

ХИМЕРНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ДВУХУРОВНЕВОЙ СЕТИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ФИЦХЬЮ – НАГУМО

Никитин Д. А., магистрант СПбГУ, dniken@gmail.com

Аннотация

В данной работе приводится справка о том, что такое химерные состояния в нелинейных динамических сетях, рассматривается двухуровневая сеть осцилляторов Фицхью – Нагумо, исследуются различные возможные устойчивые состояния в данной сети.

Химерные состояния

В Греческой мифологии химера — это огнедышащий гибрид льва, козы и змеи. Но в области нелинейной динамики слово "химера" стало обозначать другой, необычный математический гибрид. Химерным состоянием называется такое состояние сети из одинаковых связанных осцилляторов, в котором одновременно существуют синхронное и асинхронное поведение.

Еще 15 лет назад считалось, что динамика сетей одинаковых фазовых осцилляторов ($\frac{d\theta_i}{dt} = \omega + coupling$) была относительно неинтересна. Тогда как было известно, что связанные неодинаковые осцилляторы могли показывать различные сложные поведения, от идентичных осцилляторов ожидалось, что они либо синхронизируются, либо работают несвязно, хаотически. Но в 2002 году физик Курамото показал, что это представление неверно [1]. Изучая кольцо из нелокально связанных одинаковых фазовых осцилляторов, он обнаружил, что при некоторых начальных условиях осцилляторы, которые в общем случае имели одинаковые собственные частоты, начинали себя вести по-разному: некоторые из них синхронизировались, пока другие оставались хаотичными. И это был не переходный период, а устойчивый феномен. Позже, Стив Строгац предложил называть такие состояния химерными, из-за их похожести на мифологических греческих зверей, будто собранных из непоставимых частей [2].

Дальнейшую историю химерных состояний можно посмотреть в обзорной статье [3].

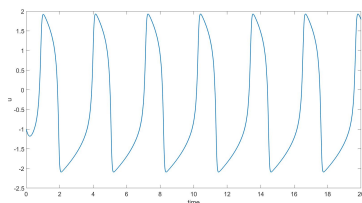
Осцилляторы ФицХью – Нагумо

В нейробиологии всегда стояла задача как можно точнее описать работу биологического нейрона. В 1952 году была разработана так называемая модель Ходжкина – Хаксли, за которую её создатели получили Нобелевскую премию в области физиологии и медицины за 1963 год. Эта модель представляет собой систему дифференциальных уравнений четвертого порядка.

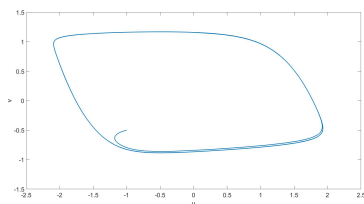
В 1962 году исследователи ФицХью и Нагумо предложили упрощения, применимые к модели Ходжкина – Хаксли. Их модель описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u} = u - \frac{u^3}{3} - v \\ \dot{v} = u + a \end{cases} \quad (1)$$

Переменная u называется активатором, а v — ингибитором. Параметр ε определяет разницу масштабов времени для активатора и ингибитора, и обычно его значения выбираются в диапазоне $[0.01, 0.05]$. В данной работе (а также в других упоминаемых работах по ФицХью – Нагумо) выбрано $\varepsilon = 0.05$. Переменная a называется порогом. Если $|a| > 1$, то нейрон находится в возбуждаемом режиме, то есть будет реагировать только на подачу внешнего сигнала. А если $|a| < 1$, то нейрон находится в осцилляторном режиме, постоянно самовозбуждаясь и двигаясь по предельному циклу. В данной работе $a = 0.5$.



Активатор в осцилляторном режиме



Предельный цикл

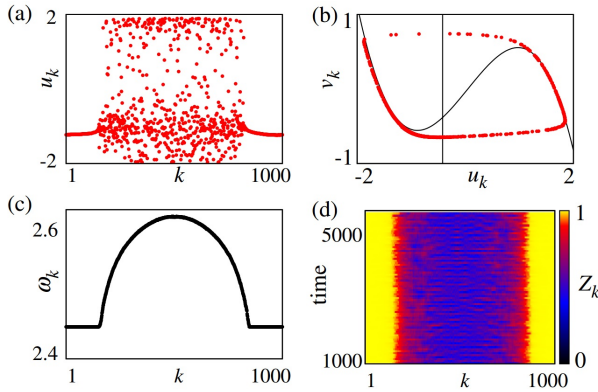
Химерные состояния в сетях ФицХью – Нагумо

В 2013 году в статье [4] было показано, что возникновение химерных состояний возможно и в сети из нейронов ФицХью – Нагумо. Рассмотренная топология сети представляла собой кольцо из нейронов с нелокальными связями. Нелокальная связь определяется как связь нейрона

i со всеми соседями j , расстояние до которых $|j - i| \leq P$. Обычно поведение системы зависит не столько от значения P , сколько от отношения $P/N = r$, называемого радиусом связи. Кроме того, связь каждой пары нейронов была выполнена при помощи матрицы поворота на угол ϕ . Итоговые уравнения сети можно записать таким образом:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \dot{u}_i \\ \dot{v}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i - \frac{u_i^3}{3} - v_i \\ u_i + a \end{pmatrix} + \frac{\sigma}{2rN + 1} \sum_{|j-i| \leq rN} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{pmatrix} \quad (2)$$

Было показано, что химеры возникают только при углах ϕ , близких к $\pi/2$. Большая часть моделирования была проведена при $\phi = \pi/2 - 0.1$. Также, на возникновение химер очень влияет сила связи σ . В частности, было показано, что при маленьких значениях силы связи (порядка 0.1), химеры возникают при радиусах от 0.25 до 0.43. Для исследования таких систем часто применяют параметры глобального порядка Z (global order parameter), рассчитываемые для каждого нейрона в каждый момент времени. Параметр глобального порядка равняется единице в случае синхронизации нейрона с соседями на расстоянии δ , и меньше единицы в случае хаоса.



Пример химерного состояния. Значения параметров: $\sigma = 0.1$, $r = 0.35$, $N = 1000$.

(a) Значения активаторов в момент времени $t = 5000$. (b) Положения на предельном цикле в момент времени $t = 5000$. (c) Средние частоты каждого нейрона. (d) График значений параметров глобального порядка от времени.

Двухуровневая сеть. Начальные условия.

Дальнейшим развитием задачи являлось исследование двухуровневой сети, имитирующей две различные области мозга, связанные между собой. Предположим, что в одной области начинается патологическая синхронизация. При каких параметрах связей эта синхронизация перейдет на вторую область? Именно так развивается эпилепсия — нейроны в мозгу человека начинают патологически синхронизироваться. Теоретическое исследование такой сети позволило бы лучше понять механику работы эпилепсии, а значит и способы борьбы с ней.

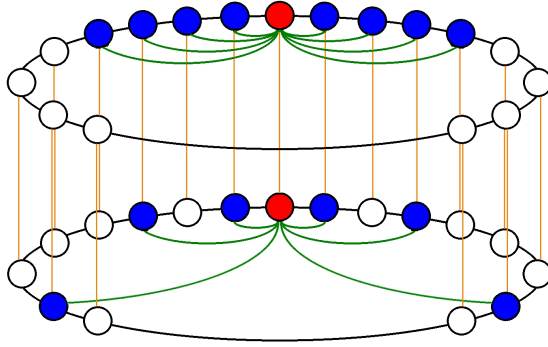
Для создания асимметрии в каждом уровне была выбрана своя топология сети. В первом уровне — нелокальная связь с радиусом $r = 0.35$ и силой связи $\sigma_1 = 0.1$. Во втором уровне — фрактальная топология. Для создания фрактальной топологии используется определенный начальный паттерн из нулей и единиц, и затем каждая единица заменяется на начальный паттерн, а ноль — на набор нулей такой же длины, как и начальный паттерн. Данную процедуру повторяют несколько раз, а потом к полученной строке с начала приписывают еще один ноль, и затем записывают результат как первую строку матрицы смежности. Остальные строки матрицы смежности получаются просто циклическим сдвигом первой строки. К примеру, паттерн 101 создает что-то наподобие канторовской лестницы, а для одной итерации размер сети $N = 3^2 + 1 = 10$, а матрица смежности выглядит так:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Сила связи σ_2 была также выбрана равной 0.1. Для создания фрактальной топологии здесь использовался паттерн 101, проитерированный четыре раза. Итоговый размер второго уровня составляет $N = 3^5 + 1 = 244$ нейрона. Размер первого уровня был выбран таким же.

Потом два уровня соединяются «один над другим», связываются нейроны, имеющие одинаковые номера в каждом уровне. Параметры силы данной связи, а также времени задержки, являются основными переменными, зависимость поведения системы от которых исследовалась. При этом данная связь осуществляется не через матрицу поворота, а только по u — u переменным.

Схематично полученную сеть можно изобразить так:

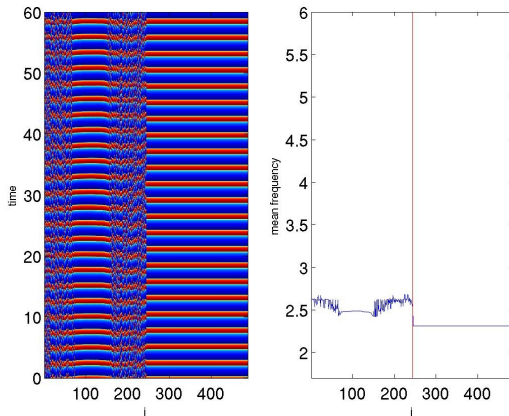


Уравнения, описывающие систему:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \dot{u}_{1i} \\ \dot{v}_{1i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1i} - \frac{u_{1i}^3}{3} - v_{1i} \\ u_{1i} + a \end{pmatrix} + \frac{\sigma_1}{2P+1} \sum_{|j-i| \leq P} R \begin{pmatrix} u_{1j} - u_{1i} \\ v_{1j} - v_{1i} \end{pmatrix} + \sigma_3 \begin{pmatrix} u_{2i}(-\tau) - u_{1i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

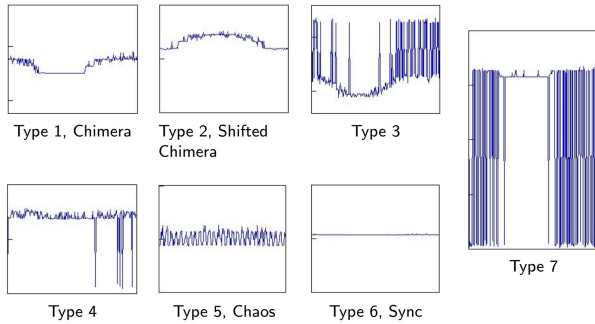
$$\begin{pmatrix} \varepsilon \dot{u}_{2i} \\ \dot{v}_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{2i} - \frac{u_{2i}^3}{3} - v_{2i} \\ u_{2i} + a \end{pmatrix} + \frac{\sigma_2}{|G_i|} \sum_{G_{ij}=1} R \begin{pmatrix} u_{2j} - u_{2i} \\ v_{2j} - v_{2i} \end{pmatrix} + \sigma_3 \begin{pmatrix} u_{1i}(-\tau) - u_{2i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Начальные условия для моделирования были выбраны таким образом: первый уровень начинал в химерном состоянии, тогда как второй — в синхронизированном. Вот так выглядит график значений активаторов во времени, а также график средних частот, в случае, когда уровни между собой не связаны (сила связи $\sigma_3 = 0$):



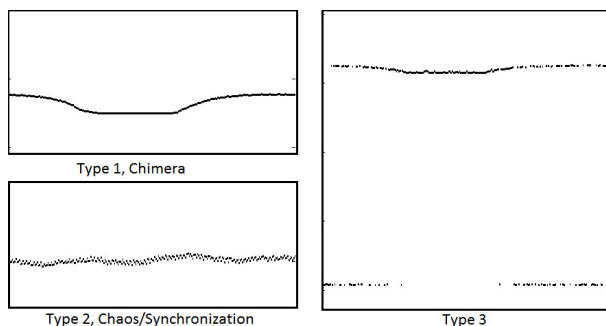
Результаты

Первый результат, который был получен при моделировании — что при $\sigma_3 > 0$ первый и второй уровни рано или поздно приходят к одинаковым частотным профилям. Далее, при моделировании с различными параметрами силы связи между уровнями σ_3 и задержки связи τ были выделены 7 качественно различных типов профилей средних частот, которые могут появляться в системе:



Первые два — это химеры, причем второй соответствует переходному процессу, изменившему положение когерентной части на кольце. Третий — это химера с явно видимым дополнительным уровнем высоких частот в хаотичной части кольца. Четвертый — это химера (которая тут уже еле различима, и чаще там хаос) с явно видимым дополнительным уровнем низких частот в хаотичной части кольца. Пятый — это полностью хаотическое состояние. Шестой — это полная синхронизация. Седьмой — это система с тремя явно различимыми уровнями фиксированных частот, при этом с очень большим разбросом.

Данный результат был получен при моделировании системы до 180 Time Units. Однако многие наблюдаемые состояния являются переходными процессами, поэтому важно проверять устойчивость состояний на большем промежутке времени. При моделировании до 100 000 Time Units обнаружилось лишь 3 различных типа профилей средних частот, остальные выродились:



Заключение

В работе были исследованы различные состояния, возникающие в двухуровневой сети осцилляторов Фицхью – Нагумо, при определенных начальных условиях. В частности, было показано, что два уровня всегда и почти сразу синхронизируются между собой, однако, что полная синхронизация возможна только в очень маленькой области параметров.

Литература

- [1] Y. Kuramoto and D. Battogtokh. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *Nonlinear Phenom. Complex Syst.* 5. 380–5. 2002.
- [2] D. M. Abrams and S. H. Strogatz. Chimera states for coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 93 174102. 2004.
- [3] M. J. Panaggio and D. M. Abrams. Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity* 28 R67. 2015.
- [4] I. Omelchenko et al., When Nonlocal Coupling between Oscillators Becomes Stronger: Patched Synchrony or Multichimera States. *Phys. Rev. Lett.* 110 224101. 2013.