Использование методов тропической оптимизации для оптимального составления графиков работ[1]

Кривулин Н.К., д.ф.-м.н. профессор кафедры статистического моделирования СПбГУ, nkk@math.spbu.ru

Губанов С.А., инженер-программист СПбФ АО «КБ «Луч», segubanov@mail.ru

Аннотация

На основе применения методов тропической оптимизации предлагаются прямые решения задач составления оптимального графика выполнения работ проекта при различных ограничениях на время выполнения работ и критериях оптимальности плана.

Введение

Одним из способов решения задачи составления оптимального графика выполнения работ в управлении проектами является ее сведение к задаче тропической оптимизации [1].

Тропическая математика является областью прикладной математики, изучающей полукольца с идемпотентнм сложением [2, 3, 4]. Тропическая оптимизация занимается задачами оптимизации, сформулированными в терминах тропической математики.

Цель настоящей работы – представить новые способы решения задач оптимального составленя графиков работ на основе методов тропической математики, опирающиеся на статьи [5, 6, 7, 8]. В статье [9] задача составления оптимального графика сводится к задаче минимизации. Ниже рассматриваются задачи составления оптимального графика выполнения проекта при заданных ограничениях на время начала и завершения работ проекта в соответствии с критериями максимума разброса времени начала или времени завершения работ.

Задачи оптимизации сроков выполнения работ

В этом разделе описываются задачи оптимизации, которые возникают при планировании сроков начала и завершения работ проекта при

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ, проект №16-02-00059.

условии недостатка ресурсов для их выполнения.

Ограничения на время выполнения работ

Рассмотрим проект, который заключается в выполнении n работ. Для каждой работы $i = 1, \dots, n$ введем обозначения: x_i – время начала, y_i – время завершения работы; g_i – наиболее раннее возможное время начала работы; h_i – наиболее позднее время завершения работы; a_{ij} – минимальный допустимый временной интервал между началом работы j и завершением i; b_{ij} – минимальный промежуток времени между началом работ i и j. Если величина a_{ij} или b_{ij} не задана, то считаем ее равной $-\infty$.

Ограничения типа «старт-финиш» не позволяют работе завершиться, пока не прошло определенное время после начала других работ. Считаем, что работа немедленно завершается при выполнении всех ограничений на время ее завершения. Эти ограничения эквивалентны равенству $\max_{1\leq j\leq n}(a_{ij} + x_j) = y_i$.

Ограничения типа «старт-старт», определяющие минимальный интервал между временами начала любых двух работ, можно представить в виде неравенства $\max_{1\leq j\leq n}(b_{ij} + x_j) \leq x_i$.

Ограничение «ранний старт» задает самое раннее возможное время начала работы, а ограничение «поздний финиш» определяет наиболее позднее возможное время завершения работы. Эти ограниченичя можно записать при помощи неравенств $x_i \geq g_i$, $y_i \leq h_i$.

Критерии оптимальности и задачи планирования

В задачах составления графиков при условии недостатка ресурсов часто рассматривают следующие критерии оптимальности. Одним из критериев является максимальный разброс времени начала всех работ

$$\max_{1\leq i\leq n} x_i - \min_{1\leq i\leq n} x_i = \max_{1\leq i\leq n} x_i + \max_{1\leq i\leq n}(-x_i).$$

Другой критерий задает максимальный разброс времени завершения

$$\max_{1\leq i\leq n} y_i - \min_{1\leq i\leq n} y_i = \max_{1\leq i\leq n} y_i + \max_{1\leq i\leq n}(-y_i).$$

Рассмотрим примеры задач составления оптимальных графиков работ с указанными ограничениями и критериями оптимальности [10].

Предположим, что заданы ограничения «старт-старт» и «ранний старт». Задача оптимального планирования по критерию максимума разброса времени начала работ имеет вид

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \max_{1\le i\le n} x_i + \max_{1\le i\le n}(-x_i), \\
& \max_{1\le j\le n}(b_{ij}+x_j) \le x_i, \quad g_i \le x_i, \quad i=1,\ldots,n.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Пусть имеются ограничения «старт-старт», «старт-финиш» и «поздний финиш». Для составления оптимального графика по критерию максимума разброса времени завершения необходимо решить задачу

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \max_{1\le i\le n} y_i + \max_{1\le i\le n}(-y_i), \\
& \max_{1\le j\le n}(b_{ij}+x_j) \le x_i, \quad \max_{1\le j\le n}(a_{ij}+x_j) = y_i, \\
& y_i \le h_i, \quad i=1,\ldots,n.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Далее представим эти задачи в терминах тропической математики.

Элементы тропической математики

Приведем обзор основных определений и результатов [2], которые требуются для описания задач тропической оптимизации.

Пусть множество $\mathbb{X}$ замкнуто относительно ассоциативных и коммутативных операций сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$, и содержит их нейтральные элементы ноль $\mathbb{0}$ и единицу $\mathbb{1}$. Сложение идемпотентно, а умножение обладает свойством дистрибутивности относительно сложения и обратимо. Так как $\mathbb{X}_{+} = \mathbb{X} \setminus \{\mathbb{0}\}$ образует группу по умножению, структуру $\langle \mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes \rangle$ называют идемпотентным полуполем. Знак умножения $\otimes$ далее будет опускаться. Примером такого полуполя является вещественное полуполе $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, + \rangle$.

Обозначим через $\mathbb{X}^{m\times n}$ множество матриц, состоящих из m строк и n столбцов с элементами из $\mathbb{X}$. Регулярной по строкам (по столбцам) является матрица без нулевых строк (столбцов). Матрица, регулярная по строкам и по столбцам называется регулярной.

Для согласованных по размеру матриц $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$, $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ и скаляра x матричные сложение, умножение и умножение на скаляр определяются по формулам

$$
\{\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \quad \{\boldsymbol{BC}\}_{ij} = \bigoplus_k b_{ik} c_{kj}, \quad \{x\boldsymbol{A}\}_{ij} = x a_{ij}.
$$

Для каждой матрицы $\boldsymbol{A}$ обозначим ее транспонированную матрицу через $\boldsymbol{A}^T$.

Для любой матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m\times n}$ введем мультипликативно сопряженную матрицу $\boldsymbol{A}^- = (a_{ij}^-) \in \mathbb{X}^{n\times m}$, где $a_{ij}^- = a_{ji}^{-1}$, если $a_{ji} \neq \mathbb{0}$, и $a_{ij}^- = \mathbb{0}$ иначе.

Рассмотрим квадратные матрицы в $\mathbb{X}^{n\times n}$. Единичной является матрица с элементами, равными $\mathbb{1}$ на главной диагонали и $\mathbb{0}$ – вне ее. Обозначим такую матрицу через $\boldsymbol{I}$.

Для каждой матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ введем функции

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}, \quad \operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr}\boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}\boldsymbol{A}^n.$$

Если $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, то определим матрицу Клини

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}.$$

Матрица разложима, если путем перестановки строк вместе с такой же перестановкой столбцов ее можно привести к блочно-треугольной форме. Заметим, что матрица с регулярными строками (столбцами) не имеет нулевых элементов и потому не яаляется разложимой (неразложима).

Обозначим через $\mathbb{X}^n$ множество вектор-столбцов размерности n.

Вектор без нулевых компонент называется регулярным.

Вектор, состоящий из единиц, обозначается через $\mathbf{1} = (\mathbb{1}, \ldots, \mathbb{1})^T$.

Для каждого ненулевого вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{X}^n$ определим мультипликативно сопряженный вектор $\boldsymbol{x}^- = (x_1^-, \ldots, x_n^-)$ с элементами $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, и $x_i^- = \mathbb{0}$ иначе.

Пусть для заданных матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ и вектора $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^n$ необходимо найти регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, удовлетворяющие неравенству

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{x}. \tag{3}$$

Решение неравенства предлагает следующее утверждение.

Теорема 1 ([6]). *Пусть $\boldsymbol{x}$ – общее регулярное решения неравенства* (3). *Тогда справедливы утверждения:*

1. *Если $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{u}$ для любого регулярного вектора $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{b}$.*

2. *Если $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) > \mathbb{1}$, то регулярных решений не существует.*

Задача тропической оптимизации

Пусть заданы матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ и векторы $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{X}^n$. Требуется найти векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, которые решают задачу

$$\max \quad \boldsymbol{q}^- \boldsymbol{x} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^- \boldsymbol{p}. \tag{4}$$

В работе [8] предлагается следующее решение.

Теорема 2. *Предположим, что матрица $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_j})$ имеет регулярные столбцы $\boldsymbol{a}_j = (a_{ij})$, а векторы $\boldsymbol{p} = (p_j)$ и $\boldsymbol{q} = (q_j)$ являются регулярными. Тогда максимум в задаче (4) равен $\Delta = \boldsymbol{q}^- \boldsymbol{A}^- \boldsymbol{p}$, а все регулярные решения имеют вид $\boldsymbol{x} = (x_i)$, где*

$$x_k = \alpha a_{sk}^{-1} p_s, \quad x_j \leq \alpha a_{sj}^{-1} p_s, \quad j \neq k,$$

для всех $\alpha > \mathbb{0}$ и индексов k и s, определяемых условиями

$$k = \arg \max_{1 \leq i \leq n} q_i^{-1} \boldsymbol{a}_i^- \boldsymbol{p}, \quad s = \arg \max_{1 \leq i \leq n} a_{ik}^{-1} p_i.$$

Решение задач планирования

В этом разделе предложено решение задач оптимального планирования (1) и (2), которое получено путем их сведения к задаче тропической оптимизации (4) с ограничениями в форме (3).

Максимизация разброса времени начала работ

Чтобы записать задачу максимизации разброса времени начала работ (1) в терминах идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ в векторном виде, введем матрично-векторные обозначения

$$\boldsymbol{B} = (b_{ij}), \quad \boldsymbol{g} = (g_i), \quad \boldsymbol{y} = (y_i), \quad \boldsymbol{x} = (x_i).$$

С учетом введенных обозначений, задача может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{1}^T \boldsymbol{x} \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{1}, \\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{5}$$

Решение задчи (5) дает следующий результат.

Лемма 3. *Предположим, что матрица* $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_i)$ *со столбцами* $\boldsymbol{b}_i = (b_{ij})$ *является неразложимой и* $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$*. Тогда максимум в задаче* (5) *равен* $\Delta = \boldsymbol{1}^T \boldsymbol{B}^* (\boldsymbol{B}^*)^{-} \boldsymbol{1}$*, и достигается тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}^* \boldsymbol{u}$*, где* $\boldsymbol{B}^* = (\boldsymbol{b}_i^*)$ *– матрица Клини,* $\boldsymbol{u} = (u_j)$ *– любой вектор с компонентами*

$$u_k = \alpha (b_{sk}^*)^{-1}, \quad g_j \leq u_j \leq \alpha (b_{sj}^*)^{-1}, \quad j \neq k,$$

при условии, что

$$\alpha \geq \max_{1 \leq j \leq n} g_j b_{sj}^*, \quad k = \arg\max_{1 \leq i \leq n} \boldsymbol{1}^T \boldsymbol{b}_i^* (\boldsymbol{b}_i^*)^{-} \boldsymbol{1}, \quad s = \arg\max_{1 \leq i \leq n} (b_{ik}^*)^{-1}.$$

Максимизация разброса времени завершения работ

Так же, как при решении предыдущей задачи, введем обозначения

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \quad \boldsymbol{B} = (b_{ij}), \quad \boldsymbol{x} = (x_i), \quad \boldsymbol{y} = (y_i), \quad \boldsymbol{h} = (h_i).$$

Представим задачу максимизацим разброса времени завершения работ (2) в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ в матрично-векторном виде

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{1}^T \boldsymbol{y} \boldsymbol{y}^{-} \boldsymbol{1} \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{h}. \end{aligned} \tag{6}$$

Решение задачи (6) можно представить следующим образом.

Лемма 4. *Пусть матрица* $\boldsymbol{A}$ *является регулярной,* $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$*, а матрица* $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^*$ *имеет регулярные столбцы* $\boldsymbol{d}_i = (d_{ij})$*. Тогда максимум в задаче* (6) *равен* $\Delta = \boldsymbol{1}^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{-} \boldsymbol{1}$ *и достигается, когда* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}^* \boldsymbol{u}$ *и* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$*, где* $\boldsymbol{u} = (u_i)$ *– любой вектор с компонентами*

$$u_k = \alpha d_{sk}^{-1}, \quad u_j \leq \alpha d_{sj}^{-1}, \quad j \neq k,$$

при условии, что

$$\alpha \leq \min_{1 \leq j \leq n} d_{sj} \boldsymbol{h} \boldsymbol{d}_j^{-}, \quad k = \arg\max_{1 \leq i \leq n} \boldsymbol{1}^T \boldsymbol{d}_i \boldsymbol{d}_i^{-} \boldsymbol{1}, \quad s = \arg\max_{1 \leq i \leq n} d_{ik}^{-1}.$$

Заключение

В работе рассмотрены задачи составления оптимального графика выполнения проекта при заданных ограничениях на время начала и завершения работ проекта в соответствии с критериями максимума разброса времени начала или времени завершения работ. Предложены прямые решения указанных задач на основе методов и результатов тропической оптимизации.

Список литературы

[1] Cuninghame-Green R. A. Projections in minimax algebra // Math. Program., 1976. Vol. 10. P. 111-123.

[2] Кривулин Н. К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та., 2009.

[3] Маслов В. П., Колокольцев В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М. : Физматлит, 1994.

[4] Butkovič P. Max-linear Systems: Theory and Algorithms. Springer Monographs in Mathematics. London: Springer, 2010.

[5] Krivulin N. Explicit solution of a tropical optimization problem with application to project scheduling // Mathematical Methods and Optimization Techniques in Engineering/ Ed. By D. Biolek, H. Walter, I. Utu, C. von Lucken. WSEAS Press, 2013. P. 39-45.

[6] Krivulin N. A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints // Optimization. 2015. Vol. 64, N 5. P. 1107-1129.

[7] Krivulin N. A constrained tropical optimization problem. Complete solution and application example // Tropical and Idempotent Mathematics and Applications/ Ed. by G. L. Litvinov, S. N. Sergeev. Vol. 616 of Contemporary Mathematics, AMS, 2014. P. 163-177.

[8] Krivulin N. A maximization problem in tropical mathematics: A complete solution and application examples // Informatica. 2016. Vol. 27, N 3. P. 587-606.

[9] Кривулин Н. К., Губанов С. А. Решение задачи сетевого планирования на основе методов тропической оптимизации// Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2016. N 3. С. 62-72.

[10] V. T'kindt and J.-C. Billaut, *Multicriteria Scheduling.* Springer, Berlin, 2 ed., 2006.