Гладкость пространств сплайнов второго порядка[1]

Ю. К. Демьянович, Санкт-Петербургский государственный университет,
y.demjanovich@spbu.ru

Аннотация

Известно, что среди полиномиальных сплайнов B-сплайны третьей степени однозначно характеризуются носителем из четырех соседних сеточных промежутков и принадлежностью к пространству C^2 (см.[1-4]), однако в некоторых случаях компьютерная реализация неполиномиальных сплайнов более эффективна (см. [5-6]). Минимальные (вообще говоря, неполиномиальные) сплайны второго порядка на неравномерной сетке построены в работах [7-8].

Цель данной работы построить минимальные неполиномиальные сплайны третьего порядка на неравномерной сетке, сформулировать необходимые и достатчные условия непрерывности этих сплайнов и их производных в узлах сетки, а также дать средства их эффективного построения. Для достижения поставленной цели разработан новый подход, ибо аппарат векторной алгебры в $\mathbb{R}^3$, существенно использовавшийся ранее (см. [7-8]), для рассматриваемого здесь случая оказался непригодным.

Введение

Сплайны известны достаточно давно: это понятие появилось в 1946 году в работах Шонберга (I.J.Schoenberg). Полиномиальные сплайны активно используются в вычислениях при аппроксимации и интерполяции функций, при решении задач математической физики (они сродни конечно-элементным аппроксимациям); наконец, сплайны — мощный аппарат сжатия числовых информационных потоков (как с частичным, так и с полным восcстановлением информации). Различные подходы к построению сплайнов, а также различные виды сплайнов рассматривались в ряде фундаментальных работ (см. [1] – [7]). Новые идеи использования сплайнов появились в связи со всплесковыми (вэйвлетными) разложениями. Сплайн-всплесковые разложения характеризуются простотой, устойчивостью, позволяют достичь асимптотически оптимального порядка аппроксимации (в отношении N-поперечника стандартных

[1]Работа частично поддержана грантом РФФИ 15-01-08847

комактов), локальностью и рядом других преимуществ, связанных с реализацией вычислений на компьютере. Эти свойства возникают благодаря тому, что исходными соотношениями в этих построениях служат аппроксимационные соотношения. Получающиеся в результате пространства гладких сплайнов оказываются вложенными на вложенных сетках, так что проектирование объемлющего пространства сплайнов на вложенное пространство порождает сплайн-всплесковое разложение. Такое разложение позволяет исходный информационный числовой поток представить в виде двух потоков: основного и всплескового (вэйвлетного). В результате вместо исходного потока передается менее плотный основной поток, а всплесковый передается лишь в случае необходимости полного восстановления исходного потока. Сплайн-всплесковое разложение осуществимо, если пространства сплайнов вложены друг в друга на вложенных сетках, а такая ситуация возникает для пространств гладких сплайнов, так что построение пространств гладких сплайнов актуально.

Цель данной работы рассмотреть гладкие сплайны при достаточно произвольной генерирующей функции в аппроксимационных соотношениях. Здесь даны полные доказательтва непрерывной дифференцируемости сплайнов второго порядка (см. также [7]).

Некоторые обозначения

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел; введем обозначения: $\mathbb{Z}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid j \geq 0,\ j \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid j > 0,\ j \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{R}^3$ – пространство трехмерных вектор-столбцов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots, \mathbf{f}$; для нулевого вектора-столбца будем использовать символ $\mathbf{0}$. Компоненты векторов обозначаются квадратными скобками и нумеруются цифрами $0, 1, 2$; например, $\mathbf{a} = ([\mathbf{a}]_0, [\mathbf{a}]_1, [\mathbf{a}]_2)^T$. К векторам применяются обычные матричные операции, так что для двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ имеем $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \sum_{s=0}^{2}[\mathbf{a}]_s[\mathbf{b}]_s$, в то время, как $\mathbf{a}\mathbf{b}^T$ — матрица с элементами $[\mathbf{a}]_p[\mathbf{b}]_q$ (p и q — номера строки и столбца соответственно, $p, q = 0, 1, 2$). Квадратную матрицу третьего порядка с вектор-столбцами $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ обозначим $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, а ее определитель $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

На конечном или бесконечном интервале (α, β) вещественной оси $\mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку $X \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$X:\ \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots;$$

$$\text{пусть } \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\to-\infty} x_j,\ \beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\to+\infty} x_j. \tag{2.1}$$

Введем обозначения $M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j\in\mathbb{Z}}\,(x_j, x_{j+1})$, $S_j \stackrel{\text{def}}{=} [x_j, x_{j+3}]$, $\quad J_k \stackrel{\text{def}}{=} \{k-2, k-1, k\}$, $\quad k, j \in \mathbb{Z}$.

При $K_0 \geq 1$ обозначим $\mathcal{X}(K_0, \alpha, \beta)$ класс локально квазиравномерных сеток на промежутке (α, β), т.е. класс сеток вида (2.1) со свойством $K_0^{-1} \leq (x_{j+1} - x_j)(x_j - x_{j-1})^{-1} \leq K_0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$. Введем характеристику h_X мелкости сетки X, полагая $h_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j\in\mathbb{Z}} (x_{j+1} - x_j)$.

Пусть $\mathbb{X}(M)$ — линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M, а $C^S(\alpha, \beta)$ — линейное пространство функций, непрерывных вместе со всеми производными до порядка S во внутренних точках интервала (α, β).

Рассмотрим множество $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^3$; пусть $A_j \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j\Big)$. Множество $\mathbf{A}$ называется *полной цепочкой векторов*, если $\det A_j \neq 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Совокупность всех полных цепочек будем обозначать $\mathbb{A}$.

Пространства (X, A, φ)-сплайнов

Рассмотрим трех-компонентную вектор-функцию $\varphi(t)$ с компонентами из $\mathbb{X}(M)$. Если $\mathbf{A} \in \mathbb{A}$, то функции $\omega_j(t),\ t \in M$, $j \in \mathbb{Z}$, однозначно определяются из условий

$$\sum_{j'\in J_k} \mathbf{a}_{j'}\omega_{j'}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}),\ k \in \mathbb{Z};$$

$$\omega_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \notin S_j \cap M. \tag{3.1}$$

По формулам Крамера из (3.1) находим

$$\omega_j(t) = \frac{\det\Big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_k, j'\neq j} \;\|\; {}'^j \varphi(t)\Big)}{\det\Big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_k}\Big)} \qquad \forall t \in (x_k, x_{k+1}), \quad \forall j \in J_k, \tag{3.2}$$

где значок $\|\ {}'^j$ означает, что определитель в числителе получается из определителя в знаменателе заменой столбца $\mathbf{a}_j$ на столбец $\varphi(t)$ (с сохранением прежнего порядка следования столбцов). Из соотношения (3.1) ясно, что $\mathrm{supp}\, \omega_j \subset S_j$. Более наглядны, но менее удобны для доказательств формулы, получающиеся развертыванием соотношения (3.2):

$$\omega_j(t) = \frac{\det\big(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t)\big)}{\det\big(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j\big)} \quad \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}),$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det\big(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t), \mathbf{a}_{j+1}\big)}{\det\big(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}\big)} \quad \text{при } t \in (x_{j+1}, x_{j+2}),$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det\big(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}\big)}{\det\big(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}\big)} \quad \text{при } t \in (x_{j+2}, x_{j+3}),$$

В линейном пространстве $\mathbb{X}(M)$ содержится линейное пространство

$$\widetilde{X}_{(X,\mathbf{A},\varphi)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{u} \mid \widetilde{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\omega_j(t) \quad \forall t \in M, \ \ \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}, \tag{3.3}$$

называемое *пространством минимальных* $(X, \boldsymbol{A}, \varphi)$*-сплайнов* (второго порядка); функции ω_j, $j \in \mathbb{Z}$, называются *образующими* пространства $\widetilde{X}_{(X,\mathbf{A},\varphi)}$.

Рассмотрим возможность продолжения функции ω_j, $j \in \mathbb{Z}$, непрерывным образом на интервал (α, β). Множество всех функций, непрерывных на интервале (α, β), обозначим $C(\alpha, \beta)$; для любого натурального числа S введем также обозначение $C^S(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u^{(i)} \in C(\alpha, \beta) \ \forall i = 0, 1, 2, \dots, S\}$, полагая $C^0(\alpha, \beta) = C(\alpha, \beta)$. Для вектор-функций

$$\mathbf{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} ([\mathbf{u}]_0(t), [\mathbf{u}]_1(t), [\mathbf{u}]_2(t))^T$$

с компонентами $[\mathbf{u}]_i(t)$, $i = 0, 1, 2$, введем пространства $\mathbf{C}(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u} \mid [\mathbf{u}]_j \in C(\alpha, \beta) \ \forall j = 0, 1, 2\}$, $\mathbf{C}^S(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u} \mid [\mathbf{u}]_j \in C^S(\alpha, \beta) \ \forall j = 0, 1, 2\}$; как обычно, считаем $\mathbf{C}^0(\alpha, \beta) = \mathbf{C}(\alpha, \beta)$.

Лемма 1. *Пусть $\varphi \in \boldsymbol{C}(\alpha, \beta)$, $\boldsymbol{A}$ — полная цепочка векторов, и пусть фиксированы $k \in \mathbb{Z}$ и $t_* \in [x_k, x_{k+1}]$. Для того чтобы*

$$\lim_{t\to t_*, \ \ t\in(x_k, x_{k+1})} \omega_j(t) = 0, \tag{3.4}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\det\Big(\{\boldsymbol{a}_{j'}\}_{j'\in J_k, j'\neq j} \ \ \| \ \ {}^{\prime j}\varphi(t_*)\Big) = 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. При $t \in (x_k, x_{k+1})$ функция $\omega_j(t)$ имеет вид (3.2), так что учитывая непрерывность вектор-функции $\varphi(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}] \in (\alpha, \beta)$, видим, что условия (3.4) и (3.5) эквивалетны. ∎

Лемма 2. *Пусть $\varphi \in \boldsymbol{C}(\alpha, \beta)$, $\boldsymbol{A}$ — полная цепочка векторов, и в узле x_k выполнены условия*

$$\lim_{t\to x_k-0} \omega_{k-2}(t) = 0, \qquad \lim_{t\to x_k+0} \omega_k(t) = 0. \tag{3.6}$$

Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{t\to x_k-0}\omega_j(t)=\lim_{t\to x_k+0}\omega_j(t)\ \textit{при}\ \ j\in\{k-2,k-1\}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Заменяя k на $k-1$ в соотношении (3.1), имеем

$$\sum_{j\in J_{k-1}}\mathbf{a}_j\omega_j(t)\equiv\varphi(t)\qquad\forall t\in(x_{k-1},x_k),$$

откуда в пределе при $t\to x_k-0$ ввиду первого из предположений (3.6) получаем

$$\sum_{j\in\{k-2,k-1\}}\mathbf{a}_j\lim_{t\to x_k-0}\omega_j(t)=\varphi(x_k). \tag{3.8}$$

Аналогично из (3.1) и второго соотношения в (3.6) находим

$$\sum_{j\in\{k-2,k-1\}}\mathbf{a}_j\lim_{t\to x_k+0}\omega_j(t)=\varphi(x_k). \tag{3.9}$$

Поскольку векторы $\{\mathbf{a}_j\mid k-2,k-1\}$ линейно независимы, то из тождеств (3.8) – (3.9) следуют соотношения (3.7). ∎

Теорема 1. *Пусть $\varphi\in\boldsymbol{C}(\alpha,\beta)$, $\boldsymbol{A}$ — полная цепочка векторов. Для того, чтобы функции $\omega_j(t)\quad(\forall j\in\mathbb{Z})$ могли быть продолжены до функций, непрерывных на интервале (α,β) необходимо и достаточно, чтобы предельные значения функций $\omega_j(t)$ $\forall j\in\mathbb{Z}$ на границе носителя каждой из них были равны нулю.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Благодаря непрерывности вектор-функции $\varphi(t)$ достаточно исследовать непрерывность функций $\omega_j(t)$ в узлах сетки X. Если узел x_k находится на границе множества S_j, то непрерывность ω_j в этой точке вытекает из условия доказываемой теоремы. Если же узел x_k лежит внутри этого множества, то выполнены условия леммы 2, и, следовательно, справедливо соотношение (3.7). ∎

Теорема 2. *Пусть $\varphi\in\boldsymbol{C}(\alpha,\beta)$, $\boldsymbol{A}$ — полная цепочка векторов. Для того, чтобы функции $\omega_j(t)\quad(\forall j\in\mathbb{Z})$ могли быть продолжены до функций, непрерывных на интервале (α,β), необходимо и достаточно, чтобы были выполнены соотношения*

$$\det\bigl(\boldsymbol{a}_{k-2},\boldsymbol{a}_{k-1},\varphi(x_k)\bigr)=0\qquad\forall k\in\mathbb{Z}. \tag{3.10}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что обращение в нуль предельных значений функций $\omega_j(t) \quad (\forall j \in \mathbb{Z})$ на границе носителя каждой из них эквивалентно соотношениям (3.10).

Записывая формулу (3.2) для $k = j$, имеем

$$\omega_j(t) = \frac{\det\Big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_j, j'\neq j} \ \parallel \ {}'^j\varphi(t)\Big)}{\det\Big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_j}\Big)} \qquad \forall t \in (x_j, x_{j+1}),$$

или (что то же самое)

$$\omega_j(t) = \frac{\det\big(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t)\big)}{\det\big(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j\big)} \quad \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}).$$

Следовательно,

$$\omega_j(x_j + 0) = \frac{\det\big(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \varphi(x_j)\big)}{\det\big(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j\big)}$$

так что обращение в нуль на левом конце носителя эквивалентно равенству

$$\det\big(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \varphi(x_j)\big) = 0,$$

что ввиду произвольности $j \in \mathbb{Z}$ совпадает с формулой (3.10).

Аналогичным образом применение соотношения (3.2) для $k = j + 2$ дает

$$\omega_j(t) = \frac{\det\big(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}\big)}{\det\big(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}\big)}, \quad \text{при } t \in (x_{j+2}, x_{j+3}),$$

откуда

$$\omega_j(x_{j+3} - 0) = \frac{\det\big(\varphi(x_{j+3}), \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}\big)}{\det\big(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}\big)},$$

так что обращение в нуль на правом конце носителя эквивалентно равенству

$$\det\big(\varphi(x_{j+3}), \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}\big) = 0,$$

что совпадает с формулой (3.10), если принять во внимание произвольность $j \in \mathbb{Z}$ и положить $j = k - 3$.

Теорема полностью доказана. ■

Замечание 1. Анализируя доказательство теоремы нетрудно заметить, что для возможности непрерывного продолжения функций $\omega_j(t) \quad (\forall j \in \mathbb{Z})$ на интервал (α, β) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство нулю предельных значений функций на левом конце носителя (или на правом конце носителя).

В дальнейшем для вектор-функции $\varphi \in \mathbf{C}^S(\alpha,\beta)$ введем обозначение

$$\varphi_k \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_k), \qquad \varphi_k^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{(i)}(x_k), \quad i = 0, 1, \ldots, S, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 3. *Пусть $S \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi \in \boldsymbol{C}^S(\alpha,\beta)$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{A}$. Для того, чтобы производные $\omega_j^{(S)}(t)$ функций $\omega_j(t)$, $t \in M$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, могли быть продолжены до функций, непрерывных на интервале (α,β), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\det\big(\boldsymbol{a}_{k-2}, \boldsymbol{a}_{k-1}, \varphi_k^{(S)}\big) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно продифференцировать соотношения (3.2) и применить рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы при доказательстве предыдущей теоремы. ∎

Следствие 1. *Пусть $\varphi \in \boldsymbol{C}^1(\alpha,\beta)$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{A}$. Для того, чтобы все функции $\omega_j(t)$, $t \in M$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, могли быть продолжены до функций класса $C^1(\alpha,\beta)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$\det\big(\boldsymbol{a}_{k-2}, \boldsymbol{a}_{k-1}, \varphi_k^{(S)}\big) = 0 \qquad S = 0, 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{3.12}$$

Введем обозначения

$$\mathbf{b}_s^T \mathbf{x} \equiv \det(\varphi_s, \varphi\,'_s, \mathbf{x}), \tag{3.13}$$

$$\mathbf{a}_j \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \varphi_{j+1} & \varphi\,'_{j+1} \\ \det(\varphi_{j+2}, \varphi\,'_{j+2}, \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+2}, \varphi\,'_{j+2}, \varphi\,'_{j+1}) \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

считая внешний определитель символическим (относительно первой строки).

Пусть выполнено условие

(A) $\quad \varphi \in \mathbf{C}^2[\alpha,\beta]$, а вронскиан $\det(\varphi, \varphi\,', \varphi\,'')(t)$ отличен от нуля на отрезке $[\alpha,\beta]$.

Лемма 3. *Если выполнено условие (A), то при достаточно мелкой сетке из класса $\mathbb{X}(K_0,\alpha,\beta)$ цепочка векторов (3.14) полная.*

Эта лемма устанавливается использованием формулы Тейлора.

Теорема 4. *Пусть $\varphi \in \boldsymbol{C}^1[\alpha,\beta]$, и цепочка векторов (3.14) полная. Тогда*

$$\omega_j \in C^1(\alpha,\beta) \qquad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Из (3.13) – (3.14) для любого $j \in \mathbb{Z}$ имеем числовой определитель

$$\mathbf{b}_{j+1}^T \mathbf{a}_j = \det \begin{pmatrix} \det(\varphi_{j+1}, \varphi'_{j+1}, \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+1}, \varphi'_{j+1}, \varphi'_{j+1}) \\ \\ \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1}) \\ \end{pmatrix},$$

первая строка которого состоит из нулей, а также определитель

$$\mathbf{b}_{j+2}^T \mathbf{a}_j = \det \begin{pmatrix} \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1}) \\ \\ \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1}) \\ \end{pmatrix},$$

с двумя одинаковыми строками; таким образом, оба определителя равны нулю. Следовательно

$$\mathbf{b}_{j+1}^T \mathbf{a}_j = 0, \qquad \mathbf{b}_{j+2}^T \mathbf{a}_j = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{3.15}$$

Обозначая $\mathcal{L}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ плоскость, проходящую через векторы **a** и **b**, из (3.15) имеем

$$\mathcal{L}\{\mathbf{b}_{j+1}, \mathbf{b}_{j+2}\} \perp \mathbf{a}_j \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{3.16}$$

Заменяя здесь j на $j-1$, находим

$$\mathcal{L}\{\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_{j+1}\} \perp \mathbf{a}_{j-1} \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{3.17}$$

Из (3.16) – (3.17) получаем

$$\mathcal{L}\{\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j\} \perp \mathbf{b}_{j+1} \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{3.18}$$

С другой стороны, из (3.13) видно, что

$$\mathcal{L}\{\varphi_{j+1}, \varphi'_{j+1}\} \perp \mathbf{b}_{j+1} \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{3.19}$$

Формулы (3.18) и (3.19) показывают, что рссматриваемые плоскости совпадают

$$\mathcal{L}\{\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j\} = \mathcal{L}\{\varphi_{j+1}, \varphi'_{j+1}\} \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{3.20}$$

Из соотношения (3.20) следуют равенства (3.12); тем самым доказана непрерывная дифференцируемость функций ω_j. ∎

Таким образом, для построения минимальных сплайнов класса C^1 в качестве функций $[\varphi]_0$, $[\varphi]_1$, $[\varphi]_2$ достаточно взять фундаментальную систему решений дифференциального уравнения вида $y\ '' + b_1(t)y\ ' + b_0(t)y = 0$ с непрерывными коэффициентами на отрезке $[\alpha, \beta]$. В частном случае уравнения $y\ '' = 0$ получаем хорошо известные B-сплайны второй степени (см., например, [2-4]).

Литература

[1] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М. 1972. 316 с.

[2] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М., 1976. 248 с.

[3] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М., 1980. 352 с.

[4] Малоземов В.Н., Певный А.Б. Полиномиальные сплайны. Л., 1986. 120 с.

[5] Buhmann M.D. Multiquadratic Prewavelets on Nonequally Spaced Knots in One Dimension. Math. of Comput., 1995. Vol. 64, № 212. P. 1611-1625.

[6] Davydov O., Nurnberger G. Interpolation by C^1 splines of degree $q \geq 4$ on triangulations. J. Comput. and Appl. Math., 2000. Vol. 126. P. 159-183.

[7] *Бурова И.Г., Демьянович Ю.К.* О гладкости сплайнов Ж. Математическое моделирование. 2004, т.16, №12. С.40-43