Численное исследование гипотезы Идена о максимуме ляпуновской размерности для системы Рабиновича

Кузнецов Н. В., д.ф.-м.н, проф. СПбГУ
Леонов Г. А., чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н, проф. СПбГУ
Мокаев Т. Н., к.ф.-м.н, вед. науч. сотр. СПбГУ
Федоров Е. Г., студент мат.-мех. СПбГУ

Аннотация

В данной работе на примере системы Рабиновича, описывающей взаимодействие волн в плазме, исследуется гипотеза Идена о достижении максимума Ляпуновской размерности аттрактора в стационарной точке или на периодической орбите. Ляпуновская размерность непосредственно связана с понятием энтропии системы и конечной пропускной способностью каналов связи систем управления.

Используя численные методы вычисления конечно-временных ляпуновских показателей и конечно-временной ляпуновской размерности, найдены значения параметров системы, для которых гипотеза Идена частично не верна.

Введение

В последнее время широкое применение получили распределенные системы управления. В подобных системах задачи управления выполняют различные вычислительные блоки, связанные через сеть. Одной из проблем, возникающих в связи с этим, является ограниченная пропускная способность каналов передачи данных. И возникает необходимость в определении минимальной скорости передачи данных для построения надежных и эффективных систем управления.

Одним из способов оценки этого показателя является нахождение энтропии системы [1, 2], которая вводится через ляпуновские показатели. В связи с этим она тесно связана с ляпуновской размерностью и может быть найдена или оценена с помощью методов Ляпунова [3].

Введем далее необходимые определения динамической системы, аттрактора и ляпуновской размерности следуя работам [4, 5].

Предположим, дано автономное дифференциальное уравнение:

$$\dot{u} = f(u), \quad t \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

где $f(u)$ непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Определим $u(t, u_0)$, как решение (1) такое, что $u(0, u_0) = u_0$. Для системы (1) замкнутое и ограниченное множество K является:

(i) *локальным аттрактором*, если это минимальное локально притягивающее множество (т.е. $\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(K, u(t, u_0)) = 0 \ \forall u_0 \in K(\varepsilon)$, где $K(\varepsilon)$ – некоторая ε-окрестность множества K),

(ii) *глобальным аттрактором*, если это минимальное глобально притягивающее множество (т.е. $\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(K, u(t, u_0)) = 0 \ \forall u_0 \in \mathbb{R}^3$),

где $\operatorname{dist}(K, u) = \inf_{v\in K} ||v - u||$ есть расстояние от точки $u \in \mathbb{R}^3$ до множества K.

Пусть непустое множество $K \subset \mathbb{R}^3$ инвариантно относительно системы (1). Рассмотрим линеаризацию системы (1) вдоль решения $\varphi^t(u)$:

$$\dot{y} = J(\varphi^t(u))y, \quad J(u) = Df(u), \tag{2}$$

где $J(u)$ — 3×3 матрица Якоби, элементы которой являются непрерывными функциями от u. Предположим, что $\det J(u) \neq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^3$. Рассмотрим фундаментальную матрицу линеаризованной системы (2) $D\varphi^t(u)$ такую, что $D\varphi^0(u) = I$, где I — единичная 3×3 матрица.

Пусть $\sigma_i(t, u) = \sigma_i(D\varphi^t(u))$, $i = 1, 2, 3$ будут сингулярные числа матрицы $D\varphi^t$(u), отсортированные так, что $\sigma_1(t, u) \geq \sigma_2(t, u) \geq \sigma_3(t, u) > 0$ для любого u и $t \geq 0$.

Определим функцию сингулярных чисел порядка $d \in [0, 3]$ в точке $u \in \mathbb{R}^3$ следующим образом

$$\begin{cases} \omega_0(D\varphi^t(u)) = 1, \ \ \omega_3(D\varphi^t(u)) = \sigma_1(t, u)\sigma_2(t, u)\sigma_3(t, u) \\ \omega_d(D\varphi^t(u)) = \sigma_1(t, u) \cdots \sigma_{\lfloor d\rfloor}(t, u)\sigma_{\lfloor d\rfloor+1}(t, u)^{d-\lfloor d\rfloor}, \quad d \in (0, 3), \end{cases} \tag{3}$$

где $\lfloor d\rfloor$ это наибольшее целое число не превосходящее d.

Определение 1 *Локальную ляпуновскую размерность в точке $u \in \mathbb{R}^3$ определим как*

$$\dim_{\mathrm{L}}(\varphi^t, u) = \sup\{d \in [0, 3] : \omega_d(D\varphi^t(u)) \geq 1\}$$

и ляпуновскую размерность относительно инвариантного множества K определим как

$$\dim_{\mathrm{L}}(\varphi^t, K) = \sup_{u\in K} \dim_L(\varphi^t, u) = \sup_{u\in K} \sup\{d \in [0, 3] : \omega_d(D\varphi^t(u)) \geq 1\}.$$

Определение 2 *Ляпуновскую размерность динамической системы относительно инвариантного множества K определим как*

$$\dim_{\mathrm{L}} K = \inf_{t\geq 0} \dim_L(\varphi^t, K).$$

Определение 3 *Функции ляпуновских показателей по сингулярным значениям в точке $u \in \mathbb{R}^3$ обозначим как:*

$$\nu_i(t, u) = \nu_i(D\varphi^t(u)), i = 1, 2, 3, \quad \nu_1(t, u) \geq \nu_2(t, u) \geq \nu_3(t, u), \forall t > 0,$$

и определим как:

$$\nu_i(t, u) := \frac{1}{t} \ln \sigma_i(t, u).$$

Определение 4 *Ляпуновские показатели по сингулярным значениям в точке $u \in \mathbb{R}^3$ определим как:*

$$\nu_i(u) := \limsup_{t \to +\infty} \nu_i(t, u) = \limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \sigma_i(t, u), i = 1, 2, 3.$$

Для того, чтобы получить численную оценку размерности одной траектории будем использовать формулу Каплана-Йорке:

$$\dim_{\mathrm{L}}^{\mathrm{KY}}(\{\nu_i(t, u)\}_1^3) = j(t, u) + \frac{\nu_1(t, u) + \nu_2(t, u) + \ldots + \nu_j(t, u)}{|\nu_{j+1}(t, u)|}, \qquad (4)$$

где $\nu_i(t, u)$ - i-ый ляпуновский показатель в точке $u \in \mathbb{R}^3$, $j(t, u) = \max\limits_{m \in \{1,2,3\}} \sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i(t, u) \geq 0$.

В [7] А. Иден сформулировал гипотезу о максимуме ляпуновской размерности аттрактора: *максимум ляпуновской размерности аттрактора достигается либо в стационарной точке, либо на периодической траектории*. Позднее, Г.А. Леонов и Н.В. Кузнецов переформулировали эту гипотезу для самовозбуждающихся аттракторов[1]: *размерность самовозбуждающегося аттрактора не превосходит размерности стационарного состояния, его породившего*.

Далее в работе мы численно проверим эти гипотезы для определенной динамической системы, имеющей конкретный физический смысл.

[1] В работах [20, 21, 22] Г.А. Леоновым и Н.В. Кузнецовым была введена следующая классификация аттракторов: аттрактор называется самовозбуждающимся, если его бассейн притяжения пересекает любую открытую окрестность какого-либо состояния равновесия. В противном случае аттрактор называется скрытым. Самовозбуждающиеся аттракторы могут быть легко найдены и локализованы с помощью численных экспериментов, в отличии от скрытых, для которых подобная задача является более сложной.

Численная верификация гипотезы Идена для системы Рабиновича

Рассмотрим систему Рабиновича [9, 10]:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & hy - \nu_1 x - yz \\ \dot{y} & = & hx - \nu_2 y + xz \\ \dot{z} & = & -z + xy \end{array}\right. , \tag{5}$$

где h, ν_1, ν_2 – положительные числа. Она описывает резонансную тройку волн в плазме, две из которых параметрически возбуждены. В качестве волновой накачки выступает свист, распространяющийся вдоль магнитного поля, h – параметр пропорциональный амплитуде накачки, а ν_1 и ν_2 – коэффициенты затухания.

После линейной замены переменных:

$$x \mapsto \nu_1\nu_2 h^{-1} y, \quad y \mapsto \nu_1 x, \quad z \mapsto \nu_1\nu_2 h^{-1} z, \quad t \mapsto \nu_1^{-1} t$$

система (5) перейдет в обобщенную систему Лоренца [9, 3]:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & -\sigma(x - y) - ayz \\ \dot{y} & = & rx - y - xz \\ \dot{z} & = & -bz + xy \end{array}\right. , \tag{6}$$

с параметрами $\sigma = \nu_1^{-1}\nu_2, \quad b = \nu_1^{-1}, \quad a = -\nu_2^2 h^{-2}, \quad r = \nu_1^{-1}\nu_2^{-1}h^2$. Т.о., при $r, b > 0, a < 0$ и $\sigma = -ar$ существует диффеоморфизм между системой Рабиновича (5) и обобщенной системой Лоренца (6).

Если рассматривать $a = 0$, то система (6) совпадает с классической системой Лоренца [8]. В случае, если $a > 0$ и $\sigma > ar$, то обобщенную систему Лоренца можно свести к системе Глуховского-Должанского [11]. Также обобщенная система Лоренца может использоваться при описании и других физических процессов [12, 13, 14, 15].

В работе [3] для обобщенной системы Лоренца доказано существование всех ее решений на луче $[0; +\infty)$, а также диссипативность порожденной динамической системы. Там же получены различные оценки для локализации аттрактора в фазовом пространстве. Таким образом, система (6) порождает непрерывную динамическую систему, которая обладает глобальным B-аттрактором.

Для $r < 1$ система Рабиновича является асимптотически устойчивой, поэтому с точки зрения моделирования наиболее интересным представляется случай $r > 1$. Тогда в системе существует три состояния равновесия ([3]): $S_0 = (0,0,0)$, $S_{1,2} = \left(\pm\sqrt{\xi}, \pm\frac{br\sqrt{\xi}}{b+\xi}, \frac{r\xi}{b+\xi}\right)$, где $\xi = -b + \frac{rb\left(\sigma - ar \pm \sqrt{(\sigma-ar)^2+4\sigma a}\right)}{2\sigma}$.

При $r > 1$ нулевое состояние всегда является седловым и имеет следующее точное значение ляпуновской размерности:

$$\dim_L S_0 = 3 - \frac{2(\sigma+2)}{\sigma+1+\sqrt{(\sigma-1)^2+4\sigma r}}.$$

Для численного нахождения конечно-временных ляпуновских показателей использовался подход, описанный в [16, 17, 18, 19], и были получены параметры, при которых конечно-временная ляпуновская размерность локального аттрактора превосходит локальную ляпуновскую размерность всех состояний равновесия. Например, при $\sigma = 2.5, a = -40, r = 1.25, b = 1$ (см. Рис. 1) размерности состояний равновесия примерно равны 1.774 и 2.011, в то время как оценка размерности самовозбуждающегося аттрактора равна 2.077. Этот результат частично опровергает описанную ранее гипотезу Идена и гипотезу о размерности самовозбуждающихся аттракторов.

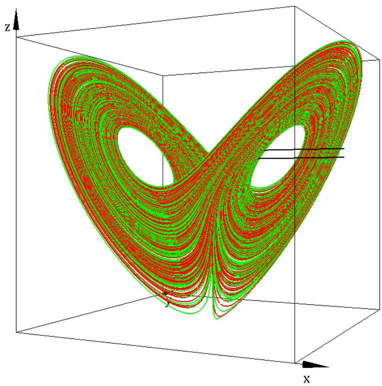

Рис. 1: Для системы (6) с параметрами $\sigma = 2.5, a = -40, r = 1.25$ траектории (красная и зеленая) из окрестности седла S_0 локализуют самовозбуждающийся аттрактор.

Заключение

В данной работе была рассмотрена система Рабиновича, являющаяся обобщением известной системы Лоренца. При численном моделировании этой системы были найдены значения параметров частично опровергающие гипотезу Идена о максимуме Ляпуноской размерности ее аттрактора.

В дальнейшем планируется на основе аналитико-численных методов для стабилизации неустойчивых периодических траекторий (см., например, [23, 24]) исследовать вторую часть гипотезы Идена.

Литература

[1] Pogromsky A., Matveev A. Estimation of the topological entropy via the direct lyapunov method //IFAC Proceedings Volumes. – 2010. – Т. 43. – №. 11. – С. 45-50.

[2] Matveev A., Pogromsky A. Two Lyapunov methods in nonlinear state estimation via finite capacity communication channels //IFAC-PapersOnLine. – 2017. – Т. 50. – №. 1. – С. 4132-4137.

[3] Leonov G., Boichenko V. Lyapunov’s direct method in the estimation of the Hausdorff dimension of attractors // Acta Applicandae Mathematica. 1992. Vol. 26, no. 1. P. 1–60.

[4] Kuznetsov N. The Lyapunov dimension and its estimation via the Leonov method // Physics Letters A. 2016.

[5] Леонов Г. А. Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения. — Изд-во СПбГУ СПб., 2004.

[6] Kuznetsov N. V., Leonov G. A. A short survey on Lyapunov dimension for finite dimensional dynamical systems in Euclidean space // arXiv preprint arXiv:1510.03835. 2015.

[7] Eden A. An abstract theory of L-exponents with applications to dimension analysis (PhD thesis). – Indiana University, 1989.

[8] Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of the atmospheric sciences. — 1963. — Vol. 20, no. 2. — P. 130–141.

[9] Рабинович М. И. Стохастические автоколебания и турбулентность // Успехи физических наук. — 1978. — Т. 125, № 5. — С. 123–168.

[10] Pikovskii A., Rabinovich M., Trakhtengerts V. Onset of stochasticity in decay confinement of parametric instability // Sov. Phys.-JETP (Engl. Transl.);(United States). 1978. Vol. 47, no. 4.

[11] Glukhovskii A., Dolzhanskii F. Three-component geostrophic models of convection in a rotating fluid // Akademiia Nauk SSSR Fizika Atmosfery i Okeana. 1980. Vol. 16. P. 451–462. (in Russian).

[12] Denisov G. On the rigid body rotation in resisting medium // Izv. Akad. Nauk SSSR: Mekh. Tverd. Tela. 1989. Vol. 4. P. 37–43. (in Russian).

[13] Glukhovskii A. On systems of coupled gyrostats in problems of geophysical hydrodynamics // Izv. Akad. Nauk SSSR: Fizika Atmosfery i Okeana. 1986. Vol. 22. P. 701–711. (in Russian).

[14] Zaks M., Lyubimov D., Chernatynsky V. Om the influence of vibration upon the regimes of overcritical convection // Izv. Akad. Nauk SSSR: Fizika Atmosfery i Okeana. 1983. Vol. 19, no. 3. P. 312–314. (in Russian).

[15] Dovzhenko V., Dolzhansky F. Generating of the vortices in shear flows. Theory and experiment // Nauka, Moskow. 1987. P. 132–147. (in Russian).

[16] Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Mokaev T. N. Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion // The European Physical Journal Special Topics. – 2015. – T. 224. – №. 8. – C. 1421-1458.

[17] Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Mokaev T. N., Prasad A., Shrimali M. D. Finite-time Lyapunov dimension and hidden attractor of the Rabinovich system // arXiv preprint arXiv:1412.7667

[18] Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Mokaev T. N. The Lyapunov dimension and its computation for self-excited and hidden attractors in the Glukhovsky-Dolzhansky fluid convection model // arXiv preprint arXiv:1509.09161

[19] Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Mokaev T. N. Finite-time and exact Lyapunov dimension of the Henon map // arXiv preprint arXiv:1712.01270. – 2017.

[20] Kuznetsov N., Leonov G., Vagaitsev V. Analytical-numerical method for attractor localization of generalized Chua's system // IFAC Proceedings Volumes. 2010. Vol. 43, no. 11. P. 29–33.

[21] Leonov G., Kuznetsov N., Vagaitsev V. Localization of hidden Chua's attractors // Physics Letters A. 2011. Vol. 375, no. 23. P. 2230–2233.

[22] Leonov G., Kuznetsov N., Vagaitsev V. Hidden attractor in smooth Chua systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2012. Vol. 241, no. 18. P. 1482–1486.

[23] Leonov G. A. Pyragas stabilizability via delayed feedback with periodic control gain // Systems & Control Letters. – 2014. – T. 69. – C. 34-37.

[24] Leonov G. A., Moskvin A. V. Stabilizing unstable periodic orbits of dynamical systems using delayed feedback control with periodic gain // International Journal of Dynamics and Control. – 2017. – C. 1-8.