Верхние и нижние оценки несмещенной вычислительной сложности оптимизационной задачи Needle

Волочай В.О., студентка кафедры компьютерных технологий Университета ИТМО,

vvolochay@gmail.com

Аннотация

Оптимизационная задача Needle относится к классу black-box [1] задач, которые решаются с использованием эволюционных алгоритмов. Основная цель работы заключается в построении как можно более точных верхних и нижних оценок для несмещенной сложности, где верхняя оценка – конкретный алгоритм и оценка времени его работы, а нижняя оценка — доказательство того, что сложность алгоритма не может быть меньше некоторой величины.

Введение

Одним из способов применения эволюционных алгоритмов является решение оптимизационных задач. Одной из таких задач является задача Needle. Для получения улучшенных оценок сложности работы алгоритма, рассмотрим задачу в модификации, основанной на идеях black-box сложности.

Задача Needle сформулирована следующим образом: загадана битовая строка, о которой известна только её длина n. Задача представлена оптимизирующему алгоритму, представленному в виде черного ящика, к которому можно задавать запросы, и он возвращает либо 1, если запрос совпал с загаданной строкой, либо 0 в обратном случае.

Идеи и подходы к решению задачи Needle могут помочь в будущем в исследовании других задач. В частности, полученные результаты могут помочь оценить решение «плато» [5].

Цели работы

Было установлено, что для многих задач наилучший black-box алгоритм работает быстрее, чем существующие эволюционные подходы. Например, хорошо изученный алгоритм (1 + 1) оптимизирует гораздо медленнее. Таким образом, одна из целей работы — рассмотреть классы алгоритмов с несмещенными [6] операторами различных арностей: unary(мутации), binary(кроссовер) и т. д.

Needle является одной из сложных задач, так как за каждый запрос алгоритм получает лишь знание, совпадает ли запрос с оптимумом или нет, и никаких выводов о других запросах сделать не может. Лучший детерминированный алгоритм, решающий задачу, просто делает все возможные запросы по порядку, и среднее число запросов до оптимума составляет $(2^n + 1) / 2$. Такое же время работы у алгоритма, генерирующего случайную перестановку. Таким образом, новые лучшие полученные оценки должны быть более точными.

Основная цель работы заключается в построении как можно более точных верхних и нижних оценок для несмещенной сложности, где верхняя оценка представляет собой конкретный алгоритм и оценку времени его работы, а нижняя оценка — доказательство того, что сложность алгоритма не может быть меньше некоторой величины.

Описание предлагаемого подхода

Будем рассматривать классы алгоритмов для операторов на несмещенных сложностях. Решения, принимаемые алгоритмом, могут зависеть только от наблюдаемых значений функции, но не от самих точек. Также алгоритм может делать запросы, полученные только при помощи несмещенных операторов, обладающих двумя свойствами: инвариантностью относительно перестановки и инвариантностью относительно побитового исключающего или.

Наибольший интерес представляют собой алгоритмы для операторов несмещенных сложностей. Изначально рассмотрим операторы арностей $k = 1, 2, 3$.

Время работы black-box алгоритма оценивается числом запросов к черному ящику, то есть это ожидаемое число запросов до точки нахождения оптимума.

Подсчет верхних оценок сводится к разработке алгоритма и оценке времени его работы. Подсчет нижних оценок сводится к нахождению общего вида всех алгоритмов данного класса, нахождению вещественнозначных параметров, однозначно определяющих работу алгоритма, построению выражения, зависящего от указанных параметров и определяющего математическое ожидание времени работы алгоритма, и, наконец, минимизации времени работы. При отсутствии аналитического решения, задача решается численным моделированием.

Заключение

Результатами данной работы являются верхние и нижние оценки для несмещенной сложности при арности 1, 2, 3. Определено, что при k = 3 достигается оптимум. Посчитаны верхние оценки для бинарного и тернарного оператора.

Проведены эксперименты, оценивающие работу оптимизационного алгоритма с алгоритмом, генерирующим случайную перестановку. Идеи, использованные в доказательствах, могут быть использованы в будущем для исследования других задач.

Литература

1. B. Doerr and C. Winzen. Ranking-based black-box complexity. Algorithmica. To appear. DOI: 10.1007/s00453-012-9684-9. http://arxiv.org/pdf/1102.1140.pdf
2. B. Doerr and C. Winzen. Reducing the arity in unbiased black-box complexity. Theor. Comput. Sci., 545:108–121, 2014. http://arxiv.org/pdf/1203.4111.pdf
3. Andrew Chi-Chih Yao. Probabilistic computations: Toward a unified measure of complexity (extended abstract). In FOCS, pages 222–227. IEEE Computer Society, 1977.
4. Stefan Droste, Thomas Jansen, and Ingo Wegener. Upper and lower bounds for randomized search heuristics in black-box optimization. Theory of Computing Systems, 39:525–544, 2006.
5. T. Jansen and I. Wegener. Evolutionary algorithms — how to cope with plateaus of constant fitness and when to reject strings of the same fitness. In IEEE Trans. on Evolutionary Computation, volume 5, pages 589–599, 2001.
6. Per Kristian Lehre and Carsten Witt. Black-box search by unbiased variation. In Proceedings of Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO'10), pages 1441– 1448. ACM, 2010.