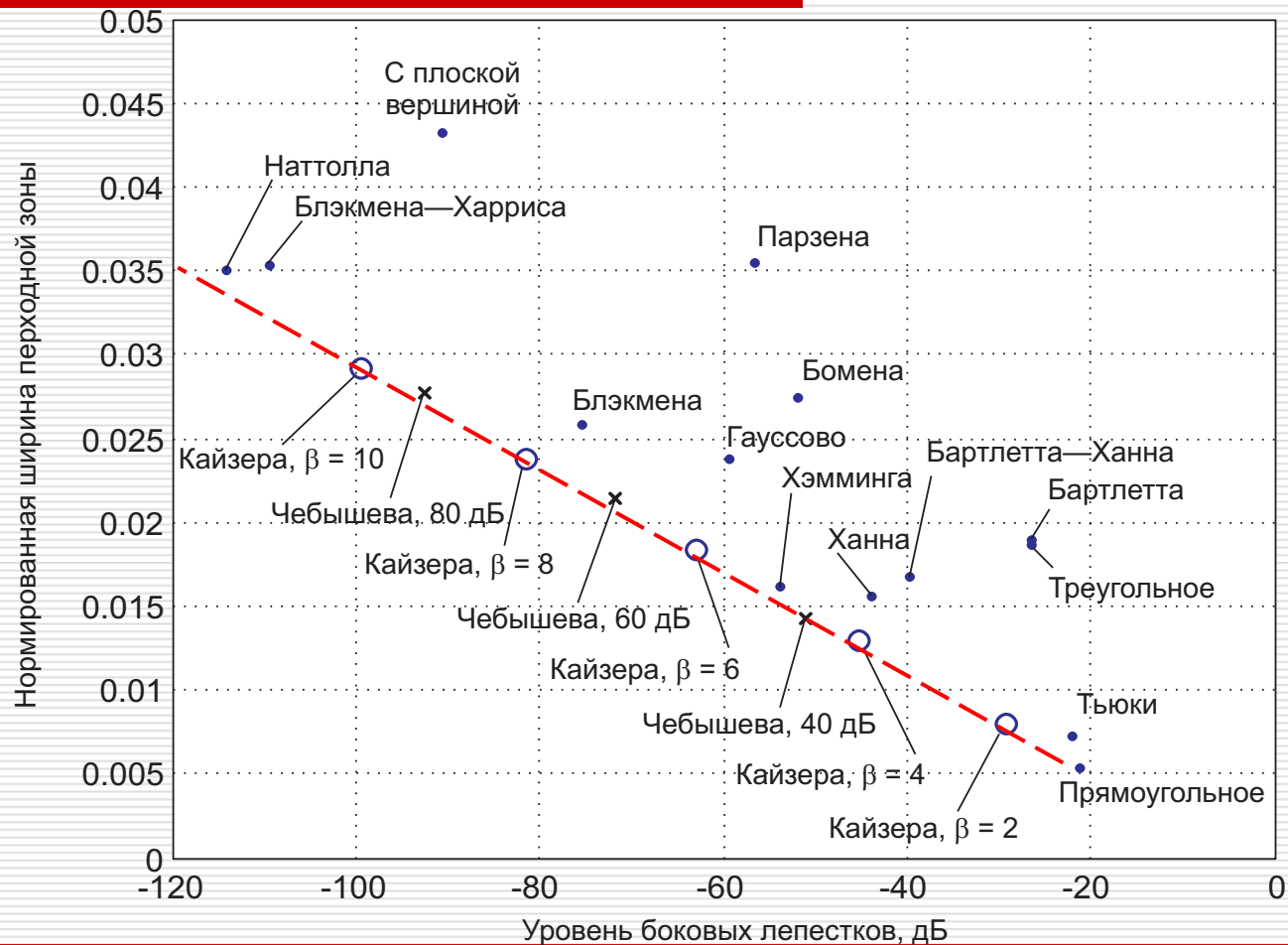


# Оконный метод — пример

- ❑ ФНЧ, частота среза  $\pi/4$  рад/отсчет,  $N = 32$
- ❑ Окно Кайзера,  $\beta = 3,4$  ( $\alpha = 40$  дБ)



# Оконный метод — свойства различных окон



# Оптимальные методы

---

- Решается математическая оптимизационная задача
- Переменные — коэффициенты  $\{b_i\}$  и  $\{a_i\}$
- Критерий качества — отклонение какой-либо характеристики реального фильтра от заданной
  - Чаще всего реализуется заданная *частотная* характеристика

# Оптимальные методы

---

- Мера расхождения характеристик —  $p$ -норма ошибки (корень  $p$ -й степени можно не извлекать)

$$\int_{-\pi}^{\pi} w(\tilde{\omega}) \left| \dot{D}(\tilde{\omega}) - \dot{K}(\tilde{\omega}) \right|^p d\tilde{\omega} \rightarrow \min_{\{b_i\}, \{a_i\}}$$

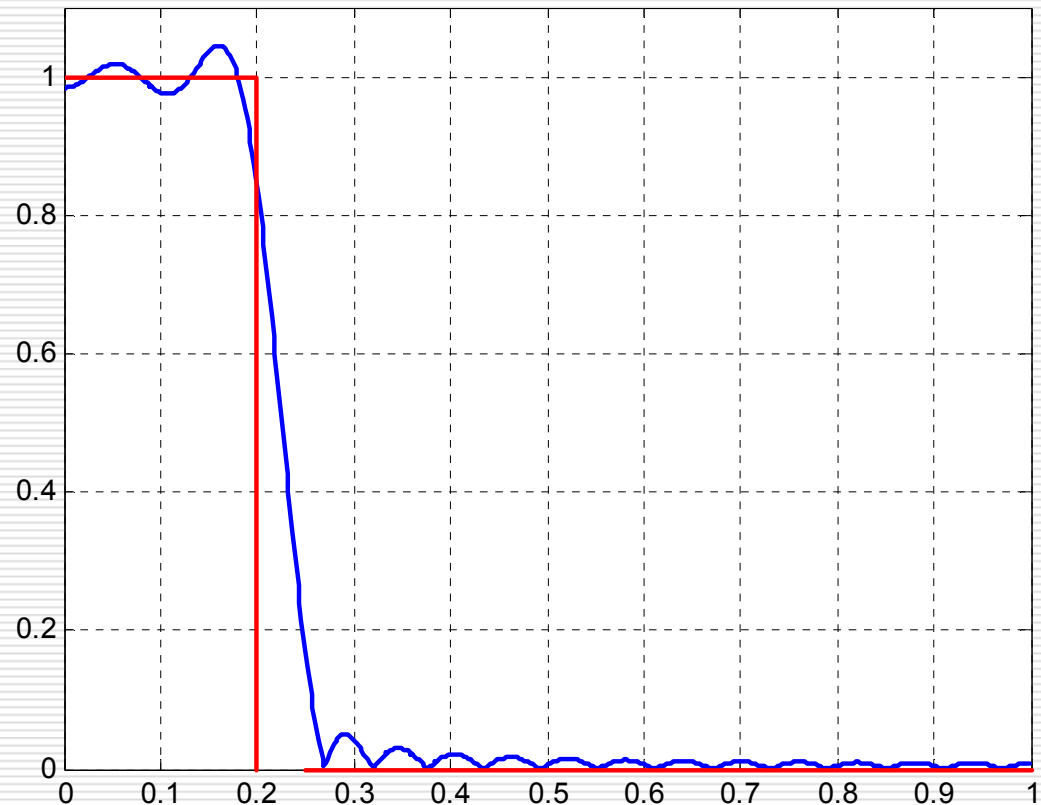
Чаще всего:

- $p = 2$
- $p = \infty$

- $D(\tilde{\omega})$  — желаемая характеристика
- $w(\tilde{\omega})$  — весовая функция. Ее роль:
  - Формирование переходных зон
  - Перераспределение ошибки между полосами

# Минимизация квадратической ошибки ( $p = 2$ ), нерекурсивные фильтры

- ❑ Расчет сводится к решению системы линейных уравнений
- ❑ Пульсации АЧХ неравномерны, их амплитуда увеличивается вблизи переходных зон



# Минимаксный метод ( $p = \infty$ )

---

- Математическая формулировка:

$$\max_{\tilde{\omega}} \left( w(\tilde{\omega}) \left| \dot{D}(\tilde{\omega}) - \dot{K}(\tilde{\omega}) \right| \right) \rightarrow \min_{\{b_i\}, \{a_i\}}$$

- Приводит к  
*равномерным пульсациям* АЧХ
- Для нерекурсивных фильтров  
есть элегантное итерационное решение
  - Алгоритм Паркса—Макклеллана,  
основанный на методе Ремеза

# Минимаксный метод ( $p = \infty$ ) — алгоритм Паркса—Макклеллана

---

- Максимальное отклонение Ч.Х. от заданной наблюдается *в экстремумах* АЧХ, а также *на границах* переходных зон, а знаки отклонения *чередуются*
- Число точек с максимальным отклонением определяется *порядком* фильтра
- Значение Ч.Х. на фиксированной частоте *линейно* зависит от коэффициентов фильтра  $\{b_i\}$

# Минимаксный метод ( $p = \infty$ ) — алгоритм Паркса—Макклеллана

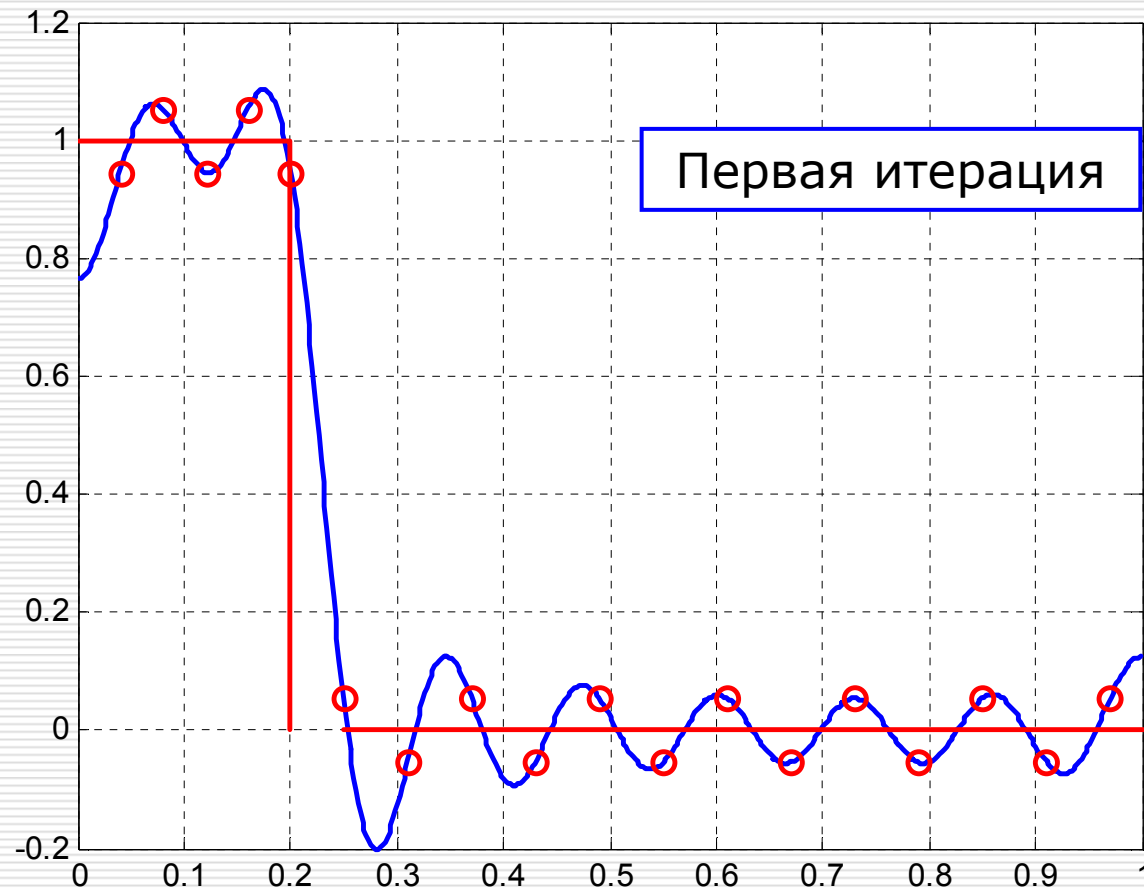
---

- Сущность алгоритма — итерационный поиск экстремальных частот
- После задания начального приближения циклически выполняются следующие действия:
  - Определяются коэффициенты фильтра, дающие Ч.Х., одинаково (с чередующимся знаком) отклоняющуюся от заданной на экстремальных частотах
  - Рассчитывается Ч.Х. фильтра, определяются положения локальных экстремумов, формируется новый набор экстремальных частот
  - Если изменение экстремальных частот меньше заданного порога, цикл завершается



# Минимаксный метод ( $p = \infty$ ) — алгоритм Паркса—Макклеллана

---



# Минимаксный метод ( $p = \infty$ ) — алгоритм Паркса—Макклеллана



# Минимаксный метод ( $p = \infty$ ) — алгоритм Паркса—Макклеллана

