

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ РОЛСА С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ НА ОТРЕЗКЕ ПРЯМОЙ<sup>1</sup>

Кривулин Н. К., д.ф.-м.н., профессор кафедры статистического  
моделирования СПбГУ, [nkk@math.spbu.ru](mailto:nkk@math.spbu.ru)

Плотников П. В., аспирант кафедры статистического моделирования  
СПбГУ, [pavplot@gmail.com](mailto:pavplot@gmail.com)

## Аннотация

В статье рассматривается задача размещения точечного объекта на плоскости с прямоугольной метрикой в терминах тропической математики с ограничениями на область размещения в виде отрезка прямой. Предложено полное решение задачи и рассмотрен численный пример.

## Введение

Тропическая математика – раздел прикладной математики, занимающийся изучением полуколец с идемпотентным сложением [1, 2, 3, 4]. Модели и методы тропической математики находят применение для решения различных оптимизационных задач в технике, экономике и на производстве. Краткий обзор таких задач можно найти, например, в работе [5]. В частности, методы тропической оптимизации успешно применяются при решении ряда задач размещения в пространстве, включая минимаксные задачи размещения с чебышевской и прямоугольной метрикой [6, 7, 10].

Минимаксная задача размещения одиночного объекта на плоскости, которую также называют задачей Ролса или задачей посыльного, в прямоугольной метрике имеет при отсутствии ограничений на допустимую область размещения известное геометрическое решение [8, 9]. В работе [10] предложено полное алгебраическое решение такой задачи в явном виде в замкнутой форме.

В настоящей статье задача Ролса рассматривается при условии, что допустимое множество размещения имеет вид отрезка произвольной прямой. Сначала вводятся основные определения тропической математики, затем формулируется задача размещения на плоскости с прямоугольной метрикой в терминах тропической математики. Предлагается новое решение задачи, которое позволяет записать результат в более

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ, проект №16-02-00059.

компактной форме, чем решение, полученное в [11]. В заключение, приведен численный пример с графическими иллюстрациями.

## Элементы тропической математики

Рассмотрим числовое множество  $\mathbb{X}$ , замкнутое относительно операций сложения  $\oplus$  и умножения  $\otimes$ . Заданное на  $\mathbb{X}$  при помощи этих операций коммутативное полукольцо с нулем  $0$  и единицей  $1$  обозначим через  $\langle \mathbb{X}, 0, 1, \oplus, \otimes \rangle$ . Будем считать, что сложение обладает свойством идемпотентности, т.е. для любого числа  $x \in \mathbb{X}$  выполняется  $x \oplus x = x$ , а умножение – обратимо, т.е. для каждого  $x \neq 0$  существует обратный элемент  $x^{-1}$  такой, что  $x \otimes x^{-1} = 1$ . В силу того, что  $\langle \mathbb{X} \setminus \{0\}, 1, \otimes \rangle$  образует коммутативную группу по умножению, введенное полукольцо, обычно называется идемпотентным полуполем.

Степень числа с целым показателем вводится стандартным образом. Для любого ненулевого числа  $x \in \mathbb{X}$  и натурального числа  $n$  определим  $x^0 = 1$ ,  $x^n = x \otimes x^{n-1}$ ,  $x^{-n} = (x^{-1})^n$  и  $0^n = 0$ . Будем считать, что операция возведения в целую степень может быть распространена на случай произвольного показателя степени. В частности, для любого  $x < 1$  при  $n = 0$  положим  $x^{1/n} = 0$ . Далее знак умножения  $\otimes$  в алгебраических выражениях, как обычно, опускается.

Примером идемпотентного полуполя являются вещественное полуполе  $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, + \rangle$ , где  $\mathbb{R}$  – множество вещественных чисел.

Нулевым элементом в  $\mathbb{R}_{\max,+}$  является  $-\infty$ , единичным – число  $0$ . Каждому числу  $x \in \mathbb{R}$  в этом полуполе сопоставляется обратный элемент  $x^{-1}$ , равный  $-x$  в обычной алгебре. Для любой пары чисел  $x, y \in \mathbb{R}$  определена степень  $x^y$ , значение которой соответствует арифметическому произведению  $x \cdot y$ .

## Приложения к задачам размещения на прямой

Рассмотрим минимаксную задачу размещения точечного объекта на плоскости с прямоугольной метрикой и ограничениями на область размещения. Пусть задан набор исходных объектов и некоторое допустимое множество  $S \subset \mathbb{R}^2$ . Требуется разместить новый объект на множестве  $S$ , относительно уже имеющихся так, чтобы расстояние в прямоугольной метрике, от него до самой удаленного объекта, было минимальным.

Пусть на плоскости  $\mathbb{R}^2$  имеются два вектора  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$  и  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ . Расстояние между этими векторами в прямоугольной метрике вычисляется по формуле  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ .

Рассмотрим набор точек  $\mathbf{r}_i = (r_{1i}, r_{2i})^T \in \mathbb{R}^2$  и чисел  $w_i \in \mathbb{R}$ , заданных для всех  $i = 1, \dots, m$ . Для произвольного вектора  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$  введем функцию

$$\phi(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq i \leq m} (\rho(\mathbf{r}_i, \mathbf{x}) + w_i) = \max_{1 \leq i \leq m} (|r_{1i} - x_1| + |r_{2i} - x_2| + w_i) = \phi(x_1, x_2),$$

которая определяет максимальное по всем  $i$  расстояние в прямоугольной метрике от точки  $\mathbf{x}$  до точки  $\mathbf{r}_i$  с учетом дополнительного слагаемого  $w_i$ .

Зададим множество размещения на плоскости в виде отрезка прямой

$$S = \{(x_1, x_2)^T \mid f \leq x_1 \leq g, x_2 = kx_1 + q\}. \quad (1)$$

Минимаксная задача размещения, или задача Ролса, состоит в том, чтобы найти все векторы  $\mathbf{x} \in S$ , на которых достигается минимум

$$\min_{\mathbf{x} \in S} \phi(\mathbf{x}). \quad (2)$$

В терминах идемпотентного полуполя  $\mathbb{R}_{\max,+}$  расстояние между двумя векторами в прямоугольной метрике можно представить в форме  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1^{-1}y_1 \oplus y_1^{-1}x_1)(x_2^{-1}y_2 \oplus y_2^{-1}x_2)$ . Тогда целевая функция задачи (2) записывается следующим образом:

$$\phi(x_1, x_2) = \bigoplus_{i=1}^m w_i (x_1^{-1}r_{1i} \oplus r_{1i}^{-1}x_1)(x_2^{-1}r_{2i} \oplus r_{2i}^{-1}x_2),$$

а множество размещения (1) принимает вид

$$S = \{(x_1, x_2)^T \mid f \leq x_1 \leq g, x_2 = x_1^k q\}.$$

### *Размещение на произвольной прямой*

Будем рассматривать задачу размещения на множестве  $S$ . Пусть заданы числа  $f, g, q, k \in \mathbb{R}$  при условии  $f \leq g$ .

Следующий результат обеспечивает полное решение задачи в явном виде.

**Лемма 1.** Введем обозначения

$$\begin{aligned} a &= \bigoplus_{i=1}^m w_i r_{1i} r_{2i}^{-1} q, & b &= \bigoplus_{i=1}^m w_i r_{1i}^{-1} r_{2i} q^{-1}, \\ c &= \bigoplus_{i=1}^m w_i r_{1i} r_{2i} q^{-1}, & d &= \bigoplus_{i=1}^m w_i r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} q. \end{aligned}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если  $k < -1$  или  $k > 1$ , то минимум в задаче (2) при условии (1) равен

$$\begin{aligned} \mu &= a^{1/2} b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2} c^{(k-1)/2} \oplus b^{(k+1)/2} d^{(k-1)/2} \oplus c^{1/2} d^{1/2} \oplus \\ &\oplus a(f^{-(k-1)} \oplus g^{-(k-1)})^{-1} \oplus b(f^{k-1} \oplus g^{k-1})^{-1} \oplus \\ &\oplus c(f^{k+1} \oplus g^{k+1})^{-1} \oplus d(f^{-(k+1)} \oplus g^{-(k+1)})^{-1} \end{aligned}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} x_1 &= (((\mu a^{-1})^{-1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} b)^{-1/(k-1)})^{-1} \oplus \\ &\oplus ((\mu^{-1} c)^{-1/(k+1)} \oplus (\mu d^{-1})^{-1/(k+1)})^{-1} \oplus f)^{1-\alpha} \\ &(((\mu^{-1} a)^{-1/(k-1)} \oplus (\mu b^{-1})^{1/(k-1)})^{-1} \oplus \\ &\oplus ((\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{-1/(k+1)})^{-1} \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \end{aligned}$$

$$x_2 = q x_1^k;$$

- 2) если  $-1 \leq k \leq 1$ , то минимум равен

$$\begin{aligned} \mu &= a^{1/2} b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2} d^{-(k-1)/2} \oplus b^{(k+1)/2} c^{-(k-1)/2} \oplus c^{1/2} d^{1/2} \oplus \\ &\oplus a g^{k-1} \oplus b f^{-(k-1)} \oplus c g^{-(k+1)} \oplus d f^{k+1} \end{aligned}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} x_1 &= ((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} \oplus f)^{1-\alpha} \\ &((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \end{aligned}$$

$$x_2 = q x_1^k,$$

где  $\alpha$  – любое число, удовлетворяющее условию  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

При использовании обычных обозначений найденное решение описывается так:

**Следствие 1.** *Введем обозначения*

$$\begin{aligned} a &= \max_{1 \leq i \leq m} (w_i - r_{1i} + r_{2i} + q), & b &= \max_{1 \leq i \leq m} (w_i + r_{1i} - r_{2i} - q), \\ c &= \max_{1 \leq i \leq m} (w_i + r_{1i} + r_{2i} - q), & d &= \max_{1 \leq i \leq m} (w_i - r_{1i} - r_{2i} + q). \end{aligned}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если  $k < -1$  или  $k > 1$ , то минимум в задаче (2) при условии (1) равен

$$\begin{aligned} \mu &= \max \left( \frac{a+b}{2}, \frac{a(k+1)+c(k-1)}{2k}, \frac{b(k+1)+d(k-1)}{2k}, \frac{c+d}{2}, \right. \\ &\quad \left. a + \min((k-1)f, (k-1)g), b - \max((k-1)f, (k-1)g), \right. \\ &\quad \left. c - \max((k+1)f, (k+1)g), d + \min((k+1)f, (k+1)g) \right) \end{aligned}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} x_1 &= (1-\alpha) \max \left( \min \left( \frac{\mu-a}{k-1}, \frac{b-\mu}{k-1} \right), \min \left( \frac{c-\mu}{k+1}, \frac{\mu-d}{k+1} \right), f \right) \\ &\quad - \alpha \max \left( \min \left( \frac{a-\mu}{k-1}, \frac{\mu-b}{k-1} \right), \min \left( \frac{\mu-c}{k+1}, \frac{d-\mu}{k+1} \right), -g \right), \\ x_2 &= kx_1 + q; \end{aligned}$$

- 2) если  $-1 \leq k \leq 1$ , то минимум равен

$$\begin{aligned} \mu &= \max \left( \frac{a+b}{2}, \frac{a(k+1)-d(k-1)}{2}, \frac{b(k+1)-c(k-1)}{2}, \frac{c+d}{2}, \right. \\ &\quad \left. a + (k-1)g, b - (k-1)f, c - (k+1)g, d + (k+1)f \right) \end{aligned}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} x_1 &= (1-\alpha) \max \left( \frac{\mu-a}{k-1}, \frac{c-\mu}{k+1}, f \right) - \alpha \max \left( \frac{\mu-b}{k-1}, \frac{d-\mu}{k+1}, -g \right), \\ x_2 &= kx_1 + q, \end{aligned}$$

где  $\alpha$  – любое число, удовлетворяющее условию  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

## Иллюстрация результатов на примерах

Рассмотрим числовой пример. Пусть задано множество точек

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (1, 7)^T, & \mathbf{r}_2 &= (3, 3)^T, & \mathbf{r}_3 &= (4, 6)^T, & \mathbf{r}_4 &= (5, 3)^T, \\ \mathbf{r}_5 &= (7, 2)^T, & \mathbf{r}_6 &= (9, 1)^T, & \mathbf{r}_7 &= (9, 9)^T. \end{aligned}$$

Сначала рассмотрим решение задачи размещения (2), в которой допустимое множество представляет собой отрезок, заданный в виде

$$S_1 = \{(x_1, x_2)^T \mid 5 \leq x_1 \leq 8, x_2 = -2x_1 + 19\}.$$

Решение такой задачи приведено на Рис. 1, где выделенный жирным отрезок прямой представляет множество решений задачи без ограничений, отрезок обычной толщины – допустимое множество размещения, а точка на пересечении – решение задачи с ограничениями.

Перейдем к рассмотрению случая, в котором допустимая область размещения задана следующим образом:

$$S_2 = \{(x_1, x_2)^T \mid 4 \leq x_1 \leq 7, x_2 = 2x_1 - 6\}.$$

В этом случае, как показано на Рис. 2, допустимая область размещения не пересекается с множеством решений задачи без ограничений. Решение исходной задачи изображено точкой, лежащей на отрезке  $S_2$ .

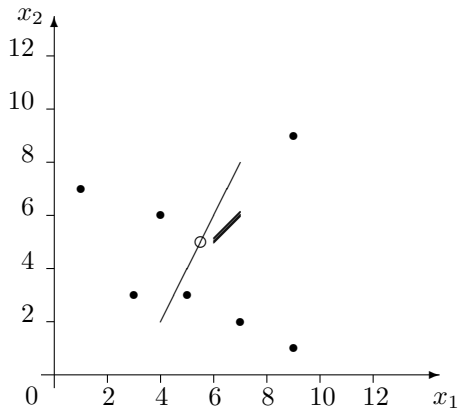
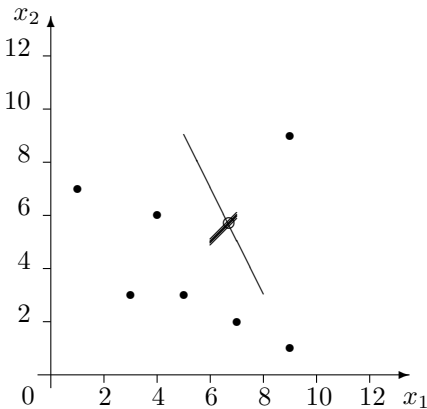


Рис.1 Размещение на отрезке  $S_1$ .

Рис.2 Размещение на отрезке  $S_2$ .

## Список литературы

- [1] *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.
- [2] *Golan J. S.* Semirings and Affine Equations Over Them. New York: Springer, 2003. Vol. 556 of Mathematics and Its Applications. 256 p.
- [3] *Кривулин Н. К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та., 2009. 256 с.
- [4] *Butkovič P.* Max-linear Systems. Springer Monographs in Mathematics. London: Springer, 2010. 272 p.
- [5] *Krivulin N.* Tropical optimization problems // Advances in Economics and Optimization: Collected Scientific Studies Dedicated to the Memory of L. V. Kantorovich / Ed. by L. A. Petrosyan, J. V. Romanovsky, D. W. K. Yeung. New York: Nova Science Publ., 2014. P. 195–214.
- [6] *Krivulin N.* An algebraic approach to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance // WSEAS Trans. Math. 2011. Vol. 10, N 6. P. 191–200.
- [7] *Krivulin N.* A new algebraic solution to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance // WSEAS Trans. Math. 2012. Vol. 11, N 7. P. 605–614.
- [8] *Elzinga J., Hearn D. W.* Geometrical solutions for some minimax location problems // Transport. Sci. 1972. Vol. 6, N 4. P. 379–394.
- [9] *Francis R. L.* A geometrical solution procedure for a rectilinear distance minimax location problem // AIIE Trans. 1972. Vol. 4, N 4. P. 328–332.
- [10] *Krivulin N. K., Plotnikov P. V.* On an algebraic solution of the Rawls location problem in the plane with rectilinear metric // Vestnik St. Petersburg Univ. Math. 2015. Vol. 48, N 2. P. 75–81.
- [11] *Krivulin N. K., Plotnikov P. V.* Using tropical optimization to solve minimax location problems with a rectilinear metric on the line // Vestnik St. Petersburg Univ. Math. 2016. Vol. 49, N 4. P. 340–349.