Прикладные модели исследования операций. Лекции. ЧЕРНОВИК

Лектор: Чернов В.П.
Автор конспекта: Курмазов Ф.А.*

20 февраля 2021 г.

Содержание

*f.kurmazov.b@gmail.com

1 Лекция 1.

1.1 Модель оптимизации цен.

Дана торговая (или продуктовая) компания. Компания закупает в различных местах товары, затем привозит в некоторую точку для продажи. Себестоимость товаров различная, а также для каждого товара задан спрос в единицу времени. Требуется найти управление закупками и ценами на товары максимизирующее прибыль компании.

Далее, чуть более формально, для мат. модели. Задан набор доступных продуктов $[n]$[1]. Для каждого вида товаров задана функция спроса Q_k. В частном случае, спрос представлен монотонно убывающей функцией, в еще более частном случае, который мы и рассмотрим — линейной.

$$Q_k = a_k \cdot p_k + b_k \ \forall \ k \in [n]$$

Где $a \in \mathbb{R}^n_-$ — скорость убывания спроса при росте цены, $b \in \mathbb{R}^n_+$ — базовый спрос на товар при соответствующей нулевой цене, а $p \in {\mathbb{R}_+}^n$ — стоимость продажи единицы товара — переменная задачи.[2]
Исходя из этого, выручку можно считать по формуле:

$$R = \sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot p_k$$

В рассматриваемой модели (простой) учитываются переменные (V) и постоянные (F) затраты, сумма которых составляет все затраты компании C:

$$C = F + V$$

.

Где постоянные затраты F заданы (для данной простой модели), а переменные затраты V рассчитываются по формуле:

$$V = \sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot v_k$$

Где v_k — удельные переменные затраты на единицу товара.
Требуется максимизировать прибыль $\pi \in \mathbb{R}$, изменяя стоимости продажи товаров p:

$$\pi = R - C \to \max$$

Так как введенная форма спроса допускает отрицательные значения, для математической модели задачи потребуется введение ограничений на неотрицательность спроса:

$$Q_k \geq 0 \ \forall \ k \in [n]$$

Дополнительно можно учитывать ограничение по затратам (бюджет) $B \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot v_k \leq B$$

Замечание. Множители Лагранжа в решении нелинейной задачи играют роль похожую на роль теневых цен в решении линейной задачи. В частности, они показывают изменение ЦФ задачи при изменении ограничения на 1 (предельную полезность ресурса).

[1] Редко встречающееся, но красивое обозначение для первых n натуральных чисел $[n] = \{1, 2, 3, ..., n\}$

[2] Где R_+ — неотрицательные вещественные числа, а R_- — неположительные.

1.2 Возможность привлечения кредитных средств.

Помимо прочего, в модели также можно учитывать взятие денег в кредит.

Замечание. Множитель Лагранжа при бюджетном ограничении можно интерпретировать как максимальную допустимую кредитную ставку, при взятии кредита на время операции (закупки - продажи).

Введение возможности взятия кредита можно ввести с помощью добавления к бюджетному ограничению объема кредита, т.е. замены:

$$B_{new} = B + K$$

Где $K \in \mathbb{R}_+$ — величина кредита.
А также с помощью добавления к издержкам процентов по кредиту:

$$C_{new} = C + K \cdot percent$$

Где $percent \in \mathbb{R}_+$ — процентная ставка по кредиту.

Замечание. При решении нелинейной задачи средствами Excell стоит обратить внимание на настройку параметров (точность решения и множественные начальные точки) чтобы избежать высокой вероятности попадания в локальный минимум. При этом, похоже, что Excell использует разновидность градиентного спуска.

1.3 Задача построения портфеля проектов.

Замечание. Это модифицированная задача о рюкзаке.

Простой вариант задачи — однопериодный. Он и описан ниже.
Задано множество объектов (проектов) $[n]$, где каждый проект имеет свою стоимость $c \in {\mathbb{R}_+}^n$ и прибыльность $\pi \in {\mathbb{R}_+}^n$. Проект k может быть взят ($y_k = 1$) или не взят ($y_k = 0$). Также задан бюджет $B \in \mathbb{R}_+$ — максимальная допустимая суммарная стоимость итогового набора проектов. Таким образом имеем задачу целочисленного программирования, в которой требуется максимизировать прибыль путем выбора наилучшего набора проектов среди всех допустимых (по бюджету), т.е. максимизировать величину:

$$\sum_{k=1}^{n} \pi_k \cdot y_k \to \max$$

При условии:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot y_k \leq B$$

2 Лекция 2.

2.1 Тема 1.