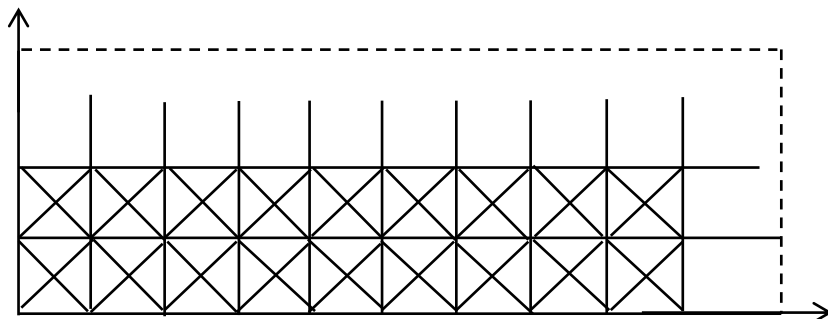


# ЛОКАЛЬНОЕ УКРУПНЕНИЕ ТРИАНГУЛЯЦИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ТОРА

Денисова Н.И. СПбГУ, denisovanadezda0@gmail.com

Поверхность тора двумя преобразованиями (разрезающими) может быть переведена в прямоугольную область  $\Omega$ . Ориентируем, для удобства, стороны этой области  $\Omega$  вдоль координатных осей.

Тогда мы можем покрыть эту плоскость триангуляцией специального вида:



Для того, чтобы преобразовать область  $\Omega$  в тор, необходимо сначала свернуть  $\Omega$  в цилиндр  $\Psi$ . При этом необходимо контролировать сохранение правильности триангуляции (рис. 3).

При укрупнении триангуляции специального вида мы рассматриваем по четыре треугольника, имеющих общую вершину, и объединяем по два треугольника, имеющих общую сторону, таким образом,

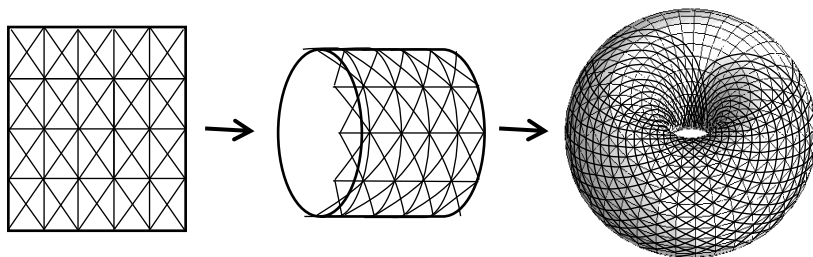


Рис. 3. Переход области  $\Omega$  в цилиндр  $\Psi$  и затем – в тор. чтобы правильность триангуляции не нарушалась. После такого укрупнения

мы получаем квадрат  $K$  с проведённой в нём диагональю, причём диагональ может быть параллельна либо вектору суммы стандартных ортонормированных базисных векторов  $\overset{1}{i} + \overset{1}{j}$  (далее - побочная диагональ), либо вектору разности базисных векторов  $\overset{1}{i} - \overset{1}{j}$  (далее - главная диагональ).

### **Лемма.**

Для того, чтобы триангуляция с квадратами  $K$  была укрупняемой, необходимо и достаточно, чтобы квадрат с главной диагональю граничил только с квадратом, имеющим побочную диагональ.

### **Доказательство.**

Если квадрат с главной диагональю граничит с квадратом с главной диагональю или квадрат с побочной диагональю граничит с квадратом с побочной диагональю, то мы приходим к триангуляциям с таблицами инцидентий

$$\left\| \begin{array}{ccc} P_{x,y} & P_{x+4,y} & P_{x,y+4} \\ P_{x+4,y} & P_{x,y+4} & P_{x+4,y+4} \\ P_{x+4,y} & P_{x+4,y+4} & P_{x+8,y} \\ P_{x+4,y+4} & P_{x+8,y} & P_{x+8,y+4} \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \begin{array}{ccc} P_{x,y} & P_{x+4,y+4} & P_{x,y+4} \\ P_{x+4,y} & P_{x,y} & P_{x+4,y+4} \\ P_{x+4,y} & P_{x+4,y+4} & P_{x+8,y+4} \\ P_{x+4,y} & P_{x+8,y} & P_{x+8,y+4} \end{array} \right\|$$

Соответственно, где  $P_{x,y}$  - вектор с координатами  $x, y \in \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

Триангуляции такого вида локальному укрупнению не поддаются.

### **Теорема о локальном укрупнении триангуляции на поверхности цилиндра.**

Триангуляция на поверхности цилиндра  $\Psi$  является локально укрупняемой тогда и только тогда, когда количество квадратов  $K$ , расположенных вдоль оси, перпендикулярной образующей цилиндра, - чётное число.

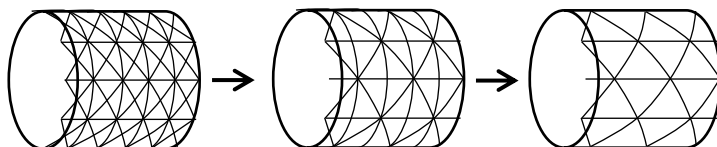
### **Доказательство.**

Если триангуляция на поверхности  $\Psi$  укрупняема, то, очевидно, количество квадратов  $K$ , расположенных вдоль окружности основания цилиндра чётно, так как в противном случае мы имели бы два соседних треугольника, лежащих вдоль окружности основания цилиндра, у которых диагонали сонаправлены, что, согласно Лемме, неверно.

В обратную сторону, если число квадратов, лежащих вдоль окружности основания цилиндра чётно, то у всех соседних квадратов, расположенных вдоль оси, перпендикулярной образующей цилиндра,

диагонали перпендикулярны, что по Лемме означает, что триангуляция укрупняема.

При сворачивании цилиндра  $\Psi$  в тор также необходимо контролировать сохранение правильности триангуляции.



*Укрупнение триангуляции на поверхности цилиндра.*

**Теорема о локальном укрупнении триангуляции на поверхности тора.**

Триангуляция на поверхности тора является локально укрупняемой тогда и только тогда, когда количество квадратов  $\mathbb{K}$ , расположенных вдоль образующей цилиндра  $\Psi$ , из которого свёрнут тор, - чётное число.

**Доказательство.**

Аналогично предыдущей теореме, если триангуляция на поверхности тора укрупняема, то по Лемме количество квадратов  $\mathbb{K}$ , лежащих вдоль образующей цилиндра  $\Psi$ , чётно.

В обратную сторону, если количество квадратов  $\mathbb{K}$ , расположенных вдоль образующей цилиндра  $\Psi$ , из которого свёрнут тор, - чётное число, то у любых двух соседних квадратов  $\mathbb{K}$ , лежащих вдоль образующей  $\Psi$ , диагонали перпендикулярны, что означает локальную укрупняемость триангуляции на торе.

## Заключение

В данной работе был разработан алгоритм локального укрупнения триангуляции на поверхности тора и указаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы триангулированная плоскость рода  $g1$  (тор) могла быть локально укрупнена с сохранением правильности триангуляции.

Предложены направления для разработки алгоритмов локального укрупнения триангуляции на поверхностях других родов, таких как, к примеру, поверхность рода  $g0$  – сфера.

## **Список литературы**

1. Герасимов, И. В. (2016). Моделирование адаптивных сплайн-всплесков для двумерных и трёхмерных цифровых сигналов. Санкт-Петербург.
2. Романовский, Л. М. (2014). Реализация алгоритма локального укрупнения триангуляции. Санкт-Петербург: Вестник СПбГУ.
3. Скворцов, А. В. (2002). Триангуляция Делоне и её применение. Томск: Издательство Томского университета.