О распараллеливании вычислений

Бурова И. Г., профессор СПбГУ, burovaig@mail.ru
Мирошниченко И. Д., ст.преподаватель СПбГУ
Варивода И. А., студент 4 курса СПбГУ, varivoda_ivan@mail.ru,
Давыдов А. А., студент 4 курса СПбГУ, alex_davidov95@mail.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается приближенное вычисление интеграла с помощью составной квадратурной формулы Ньютона-Котеса и распараллеливание вычислений с помощью средств Open MP.

Введение

В последнее десятилетие, с одной стороны, значительно расширился диапазон областей применения высокопроизводительных вычислений, с другой - серьезное внимание уделяется разработке и улучшению методов параллельного программирования. Поэтому столь актуальными и востребованными оказываются дисциплины, в которых знакомят обучающихся с особенностями написания параллельных программ или методами преобразования последовательных программ в параллельные, например, методами распараллеливания вычислений. Изучение любой дисциплины, связанной с программированием, оказывается эффективно воспринимаемым при достаточно большом объеме практических занятий. Так, наиболее удобным способом изучения методов распараллеливания параллельно с изучением методов вычислений является практическое распараллеливание в среде Open MP.

В частности, одной из важных методологических задач в области вычислительной математики является получение практических навыков программирования для вычисления определенного интеграла. Заметим, что существует огромное количество теоретических методов для приближенного вычисления интеграла и еще больше методов написания последовательных программ, реализующих эти вычисления. Нас же будут интересовать методы распараллеливания для приближенного вычисления интеграла над общей памятью в среде Open MP.

О построении квадратурных формул

Пусть a,b — вещественные числа, где $b>a$, n,N — натуральные числа. Возьмем $H=\frac{b-a}{N}, h=\frac{H}{n}$. Положим $x_k=a+kH, k=0,1,\dots,N.$

Пусть $f(x)$ достаточно гладкая функция. Представляя интеграл в виде

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \qquad (1)$$

и используя формулу Ньютона-Котеса

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx H\sum_{l=0}^{n} B_l^n f(x_l), \qquad (2)$$

где $x_l=x_k+lh,$

$$B_l^n=\frac{(-1)^{n-l}}{nl!(n-l)!}\int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-l}dt, \qquad (3)$$

получаем формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx H\sum_{l=0}^{n} B_l^n \sum_{k=0}^{N-1} f(x_l^k). \qquad (4)$$

Здесь использовано обозначение

$x_l^k=a+Hk+hl, k=0,1,\dots,N-1, l=0,1,\dots,n.$

Из формулы (3) получаем значения коэффициентов B_l^n :

$$n=4: B_0^4=7/90, B_1^4=32/90, B_2^4=12/90;$$

$$n=5: B_0^5=19/288, B_1^5=75/288, B_2^4=50/288;$$

Поэтому из (4) для $n=4$ имеем следующую составную формулу:

$$\int_a^b f(x)dx \approx H[\frac{7}{90}\sum_{k=0}^{N-1}(f(x_0^k)+f(x_4^k))+$$

$$+\frac{32}{90}\sum_{k=0}^{N-1}(f(x_1^k)+f(x_3^k))+\frac{12}{90}\sum_{k=0}^{N-1}f(x_2^k)], \quad (5)$$

а для $n=5$ с помощью (4) получаем

$$\int_a^b f(x)dx \approx H[\frac{19}{288}\sum_{k=0}^{N-1}(f(x_0^k)+f(x_5^k))+$$

$$+\frac{75}{288}\sum_{k=0}^{N-1}(f(x_1^k)+f(x_4^k))+\frac{50}{288}\sum_{k=0}^{N-1}(f(x_2^k)+f(x_3^k))]. \quad (6)$$

Ниже приведен пример кода для параллельного вычисления интеграла с $n=4$. Распараллеливание происходит за счет синхронного вычисления трех сумм из (5).

```
 #pragma omp parallel reduction(+:sum_1,sum_2,sum_3)
num_threads(THREAD_AMOUNT)
{
//Calculating the sum_1
#pragma omp for
for (int l = 0; l < N; l++){
   sum_1 += f(a + l*H) + f(a + H + l*H);
}
//Calculating the sum_2
#pragma omp for
for (int l = 0; l < N; l++){
   sum_2 += f(a + h + l*H) + f(a + (n - 1)*h + l*H);
}
//Calculating the sum_3
#pragma omp for
for (int l = 0; l < N; l++){
   sum_3 += f(a + 2 * h + l*H);
}
}
```

При проведении численных экспериментов по формулам (5), (6) в качестве подынтегральной функции была выбрана функция $f(x)=sin(x)+x^5$. На графиках приведена информация о времени вычислений при последовательных и параллельных вычислениях.

Представлен график отношения времени последовательного вычисления интеграла ко времени параллельного вычисления при n =4.

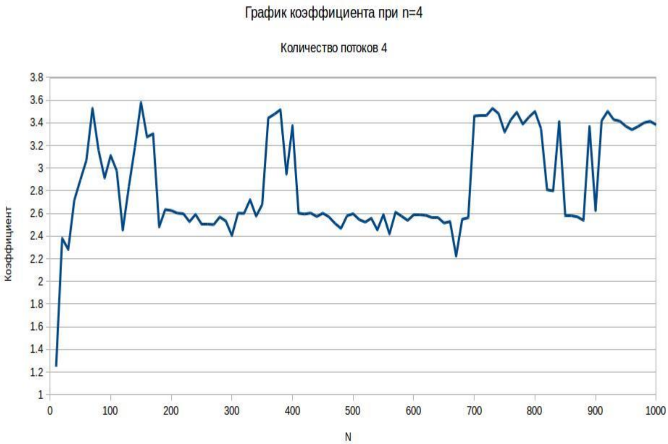


График коэффициента при n=4
Количество потоков 4
Коэффициент
N

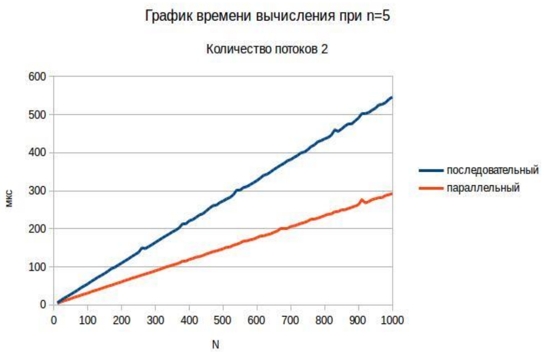
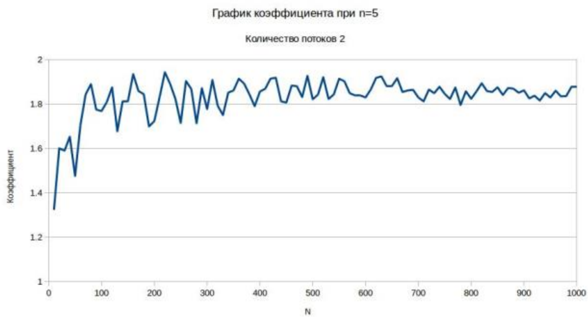


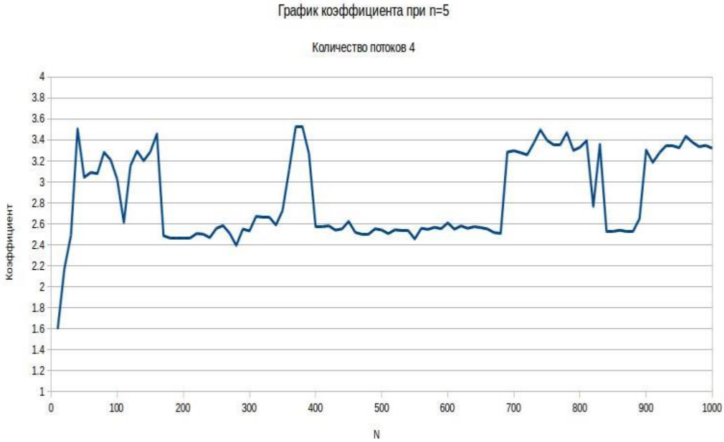
График времени вычисления при n=5
Количество потоков 2
мкс
N
последовательный
параллельный

Представлен график отношения времени последовательного вычисления интеграла ко времени параллельного вычисления при *n* =5.



Заключение

Здесь рассмотрены численные методы вычисления интеграла, удобные для изучения распараллеливания средствами Open MP. При более углубленном изучении проблем, связанных с распараллеливанием вычислений и Open MP, следует рассмотреть вопросы масштабируемости и сложности алгоритма, а также затрат времени на накладные расходы.



Литература

1. В.И. Крылов. Приближенное вычисление интегралов. - Москва.: Изд-во Наука, -1967. -500 с.
2. А.С. Антонов. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP: Учебное пособие. - Москва. Изд-во МГУ, 2009. - 77 с.
3. И.Г. Бурова, Ю.К. Демьянович, Т.О. Евдокимова, О.Н. Иванцова, И.Д.Мирошниченко. Параллельные алгоритмы. Разработка и реализация. Санкт-Петербург: ИНТУИТ, БИНОМ, Л.З., - 2012 -344 с.