Применение рандомизированных алгоритмов для достижения дифференцированного консенсуса в мультиагентных сетях

Иванский Ю. В., аспирант кафедры системного программирования СПбГУ, ivanskiy.yuriy@gmail.com

Аннотация

В статье рассматривается задача достижения дифференцированного консенсуса в мультиагентной сети, обрабатывающей задания разных классов. Задача состоит в том, чтобы в системе с несколькими классами заданий консенсус достигался для каждого класса, причем это значение может отличаться между классами. Предполагается, что сеть работает в условиях переменной структуры связей, помех, задержек при передаче информации по каналам связи. В работе предлагается рандомизированная управляющая стратегия, позволяющая достичь дифференцированного консенсуса в указанных условиях. Предложенная стратегия оптимизируется по величине размера шага алгоритма управления. Рассматривается случай формирования управляющей стратегии при наличии стоимостных ограничений на использование связей внутри сети.

Введение

В ходе выполнения диссертационной работы «Рандомизированные алгоритмы в задачах мультиагентного взаимодействия» выполнялись разработка и исследование алгоритмов повышения эффективности децентрализованного перераспределения между узлами вычислительной сети очередей задач с разными уровнями приоритетов в условиях переменной структуры связей, помех и задержек при передаче информации. Основные результаты исследований отражены в статьях [1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]

Постановка задачи

Пусть система образована n агентами, взаимодействующими друг с другом, и множеством заданий m различных классов, которые должны быть выполнены системой. Задания поступают в систему на разных агентов в различные дискретные моменты времени $t = 1, \ldots$.

Сопоставим каждому агенту номер i, $i = 1, \ldots, n,$. Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$ — множество всех агентов в системе. Топология сети может изменяться со временем и моделируется последовательностью ориентированных графов $\{(N, E_t)\}_{t \geq 0}$, где E_t — множество ребер в графе (N, E_t) в момент времени t. Соответствующие матрицы смежности обозначим $A_t = [a_t^{i,j}]$. Предположим, что задачи (задания) относятся к различным классам (приоритетам) $k = 1, \ldots, m$ и у каждого агента есть m очередей — по одной на задания каждого класса.

Поведение агента $i \in N$ задают две характеристики: 1) вектор размерности m, состоящий из длин очередей заданий $\mathbf{q}_t^i = [q_t^{i,k}]$ в момент времени t, k-й элемент которого равен числу заданий k-го класса $k = 1, \ldots, m$; 2) производительность p^i.

Агенты должны распределить количество вычислительных операций между заданиями различных классов таким образом, чтобы, с одной стороны, обеспечить очередность выполнения заданий согласно их приоритетам, а с другой стороны, чтобы задания с низким приоритетом не простаивали “бесконечно”, дожидаясь своей очереди на исполнение. Каждому классу заданий поставим в соответствие долю производительности P_k, $k = 1, \ldots, m$, одинаковую для конкретного класса k для всех агентов. На каждом агенте задания из очередей будем выбирать случайно с вероятностью $\tilde{p}_t^{i,k} = \frac{P_k}{\sum_{q_t^{i,l} > 0} P_l}$, если $q_t^{i,k} > 0$, а иначе $\tilde{p}_t^{i,k} = 0$.

Здесь $\tilde{p}_t^{i,k}$ — это вероятность выбора на исполнение агентом i задания класса k в момент времени t. Таким образом, чем больше P_k, тем выше вероятность выбрать на исполнение задание класса k. Отсюда, производительность агента распределяется между всеми классами заданий следующим образом: $p_{t,av}^{i,k} = \tilde{p}_t^{i,k} p^i$. Здесь $p_{t,av}^{i,k}$ обозначает число операций, выделяемое *в среднем* на агенте i для выполнения заданий класса k при текущей вероятности выбора их на исполнение в момент времени t. Обозначим $p_t^{i,k}$ количество операций, выделенное агентом i на задания класса k в момент времени t.

Для всех $i \in N$, $t = 0, 1, \ldots$, динамика сетевой системы имеет вид: $\mathbf{q}_{t+1}^i = \mathbf{q}_t^i - \mathbf{p}_t^i + \mathbf{z}_t^i + \mathbf{u}_t^i$, где $\mathbf{p}_t^i = [p_t^{i,k}]$, и $\mathbf{z}_t^i = [z_t^{i,k}]$ — векторы размерности m, k-й элемент $z_t^{i,k}$ обозначает число новых заданий класса k, поступивших в систему на агента i в момент времени t; $\mathbf{u}_t^i \in \mathrm{R}^m$ является вектором управляющих воздействий размерности m.

Для топологии $\{N_t^i, i \in N\}$ определим стоимость $C(\{N_t^i, i \in N\}) =$

$\max_{i\in N}\sum_{j\in N_t^i} a_t^{i,j}$.

Цель управления состоит в том, чтобы поддерживать сбалансированную (равную) загрузку по всей сети для всех уровней приоритета, удовлетворяя при этом требование на ограничение стоимости.

В такой постановке можно решать задачу достижения консенсуса для состояний агентов $\mathbf{x}_t^i = [x_t^{i,k}]$, где $x_t^{i,k} = q_t^{i,k}/p_{t,av}^{i,k}$.

Будем считать, что для формирования управляющей стратегии $\mathbf{u}_t^i$ каждый агент $i \in N$ опирается на зашумленные данные о состояниях соседей, которые также могут приходить с задержкой: $\mathbf{y}_t^{i,j} = \mathbf{x}_{t-s_t^{i,j}}^j + \mathbf{w}_t^{i,j},\ j \in N_t^i$, где $\mathbf{w}_t^{i,j}$ — вектор помех, $0 \le s_t^{i,j} \le \bar{s}$ — целочисленные задержки, а $\bar{s}$ — максимально возможная задержка.

Стоимостные ограничения на топологию и рандомизированная декомпозиция топологии

Задания обладают различными приоритетами и для каждого приоритета определена максимальная разрешенная стоимость сетевого графа. В каждый момент времени t будем рассматривать m способов (которые могут различаться и каждый из которых соответствует одному уровню приоритета) выбрать подграф $\mathcal{G}_t^k : \mathcal{G}_t^m \subset \mathcal{G}_t^{m-1} \subset \ldots \subset \mathcal{G}_t^1$ графа $\mathcal{G}_{A_t}$, позволяющий использовать протокол для перераспределения заданий приоритета $k,\ k = 1,\ldots,m$. Обозначим B_t^k соответствующие матрицы смежности.

Пусть $c_k,\ k = 1,\ldots,m,$ — максимальная средняя стоимость сетевых связей для заданий с приоритетом k. Положим, $c_1 \ge c_2 \ge \ldots c_m > 0$.

Определение Будем говорить, что декомпозиция топологии сети $\{\mathcal{G}_t^k\}$ удовлетворяет ограничениям на среднюю стоимость $\{c_k\}$, если для каждого класса приоритета k выполнено: $d_{\max}(B_{av}^k) = \mathrm{E} d_{\max}(B_t^k) = \mathrm{E}\max_{i\in N}\sum_{j\in N_t^{i,k}} b_t^{i,j,k} \le c_k$, где $N_t^{i,k}$ — множество соседей агента i в момент времени t, образованное в соответствии с топологией $\mathcal{G}_t^k$.

Протокол управления

Рассмотрим следующее семейство протоколов. Для каждого $k = 1,\ldots,m$ для декомпозиции топологии $\{\mathcal{G}_t^k\}$ для стоимостных ограничений $\{c_k\},\ c_k > 0$ определим

$$u_t^{i,k} = \gamma p_{t,av}^{i,k} \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} (y_t^{i,j,k} - x_t^{i,k}), \quad (1)$$

где $\gamma > 0$ — это шаг протокола управления, а $\bar{N}_t^i \subset N_t^i$ — множество соседей узла i $b_t^{i,j}$ — коэффициенты протокола. Используя протокол (1), система работает таким образом, что задания одного приоритета распределяются между агентами равномерно.

Динамика системы с обратными связями, функционирующей по протоколу (1), будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{x}_{t+1}^i = \mathbf{x}_t^i - \tilde{\mathbf{r}}_t^i + \tilde{\mathbf{z}}_t^i + \gamma \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} (\mathbf{y}_t^{i,j} - \mathbf{x}_t^i), \quad (2)$$

где вектор $\tilde{\mathbf{r}}_t^i = [\tilde{r}_t^{i,k}]$, $\tilde{r}_t^{i,k} = p_t^{i,k} / \tilde{p}_t^{i,k}$ и вектор $\tilde{\mathbf{z}}_t^i = [\tilde{z}_t^{i,k}]$, $\tilde{z}_t^{i,k} = z_t^{i,k} / \tilde{p}_t^{i,k}$.

Основной результат

Пусть выполнены следующие условия.

• **A1**. Граф $\mathcal{G}_{B_{av}}$ является сильно связным.

• **A2**. **a)** Для любых $i \in N,\ j \in N_t^i$ векторы помех наблюдений $\mathbf{w}_t^{i,j}$ центрированные, независимые и одинаково распределенные случайные векторы с ограниченной дисперсией: $\mathrm{E}(\mathbf{w}_t^{i,j})^2 \le \sigma_w^2$.

b) Для любых $i \in N, j \in N_{\max}^i = \cup_t \bar{N}_t^i$ появление "изменяющегося во времени" ребра (j,i) в графе $\mathcal{G}_{B_t}$ — независимое случайное событие. Для всех $i \in N,\ j \in N_t^i$ веса $b_t^{i,j}$ в протоколе управления — независимые случайные величины с математическим ожиданием: $\mathrm{E}b_t^{i,j} = b^{i,j}$ и ограниченной дисперсией: $\mathrm{E}(b_t^{i,j} - b^{i,j})^2 \le \sigma_b^2$. Обозначим $B_{av} = \mathrm{E}B_t$ — соответствующую усредненную матрицу смежности.

c) Для любых $i \in N, j \in N^i$ существует конечная целая неотрицательная величина $\bar{s} \in \mathrm{Z}^+$: $s_t^{i,j} \le \bar{s}$ с вероятностью 1, и целочисленные задержки $s_t^{i,j}$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, принимающими значения $l = 0, \ldots, \bar{s}$ с вероятностью $S_l^{i,j}$.

d) Для любых $k = 1, \ldots, m,\ i \in N,\ t = 0, 1, \ldots$ случайные величины $z_t^{i,k}$ независимы и имеют матожидания: $\mathrm{E}z_t^{i,k} = \bar{z}^k$, не зависящие от i, и дисперсии: $\mathrm{E}(z_t^{i,k} - \bar{z}^k)^2 \le \sigma_{z,k}^2$.

e) Для любых $i \in N,\ t = 0, 1, \ldots$ случайные векторы $\mathbf{p}_t^i$ независимы и состоят из независимых случайных компонент. Случайные величины $\tilde{r}_t^{i,k}$, $k = 1, \ldots, m$, имеют математические ожидания: $\mathrm{E}\tilde{r}_t^{i,k} = \bar{r}^k$, не зависящие от i.

Кроме того, все упомянутые в предположениях **A2.a**–**A2.e** независимые случайные величины и векторы не зависят друг от друга.

• **A3.** Размер шага протокола управления $\gamma > 0$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\delta = |Re(\lambda_2(\mathcal{L}(\bar{B}_{av} \otimes I_m)))| - \gamma Re(\lambda_{\max}(Q)) > 0, \ \ 0 < \gamma < \frac{1}{\max\{d_{\max}(B_{av}), \delta\}}$$

где $Q = \mathrm{E}C_t^{\mathrm{T}} C_t$, $C_t = \mathcal{L}(\bar{B}_{av} \otimes I_m) - \mathcal{L}(\bar{B}_t \otimes I_m)$.

Усредненная модель. Пусть $\mathbf{x}_0^\star$ — средневзвешенный вектор начальных состояний размерности m: $\mathbf{x}_0^\star = \frac{\sum_i g_i \mathbf{x}_0^i}{\sum_i g_i}$, где g^T — левый собственный вектор матрицы B_{av}, и $\{\mathbf{x}_t^\star\}$ — траектории усредненных систем

$$\mathbf{x}_{t+1}^\star = \mathbf{x}_t^\star + \bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{r}}, \ \bar{\mathbf{z}} = [\bar{z}^k], \ \bar{\mathbf{r}} = [\bar{r}^k]. \tag{3}$$

Дифференцированный консенсус. Рассмотрим векторы $\bar{\mathbf{X}}_t^\star \in \mathrm{R}^{\bar{n}}$, $t = 0, 1, \ldots$, состоящие из $\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{x}_t^\star, \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{x}_{t-1}^\star, \ldots, \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{x}_{t-\bar{s}}^\star$.

Теорема 1: Если для систем с обратными связями (2) и (3) выполнены предположения **A1**–**A3** и выполнены стоимостные ограничения, **то** справедливо следующее неравенство: $\mathrm{E}||\bar{\mathbf{X}}_t - \bar{\mathbf{X}}_t^\star||^2 \leq \frac{\Delta}{\gamma\delta} + (1 - \gamma\delta)^t \left(||\bar{\mathbf{X}}_0 - \bar{\mathbf{X}}_0^\star||^2 - \frac{\Delta}{\gamma\delta}\right)$, где $\Delta = 2m\sigma_w^2\gamma^2(n^2\sigma_b^2 + ||B_{av}||^2) + n\sum_{k=1}^m(\sigma_{z,k}^2 + (1 - P_k)^2)$, то есть, если $\mathrm{E}||\bar{\mathbf{X}}_0 - \bar{\mathbf{X}}_0^\star||^2 < \infty$, то асимптотический среднеквадратичный ε-консенсус в (2) достигается с $\varepsilon \leq \frac{\Delta}{\gamma\delta}$.

Теорема 2: **Если** выполнены предположения **A1**–**A3** и стоимостные ограничения **то** оптимальные значения шагов $\gamma_k^\star$, $k = 1, \ldots, m$, для каждого протокола из (1) могут быть получены из следующих формул:

$$\gamma_k^\star = -\frac{S_k}{H^k}\Delta^k + \sqrt{\frac{S_k^2}{H^{k2}}\Delta^{k2} + \frac{S_k}{H^k}} \tag{4}$$

где $\Delta^k = \frac{Re(\lambda_{\max}(Q))}{R}$.

Заключение

В статье рассматривается задача достижения дифференцированного консенсуса в мультиагентной сети, обрабатывающей задания разных классов. В работе предложена рандомизированная управляющая стратегия для достижения дифференцированного консенсуса в мультиагентной сети в условиях переменной структуры связей, помех, задержек при передаче информации по каналам связи, при наличии стоимостных ограничений на использование связей внутри сети. Предложенная стратегия оптимизируется по величине размера шага алгоритма управления.

Литература

[1] Амелина Н.О., Иванский Ю.В. Задача достижения дифференцированного консенсуса при стоимостных ограничениях // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Т. 2. №4. С. 495–506.

[2] Ерофеева В.А., Иванский Ю.В., Кияев В.И. Управление роем динамических объектов на базе мультиагентного подхода // Компьютерные инструменты в образовании, вып. 6, 2015, С. 34–42.

[3] Amelina N., Granichin O., Granichina O., Ivanskiy Y., and Jiang Y. Differentiated consensuses in a stochastic network with priorities // Proc. of 2014 IEEE Multi-conference on Systems and Control, October 8–10, 2014, Antibes/Nice, France, pp. 264–269.

[4] Amelina N., Granichin O., Granichina O., Ivanskiy Y., and Jiang Y. Optimal Step-Size of a Local Voting Protocol for Differentiated Consensuses Achievement in a Stochastic Network with Priorities // Proc. of the 14th European Control Conference (ECC'15), Linz, Austria, July 15–17, 2015, pp. 628–633.

[5] Amelina N., Granichin O., Granichina O., Ivanskiy Y., and Jiang Y. Local Voting Protocol for Differentiated Consensuses in a Stochastic Network with Priorities // Proc. of the IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON'15), Saint-Petersburg, Russia, June 24–26, 2015, pp. 964–969.

[6] Ivanskiy Y., Amelina N., Granichin O., Granichina O., and Jiang Y. Optimal Step-Size of a Local Voting Protocol for Differentiated Consensuses Achievement in a Stochastic Network with Cost Constraints for Different Priorities // Proc. of the 2015 IEEE Multi-Conference on Systems and Control (MSC'15), September 21–23, 2015, Sydney, Australia, pp. 1367–1372.

[7] Amelin K., Amelina N., Ivanskiy Y., and Jiang Y. Choice of Step-Size for Consensus Protocol in Changing Conditions via Stochastic Approximation Type Algorithm // 3rd IEEE International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT'16), April 6–8, 2016, Saint Julian's, Malta.

[8] Амелин К.С., Баклановский М.В., Граничин О.Н., Иванский Ю.В., Корнивец А.Д., Мальковский Н.В., Найданов Д.Г., Шеин Р.Е. Адаптивная мультиагентная операционная система реального времени // Стохастическая оптимизация в информатике. 2013. Т. 9. №1. С. 3–16.

[9] Иванский Ю.В. Восстановление 3D-образов из скомпрессированных данных УЗИ // Стохастическая оптимизация в информатике. 2013. Т. 9. №1. С. 45–58.

[10] Амелина Н.О., Корнивец А.Д., Иванский Ю.В., Тюшев К.И. Применение консенсусного протокола для балансировки загрузки стохастической децентрализованной сети при передаче данных // В сб.: XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2014. С. 8902–8911.

[11] Ivanskiy Yu. Consensus achievement for different task classes in multiagent network // В книге: Управление, информация и оптимизация (VI ТМШ) Тезисы докладов Шестой Традиционной всероссийской молодежной летней Школы. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, Национальный комитет по автоматическому управлению, Лаборатория структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании МФТИ; под редакцией Б. Т. Поляка. 2014. С. 31.

[12] Иванский Ю.В. Дифференцированный консенсус в стохастической сети с приоритетами // Стохастическая оптимизация в информатике. 2014. Т. 10. №1. С. 9–29.

[13] Иванский Ю.В. Использование алгоритма типа стохастической аппроксимации для поиска оптимального шага протокола локального голосования при достижении дифференцированного консенсуса в мультиагентной сети со стоимостными ограничениями на топологию // Стохастическая оптимизация в информатике. 2015. Т. 11. №3. С. 18–38.