Условия NP-полноты и полиномиальности для систем делимостей значений линейных полиномов на число

Косовский Н.К. профессор кафедры информатики СПбГУ,
kosov@NK1022.spb.edu
Старчак М.Р. аспирант кафедры информатики СПбГУ, mikhstark@gmail.com

Аннотация

Исследована задача проверки совместности в целых числах из заданного невырожденного отрезка положительных целых чисел $[D, D']$, системы делимостей значений линейных полиномов с целыми коэффициентами на целое число K. Доказана её NP-полнота в случае ровно трёх ненулевых коэффициентов при переменных в каждом линейном полиноме. В частности, при $K = kD' - 1$ и $k \geq 3$, при $K = kD + 1$ и $k \geq 3$. Если ровно два коэффициента при переменных в каждом полиноме не равны нулю и $K \geq max_{i\in[1:m]}(a_{i,1} + a_{i,2})(D' - D) + 1$, то задача принадлежит классу **P**. В случае, когда не равен нулю только один коэффициент, задача также находится в классе **P**.

Введение

В работах Бельтюкова [1] и Липшица [2] была доказана разрешимость экзистенциальной теории натуральных чисел со сложением и делимостью. Истинность формулы такой теории равносильна совместности в неотрицательных целых числах системы делимостей значений линейных полиномов: $\exists x_1 ... \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{m} f_i(x_1, ..., x_n) \mid g_i(x_1, ..., x_n)$. Назовём сокращенно эту задачу СДЛП. Вопросы сложности алгоритма, проверяющего совместность системы делимостей, были рассмотрены Липшицем в [3]. Задача является NP-трудной и принадлежит классу NP при фиксированном числе делимостей $m \geq 5$.

Для произвольного числа делимостей не известно, принадлежит ли СДЛП классу NP. Наилучшим результатом является доказательство в [4] того, что задача лежит в NEXPTIME. Результаты об NP-полноте частных случаев СДЛП служат основой для доказательства NP-полноты задач анализа работы счётчиковых автоматов, например в [5].

NP-полные задачи о совместности систем делимостей значений линейных полиномов на число

Определим такой частный случай СДЛП, при котором полином в левой части от знака делимости в каждом выражении есть одно и то же целое число, большее единицы. Будем рассматривать задачу на отрезке положительных целых чисел $[D, D']$.

Совместность на отрезке системы делимостей значений линейных выражений на число K (**СДна**K).

УСЛОВИЕ: Задано положительное целое число K и набор векторов $a_i = (a_{i,0}, \dots, a_{i,n})$, представляющих линейные полиномы вида $a_{i,0} + \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$, при $1 \le i \le m$ с неотрицательными целыми координатами.

ВОПРОС: Существуют ли такие положительные целые числа $x_1, \dots, x_n$, такие, что K делит $a_{i,0} + \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$ для всех $1 \le i \le m$?

Для серии подзадач **СДна**K, зависящих от параметра k, с делителем вида $K = kD' - 1$ и целом $k \ge 3$, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. При любом целом $k \ge 3$, задача **СДна(**$kD' - 1$**)** на невырожденном отрезке положительных целых чисел $[D, D']$, при условии, что в каждом линейном полиноме имеется **ровно три** ненулевых коэффициента при переменных, является NP-полной.

Доказательство теоремы состоит в полиномиальном сведении 3-ВЫП ПРИ ОДНОМ ИСТИННОМ ЛИТЕРАЛЕ (доказана в [6] и приведена в [7]) к каждой задаче серии. Константы "истина" и "ложь" кодируются значениями $D' - 1$ и D' соответственно, дизъюнкции кодируются выражениями $kD' - 1 \,|\, (k-3)D' + y_1 + y_2 + y_3$. Отрицание переменной x_i кодируется тремя делимостями с тремя фиктивными переменными

$$\begin{cases} kD' - 1 \,|\, (k-3)D' + w_1 + x_i + x_i' \\ kD' - 1 \,|\, (k-3)D' + w_2 + x_i + x_i' \\ kD' - 1 \,|\, (k-3)D' + w_1 + w_2 + w_3 \end{cases}.$$

Аналогичное полиномиальное сведение возможно построить и для задач с делителем вида $kD + 1$ при целом $k \ge 3$.

Теорема 2. При любом целом $k \ge 3$, задача **СДна**$(kD + 1)$ на невырожденном отрезке положительных целых чисел $[D, D']$, при условии, что в каждом линейном полиноме имеется ровно три ненулевых коэффициента при переменных, является NP-полной.

Полиномиальные случаи задачи о совместности систем делимостей значений линейных полиномов на число

Задача **СДна**K оказывается NP-полной уже при только трёх ненулевых коэффициентах при переменных в линейном полиноме. Рассмотрим теперь такие системы делимостей, в которых имеется не более двух ненулевых коэффициентов.

Утверждение 1. Задача **СДна**K, при условии, что в каждом линейном полиноме имеется только один ненулевой коэффициент при переменных, принадлежит классу **P**.

Такую систему можно решить, воспользовавшись алгоритмом Евклида и обобщенной китайской теоремой об остатках. Если решение существует, то оно будет единственным по некоторому модулю $K_i|K$ для каждого x_j, $1 \leq j \leq n$, и его можно получить явно. Следовательно, Утверждение 1 верно как на луче, так и на отрезке положительных целых чисел.

При рассмотрении систем делимостей с только двумя ненулевыми коэффициентами при переменных, потребуется следующее утверждение.

Утверждение 2. Задача проверки совместности систем линейных уравнений в положительных целых числах,при условии, что в каждом уравнении ровно два коэффициента отличны от нуля, принадлежит классу **P**.

Решение задачи из Утверждения 2 можно свести к решению системы из Утверждения 1. Следовательно, на любом отрезке положительных целых чисел задача также принадлежит классу P.

Утверждение 3. Задача **СДна**K на любом невырожденном отрезке положительных целых чисел $[D, D']$, при условии, что в каждом линейном выражении ровно два коэффициента при переменных отличны от нуля, и при $K \geq max_{i \in [1:m]}(a_{i,1} + a_{i,2})(D' - D) + 1$, принадлежит классу **P**.

При указанном ограничении на значение K, каждая делимость равносильна линейному уравнению. Осталось воспользоваться Утверждением 2.

Заключение

В работе доказана алгоритмическая сложность некоторых подзадач задачи проверки совместности в положительных целых числах систем делимостей линейных выражений на число. Задача NP-полна на отрезке положительных целых чисел уже при наличии в полиномах трёх ненулевых коэффициентов при переменных. Для не более двух ненулевых коэффициентов указан класс подзадач, разрешимых за полиномиальное время.

Доказательства NP-полноты частных случаев общей задачи СДЛП широко применимы в теории автоматов. Полученные результаты дополняют знания о сложности данной задачи.

Литература

[1] Бельтюков А.П. Разрешимость универсальной теории натуральных чисел со сложением и делимостью // Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 60, 1975. С. 15 – 28.

[2] Lipshitz L. The Diophantine problem for addition and divisibility // Transactions of the American Mathematical Society, v. 235, pp. 271 – 283, 1976.

[3] Lipshitz L. Some remarks on the Diophantine problem for addition and divisibility, Bull. Soc. Math. Belg. Ser.B, vol. 33, no. 1, pp. 41–52, 1981.

[4] Lechner A., Ouaknine J., Worrell J. On the Complexity of Linear Arithmetic with Divisibility. Proceedings of the 30th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS), pp. 667-676, 2015.

[5] Haase C. On the complexity of model checking counter automata. Ph.D. Thesis, University of Oxford, 2012.

[6] Schaefer T.J. The complexity of satisfiability problems. Proceedings 10th Symposium on Theory of Computing, ACM Press, pp. 216–226, 1978

[7] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. (Garey M.R., Johnson D.S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. Freeman, New York (1979))