Построение сетки адаптивного типа[1]

Сазонова Г. О., студент СПбГУ, galinasazo@gmail.com,

Демьянович Ю. К., профессор СПбГУ, yuri.demjanovich@gmail.com

Введение

В современном мире потоки информации имеют электронную форму. Как правило, это последовательность 0 и 1 внушительной длины ($10^{12} - 10^{16}$ символов). Такие объемы обрабатываются быстро только в случае, когда имеются достаточно большие компьютерные ресурсы (память, быстродействие и т.д.); поэтому актуален вопрос о сокращении объемов цифровой информации за счет отбрасывания несущественных ее составляющих.

На первом месте среди средств разрешения данного вопроса несомненно находятся вейвлеты, что подтверждается большим числом приложений в различных технических и научных областях. Вейвлетное разложение рассматривается, как правило, на равномерной сетке (см., например, [1, 2]). Но за последнее время получили распространение сплайн-всплесковые разложения, ассоциируемые с неравномерной сеткой (см. [3, 4]). Введение неравномерных сеток важно в случае нерегулярного поведения исходного потока: в областях медленного изменения упомянутого потока естественно использовать крупную сетку, а в областях быстрого изменения необходима мелкая сетка. При таком подходе возможно последовательное адаптивное укрупнение возникающих таким образом неравномерных сеток для получения всплескового пакета с заданной аппроксимацией исходного потока.

Сетка адаптивного типа

Использование цепочек вложенных пространств сплайнов позволяет строить вейвлетные разложения (декомпозицию и реконструкцию) в весьма общих условиях, в том числе, с использованием неравномерной сетки. Далее будет рассмотрена сетка адаптивного типа, которая зависит от заданного числового потока f и положительного параметра ε.

Пусть на интервале (α, β) рассматривается сетка

$$\Xi: \quad \ldots < \xi_{-2} < \xi_{-1} < \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 \ldots,$$

$$\lim_{i \to -\infty} \xi_i = \alpha, \quad \lim_{i \to +\infty} \xi_i = \beta.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 15-01-08847

Множество функций $u(t)$, заданных на сетке Ξ, обозначим $C(\Xi)$. Ясно, что $C(\Xi)$ — линейное пространство.

Пусть $f \in C(\Xi)$, и для некоторой константы $c > 0$ справедливо соотношение

$$f(t) \geq c \quad \forall t \in \Xi. \tag{1}$$

Если $a \in \Xi$, то существует такое $i \in \mathbb{Z}$, что $a = \xi_i$. В этом случае обозначим $a^- \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i-1}$, $a^+ \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i+1}$.

Дальше предполагается, что

$$a, b \in \Xi, \quad a^+ < b^-, \tag{2}$$

т.е. для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}$, $i + 2 < j$, верны равенства $a = \xi_i$, $b = \xi_j$. При упомянутых a и b введем обозначение

$$[\![a, b]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi_s \mid a \leq \xi_s \leq b,\ s \in \mathbb{Z}\},$$

т.е.

$[\![a, b]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi_s \mid i \leq s \leq j,\ s \in \mathbb{Z}\}$. Множество $[\![a, b]\!]$ будем называть сеточным отрезком.

Рассмотрим линейное нормированное пространство $C[\![a, b]\!]$ функций $u(t)$, заданных на сеточном отрезке $[\![a, b]\!]$, где норма вводится соотношением

$$\|u\|_{C[\![a, b]\!]} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{t \in [\![a, b]\!]} |u(t)|.$$

Очевидно, что пространство $C[\![a, b]\!]$ конечномерно.

Пусть

$$\varepsilon \in (\varepsilon^*, \varepsilon^{**}), \tag{3}$$

где

$$\varepsilon^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\xi \in [\![a, b^-]\!]} \max_{t \in \{\xi, \xi^+\}} f(t)(\xi^+ - \xi), \quad \varepsilon^{**} \stackrel{\text{def}}{=} (b - a)\|f\|_{C[\![a, b]\!]}. \tag{4}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1 *Если выполнены условия (1), (3), (4), то существуют и единственны натуральное число $K = K(f, \varepsilon, \Xi)$ и сетка*

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}(f, \varepsilon, \Xi): \quad a = \widetilde{x_0} < \widetilde{x_1} < \ldots < \widetilde{x_K} \leq \widetilde{x_{K+1}} = b \tag{5}$$

такие, что

$$\max_{t\in[\![\widetilde{x_s},\,\widetilde{x_{s+1}}]\!]} f(t)(\widetilde{x_{s+1}}-\widetilde{x_s}) \le \varepsilon < \max_{t\in[\![\widetilde{x_s},\,\widetilde{x_{s+1}^+}]\!]} f(t)(\widetilde{x_{s+1}^+}-\widetilde{x_s}) \tag{6}$$

$$\forall s \in \{0,1,\ldots,K-1\},$$

$$\max_{t\in[\![\widetilde{x_K},\,b]\!]} f(t)(b-\widetilde{x_K}) \le \varepsilon, \quad \widetilde{X}\subset\Xi. \tag{7}$$

Доказательство. Проводится по индукции. База индукции устанавливается следующим образом. Пусть переменная $\tau\in\Xi$ увеличивается от $a=\widetilde{x_0}$ до b; тогда ввиду предположения (1) функция $\phi_0(\tau)\stackrel{\text{def}}{=}\max_{t\in[\![\widetilde{x_0},\,\tau]\!]} f(t)(\tau-\widetilde{x_0})$ является строго возрастающей и при изменении τ от $a=\widetilde{x_0}$ к b функция $\phi_0(\tau)$ возрастает от 0 до $\max_{t\in[\![a,\,b]\!]} f(t)(b-a)$. Благодаря условию (3), (4) существует единственная точка $\tau_1\in[\![a,\ b]\!]$ такая, что

$$\max_{t\in[\![\widetilde{x_0},\,\tau_1]\!]} f(t)(\tau_1-\widetilde{x_0}) \le \varepsilon < \max_{t\in[\![\widetilde{x_0},\,\tau_1^+]\!]} f(t)(\tau_1^+-\widetilde{x_0}).$$

Положим $\widetilde{x_1}\stackrel{\text{def}}{=}\tau_1$. База индукции установлена.

Предположим, что узлы $\widetilde{x_1},\ldots,\widetilde{x_s}$ сетки $\widetilde{X}$ определены. Если $\widetilde{x_s}=b$, то полагаем $K\stackrel{\text{def}}{=}s-1$. В этом случае построение сетки $\widetilde{X}(f,\varepsilon,\Xi)$ завершено. В противном случае $\widetilde{x_s}<b$, и построение сетки продолжается. Рассмотрим функцию

$$\phi_s(\tau)\stackrel{\text{def}}{=}\max_{t\in[\![\widetilde{x_s},\,\tau]\!]} f(t)(\tau-\widetilde{x_s});$$

она является строго возрастающей: при изменении τ от $\widetilde{x_s}$ до b функция $\phi_s(\tau)$ возрастает от 0 до $m_s\stackrel{\text{def}}{=}\max_{t\in[\![\widetilde{x_s},\,b]\!]} f(t)(b-\widetilde{x_s})$. Заметим, что если $\widetilde{x_s}=b^-$, то

$$m_s=\max_{t\in\{b^-,b\}} f(t)(b-b^-) \le \max_{\xi\in[\![a,\,b^-]\!]}\ \max_{t\in\{\xi,\xi^+\}} f(t)(\xi^+-\xi)=\varepsilon^*,$$

и по предположению (3), (4) имеем $m_s\le\varepsilon$. Во всех случаях, когда $m_s\le\varepsilon$, полагаем $K\stackrel{\text{def}}{=}s$ и $\widetilde{x}_{s+1}=b$. Рассмотрим случай, когда $\varepsilon<m_s$. Из предыдущего следует, что $\widetilde{x}_s<b^-$. Пусть при некоторых $p,q\in\mathbb{Z}$ справедливы соотношения $\widetilde{x}_s=\xi_p$ и $m_s=\max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\xi_q]\!]} f(t)(\xi_q-\widetilde{x}_s)$. Очевидно, что $p<q$ (равенство $p=q$ дает $m_s=0$, что противоречит соотношению $\varepsilon<m_s$).

Поскольку $0 < \varepsilon < m_s$, а дискретная функция $\phi_s(\tau)$ принимает возрастающие значения от 0 до m_s, то найдется такое j, что $\xi_j \in [\![\widetilde{x}_s,\ b^-]\!]$ и $\phi_s(\xi_j) \le \varepsilon < \phi_s(\xi_{j+1})$. Последнее эквивалентно соотношению

$$\max_{t \in [\![\widetilde{x}_s,\, \xi_j]\!]} f(t)(\xi_j - \widetilde{x}_s) \le \varepsilon < \max_{t \in [\![\widetilde{x}_s,\, \xi_{j+1}]\!]} f(t)(\xi_{j+1} - \widetilde{x}_s).$$

Положим $\widetilde{x}_{s+1} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_j$. Существование точки $\widetilde{x}_{s+1}$, удовлетворяющей соотношениям (6), установлено. Возможными ее значениями являются следующие узлы исходной сетки $\xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \ldots, \xi_{q-1}$. Единственность точки $\widetilde{x}_{s+1}$ следует из строгого возрастания функции $\phi_s(\tau)$.

Итак, если $\varepsilon \ge m_s$, то полагаем $K \stackrel{\text{def}}{=} s$ и $\widetilde{x}_{s+1} = b$; при этом выполнено соотношение (7). Если же $\varepsilon < m_s$, то найдется единственная точка $\tau_{s+1} < b$ так, что справедливо неравенство (6). Индукционный переход закончен.

Лемма доказана.

Сетку вида (5) со свойствами (6), (7) будем называть *сеткой адаптивного типа для дискретной функции* f.

Очевидно, что целочисленная функция $K(f, \varepsilon, \Xi)$ обладает свойством монотонности: если $\varepsilon' \le \varepsilon''$, то $K(f, \varepsilon', \Xi) \ge K(f, \varepsilon'', \Xi)$.

Суммированием соотношений (6) получаем неравенство

$$\sum_{s=0}^{K-1} \max_{t \in [\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}_{s+1}]\!]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s) \le K\varepsilon <$$

$$< \sum_{s=0}^{K-1} \max_{t \in [\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} f(t)(\widetilde{x}^+_{s+1} - \widetilde{x}_s).$$

О построении сетки адаптивного типа

Приведем иллюстрацию рассуждений, которые были использованы при доказательстве леммы, для случая, когда сетка Ξ равномерная с положительным шагом $h > 0$, а ее узлы задаются формулой $\xi_j = jh$. Пусть

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 = b,$$

так что рассматриваемый сеточный отрезок имеет вид $[\![a,\quad b]\!] \stackrel{\text{def}}{=} = \{0, h, 2h, 3h\}$. Таким образом, $a = 0$, $b = 3h$. Ясно, что при этом выполнено условие (2): $a^+ = h < b^- = 2h$. В этом случае имеем

$$\varepsilon^* = \max\{f(0), f(h), f(2h), f(3h)\}h = \|f\|_{C[\![a,\, b]\!]} h, \quad \varepsilon^{**} = 3\varepsilon^*. \qquad (8)$$

Условие (3) принимает вид

$$\varepsilon^* < \varepsilon < 3\varepsilon^*. \tag{9}$$

В доказательстве леммы 1 сначала рассматривается функция ϕ_0. Здесь она принимает вид $\phi_0(\tau) = \max_{t\in[\![0,\,\tau]\!]} f(t)\tau$, причем ее аргумент τ пробегает значения 0, h, $2h$, $3h$, так что $\phi_0(0) = 0$, $\phi_0(h) = h\max\{f(0), f(h)\}$, $\phi_0(3h) = 2h\max\{f(0), f(h), f(2h)\}$, $\phi_0(3h) = 3h\|f\|_{C[\![a,\,b]\!]}$.

Полагаем $\widetilde{x}_0 \overset{\text{def}}{=} a$, т.е. в нашем случае $\widetilde{x}_0 \overset{\text{def}}{=} 0$. Первый шаг, который необходимо сделать — найти $\widetilde{x}_1$ так, чтобы выполнялось соотношение (6) при $s = 0$, т.е. среди значений $\tau \in \{0, h, 2h\}$ найти такое значение τ, чтобы выполнялось соотношение

$$\phi_0(\tau) \le \varepsilon < \phi_0(\tau^+)$$

или, что то же самое, соотношение

$$\max_{t\in[\![0,\,\tau]\!]} f(t)(\tau) \le \varepsilon < \max_{t\in[\![0,\,\tau+h]\!]} f(t)(\tau + h).$$

При $\tau = 0$ это соотношение принимает вид $0 \le \varepsilon < \max\{f(0), f(h)\}h$; такое неравенство противоречит условиям (8), (9), так что для τ возможен лишь один из двух вариантов:

$$\tau = h, \quad \max\{f(0), f(h)\}h \le \varepsilon < 2h\max\{f(0), f(h), f(2h)\}, \tag{10}$$

$$\tau = 2h, \quad 2h\max\{f(0), f(h), f(2h)\} \le \varepsilon < 3h\|f\|_{C[\![a,\,b]\!]}. \tag{11}$$

Если верно соотношение (10), то согласно (6) следует положить

$$\widetilde{x}_1 \overset{\text{def}}{=} h, \tag{12}$$

и перейти к отысканию $\widetilde{x}_2$. Для этого рассмотрим функцию $\phi_1(\tau) = \max_{t\in[\![\widetilde{x}_1,\,\tau]\!]} f(t)(\tau - \widetilde{x}_1)$. Заметим, что

$$\phi_1(h) = 0, \quad \phi_1(2h) = h\max_{t\in[\![h,\,2h]\!]} f(t) = h\max\{f(h), f(2h)\}, \tag{13}$$

$$\phi_1(3h) = 2h\max_{t\in[\![h,\,3h]\!]} f(t) = 2h\max\{f(h), f(2h), f(3h)\}. \tag{14}$$

Требуется найти такое $\tau \in \{h, 2h\}$, которое удовлетворяет соотношению

$$\phi_1(\tau) \le \varepsilon < \phi_1(\tau^+), \tag{15}$$

и положить $\widetilde{x}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \tau$.

При $\tau = h$ соотношение (15) принимает вид

$$0 = \phi_1(h) \le \varepsilon < \phi_1(2h). \tag{16}$$

Легко видеть, что (16) противоречит условиям (8), (9). Остается рассмотреть лишь случай $\tau = 2h$; в этом случае (15) примет вид $\phi_1(2h) \le \varepsilon < \phi_1(3h)$, или, в соответствии с формулами (13), (14), вид

$$h \max\{f(h), f(2h)\} \le \varepsilon < 2h \max\{f(h), f(2h), f(3h)\}. \tag{17}$$

Итак, если неравенство (17) выполнено, то полагаем $\widetilde{x}_2 \stackrel{\text{def}}{=} 2h$, $\widetilde{x}_3 \stackrel{\text{def}}{=} 3h$. Учитывая соотношение (12), видим, что в этом случае искомая сетка $\widetilde{X}$ построена; при этом $\widetilde{X} = \{0, h, 2h, 3h\}$ (т.е. узлы новой сетки совпадают с последовательными узлами исходной сетки $\xi_j = jh$, $j = 0, 1, 2, 3$).

Если неравенство (17) не выполнено, то ввиду условий (8), (9) заведомо выполнено условие вида (7); в рассматриваемом случае оно принимает вид

$$2h \max\{f(h), f(2h), f(3h)\} \le \varepsilon < 3h \|f\|_{C[\![a,\,b]\!]},$$

и потому полагаем $\widetilde{x}_2 \stackrel{\text{def}}{=} 3h$.

Полученная сетка $\widetilde{X} = \{0, h, 3h\}$.

До сих пор рассматривалась ситуация, когда выполнено неравенство (10). Теперь предположим, что выполнено неравенство (11): $\varphi_0(2h) \le \varepsilon < \varphi_0(3h)$. В этом случае полагаем $\widetilde{x}_1 \stackrel{\text{def}}{=} 2h$ и дальше остается лишь положить $\widetilde{x}_2 \stackrel{\text{def}}{=} 3h$. Таким образом, здесь сетка $\widetilde{X} = \{0, 2h, 3h\}$.

Заключение

Доказана лемма, позволяющая строить сетку адаптивного типа, которая зависит от заданного числового потока и некоторого положительного параметра ε. Рассмотрен пример построения адаптивной сетки для случая, когда исходная сетка равномерная с положительным шагом.

Литература

[1] Лебедев А. С., Лисейкин В. Д., Хакимзянов Г. С. Разработка методов построения адаптивных сеток // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7, № 3. С. 29–43.

[2] Terekhov K., Vassilevski Yu. Two-phase water flooding simulations on dynamic adaptive octree grids with two-point nonlinear fluxes// Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2013. Vol. 28, No 3. P. 267–288.

[3] Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.

[4] Демьянович Ю. К. Теория сплайн-всплесков. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013. 526 с.