Верхняя оценка для скорости передачи по суммирующему каналу множественного доступа

Глебов А.А., магистр кафедры безопасности информационных систем ГУАП, gaa1994@mail.ru

Аннотация

В данной статье рассмотрен расчет верхней оценки для скорости передачи по суммирующему каналу множественного доступа. Представлена модель системы передачи по суммирующему каналу множественного доступа с аддитивным белым гауссовским шумом. Показан расчет и оценка максимальной скорости передачи для бесшумного канала. Приведены примеры расчета скорости границы максимальной скорости для канала с аддитивным белым гауссовским шумом в частных случаях.

Введение

В теории информации показано, что совместное использование канала может повысить пропускную способность [1]. Так же в сетях пятого поколения предлагается использовать подходы, основанные на совместном использовании канала (non-orthogonal multiple access schemes) [2]. При этом актуальной является задача определения потенциальных возможностей таких систем с учетом тех ограничений, которые обусловлены спецификой построения системы.

Модель системы передачи, рассматриваемая в данной статье представлена на рис.1. Обозначим число пользователей через T. Закодированные сообщения каждого пользователя поступают на двоичный модулятор. Полученные последовательности $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(T)}$, принадлежащие алфавиту $\{-1,1\}$ подаются на вход суммирующего канала, где к сумме данных последовательностей добавляется аддитивный белый гауссовский шум(АБГШ).

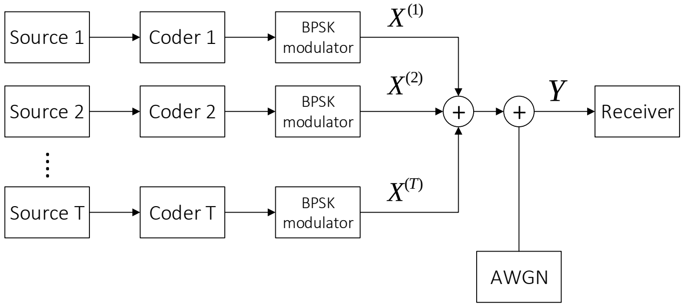

Рисунок 1: Модель системы передачи по суммирующему каналу множественного доступа с АБГШ.

Расчет максимальной скорости передачи для бесшумного канала

Выход канала вычисляется как

$$Y = \sum_{i=1}^{T} X^{(i)}.$$

Обозначим вероятность передачи i-ым пользователем бита 1 за $p_1^{(i)}$.

$$p_1^{(i)} = Pr\{X^{(i)} = 1\}.$$

Тогда

$$Pr\{Y = k\} = \sum_{\substack{c_1, c_2, \dots, c_T \\ c_i \in \{-1,1\} \\ c_1 + \dots + c_T = k}} \prod_{i=1}^{T} p_{c_i}^{(i)}.$$

В соответствии с [1]

$$\sum_{i=1}^{T} R^{(i)} \le I\left(X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(T)}; Y\right),$$

где $R^{(i)}$ - скорость передачи i-го пользователя, а $I(A; B)$ - средняя взаимная информация. Так как шум отсутствует, то

$$I\left(X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(T)}; Y\right) = H(Y) = -\sum_{k=0}^{T} Pr\{Y = k\} \log_2 Pr\{Y = k\},$$

где $H(Y)$ – энтропия выхода канала.

Если считать сигналы пользователей равновероятными, т.е.

$$p_1^{(i)} = p_{-1}^{(i)} = \frac{1}{2}.$$

Получим, что максимальная скорость передачи при отсутствии шума вычисляется как

$$R_{sum}(T) = -\sum_{k=0}^{T} \frac{\binom{T}{k}}{2^T} \log_2 \frac{2^T}{\binom{T}{k}}$$

При больших значениях параметра T найти $R_{sum}(T)$ вычислительно сложно, но для такого канала можно построить оценку максимальной скорости передачи [3].

$$\frac{1}{2}\log_2 \frac{\pi T}{2} \le R_{sum}(T) \le \frac{1}{2}\log_2 \frac{\pi e T}{2}$$

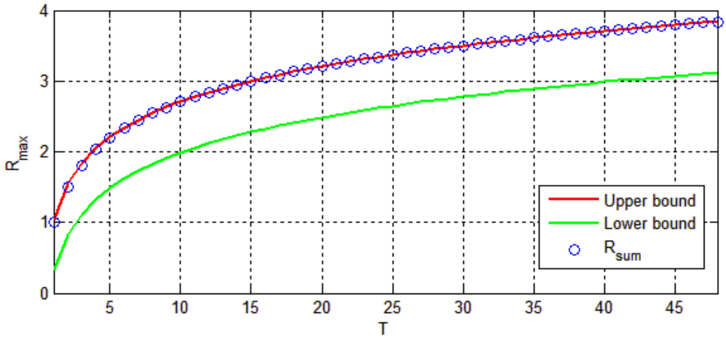

Рисунок 2: Оценка максимальной скорости передачи для бесшумного канала

Рис. 2 показывает, что результат вычисления оценки $R_{sum}(T)$ близок с результатом вычисления напрямую.

Расчет максимальной скорости передачи для канала с АБГШ

При наличии АБГШ выход канала вычисляется как

$$Y = \sum_{i=1}^{T} X^{(i)} + Z$$

где $Z \sim N(0, \sigma^2)$.

Средняя взаимная информация между входом и выходом канала будет равна

$$I\left(X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(T)}; Y\right) = H(Y) - H\left(Y \middle| X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(T)}\right)$$
$$= H(Y) - H(Z) = H(Y) - \frac{1}{2}\log_2(\pi e \sigma^2),$$

где $H(B|A)$ – условная энтропия.

В итоге

$$R_{sum}(T) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(T,y)\log_2 \Phi(T,y)\,dy - \frac{1}{2}\log_2(\pi e \sigma^2),$$

где $\Phi(T,y)$ – функция плотности вероятности случайной величины y.

Расчет максимальной скорости передачи для канала с АБГШ в частных случаях

При числе пользователей $T = 3$ количество вариантов набора сообщений $\sum_{k=0}^{T}\binom{T}{k} = 8$. Сумма последовательностей $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(T)}$ может принимать четыре различных значения: $+2$ с вероятностью $1/8$, -2 с вероятностью $1/8$, $+1$ с вероятностью $3/8$ и -1 с вероятностью $3/8$. Тогда функция плотности вероятности будет иметь следующий вид

$$\Phi(3,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\left(\frac{1}{8}e^{\frac{(y-3)^2}{2\sigma^2}} + \frac{3}{8}e^{\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}} + \frac{3}{8}e^{\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{8}e^{\frac{(y+3)^2}{2\sigma^2}}\right),$$

где $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2SNR}}$. Зависимость $R_{sum}(3)$ от SNR показана на рис. 3.

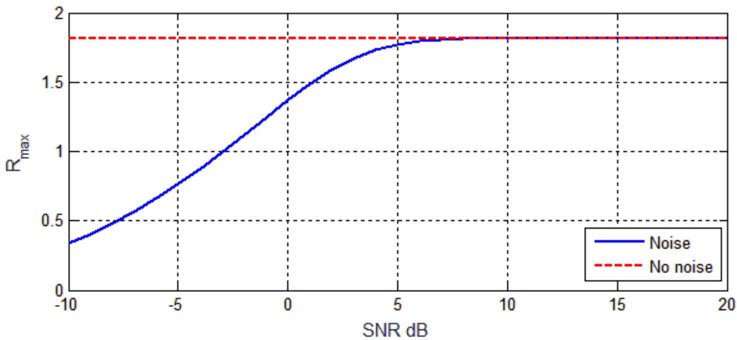

Рисунок 3: Расчет максимальной скорости передачи для канала с АБГШ при T=3

В случае $T = 4$ получим $\sum_{k=0}^{T}\binom{T}{k} = 16$. Сумма последовательностей $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(T)}$ может принимать пять различных значений: $+4$ с вероятностью $1/16$, $+2$ с вероятностью $1/4$, 0 с вероятностью $3/8$, -2 с вероятностью $1/4$ и -4 с вероятностью $1/16$. Тогда функция плотности вероятности будет иметь следующий вид

$$\Phi(4,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\left(\frac{1}{16}e^{\frac{(y-4)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{4}e^{\frac{(y-2)^2}{2\sigma^2}} + \frac{3}{8}e^{\frac{(y)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{4}e^{\frac{(y+2)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{16}e^{\frac{(y+4)^2}{2\sigma^2}}\right)$$

Зависимость $R_{sum}(4)$ от SNR показана на рис. 4.

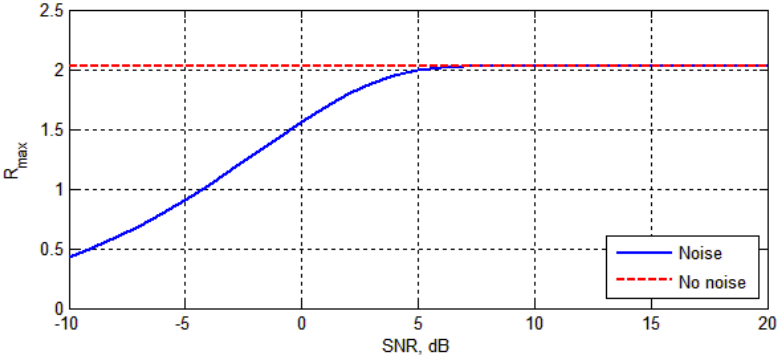

Рисунок 4: Расчет максимальной скорости передачи для канала с АБГШ при T=4

Рис.3 и рис. 4 показывают, что при увеличении соотношения сигнал шум максимальная скорость передачи для канала с АБГШ стремится к максимальной скорости передачи бесшумного канала.

Заключение

В данной статье был описан расчет максимальной скорости передачи для бесшумного суммирующего канала с учетом ограничения на вид модуляции и данный расчет обобщен на случай канала с аддитивным белым гауссовским шумом. Описана вычислительная процедура, которая для заданного числа пользователей и заданного отношения сигнал шум вычисляет значения максимальной скорости. Для случая трех и четырех абонентов приведены примеры вычисления максимальной скорости передачи. При стремлении дисперсии шума к нулю результат вычисления для канала с шумом совпадает с результатом вычисления для бесшумного канала.

Литература

1. T. M. Cover and J. A. Thomas, Elements of Information Theory. New York: Wiley, 1991.
2. https://www.metis2020.com
3. J. K. Wolf, “Multi-user communication networks,” in Communicution Systems and Random Process Theory, J. K.

Skwirzynski, Ed., Alphen aan den Rijn: The Netherlands, 1978, pp. 37-53.