Прикладные модели исследования операций. Лекции. ЧЕРНОВИК

Лектор: Чернов В.П.
Автор конспекта: Курмазов Ф.А.*

16 марта 2021 г.

Содержание

*f.kurmazov.b@gmail.com

1 Лекция 1.

1.1 Модель оптимизации цен.

Дана торговая (или продуктовая) компания. Компания закупает в различных местах товары, затем привозит в некоторую точку для продажи. Себестоимость товаров различная, а также для каждого товара задан спрос в единицу времени. Требуется найти управление закупками и ценами на товары максимизирующее прибыль компании.

Далее, чуть более формально, для мат. модели. Задан набор доступных продуктов $[n]$[1]. Для каждого вида товаров задана функция спроса Q_k. В частном случае, спрос представлен монотонно убывающей функцией, в еще более частном случае, который мы и рассмотрим — линейной.

$$Q_k = a_k \cdot p_k + b_k \ \forall \ k \in [n]$$

Где $a \in \mathbb{R}^n_-$ — скорость убывания спроса при росте цены, $b \in \mathbb{R}^n_+$ — базовый спрос на товар при соответствующей нулевой цене, а $p \in \mathbb{R}_+{}^n$ — стоимость продажи единицы товара — переменная задачи.[2]

Исходя из этого, выручку можно считать по формуле:

$$R = \sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot p_k$$

В рассматриваемой модели (простой) учитываются переменные (V) и постоянные (F) затраты, сумма которых составляет все затраты компании C:

$$C = F + V$$

Где постоянные затраты F заданы (для данной простой модели), а переменные затраты V рассчитываются по формуле:

$$V = \sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot v_k$$

Где v_k — удельные переменные затраты на единицу товара.

Требуется максимизировать прибыль $\pi \in \mathbb{R}$, изменяя стоимости продажи товаров p:

$$\pi = R - C \to \max$$

Так как введенная форма спроса допускает отрицательные значения, для математической модели задачи потребуется введение ограничений на неотрицательность спроса:

$$Q_k \geq 0 \ \forall \ k \in [n]$$

Дополнительно можно учитывать ограничение по затратам (бюджет) $B \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot v_k \leq B$$

Замечание. Множители Лагранжа в решении нелинейной задачи играют роль похожую на роль теневых цен в решении линейной задачи. В частности, они показывают изменение ЦФ задачи при изменении ограничения на 1 (предельную полезность ресурса).

[1] Редко встречающееся, но красивое обозначение для первых n натуральных чисел $[n] = \{1, 2, 3, ..., n\}$ без 0.

[2] Где R_+ — неотрицательные вещественные числа, а R_- — неположительные.

1.2 Возможность привлечения кредитных средств.

Помимо прочего, в модели также можно учитывать взятие денег в кредит.

Замечание. Множитель Лагранжа при бюджетном ограничении можно интерпретировать как максимальную допустимую кредитную ставку, при взятии кредита на время операции (закупки - продажи).

Введение возможности взятия кредита можно ввести с помощью добавления к бюджетному ограничению объема кредита, т.е. замены:

$$B_{new} = B + K$$

Где $K \in \mathbb{R}_+$ — величина кредита.

А также с помощью добавления к издержкам процентов по кредиту:

$$C_{new} = C + K \cdot percent$$

Где $percent \in \mathbb{R}_+$ — процентная ставка по кредиту.

Замечание. При решении нелинейной задачи средствами Excell стоит обратить внимание на настройку параметров (точность решения и множественные начальные точки) чтобы избежать высокой вероятности попадания в локальный минимум. При этом, похоже, что Excell использует разновидность градиентного спуска.

1.3 Задача построения портфеля проектов.

Замечание. Это модифицированная задача о рюкзаке.

Простой вариант задачи — однопериодный. Он и описан ниже.

Задано множество объектов (проектов) $[n]$, где каждый проект имеет свою стоимость $c \in {\mathbb{R}_+}^n$ и прибыльность $\pi \in {\mathbb{R}_+}^n$. Проект k может быть взят ($y_k = 1$) или не взят ($y_k = 0$), т.е. $y \in \{0, 1\}^n$. Также задан бюджет $B \in \mathbb{R}_+$ — максимальная допустимая суммарная стоимость итогового набора проектов. Таким образом имеем задачу целочисленного программирования, в которой требуется максимизировать прибыль путем выбора наилучшего набора проектов среди всех допустимых (по бюджету), т.е. максимизировать величину:

$$\sum_{k=1}^{n} \pi_k \cdot y_k \to \max$$

При условии:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot y_k \leq B$$

2 Лекция 2.

2.1 Сложный портфель.

Развитием задачи формирования портфеля (рюкзака) является расширение задачи на несколько периодов, с соответствующими изменениями во входных данных.

Задано множество объектов (проектов) $[n]$, и множество периодов $T = \{1, 2, ..., m\}$. Для каждого периода времени $t \in T$ задан вектор доходности проектов $c^t \in \mathbb{R}^n$. Также задан объем инвестиций (бюджет) в каждый период времени $B \in \mathbb{R}^m$ Требуется выбрать такой набор проектов, что итоговая прибыль максимальна, и при этом ни в один период времени t бюджет B^t не превышается. Т.е. выполняется условие:[3]

$$\langle c^t, y \rangle + B^t \geq 0 \ \forall \ t \in T$$

Также возможен вариант с накоплением неиспользованных инвестиций.

$$\sum_{k=1}^{t} (\langle c^k, y \rangle + B^k) \geq 0 \ \forall \ t \in T$$

Замечание. В модели с переносом средств между периодами стоит учитывать дисконтирование.

2.2 Анализ эффективности инвестиционного портфеля.

Расчет различных показателей эффективности.

Исходные данные по проекту:

- Даты срезов $T = \{t_1, t_2, ...t_m\}$.
- Поток вложений $K \in \mathbb{R}^m$ на даты T.
- Поток доходов $D \in \mathbb{R}^m$ на даты T.
- Ставка дисконтирования $i \in \mathbb{R}^m$.

Рассчитываемые показатели:

- Итоговый финансовый поток: $R_t = D_t - K_t$ на даты T.
- Дисконтный множитель: $v_k = (1 + i_k)^{(-\frac{t_k - t_{k-1}}{365})} \ \forall k > 1$.
- Нарастающий дисконтный множитель: $V_k = \prod\limits_{l=1}^{k} v_l$.
- Дисконтированный поток вложений: $Kd_k = V_k \cdot K_k$.
- Дисконтированный поток доходов: $Dd_k = V_k \cdot D_k$.
- Чистый дисконтированный доход $NPV_k = \sum\limits_{l=1}^{k} V_l \cdot R_l = \sum\limits_{l=1}^{k} (V_l \cdot D_l - V_l \cdot K_l) = \sum\limits_{l=1}^{k} (Dd_l - Kd_l)$.
- Индекс доходности $PI_k = \sum\limits_{l=1}^{k} \frac{Dd_l}{Kd_l}$

[3]Обозначим $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

3 Лекция 3.

3.1 Анализ эффективности инвестиционного портфеля. Продолжение

Вкладывая денежные средства в какой-то проект, мы предполагаем его окупаемость. И *время окупаемости* является отличием инвестиционных проектов от любой другой коммерческой операции. Так окупаемость инвестиционных проектов происходит через длительный промежуток времени, и поэтому это время необходимо учитывать, происходит это с помощью дисконтирования.

Инвестиционный проект оценивается через финансовые потоки (мб через другие критерии связанные со спецификой проекта). Так как мы работаем с проектом, то мы работает с прогнозными значениями. *Поток вложений* (закупка оборудование, перевозка, установка...) имеет бОльшую надежность в отличие от *потока доходов*(продажа продукции), так как в первом случае мы имеем информацию от поставщиков о ценах, характеристиках и др. вещах, а во втором мы не можем быть уверены, как рынок отзовется на продаваемую нами продукцию.

Проводим прогноз для определения возможной прибыли/убытка.

Берем ставку дисконтирования. *Размер ставки дисконтирования* определяется экономической ситуации. Если экономика стабильна, то ставка относительна низкая, если нестабильна – высокая. Чем выше ставка дисконтирования, тем хуже будут результаты по проекту. Происходит это потому, что прибыль мы сможем получить лишь спустя время. На вложениях дисконтирование скажется слабее, то есть доходы будут уменьшены сильнее, чем вложения.

В любом проекте присутствуют 4 базовых оценки эффективности:

1. NPV (чистый дисконтированный доход. Прибыль в денежных единицах)
2. Индекс доходности (на столько процентов окупится наш проект)
3. Внутренняя норма доходности (ставка дисконтирования при которой $NPV = 0$.)

   Экономическая интерпретация: если мы хотим финансировать проект из заемных средств, возникает вопрос - по какой кредитной ставке стоит брать кредит, чтобы была возможность расплатиться. Если кредитная ставка меньше внутренней нормы доходности, то под этот проект стоит взять кредит. Если кредитная ставка больше, то брать его не стоит.

4. Срок окупаемости проекта (разность между датой начала проекта (первый платеж по проекту) и датой когда получили в плюс (или 0) по NPV.)

   На срок окупаемости может влиять сама ставка дисконтирования и потоки доходов. А если к определенному моменту, нам нужна фиксированная прибыль, мы можем продать проект, тем самым получив дополнительную прибыль (изменить последний поток доходов).

4 Лекция 4.

4.1 Анализ чувствительности основных показателей проекта методом Монте-Карло. Нормальный закон распределения

Нормальный закон используется, если наши потоки вложений и доходов отклоняются от средних значений из-за многих независимых внешних воздействий.[4]

Для анализа чувствительности дополнительно к исходным данным лекции 2 добавляются также:

- Случайное число
- Математическое ожидание вложений
- Коэффициент вариации вложений (– сколько % составляет стандартное отклонения от мат ожидания $\sigma/\bar{x}$. Можно также ввести дисперсию или СКО)
- Математическое ожидание доходов
- Коэффициент вариации доходов

В соответствии с чем изменяются потоки вложений и потоки доходов. Для этого пересчета потоков необходимо равномерное распределение перевести в нормальное. Используем функцию в Excel – НОРМ.ОБР(вероятность(наше случ.число); среднее; стандартное отклонение). Другими словами, берем случайное число, помешаем на ось Oy в закон распределения нормальной СВ и находим наше число распределенное по нормальному закону.

Анализ чувствительности проекта

Первым этапом необходимо собрать статистику по следующим показателям:

- Внутренняя норма доходности IRR (в Excel =ЧИСТВНДОХ(значение(наш итоговый поток); время)[5])
- Чистый дисконт. доход NPV_k
- Индекс доходности PI_k
- Процент случаев окупаемости проекта
- Срок окупаемости в днях (если проект окупается)
- Число удачных испытаний
- Общее число испытаний

Далее усредняем полученные значения по всем показателям за все испытания.

Анализ чувствительности NPV проводится усреднением значений NPV за каждый промежуток времени.

[4]если у нас всего два-три оптовых покупателя, то нормальный закон не работает

[5]для корректной работы функции, поле значение должно начинаться с отрицательного числа

4.2 Анализ чувствительности основных показателей проекта методом Монте-Карло. Дискретный закон распределения

Идея дискретного закона распределения состоит в том, чтобы рассмотреть конкретные варианты развития событий.

Рассмотрим вариант с пессимистической, целевой и оптимистической реализациями. У нас есть потоки вложений и доходов для каждого варианта, а также вероятности реализации того или иного варианта. Случайное число попадая в тот или иной промежуток будет характеризовать реализацию этого варианта.

Например, вероятность пессимистического варианта $= 2/9$; целевого $= 6/9$; оптимистического $= 1/9$. Если случайное число в интервале от 0 до $2/9$, то поток вложений будет равен пессимистической величине вложений, если от $2/9$ до $6/9$, то целевому, если больше, то оптимистическому.

5 Лекция 4.