

О распараллеливании вычислений

Бурова И. Г., профессор СПбГУ, burovaig@mail.ru

Мирошниченко И. Д., ст. преподаватель СПбГУ

Варивода И. А., студент 4 курса СПбГУ, varivoda_ivan@mail.ru,

Давыдов А. А., студент 4 курса СПбГУ, alex_davidov95@mail.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается приближенное вычисление интеграла с помощью составной квадратурной формулы Ньютона-Котеса и распараллеливание вычислений с помощью средств Open MP.

Введение

В последнее десятилетие, с одной стороны, значительно расширился диапазон областей применения высокопроизводительных вычислений, с другой - серьезное внимание уделяется разработке и улучшению методов параллельного программирования. Поэтому столь актуальными и востребованными оказываются дисциплины, в которых знакомят обучающихся с особенностями написания параллельных программ или методами преобразования последовательных программ в параллельные, например, методами распараллеливания вычислений. Изучение любой дисциплины, связанной с программированием, оказывается эффективно воспринимаемым при достаточно большом объеме практических занятий. Так, наиболее удобным способом изучения методов распараллеливания параллельно с изучением методов вычислений является практическое распараллеливание в среде Open MP.

В частности, одной из важных методологических задач в области вычислительной математики является получение практических навыков программирования для вычисления определенного интеграла. Заметим, что существует огромное количество теоретических методов для приближенного вычисления интеграла и еще больше методов написания последовательных программ, реализующих эти вычисления. Нас же будут интересовать методы распараллеливания для приближенного вычисления интеграла над общей памятью в среде Open MP.

О построении квадратурных формул

Пусть a, b — вещественные числа, где $b > a$, n, N — натуральные числа. Возьмем $H = \frac{b-a}{N}, h = \frac{H}{n}$. Положим $x_k = a + kH, k = 0, 1, \dots, N$.

Пусть $f(x)$ достаточно гладкая функция. Представляя интеграл в виде

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \quad (1)$$

и используя формулу Ньютона-Котеса

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx H \sum_{l=0}^n B_l^n f(x_l), \quad (2)$$

где $x_l = x_k + lh$,

$$B_l^n = \frac{(-1)^{n-l}}{n! (n-l)!} \int_0^n \frac{t(t-1) \cdots (t-n)}{t-l} dt, \quad (3)$$

получаем формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx H \sum_{l=0}^n B_l^n \sum_{k=0}^{N-1} f(x_l^k). \quad (4)$$

Здесь использовано обозначение

$$x_l^k = a + Hk + hl, k = 0, 1, \dots, N-1, l = 0, 1, \dots, n.$$

Из формулы (3) получаем значения коэффициентов B_l^n :

$$n = 4: B_0^4 = 7/90, B_1^4 = 32/90, B_2^4 = 12/90;$$

$$n = 5: B_0^5 = 19/288, B_1^5 = 75/288, B_2^5 = 50/288;$$

Поэтому из (4) для $n = 4$ имеем следующую составную формулу:

$$\int_a^b f(x) dx \approx H \left[\frac{7}{90} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x_0^k) + f(x_4^k)) + \right.$$

$$+ \frac{32}{90} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x_1^k) + f(x_3^k)) + \frac{12}{90} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_2^k)], \quad (5)$$

а для $n = 5$ с помощью (4) получаем

$$\int_a^b f(x) dx \approx H \left[\frac{19}{288} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x_0^k) + f(x_5^k)) + \frac{75}{288} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x_1^k) + f(x_4^k)) + \frac{50}{288} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x_2^k) + f(x_3^k)) \right]. \quad (6)$$

Ниже приведен пример кода для параллельного вычисления интеграла с $n = 4$. Распараллеливание происходит за счет синхронного вычисления трех сумм из (5).

```
#pragma omp parallel reduction(+:sum_1,sum_2,sum_3)
num_threads(THREAD_AMOUNT)
{
//Calculating the sum_1
#pragma omp for
for (int l = 0; l < N; l++){
    sum_1 += f(a + l*H) + f(a + H + l*H);
}
//Calculating the sum_2
#pragma omp for
for (int l = 0; l < N; l++){
    sum_2 += f(a + h + l*H) + f(a + (n - 1)*h + l*H);
}
//Calculating the sum_3
#pragma omp for
for (int l = 0; l < N; l++){
    sum_3 += f(a + 2 * h + l*H);
}
}
```

При проведении численных экспериментов по формулам (5), (6) в качестве подынтегральной функции была выбрана функция $f(x) = \sin(x) + x^5$. На графиках приведена информация о времени вычислений при последовательных и параллельных вычислениях.

График времени вычисления при $n=4$

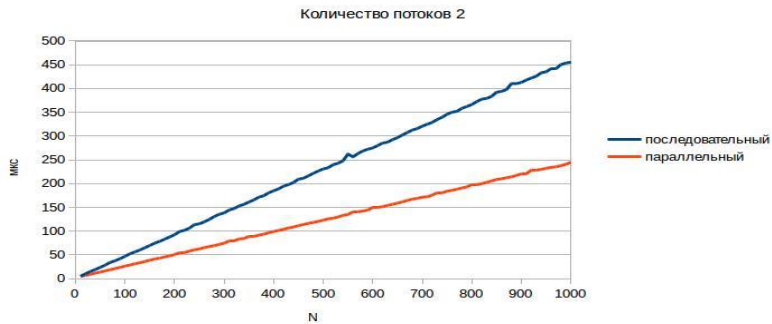


График времени вычисления при $n=4$



Представлен график отношения времени последовательного вычисления интеграла ко времени параллельного вычисления при $n=4$.

График коэффициента при $n=4$

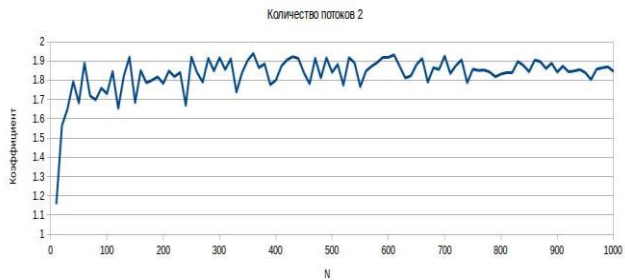


График коэффициента при $n=4$

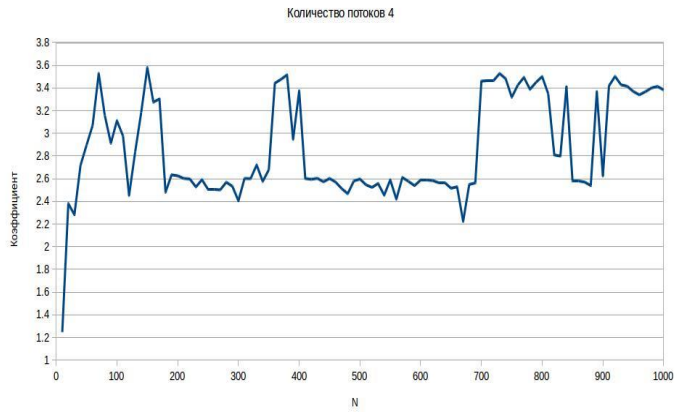
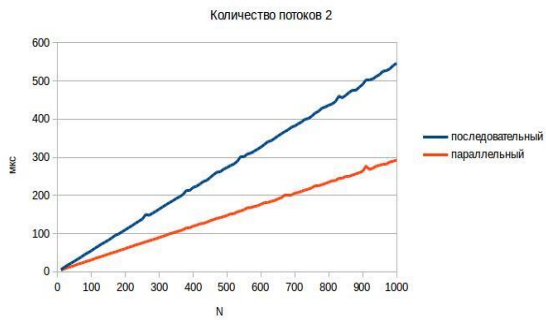
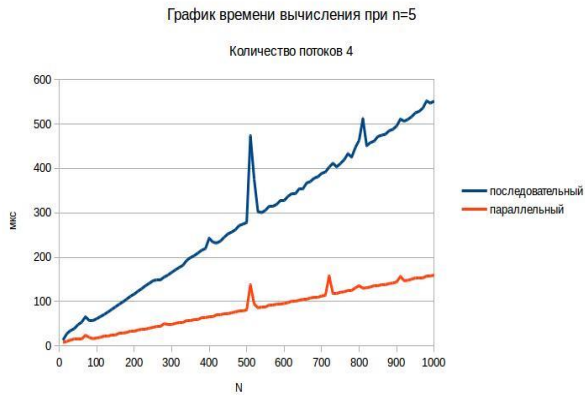
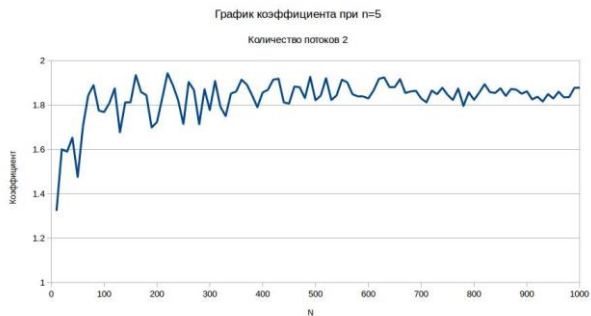


График времени вычисления при $n=5$



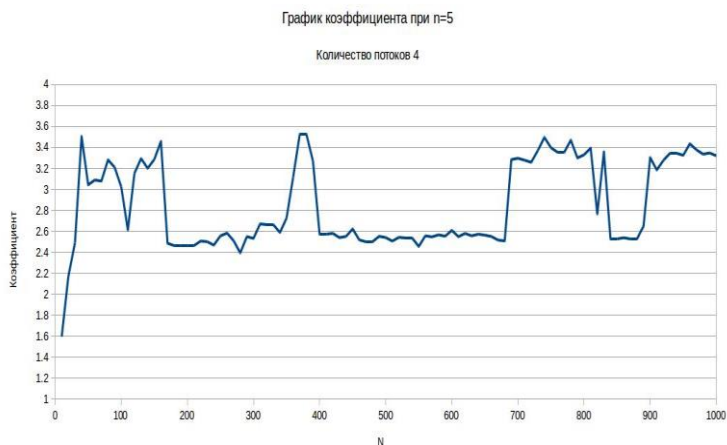


Представлен график отношения времени последовательного вычисления интеграла ко времени параллельного вычисления при $n = 5$.



Заключение

Здесь рассмотрены численные методы вычисления интеграла, удобные для изучения распараллеливания средствами Open MP. При более углубленном изучении проблем, связанных с распараллеливанием вычислений и Open MP, следует рассмотреть вопросы масштабируемости и сложности алгоритма, а также затрат времени на накладные расходы.



Литература

1. В.И. Крылов. Приближенное вычисление интегралов. - Москва.: Изд-во Наука, -1967. -500 с.
2. А.С. Антонов. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP: Учебное пособие. - Москва. Изд-во МГУ, 2009. - 77 с.
3. И.Г. Бурова, Ю.К. Демьянович, Т.О. Евдокимова, О.Н. Иванцова, И.Д.Мирошниченко. Параллельные алгоритмы. Разработка и реализация. Санкт-Петербург: ИНТУИТ, БИНОМ, Л.З., - 2012 -344 с.