Нейронная сеть Хопфилда для решения задач оптимального управления

Антропова Е.Г., СПбГУ, Санкт-Петербург st093661@student.spbu.ru

Аннотация

В данной работе представлено нахождение оптимального управления линейно-квадратичной (linear quadratic, LQ) задачи с использованием непрерывной нейронной сети Хопфилда (continuous Hopfield neural network, CHNN). Описана архитектура нейронной сети, смоделировано решение задачи линейно-квадратичного регулятора при помощи нейронной сети и динамического уравнения Риккати, сделаны выводы.

Введение

Рассматривается непрерывная сеть Хопфилда для решения задачи LQ. Особенности CHNN:

- Обучение: в CHNN обновление нейронов на основе дифференциальных уравнений. При этом минимумы энергетической функции сети и целевой функции задачи оптимизации могут быть сведены к минимуму одновременно;
- Функция активации: используется непрерывная функция активации, часто используется гиперболический тангенс ($f := \tanh$);
- Применение: CHNN часто применяется в задачах, связанных с оптимизацией, ассоциативным запоминанием и других областях, где непрерывные значения больше подходят для моделирования данных.

В данной работе, опираясь на статью [1], исследуется применение нейронной сети CHNN для нахождения оптимального управления задачи LQ. Суть данного подхода состоит в том, что критерий оптимальности задачи LQ преобразуется к виду функции энергии нейронной сети Хопфилда, засчёт этого искомое управление есть выход нейронов.

Постановка задачи линейно-квадратичного управления

Рассматривается дискретный случай задачи оптимального управления с конечным горизонтом.

$$X(k+1) = A(k)X(k) + B(k)U(k) \quad X(0) = X_0 \tag{1}$$

где k – момент времени, $A(k) \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $B(k) \in \boldsymbol{R}^{n\times r}$, $X(k) \in \boldsymbol{R}^{n\times 1}$ – вектор состояния, $U(k) \in \boldsymbol{R}^{r\times 1}$ – вектор управления.

Определён критерий оптимальности для задачи LQ:

$$J = X^T(N)HX(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left\{X^T(k)Q(k)X(k) + U^T R(k)U(k)\right\} \tag{2}$$

где $H \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ и $Q(k) \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, N – горизонт, $0 \leqslant k < N$ – положительные полуопределённые матрицы. Задача оптимального управления LQ является нахождением последовательности управления $U(0), U(1), \dots U(N-1)$, минимизирующей критерий оптимальности J.

Решение линейной системы

Для нахождения оптимального управления использована архитектура CHNN, где вектором управления будет выход нейронов нейронной сети.

Записан вектор управления $\widetilde{U} \in \boldsymbol{R}^{rN\times 1}$ для горизонта N:

$$\widetilde{U}^T = \{U^T(0),\ U^T(1), \dots, U^T(k), \dots,\ U^T(N-1)\},$$

Тогда из уравнения (1) задача перепишется как

$$X(k) = \Phi(k)X(0) + \Psi(k)\widetilde{U}, \tag{3}$$

где $\Phi(k) \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ – матрица передачи состояний системы (1), которая удовлетворяет

$$\Phi(k) = A(k-1)A(k-2)\dots A(0).$$

$\Psi(k) \in \boldsymbol{R}^{n\times rN}$ находится как

$$\Psi(k) = \begin{cases} \Psi(k) = \{\Psi_1(k),\ \Psi_2(k), \dots,\ \Psi_N(k)\} \\ \Psi_i(k) = \begin{cases} A(k-1)A(k-2)\dots A(i)B(i-1) & (i \leqslant k) \\ 0 \quad (i > k) \end{cases} \end{cases}$$

Архитектура CHNN

Задано количество нейронов для нейронной сети Хопфилда (CHNN) – $L = rN$, где r – размерность вектора управления, N – временной горизонт.

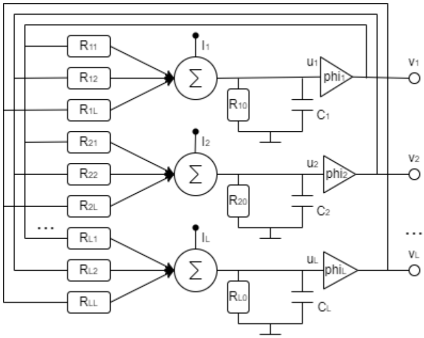

Рис. 1: схема CHNN

Для L-нейронной сети набор дифференциальных уравнений состояний и выходов нейронной сети задаётся формулой

$$C_i \frac{du_i}{dt} = -\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^{L} w_{ij} v_j + I_i,$$

$$v_i = \varphi_i(u_i), \quad i = 1, 2, \ldots, L,$$

где u_{00} – регулируемый параметр, $u_i(t)$ и $v_i(t)$ – вход и выход i-го нейрона в момент t, $\varphi_i(\cdot)$ – функция активации нейросети, I_i – входной ток внешнего смещения, C_i – входная ёмкость нейрона, а R_i– входное сопротивление нейрона, w_{ij} – веса, связывающие i-ый и j-ый нейрон и

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_{i0}} + \sum_{j=1}^{L} w_{ij}, \quad w_{ij} = \frac{1}{R_{ij}}.$$

Схема непрерывной нейронной сети Хопфилда представлена на Рис. 1.

Хопфилд [2] показал, что при симметричных соединениях $(w_{ij} = w_{ji})$ локальный минимум энергетической функции E, которая определена по формуле (4) достигает устойчивого состояния.

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{L} w_{ij} v_i v_j - \sum_{i=1}^{L} v_i I_i \tag{4}$$

или

$$E = -\frac{1}{2} V^T W V - V^T I,$$

где $V \in \boldsymbol{R}^{L\times 1}$ – выходной вектор, $W \in \boldsymbol{R}^{L\times L}$ – матрица весов, $I \in \boldsymbol{R}^{L\times 1}$ – пороговый вектор. То есть

$$V = (v_1,\ v_2, \dots,\ v_L)^T$$

$$I = (I_1,\ I_2, \dots,\ I_L)^T$$

$$W = \begin{pmatrix} w_{11}\ w_{12}\ \dots\ w_{1L} \\ w_{21}\ w_{22}\ \dots\ w_{2L} \\ \dots \\ w_{L1}\ w_{L2}\ \dots\ w_{LL} \end{pmatrix}$$

Нахождение решения задачи LQ при помощи CHNN

Не умаляя общности, считается $\widetilde{U} \in [-1,1]^{rN\times 1}$, $\widetilde{U} = V$, $V = (v_1,\ v_2, \dots,\ v_L)^T$, где

$$v_i = \tanh\left(\frac{u_i}{u_{00}}\right), \quad i = 1, 2, \dots, L,$$

Преобразован критерий оптимальности (2) в функцию энергии нейронной сети (4).

$$J = X^T(N)PX(N) + \widetilde{U}^T\widetilde{R}\widetilde{U} + \sum_{k=0}^{N-1}\left(X^T(k)Q(k)X(k)\right) \tag{5}$$

где

$$\widetilde{R} = \mathrm{diag}(R(0), R(1), \cdots, R(N-1)) \in \boldsymbol{R}^{mN\times mN}$$

Подставлена формула (3) в (5) и получено

$$\begin{aligned} J = \widetilde{U}^T \Big(&\widetilde{R} + \Psi^T(N)P\Psi(N)\widetilde{U} + 2X^T(0)\Phi^T(N)P\Psi(N)\widetilde{U} \\ &+ X^T(0)\Phi^T(N)P\Phi(N)X(0) + X^T(0)QX(0) \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1}\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{U}^T\Psi^T(k)Q\Psi(k)\widetilde{U} + 2X^T(0)\Phi^T(k)Q\Psi(k)\widetilde{U} \\ +X^T(0)\Phi^T(k)Q\Phi(k)X(0) \end{array} \right. \Bigg) \end{aligned}$$

Тогда критерий оптимальности J эквивалентен

$$J_1 = \widetilde{U}^T \Big(\widetilde{R} + \Psi^T(N)P\Psi(N) \mid \widetilde{U} + 2X^T(0)\Phi^T(N)P\Psi(N)\widetilde{U}$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \widetilde{U}^T \Psi^T(k)Q\Psi(k)\widetilde{U} + 2X^T(0)\Phi^T(k)Q\Psi(k)\widetilde{U} \Bigg) =$$

$$= \widetilde{U}^T F\widetilde{U} + 2\widetilde{U}^T G$$

где матрицы $F \in \boldsymbol{R}^{mN\times mN}$ и $G \in \boldsymbol{R}^{n\times\times 1}$ рассчитываются как

$$F = \widetilde{R} + \Psi^T(N)P\Psi(N) + \sum_{k=1}^{N-1} (\Psi^T(k)Q\Psi(k)),$$

$$G = \left(\Psi(N)^T P\Phi(N) + \sum_{k=1}^{N-1} (\Psi^T(k)Q\Phi(k)) \right) x(0).$$

Тогда матрица весов W и пороговый вектор I находятся как

$$W = -2F, \quad I = -2G.$$

Пример решения задачи оптимального управления

Рассматривается дискретная задача линейно-квадратичного регулятора (linear quadratic regulator, LQR) с конечным горизонтом для проверки работоспособности метода:

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U(k) \\ Y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} X(k) \end{cases}, \tag{6}$$

где

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T,$$

и весовые матрицы:

$$Q = H = C^T C, \quad R = \rho I, \quad N = 3,$$

$I-$ единичная матрица, $\rho = 0.3$.

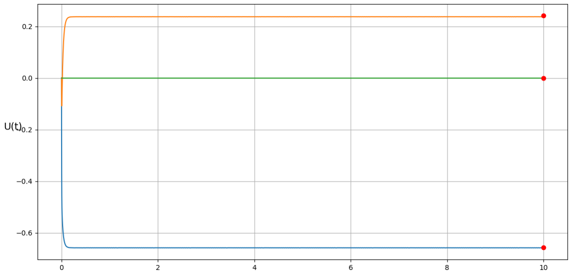

Рис. 2: результат моделирования метода с CHNN

CHNN построила оптимальное управление для задачи LQR (6). Нейронная сеть Хопфилда имеет $L = 3$ нейрона и функцию активации – гиперболический тангенс ($f := \tanh$). При реализации использованы такие библиотеки как Numpy, Scipy, Matplotlib. Программа запускалась на персональном компьютере. На Рис. 2 представлены графики выходов нейронов нейросети в зависимости от времени, красными точками обозначены решения, полученные с помощью Риккати.

Заключение

Описано применение нейронной сети Хопфилда к нахождению оптимального управления LQ, представлена архитектура нейронной сети. Смоделирована CHNN для решения дискретной задачи LQR с конечным горизонтом. Найденное с помощью этого метода оптимальное управление для задачи LQR (6) сошлось с управлением, полученным с помощью Риккати. Можно сделать вывод, что данный метод применим для такого типа задач.

Список литературы

[1] M. Li, X. Ruan Optimal Control with Continuous Hopfield Neural Network // International Conference on Robotics, Intelligent Systems and Signal Processing. Changsha, 2003.

[2] J.J. Hopfield, D.W. Tank Neural Computation of Decisions in Optimization Problems // Biological Cybernetics. 1985. Vol. 52. P. 141-152.

[3] M. Lan, S. Chand Solving linear quadratic discrete-time optimal controls using neural network // Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control Honolulu. 1900. Hawaii.