ОБ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СПЛАЙНАХ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Бурова И.Г., проф. каф. вычислительной математики СПбГУ,
i.g.burova@spbu.ru
Широкова Ю.В., асп. каф параллельных алгоритмов СПбГУ

Аннотация

В данной работе рассматривается построение аппроксимаций функций двух переменных с помощью локальных интегро-дифференциальных сплайнов двух переменных.

Введение

Известны различные варианты аппроксимации функций двух переменных интегро-дифференциальными сплайнами. В ряде случаев удобно использовать тензорное произведение одномерных базисных сплайнов (см.[1,2]). Здесь обобщаем построение интегро-дифференциальных сплайнов на случай аппроксимации функции двух переменных.

1. Построение интегро-дифференциальных сплайнов двух переменных

Пусть в прямоугольной области $\overline{\Omega}$ построена прямоугольная сетка узлов с шагом h_j вдоль оси *x* и с шагом h_k вдоль оси *y*. Предполагается, что известны значения функции $u(x,y)$, $u \in C^2(\overline{\Omega})$, в узлах сетки, а также интегралы по элементарным прямоугольникам $\overline{\Omega}_{jk}$

$$I_{j,k}^{<0>} = \int\int_{\overline{\Omega}_{j,k}} u(x,y)dxdy.$$

Построим аппроксимацию $\tilde{u}(x,y)$ функции $u(x,y)$ в каждом отдельном элементарном прямоугольнике $\overline{\Omega}_{jk}$ в виде:

$$\tilde{u}(x,y) = u(x_j, y_k)W_{1,j,k}(x,y) +$$

$$+u(x_{j+1},y_k)W_{2,j,k}(x,y)+I_{j,k}^{<0>}W_{j,k}^{<0>}(x,y),$$

где базисные сплайны $W_{1,j,k}(x,y)$, $W_{2,j,k}(x,y)$, $W_{j,k}^{<0>}(x,y)$ получаем решая систему уравнений (аппроксимационных соотношений):

$$\widetilde{u}(x,y)=u(x,y) \text{ } если \text{ } u(x,y)=1,x,y.$$

Используя формулу Тейлора:

$$u(x,y)=u(x_j,y_k)+(x-x_j)u'_x(x_j,y_k)+$$

$$+(y-y_k)u'_y(x_j,y_k)+r,$$

где

$$r=\frac{1}{2!}\{(x-x_j)^2u''_{xx}(s)+2(x-x_j)(y-y_k)u''_{xy}(s)+(y-y_k)^2u''_{yy}(s)\},$$

$$s=(x_j+\tau(x_{j+1}-x_j),y_k+\tau(y_{k+1}-y_k)),\ \tau\in[0,1].$$

и используя аппроксимационные соотношения, получаем базисные сплайны $W_{1,j,k}(x,y)$, $W_{2,j,k}(x,y)$, $W_{j,k}^{<0>}(x,y)$ решая систему уравнений (аппроксимационных соотношений):

$$W_{1,j,k}(x,y)+W_{2,j,k}(x,y)+I_{j,k}^{<0>}W_{j,k}^{<0>}(x,y)=1,$$

$$h_jW_{2,j,k}(x,y)+\int\int_{\overline{\Omega}_{j,k}}(x-x_j)dxdyW_{j,k}^{<0>}(x,y)=x-x_j,$$

$$\int\int_{\overline{\Omega}_{j,k}}(y-y_k)dxdyW_{j,k}^{<0>}(x,y)=y-y_k.$$

Нетрудно вычислить определитель системы уравнений: $D=h_j^2h_k^2/2$.

Если область является квадратом, то мы можем рассматривать аппроксимацию на равномерной сетке узлов с шагом $h_j=h_k=h$, и если возьмем $x=x_j+th, y=y_k+t_1h$, $t,t_1\in[0,1]$, то тогда формулы для базисных функций можно представить в виде:

$$W_{1,j,k}(x_j+th,y_k+t_1h)=1-t-t_1,$$

$$W_{2,j,k}(x_j + th, y_k + t_1 h) = t - t_1,$$
$$W_{j,k}^{<0>}(x_j + th, y_k + t_1 h) = 2t_1/h^2.$$

Теорема. Допустим, что функция $u(x,y)$ такая, что $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Будем считать, что $h_j = h_k = h$. Для $(x,y) \in \overline{\Omega}_{j,k} \subset \overline{\Omega}$ получим

$$|\tilde{u}(x,y) - u(x,y)| \le h^2 K \,//\, u //_{C^2(\overline{\Omega})}, \; K = 1.$$

Доказательство следует из формулы Тейлора и соотношений $|W_{1,j,k}(x,y)| \le 1$, $|W_{2,j,k}(x,y)| \le 1$, $|W_{j,k}^{<0>}(x,y)| \le 0.2/h^2$.

Аналогично можно построить приближение $\tilde{\tilde{u}}(x,y)$ для $u(x,y)$ в элементарном прямоугольнике Ω_{jk} в виде:

$$\tilde{\tilde{u}}(x,y) = u(x_j, y_k) W_{1,j,k}(x,y) +$$

$$+ u(x_{j+1}, y_k) W_{2,j,k}(x,y) + I_{j,k}^{<0>} W_{j,k}^{<0>}(x,y),$$

где базисные сплайны $W_{1,j,k}(x,y)$, $W_{2,j,k}(x,y)$, $W_{j,k}^{<0>}(x,y)$ получаем из соотношений: $\tilde{u}(x,y) = u(x,y)$ *если* $u(x,y) = 1, e^x, e^y$.

В таблице 1 показаны абсолютные значения максимумов погрешностей аппроксимации построенными полиномиальными и экспоненциальными интегро-дифференциальными сплайнами некоторых функций двух переменных в области [-0.4, 0.4]×[-0.4,0.4] при равномерной сетке с шагом *h=0.1*.

Таблица 1.

$u(x,y)$	$\max|\tilde{u} - u|$	$\max|\tilde{\tilde{u}} - u|$
$x^4 y^4$	$0.16815e-2$	$0.82013e-1$
$\sin(3x+3y)$	$0.74588e-2$	$0.81701e-2$

$\sin(5x+5y)$	$0.20609e-1$	$0.21895e-1$

Заключение

В работе представлены формулы интегро-дифференциальных сплайнов для аппроксимации функции двух переменных.

Литература

1. Burova Irina. On Integro-Differential SplinesConstruction. *Advances in Applied and PureMathematics. Proc. of the 7-th International Conf. on Finite Differences, Finite Elements, Finite Volumes, Boundary Elements (F-and-B'14)*. Gdansk. Poland. May 15–17. 2014. pp.57–61.

2. Burova Irina. On Integro-Differential Splines and Solution of Cauchy Problem. Mathematical Methods and Systems in Science and Engineering. *Proc. of the 17th International Conf. on Mathematical Methods, Computational Techniques and Intelligent Systems (MAMECTIC'15). Tenerife, Canary Islands, Spain,* January 10-12, 2015. pp.57–61. pp.48–52.