Санкт-Петербургский государственный университет
Математическое обеспечение и администрирование информационных систем
Кафедра информатики

Образцов Даниил Алексеевич

Функции псевдовычитания и псевдоделения как средство для построения теории гиперцелых и гиперрациональных чисел

Отчёт по учебной практике (научно-исследовательской работе)

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., ст. преп., Ю.Н. Ловягин

Санкт-Петербург
2023

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Разработка конечной аксиоматики гиперрациональных чисел представляет интерес как альтернатива известным аксиоматикам с бесконечным числом аксиом, например, в сфере логического подхода к задачам искусственного интеллекта, где требуется наличие конечного числа базовых понятий и состояний. Первый этап разработки теории включает в себя определение ключевых понятий и составление аксиоматики гипернатуральных чисел, различные варианты которых широко представлены [2, 6]. Для написания данной работы в качестве основы взята теория, разработанная Ю.Н. Ловягиным в его работе [1]. Следующее действие – переход к теории гиперцелых и гиперрациональных чисел – описывается в работах нечасто и не слишком подробно.

Цель работы. Цель настоящей работы – расширить конечную аксиоматику гипернатуральных чисел до гиперцелых и гиперрациональных чисел.

Для достижения данной цели необходимо выполнить следующие задачи:

1. Ознакомится с существующими расширениями других, в том числе бесконечных, аксиоматик гипернатуральных чисел.
2. Предложить свой вариант расширения для конечной аксиоматики.

Объектом исследования является конечная аксиоматика гиперцелых и гиперрациональных чисел.

Предметом исследования являются определения, аксиомы и теоремы, необходимые для формирования конечной аксиоматики.

Новизна обусловлена тем, что данная теория является расширением новой конечной теории и использует для этого средства, которые ранее не были представлены в других работах.

Практическая значимость работы. Теория, описанная в данной работе, может послужить основой для дальнейшего развития конечной аксиоматики.

Положениями, выносимым на защиту, являются определения, аксиомы и теоремы, необходимые для составления конечной аксиоматики гиперцелых и гиперрациональных чисел.

Структура и объём работы. Текст отчёта включает в себя введение, три параграфа, заключение и список литературы (9 позиций). Общий объём – 23 страницы.

1. Основные положения гиперарифметики для натуральных чисел

Согласно определению, которое разработал Ю.Н. Ловягин [1], под гиперарифметикой понимается теория в языке $\mathcal{L}(0, =, +, \cdot, ', \leq, <, \mathfrak{N})$, состоящая из нескольких наборов аксиом:

1. Аксиомы конечной арифметики, отражающие свойства натурального числа и базовые характеристики операций сложения $+$, умножения $\cdot$ и следования $'$ [3]:

$$\mathcal{A}_1 := \forall x(x = x); \tag{1.1}$$

$$\mathcal{A}_2 := \forall x \forall y(x = y \supset y = x); \tag{1.2}$$

$$\mathcal{A}_3 := \forall x \forall y \forall z(x = y \,\&\, y = z \supset x = z); \tag{1.3}$$

$$\mathcal{A}_4 := \forall x \forall y \forall u \forall v(x = u \,\&\, y = v \supset (x = y \equiv u = v)); \tag{1.4}$$

$$\mathcal{A}_5 := \forall x \forall y(x' = y' \equiv x = y); \tag{1.5}$$

$$\mathcal{A}_6 := \forall x \forall y \forall u \forall v(x = u \,\&\, y = v \supset x + y = u + v); \tag{1.6}$$

$$\mathcal{A}_7 := \forall x \forall y \forall u \forall v(x = u \,\&\, y = v \supset x \cdot y = u \cdot v); \tag{1.7}$$

$$\mathcal{A}_8 := \forall x \forall y(x + y = y + x); \tag{1.8}$$

$$\mathcal{A}_9 := \forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x); \tag{1.9}$$

$$\mathcal{A}_{10} := \forall x \forall y \forall z((x + y) + z = x + (y + z)); \tag{1.10}$$

$$\mathcal{A}_{11} := \forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)); \tag{1.11}$$

$$\mathcal{A}_{12} := \forall x \forall y \forall z(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)); \tag{1.12}$$

$$\mathcal{A}_{13} := \forall x(x + 0 = x); \tag{1.13}$$

$$\mathcal{A}_{14} := \forall x(x \cdot 0 = 0); \qquad (1.14)$$

$$\mathcal{A}_{15} := \forall x \forall y(x + y' = (x + y)'); \qquad (1.15)$$

$$\mathcal{A}_{16} := \forall x \forall y(x \cdot y' = (x \cdot y) + x); \qquad (1.16)$$

$$\mathcal{A}_{17} := \forall x \neg(x = x'); \qquad (1.17)$$

$$\mathcal{A}_{18} := \forall x \neg(x' = 0); \qquad (1.18)$$

$$\mathcal{A}_{19} := \forall x(\neg(x = 0) \supset \exists y(x = y')); \qquad (1.19)$$

$$\mathcal{A}_{20} := \forall x \forall y \exists z(x + z = y \vee y + z = x); \qquad (1.20)$$

$$\mathcal{A}_{21} := \forall x \forall y \forall z(x + z = x + y \supset z = y). \qquad (1.21)$$

2. Аксиомы, описывающие характеристики предиката $\mathfrak{N}$ «быть конечным натуральным числом»:

$$\mathcal{N}_0 := \mathfrak{N}(0); \qquad (1.22)$$

$$\mathcal{N}_1 := \forall x(\mathfrak{N}(x) \supset \mathfrak{N}(x')); \qquad (1.23)$$

$$\mathcal{N}_2 := \forall x \forall y(\mathfrak{N}(x) \,\&\, N(y) \equiv \mathfrak{N}(x + y)); \qquad (1.24)$$

$$\mathcal{N}_3 := \forall x \forall y(\mathfrak{N}(x) \,\&\, \mathfrak{N}(y) \equiv \mathfrak{N}(x \cdot y)); \qquad (1.25)$$

$$\mathcal{N}_4 := \forall x \forall y(x = y \supset (\mathfrak{N}(x) \equiv \mathfrak{N}(y))). \qquad (1.26)$$

3. Аксиома существования бесконечных натуральных чисел:

$$\mathcal{W} := \exists x \neg \mathfrak{N}(x); \qquad (1.27)$$

В этой теории определены предикаты отношения «меньше» и «строго меньше»:

$$x \leq y := \exists!\, z(x + z = y); \qquad (1.28)$$

$$x < y := x \leq y \,\&\, \neg(x = y); \qquad (1.29)$$

На основе первого набора аксиом (1.1-1.21) были доказаны следующие утверждения, описывающие свойства предикатов $\leq, <$ для конечных натуральных чисел (теорема 1 из [1]):

$$\forall x(x \leq x); \tag{1.30}$$

$$\forall x \forall y \forall z(x \leq y \,\&\, y \leq z \supset x \leq z); \tag{1.31}$$

$$\forall x \forall y(x \leq y \,\&\, y \leq x \supset x = y); \tag{1.32}$$

$$\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x); \tag{1.33}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v(x = u \,\&\, y = v \supset (x \leq y \equiv u \leq v)); \tag{1.34}$$

$$\forall x \forall y \forall z(x < y \supset x + z < y + z); \tag{1.35}$$

$$\forall x \forall y \forall z(x < y \,\&\, 0 < z \supset x \cdot z < y \cdot z). \tag{1.36}$$

Кроме того, добавлены определения из теории множеств, внутренней для конченой арифметики, такие как «пустое множество Λ», «формула, определяющая множество» «множество, определённое формулой», «терм, свободный для переменной в формуле», на основе которых введены обозначения для операций с множествами и определение определяемой функции, которая выражается формулой:

$$\vdash \forall x \left(\exists y [\mathcal{F}]^{uv}_{xy} \supset \left(\forall z \forall w \forall p \left([\mathcal{F}]^{uv}_{zw} \,\&\, [\mathcal{F}]^{uv}_{zp} \supset w = p \right) \right) \right), \tag{1.37}$$

в которой $\exists y [\mathcal{F}]^{uv}_{xy}$ определяет множество $dom\, f$ – область определения функции, а множество (область) значений функции $rng\, f$ определяется формулой $\exists x [\mathcal{F}]^{uv}_{xy}$. Определение функции содержит одну переменную, но может быть обобщено на любое их количество, если u и x считать вектором из нескольких переменных.

Понятие бесконечного натурального числа, которое вводится с помощью (1.27) и обозначается как $\mathcal{w}$, дополнено понятием блока (также называемого в других работах монадой [2, 7]) бесконечного числа. Для введения этого определения использовалось дополнительное определение – функция псевдовычитания, которая ввиду того, что значением функции могут быть только натуральные числа, определена только для случая, когда уменьшаемое больше вычитаемого:

$$x \ominus y \coloneqq \{z\colon \vdash \big(y < x \equiv \exists!\, z\, (y + z = x)\big)\}. \qquad (1.38)$$

Определение блока бесконечного натурального числа:

$$B(w) \coloneqq \{z\colon \vdash \exists k\big(\mathfrak{N}(k) \,\&\, (z = w + k \,\lor\, z = w \ominus k)\big)\}. \qquad (1.39)$$

Свойство блока бесконечного натурального числа:

$$B(w_1) = B(w_2) \equiv \exists k\big(\mathfrak{N}(k) \,\&\, (w_1 = w_2 + k \,\lor\, w_2 = w_1 + k)\big). \qquad (1.40)$$

Помимо этого были доказаны следующие утверждения про бесконечные натуральные числа (теоремы 5 и 6 из [1]):

$$\forall x \forall y(\neg\mathfrak{N}(x) \,\&\, \neg\mathfrak{N}(y) \equiv \neg\mathfrak{N}(x + y)); \qquad (1.41)$$

$$\forall x \forall y\big(\neg\mathfrak{N}(x) \& \neg\mathfrak{N}(y) \equiv \neg\mathfrak{N}(x \cdot y)\big); \qquad (1.42)$$

$$\forall x \forall y \Big(\big(\mathfrak{N}(x) \& \neg N(y)\big) \lor \big(\neg\mathfrak{N}(x) \& N(y)\big) \equiv \neg\mathfrak{N}(x + y)\Big); \qquad (1.43)$$

$$\forall x \forall y(\mathfrak{N}(x) \& \neg\mathfrak{N}(y) \supset x < y); \qquad (1.44)$$

2. Гиперарифметика целых чисел

Необходимо расширить предложенную теорию, чтобы она включала в себя также определения целых чисел и описания их свойств. В некоторых работах переход от натуральных к целым и рациональным числам реализуется с помощью введения понятия упорядоченной пары или тройки натуральных чисел соответственно [4, 5, 6]. Альтернативным вариантом может служить определение с помощью упомянутой в предыдущем параграфе функции псевдовычитания. В натуральных числах функция $x \ominus y$ не определена для таких x и y, что $x < y$, но при этом для них существует $y \ominus x$, равное некоторому натуральному числу согласно всё тому же определению псевдовычитания (1.38). Пользуясь этим и определением предиката «меньше» (1.29) можно доопределить функцию до целых. Для удобства введём уникальное обозначение для новой доопределённой функции $Sub(x, y)$.

Определение 2.1: Функцию $Sub(x, y)$, которая для случая $y \leq x$ возвращает значение z, удовлетворяющее условию $y + z = x$, а для случая $x < y$ возвращает некоторое значение $Sub(x, y)$, которое удовлетворяет условию $y \oplus Sub(x, y) \ominus x$, будем называть вычитанием y из x:

$$Sub(x, y) \coloneqq \begin{cases} z: y + z = x, & y \leq x \\ Sub(x, y): y \oplus Sub(x, y) \ominus x, & x < y \end{cases}. \tag{2.1}$$

На данный момент невозможно точно утверждать, что отношение равенства и операции сложения и умножения для новых чисел вида $Sub(x, y)$ идентичны таковым для натуральных чисел, поэтому для них используются символы «в кружке». Впоследствии будет доказано, что эти отношения и операции являются продолжением соответствующих операций над натуральными числами. Для этого необходимо убедиться, что они сохраняют все свои свойства, выраженные для натуральных чисел соответствующими аксиомами, и что все натуральные числа выражаемы с помощью $Sub(x, y)$.

Определение 2.2: Множество значений функции $Sub(x, y)$ при $x < y$ будем называть отрицательными целыми числами. Соответственно, значения функции $Sub(x, y)$ при $y \leq x$ будем называть неотрицательными целыми или натуральными числами.

Определение 2.3: Множество значений функции $Sub(x, y)$ от двух любых натуральных переменных x и y будем называть множеством целых чисел.

Здесь и далее значение функции $Sub(x, y)$, равное некоторому целому числу, будет просто называться целым числом $Sub(x, y)$.

Определение 2.4: Два целых числа $Sub(x, y)$ и $Sub(u, v)$ равны между собой, что записывается как $Sub(x, y) \ominus Sub(u, v)$, тогда и только тогда, когда выполняется условие $x + v = u + y$:

$$\forall x \forall y \forall u \forall v (Sub(x,y) \circleddash Sub(u,v) \equiv x + v = u + y). \qquad (2.2)$$

Теорема 2.1: Для предиката равенства целых чисел верны свойства равенства: рефлексивность (аналог $\mathcal{A}_1$ для целых чисел), симметричность (аналог $\mathcal{A}_2$) и транзитивность (аналог $\mathcal{A}_3$).

Доказательство:

1. Рефлексивность: по определению (2.2) равенство целого числа самому себе: $x + y = x + y$, что верно по $\mathcal{A}_8$.
2. Симметричность: равенство двух целых чисел $Sub(x,y) \circleddash Sub(u,v)$ эквивалентно $x + v = u + y$ по определению (2.2), из чего следует $u + y = x + v$ по $\mathcal{A}_2$, что по определению (2.2) означает $Sub(u,v) \circleddash Sub(x,y)$.
3. Транзитивность: $Sub(x,y) \circleddash Sub(u,v)$ и $Sub(u,v) \circleddash Sub(p,q)$ по определению (2.2) преобразуются в равенства $x + v = u + y$ и $u + q = p + v$, складываем оба равенства согласно $\mathcal{A}_6$: $(x + v) + {}$ $+ (u + q) = (u + y) + (p + v)$, с помощью $\mathcal{A}_8$ и $\mathcal{A}_{10}$ переставляем слагаемые и скобки: $(u + v) + (x + q) = (u + v) + (p + y)$; после чего применяем $\mathcal{A}_{21}$ и приходим к равенству $x + q = p + y$, что по определению (2.4) означает $Sub(x,y) \circleddash Sub(p,q)$. □

Определение 2.5: Сумма двух целых чисел $Sub(x,y)$ и $Sub(u,v)$, записываемая как $Sub(x,y) \oplus Sub(u,v)$, равна целому числу $Sub(x + u, y + v)$. Произведение двух целых чисел $Sub(x,y)$ и $Sub(u,v)$, записываемое как $Sub(x,y) \otimes Sub(u,v)$, равно целому числу $Sub(x \cdot u + y \cdot v, y \cdot u + x \cdot v)$:

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \big(Sub(x,y) \oplus Sub(u,v) \circleddash Sub(x + u, y + v)\big); \qquad (2.3)$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \big(Sub(x,y) \otimes Sub(u,v) \circleddash Sub(x \cdot u + y \cdot v, y \cdot u + x \cdot v)\big). \qquad (2.4)$$

Теорема 2.2: Верны следующие свойства операций сложения и умножения для целых чисел:

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \forall m \forall n \big(Sub(x,y) \ominus Sub(p,q) \,\&\, Sub(u,v) \ominus \\ \ominus Sub(m,n) \supset Sub(x,y) \oplus Sub(u,v) \ominus Sub(p,q) \oplus \\ \oplus Sub(m,n)\big); \tag{2.5}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \forall m \forall n \big(Sub(x,y) \ominus Sub(p,q) \,\&\, Sub(u,v) \ominus \\ \ominus Sub(m,n) \supset Sub(x,y) \otimes Sub(u,v) \ominus Sub(p,q) \otimes \\ \otimes Sub(m,n)\big); \tag{2.6}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \big(Sub(x,y) \oplus Sub(u,v) \ominus Sub(u,v) \oplus Sub(x,y)\big); \tag{2.7}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \big(Sub(x,y) \otimes Sub(u,v) \ominus Sub(u,v) \otimes Sub(x,y)\big); \tag{2.8}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \Big(\big(Sub(x,y) \oplus Sub(u,v)\big) \oplus Sub(p,q) \ominus \\ \ominus Sub(x,y) \oplus \big(Sub(u,v) \oplus Sub(p,q)\big)\Big); \tag{2.9}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \Big(\big(Sub(x,y) \otimes Sub(u,v)\big) \otimes Sub(p,q) \ominus \\ \ominus Sub(x,y) \otimes \big(Sub(u,v) \otimes Sub(p,q)\big)\Big); \tag{2.10}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \Big(Sub(x,y) \otimes \big(Sub(u,v) \oplus Sub(p,q)\big) \ominus \\ \ominus \big(Sub(x,y) \otimes Sub(u,v)\big) \oplus \big(Sub(x,y) \otimes Sub(p,q)\big)\Big); \tag{2.11}$$

$$\forall x \forall y \big(Sub(x,x) \ominus Sub(y,y)\big); \tag{2.12}$$

$$\forall x \forall y \big(Sub(x',x) \ominus Sub(y',y)\big). \tag{2.13}$$

Определение 2.6: Числа вида $Sub(z,z)$ будем называть нулём в целых числах. Согласно определению (2.1) и аксиоме $\mathcal{A}_{13}$, значением функции $Sub(z,z)$ при любом z может быть только натуральное число 0.

Теорема 2.3: Верны следующие свойства операций сложения и умножения для целых чисел и нуля в целых числах:

$$\forall x \forall y \forall z \big(Sub(x,y) \oplus Sub(z,z) \ominus Sub(x,y)\big); \tag{2.14}$$

$$\forall x \forall y \forall z \forall p \big(Sub(x,y) \otimes Sub(z,z) \ominus Sub(p,p)\big); \tag{2.15}$$

$$\forall x \forall y \forall z \big(Sub(x,y) \oplus Sub(y,x) \ominus Sub(z,z)\big). \tag{2.16}$$

Определение 2.7: Числа вид $Sub(x, y)$а и $Sub(y, x)$ будем называть обратными друг другу по сложению или противоположными.

Свойство противоположных чисел представлено формулой (2.16). Из этого свойства и определения (2.1) следует, что для любого отрицательного целого числа существует противоположное натуральное число и наоборот (кроме нуля, для которого противоположным будет нуль согласно определению нуля).

Определение 2.8: Числа вида $Sub(z', z)$ будем называть единицей в целых числах. Согласно определению (2.1) и аксиоме $\mathcal{A}_{16}$, значением функции $Sub(z', z)$ при любом z является натуральное число $0'$.

Теорема 2.4: Верно свойство умножения целых чисел и единицы в целых числах:

$$\forall x \forall y \forall z \big(Sub(x, y) \otimes Sub(z', z) \circleddash Sub(x, y)\big). \tag{2.17}$$

Теорема 2.5: Произведение любого целого числа и числа вида $Sub(z, z')$, которое является противоположным единице в целых числах, равно противоположному этому любому числу:

$$\forall x \forall y \forall z \big(Sub(x, y) \otimes Sub(z, z') \circleddash Sub(y, x)\big). \tag{2.18}$$

Определение 2.9: Функцией знака будем называть функцию $sign\big(Sub(x, y)\big)$, которая возвращает единицу в целых числах для положительных чисел, противоположное единице в целых для отрицательных чисел и нуль для нуля:

$$sign\big(Sub(x, y)\big) \coloneqq \begin{cases} Sub(z', z), & y < x \\ Sub(z, z), & x = y. \\ Sub(z, z'), & x < y \end{cases} \tag{2.19}$$

Определение 2.10: Модулем числа $Sub(x, y)$ будем называть натуральное число, получающееся в результате перемножения самого этого числа и его знака:

$$|Sub(x, y)| \coloneqq sign\big(Sub(x, y)\big) \otimes Sub(x, y). \tag{2.20}$$

Теорема 2.6: Любое целое число $Sub(x, y)$ можно представить в виде $Sub(z, 0)$ в случае $y \leq x$ и в виде $Sub(p, p') \otimes Sub(z, 0)$ для случая $x < y$, где $z \ominus |Sub(x, y)|$:

$$Sub(x, y) \ominus \begin{cases} Sub(z, 0), & y \leq x, z \ominus |Sub(x, y)| \\ Sub(p, p') \otimes Sub(z, 0), & x < y, z \ominus |Sub(x, y)| \end{cases}. \tag{2.21}$$

Определение 2.11: Вводим функцию:

$$NS(z) \ominus Sub(z, 0). \tag{2.22}$$

Как частный случай $Sub(x, y)$, эта новая функция сохраняет все доказанные ранее свойства $Sub(x, y)$. Областью значений этой функции является множество всех натуральных чисел согласно (2.21).

Теорема 2.7: Согласованность отношения равенства, операций сложения и умножения для натуральных чисел, выраженных через функцию $NS(z)$:

$$\forall x \forall y \big(x = y \equiv NS(x) \ \ominus \ NS(y)\big); \tag{2.23}$$

$$\forall x \forall y \big(NS(x + y) = NS(x) \oplus NS(y)\big); \tag{2.24}$$

$$\forall x \forall y \big(NS(x \cdot y) = NS(x) \otimes NS(y)\big). \tag{2.25}$$

Доказательство:

1. Равенство: $x = y \equiv x + 0 = y + 0 \ (\mathcal{A}_6) \equiv Sub(x, 0) \ominus$
   $\ominus Sub(y, 0)$ (2.2) $\equiv NS(x) \ominus NS(y)$ (2.22).
2. Сумма: $NS(x + y) \equiv Sub(x + y, 0)$ (2.22) $\equiv Sub(x, 0) \oplus$
   $\oplus Sub(y, 0)$ (2.3) $\equiv NS(x) \oplus NS(y)$ (2.22).
3. Произведение: $NS(x \cdot y) \equiv Sub(x \cdot y, 0)$ (2.22) $\equiv$
   $\equiv Sub(x \cdot y + 0 \cdot 0, 0 \cdot y + x \cdot 0)(\mathcal{A}_{13}, \mathcal{A}_{14}) \equiv$
   $\equiv Sub(x, 0) \otimes Sub(y, 0)$(2.4) $\equiv NS(x) \otimes NS(y)$ (2.22). □

После доказательства теоремы 2.7 можно перестать использовать отдельные символы для отношений и операций с целыми числами, так как они являются продолжениями отношений и операций с натуральными числами.

Определение 2.12: Вводим символ минус $-$. Если этот символ записывается перед натуральным числом x, то он обозначает операцию, которая возвращает противоположное данному натуральному x отрицательное целое число $-x$, которое будем называть «минус x». Эта операция эквивалентна умножению на число $Sub(z, z')$, которое теперь будем называть «минус единица», и сохраняет все свойства операции умножения.

Таким образом, любые целые числа можно выразить с помощью натурального числа или натурального числа с символом $-$ перед ним.

Теорема 2.8: Функцию вычитания y из x, определённую в (2.1), можно представить как сумму натурального числа x и числа, противоположного натуральному числу y:

$$\forall x \forall y \big(Sub(x, y) = x + (-y)\big). \tag{2.26}$$

Теорема 2.9: В целых числах определены предикаты отношения «меньше» и «строго меньше» так же, как они были определены в натуральных числах (1.28 и 1.29 соответственно), и для них верны следующие свойства:

$$\forall x \forall y \big(Sub(x, y) \leq Sub(x, y)\big); \tag{2.27}$$

$$\begin{gathered}\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \big(Sub(x, y) \leq Sub(u, v) \,\&\, Sub(u, v) \leq Sub(p, q) \supset \\ \supset Sub(x, y) \leq Sub(p, q)\big);\end{gathered} \tag{2.28}$$

$$\begin{gathered}\forall x \forall y \forall u \forall v \big(Sub(x, y) \leq Sub(u, v) \,\&\, Sub(u, v) \leq Sub(x, y) \supset \\ \supset Sub(x, y) = Sub(u, v)\big);\end{gathered} \tag{2.29}$$

$$\begin{gathered}\forall x \forall y \forall u \forall v \big(Sub(x, y) < Sub(u, v) \vee Sub(x, y) = Sub(u, v) \vee \\ \vee Sub(u, v) < Sub(x, y)\big);\end{gathered} \tag{2.30}$$

$$\begin{gathered}\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \forall m \forall n \Big(Sub(x, y) = Sub(p, q) \,\&\, Sub(u, v) = \\ = Sub(m, n) \supset \big(Sub(x, y) \leq Sub(u, v) \equiv Sub(p, q) \leq \\ \leq Sub(m, n)\big)\Big);\end{gathered} \tag{2.31}$$

$$\begin{gathered}\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \big(Sub(x, y) < Sub(u, v) \supset Sub(x, y) + Sub(p, q) < \\ Sub(u, v) + Sub(p, q)\big);\end{gathered} \tag{2.32}$$

$$\begin{gathered}\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \big(Sub(x, y) < Sub(u, v) \,\&\, 0 < Sub(p, q) \supset \\ \supset Sub(x, y) \cdot Sub(p, q) < Sub(u, v) \cdot Sub(p, q)\big);\end{gathered} \tag{2.33}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \big(Sub(x,y) < Sub(u,v) \,\&\, Sub(p,q) < 0 \supset \\ \supset Sub(u,v) \cdot Sub(p,q) < Sub(x,y) \cdot Sub(p,q) \big). \tag{2.34}$$

3. Гиперарифметика рациональных чисел

Аналогично целым числам, рациональные числа можно определить с помощью функции псевдоделения. Поскольку в предыдущем параграфе было показано, что натуральные числа являются частью целых, с этого момента все переменные будут подразумеваться целыми числами. Новую функцию определим следующим образом:

$$x \oslash y \coloneqq \big\{ z \colon \vdash \big(\exists!\, z\, (y \cdot z = x) \big) \big\}, \tag{3.1}$$

то есть эта функция определена только для таких x и y, что существует целое число z, для которого верно равенство $y \cdot z = x$. При $y = 0$ не соблюдается условие единственности числа z, оно может быть любым согласно (2.15), то есть при таком значении y функция не определена. Можно расширить определение функции до рациональных чисел по аналогии с доопределением отрицательных чисел в псевдовычитании; функцию, определённую для любых целых переменных назовём $Div(x,y)$.

Определение 3.1: Функцию $Div(x,y)$, которая для любых x и $y < 0 \vee$ $\vee\, 0 < y$ возвращает целое значение z, удовлетворяющее условию $y \cdot z = x$, если такое целое z существует, а в противном случае возвращает некоторое $Div(x,y)$, которое удовлетворяет условию $y \otimes Div(x,y) \ominus x$, будем называть делением x на y:

$$Div(x,y) \coloneqq \begin{cases} z \colon y \cdot z = x, & \exists!\, \mathfrak{Z}(z) \\ Div(x,y) \colon y \otimes Div(x,y) \ominus x, & \nexists \mathfrak{Z}(z) \end{cases}. \tag{3.1}$$

Так же, как и в случае с вычитанием из предыдущего параграфа, невозможно сразу утверждать, что отношение равенства и операции сложения и умножения для новых чисел вида $Div(x,y)$ идентичны таковым для целых чисел, поэтому для них используются символы «в кружке». Впоследствии будет доказано, что эти отношения и операции являются продолжением соответствующих операций над целыми числами. Для этого необходимо доказать, что они сохраняют все свои свойства, выраженные для целых чисел соответствующими теоремами, и что любые целые числа можно выразить с помощью $Div(x, y)$.

Определение 3.2: Множество значений функции $Div(x, y)$, которые можно выразить целым числом, будем называть целыми числами, тогда как остальные значения будем называть дробными числами.

Определение 3.3: Множество значений функции $Div(x, y)$ от любых целых переменных x и $y < 0 \vee 0 < y$ будем называть множеством рациональных чисел.

Здесь и далее значение функции $Div(x, y)$, равное некоторому рациональному числу, будет просто называться целым числом $Div(x, y)$.

Определение 3.4: Два рациональных числа $Div(x, y)$ и $Div(u, v)$ равны между собой, что записывается как $Div(x, y) \ominus Div(u, v)$, тогда и только тогда, когда выполняется условие $x \cdot v = u \cdot y$:

$$\forall x \forall y \forall u \forall v (Div(x, y) \ominus Div(u, v) \;\equiv\; x \cdot v = u \cdot y). \tag{3.2}$$

Теорема 3.1: Для предиката равенства рациональных чисел верны свойства равенства: рефлексивность (аналог $\mathcal{A}_1$ для рациональных чисел), симметричность (аналог $\mathcal{A}_2$) и транзитивность (аналог $\mathcal{A}_3$).

Доказательство:

4. Рефлексивность: по определению (3.2) равенство рационального числа самому себе: $x \cdot y = x \cdot y$, что верно по (2.8).
5. Симметричность: равенство двух целых чисел $Div(x, y) \ominus Div(u, v)$ эквивалентно $x \cdot v = u \cdot y$ по определению (3.2), из чего следует $u \cdot y = x \cdot v$ по свойству симметричности, что по определению (3.2) означает $Div(u, v) \ominus Div(x, y)$.
6. Транзитивность: $Div(x, y) \ominus Div(u, v)$ и $Div(u, v) \ominus Div(p, q)$ по определению (3.2) преобразуются в равенства $x \cdot v = u \cdot y$ и $u \cdot q =$

$= p \cdot v$, перемножаем оба равенства согласно (2.6): $(x \cdot v) \cdot (u \cdot q) = (u \cdot y) \cdot (p \cdot v)$, с помощью (2.8) и (2.10) переставляем слагаемые и скобки: $(u \cdot v) \cdot (x \cdot q) = (u \cdot v) \cdot (p \cdot y)$; после чего применяем (2.6) и приходим к равенству $x \cdot q = p \cdot y$, что по определению (3.2) означает $Div(x, y) \ominus Div(p, q)$. □

Определение 3.5: Сумма двух рациональных чисел $Div(x, y)$ и $Div(u, v)$, записываемая как $Div(x, y) \oplus Div(u, v)$, равна рациональному числу $Div(x \cdot v + u \cdot y, y \cdot v)$. Произведение двух рациональных чисел $Div(x, y)$ и $Div(u, v)$, записываемое как $Div(x, y) \otimes Div(u, v)$, равно рациональному числу $Div(x \cdot u, y \cdot v)$:

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \big(Div(x, y) \oplus Div(u, v) \ominus Div(x \cdot v + u \cdot y, y \cdot v)\big); \tag{3.3}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \big(Div(x, y) \otimes Div(u, v) \ominus Div(x \cdot u, y \cdot v)\big). \tag{3.4}$$

Теорема 3.2: Верны следующие свойства операций сложения и умножения для целых чисел:

$$\begin{gathered}\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \forall m \forall n \big(Div(x, y) \ominus Div(p, q) \,\&\, Div(u, v) \ominus \\ \ominus Div(m, n) \supset Div(x, y) \oplus Div(u, v) \ominus Div(p, q) \oplus \\ \oplus Sub(m, n)\big);\end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered}\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \forall m \forall n \big(Div(x, y) \ominus Div(p, q) \,\&\, Div(u, v) \ominus \\ \ominus Div(m, n) \supset Div(x, y) \otimes Div(u, v) \ominus Div(p, q) \otimes \\ \otimes Div(m, n)\big);\end{gathered} \tag{3.6}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \big(Div(x, y) \oplus Div(u, v) \ominus Div(u, v) \oplus Div(x, y)\big); \tag{3.7}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \big(Div(x, y) \otimes Div(u, v) \ominus Div(u, v) \otimes Div(x, y)\big); \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered}\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \Big(\big(Div(x, y) \oplus Div(u, v)\big) \oplus Div(p, q) \ominus \\ \ominus Div(x, y) \oplus \big(Div(u, v) \oplus Div(p, q)\big)\Big);\end{gathered} \tag{3.9}$$

$$\begin{gathered}\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \Big(\big(Div(x, y) \otimes Div(u, v)\big) \otimes Div(p, q) \ominus \\ \ominus Div(x, y) \otimes \big(Div(u, v) \otimes Div(p, q)\big)\Big);\end{gathered} \tag{3.10}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \Big(Div(x,y) \otimes \big(Div(u,v) \oplus Div(p,q)\big) \ominus \\ \ominus \big(Div(x,y) \otimes Div(u,v)\big) \oplus \big(Div(x,y) \otimes Div(p,q)\big)\Big); \tag{3.11}$$

$$\forall x \forall y \big(Div(x,x) \ominus Div(y,y)\big); \tag{3.12}$$

Определение 3.6: Числа вида $Div(z,z)$ будем называть единицей в рациональных числах. Согласно определению (3.1) и (2.17), значением функции $Div(z,z)$ при любом z может быть только натуральное число $0'$.

Теорема 3.3: Верно свойство умножения рациональных чисел и единицы в рациональных числах:

$$\forall x \forall y \forall z \big(Div(x,y) \otimes Div(z,z) \ominus Div(x,y)\big). \tag{3.13}$$

Определение 3.7: Числа вида $Div(0,z)$ будем называть нулём в рациональных числах. Согласно определению (3.1) и (2.15), значением функции $Div(0,z)$ при любом z является натуральное число 0.

Теорема 3.4: Верны следующие свойства операций сложения и умножения для рациональных чисел и нуля в рациональных числах:

$$\forall x \forall y \forall z \big(Div(x,y) \oplus Div(0,z) \ominus Div(x,y)\big); \tag{3.14}$$

$$\forall x \forall y \forall z \forall p \big(Div(x,y) \otimes Div(0,z) \ominus Div(0,p)\big); \tag{3.15}$$

Определение 3.8: Числа вида $Div(x,y)$ и $Div(-x,y)$, $Div(x,-y)$ будем называть обратными друг другу по сложению или противоположными. Так как $Div(-x,y) \ominus Div(x,-y) \equiv (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$, что верно для любых x и y, то можно, не умаляя общности, доказывать связанные с противоположными числами теоремы используя только одно из двух представлений, например $Div(-x,y)$.

Теорема 3.5: Верно свойство противоположных рациональных чисел:

$$\forall x \forall y \forall z \big(Div(x,y) \oplus Div(-x,y) \ominus Div(0,z)\big). \tag{3.16}$$

Теорема 3.6: Произведение любого рационального числа и числа вида $Div(-z,z)$, которое является противоположным единице в рациональных числах, равно противоположному этому любому числу:

$$\forall x \forall y \forall z \big(Div(x,y) \otimes Div(-z,z) \ominus Div(-x,y)\big). \tag{3.17}$$

Определение 3.9: Функцией знака будем называть функцию $sign\big(Div(x,y)\big)$, которая возвращает единицу в рациональных числах для положительных чисел, противоположное единице в рациональных для отрицательных чисел и нуль для нуля:

$$sign\big(Div(x,y)\big) \coloneqq \begin{cases} Div(z,z), & sign(x) = sign(y) \,\&\, \neg(x = y) \\ Div(0,z), & x = y \\ Div(-z,z), & -sign(x) = sign(y) \,\&\, \neg(x = y) \end{cases}. \tag{3.18}$$

Определение 3.10: Модулем числа $Div(x,y)$ будем называть рациональное число, получающееся в результате перемножения самого этого числа и его знака:

$$|Div(x,y)| \coloneqq sign\big(Div(x,y)\big) \otimes Div(x,y). \tag{3.19}$$

Определение 3.11: Числа вида $Div(x,y)$ и $Div(y,x)$ будем называть обратными друг другу по умножению или просто обратными.

Теорема 3.7: Верно свойство обратных рациональных чисел:

$$\forall x \forall y \forall z \big(Div(x,y) \otimes Div(y,x) \ominus Div(z,z)\big). \tag{3.20}$$

Теорема 3.8: Число $Div(x,y)$ можно представить в виде $Div(z,0')$ в случае $\exists!\, z: \mathfrak{Z}(z) \,\&\, y \cdot z = x$ или в виде $Div(x,0') \otimes Div(0',y)$ во всех остальных случаях:

$$Div(x,y) \ominus \begin{cases} Div(z,0'), & \exists!\, z: \mathfrak{Z}(z) \,\&\, y \cdot z = x \\ Div(x,0') \otimes Div(0',y), & \nexists \mathfrak{Z}(z) \end{cases}. \tag{3.21}$$

Определение 3.11: Вводим функцию:

$$ND(z) \ominus Div(z,0'). \tag{3.22}$$

Как частный случай $Div(x,y)$, эта новая функция сохраняет все доказанные ранее свойства для $Div(x,y)$. Областью значений этой функции является множество всех целых чисел согласно (3.19).

Теорема 3.9: Согласованность отношения равенства, операций сложения и умножения для целых чисел, выраженных через функцию $ND(z)$:

$$\forall x \forall y (x = y \equiv ND(x) \ \circleddash \ ND(y)); \tag{3.23}$$

$$\forall x \forall y (ND(x + y) = ND(x) \oplus ND(y)); \tag{3.24}$$

$$\forall x \forall y (ND(x \cdot y) = ND(x) \otimes ND(y)). \tag{3.25}$$

Доказательство:

4. Равенство: $x = y \equiv x \cdot 0' = y \cdot 0'$ $(\mathcal{A}_7) \equiv Div(x, 0') \circleddash$
   $\circleddash \, Div(y, 0')$ (3.2) $\equiv ND(x) \circleddash ND(y)$ (3.22).
5. Сумма: $ND(x + y) \equiv Div(x + y, 0')$ (3.22) $\equiv$
   $\equiv Div(x \cdot 0' + y \cdot 0',\ 0' \cdot 0')$ (2.17) $\equiv Div(x, 0') \oplus Sub(y, 0')$ (3.3) $\equiv$
   $\equiv ND(x) \oplus ND(y)$ (3.22).
6. Произведение: $ND(x \cdot y) \equiv Div(x \cdot y, 0')$ (3.22) $\equiv$
   $\equiv Sub(x \cdot y, 0' \cdot 0')$ (2.17) $\equiv Div(x, 0') \otimes Div(y, 0')$ (3.4) $\equiv$
   $\equiv ND(x) \otimes ND(y)$ (3.22). □

После доказательства теоремы 3.9 можно перестать использовать отдельные символы для отношений и операций с рациональными числами, так как они являются продолжениями отношений и операций с целыми числами, которые, в свою очередь, являются продолжениями отношений и операций с натуральными согласно теореме 2.7.

Определение 3.12: Вводим символ косой черты $/$. Этот символ обозначает бинарную операцию (целые числа x и y записываются по обе стороны символа: x/y), эквивалентную умножению целого числа перед косой чертой на число $Div(0', y)$ (обратное к целому числу y), и сохраняет все свойства операции умножения.

Таким образом, любые рациональные числа можно выразить или с помощью целого числа (3.21) или с помощью двух целых чисел с косой чертой между ними.

Теорема 3.9: В рациональных числах определены предикаты отношения «меньше» и «строго меньше» так же, как они были определены в целых числах (теорема 2.9), и для них верны следующие свойства:

$$\forall x \forall y \big(Div(x,y) \leq \ Div(x,y) \big); \tag{3.26}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \big(Div(x,y) \leq Div(u,v) \& \, Div(u,v) \leq Div(p,q) \supset \\ \supset \ Div(x,y) \leq \ Div(p,q) \big); \tag{3.27}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \big(Div(x,y) \ \leq \ Div(u,v) \,\&\, Div(u,v) \ \leq \ Div(x,y) \ \supset \\ \supset \ Div(x,y) = Div(u,v) \big); \tag{3.28}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \big(Div(x,y) \ < \ Div(u,v) \ \vee \ Div(x,y) \ = \ Div(u,v) \ \vee \\ \vee \ Div(u,v) \ < \ Div(x,y) \big); \tag{3.29}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \forall m \forall n \Big(Div(x,y) = Div(p,q) \,\&\, Div(u,v) = \\ = Div(m,n) \ \supset \ \big(Div(x,y) \leq Div(u,v) \ \equiv \ Div(p,q) \ \leq \\ \leq \ Div(m,n) \big) \Big); \tag{3.30}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \big(Div(x,y) \ < \ Div(u,v) \ \supset \ Div(x,y) \ + \ Div(p,q) \ < \\ Div(u,v) \ + \ Div(p,q) \big); \tag{3.31}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \big(Div(x,y) \ < \ Div(u,v) \,\&\, 0 < Div(p,q) \supset \\ \supset \ Div(x,y) \ \cdot \ Div(p,q) \ < \ Div(u,v) \ \cdot \ Div(p,q) \big); \tag{3.32}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \forall p \forall q \big(Div(x,y) \ < \ Div(u,v) \,\&\, Div(p,q) < 0 \ \supset \\ \supset Div(u,v) \ \cdot \ Div(p,q) \ < \ Div(x,y) \ \cdot \ Div(p,q) \big) \tag{3.33}$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \big(Div(x,y) \ < \ Div(u,v) \ \supset Div(v,u) \ < \ Div(y,x) \big). \tag{3.34}$$

Заключение

В результате выполнения данной работы удалось ознакомиться с другими аксиоматиками, представленными в работах Клини С.К., Мендельсона Э. и Праздниковой Е.В. и их расширениями и выдвинуть предложение о расширении конечной аксиоматики гипернатуральных чисел с помощью функций псевдовычитания и псевдоделения. Предложенное решение отличается от изученных в ходе написания работы большей подробностью и связностью в последовательности доказательств. Это позволяет использовать результаты проделанной работы для дальнейшей разработки конечной аксиоматики и вещественного анализа на её основе.

Список литературы

[1] Lovyagin Y.N., Lovyagin N.Y. Finite Arithmetic Axiomatization for the Basis of Hyperrational Non-Standard Analysis // Axioms, 10(4). – 2021. – pp. 263.

[2] Robinson A. Non-Standard Analysis. Princeton: Princeton University Press. – 1996. – 293 p.

[3] Гордон Е.И., Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Инфинитезимальный анализ. – 2-е изд., дополн. и испр. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2006. – С.20-29.

[4] Косовский Н.К., Тишков А.В. Логики конечнозначных предикатов на основе неравенств // СПб.: Изд-во СПбУ. – 2000. – с. 268.

[5] Клини С.К. Математическая логика // М.: Мир. – 1973. – с. 253.

[6] Ловягин Ю.Н. Гиперрациональные числа как основа математического анализа // Вестник Сыктывкарского университета, Серия 1, Выпуск 7. – 2007.

[7] Ловягин Ю.Н. Исчисление бесконечно малых Г.В.Лейбница в современном изложении, или Введение в нестандартный анализ А.Робинсона. – 2-е изд., дополн. и испр. – СПб.: ЛТА, 2004. – С.70-90.

[8] Мендельсон Э. Введение в математическую логику // М.: Наука. – 1976. – С.114-131.

[9] Праздникова Е.В. Моделирование вещественного анализа в рамках аксиоматики для гипернатуральных чисел // Вестник Сыктывкарского университета, Серия 1, Выпуск 7. – 2007.