# Локальное укрупнение триангуляции на поверхности тора

Денисова Н.И. СПбГУ, denisovanadezda0@gmail.com

Поверхность тора двумя преобразованиями (разрезаниями) может быть переведена в прямоугольную область Ω. Ориентируем, для удобства, стороны этой области Ω вдоль координатных осей.

Тогда мы можем покрыть эту плоскость триангуляцией специального вида:

Для того, чтобы преобразовать область Ω в тор, необходимо сначала свернуть Ω в цилиндр . При этом необходимо контролировать

сохранение правильности триангуляции (рис. 3).

При укрупнении триангуляции специального вида мы рассматриваем по четыре треугольника, имеющих общую вершину, и объединяем по два треугольника, имеющих общую сторону, таким образом, чтобы правильность триангуляции не нарушалась. После такого укрупнения мы получаем квадрат ₭ с проведённой в нём диагональю, причём диагональ может быть параллельна либо вектору суммы стандартных ортонормированных базисных векторов  (далее - побочная диагональ), либо вектору разности базисных векторов (далее - главная диагональ).

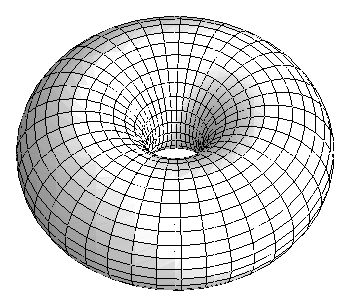


Рис. 3. *Переход области Ω в цилиндр*  *и затем – в тор.*

**Лемма.**

Для того, чтобы триангуляция с квадратами ₭ была укрупняемой, необходимо и достаточно, чтобы квадрат с главной диагональю граничил только с квадратом, имеющим побочную диагональ.

**Доказательство.**

Если квадрат с главной диагональю граничит с квадратом с главной диагональю или квадрат с побочной диагональю граничит с квадратом с побочной диагональю, то мы приходим к триангуляциям с таблицами инциденций

 и 

Соответственно, где *Px,y* - вектор с координатами .

Триангуляции такого вида локальному укрупнению не поддаются.

**Теорема о локальном укрупнении триангуляции на поверхности цилиндра.**

Триангуляция на поверхности цилиндра  является локально укрупняемой тогда и только тогда, когда количество квадратов ₭, расположенных вдоль оси, перпендикулярной образующей цилиндра, - чётное число.

**Доказательство.**

Если триангуляция на поверхности  укрупняема, то, очевидно, количество квадратов ₭, расположенных вдоль окружности основания цилиндра чётно, так как в противном случае мы имели бы два соседних треугольника, лежащих вдоль окружности основания цилиндра, у которых диагонали сонаправлены, что, согласно Лемме, неверно.

В обратную сторону, если число квадратов, лежащих вдоль окружности основания цилиндра чётно, то у всех соседних квадратов, расположенных вдоль оси, перпендикулярной образующей цилиндра, диагонали перпендикулярны, что по Лемме означает, что триангуляция укрупняема.

При сворачивании цилиндра  в тор также необходимо контролировать сохранение правильности триангуляции.

*Укрупнение триангуляции на поверхности цилиндра.*

**Теорема о локальном укрупнении триангуляции на поверхности тора.**

Триангуляция на поверхности тора является локально укрупняемой тогда и только тогда, когда количество квадратов ₭, расположенных вдоль образующей цилиндра , из которого свёрнут тор, - чётное число.

**Доказательство.**

Аналогично предыдущей теореме, если триангуляция на поверхности тора укрупняема, то по Лемме количество квадратов ₭, лежащих вдоль образующей цилиндра , чётно.

В обратную сторону, если количество квадратов ₭, расположенных вдоль образующей цилиндра , из которого свёрнут тор, - чётное число, то у любых двух соседних квадратов ₭, лежащих вдоль образующей , диагонали перпендикулярны, что означает локальную укрупняемость триангуляции на торе.

Заключение

В данной работе был разработан алгоритм локального укрупнения триангуляции на поверхности тора и указаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы триангулированная плоскость рода g1 (тор) могла быть локально укрупнена с сохранением правильности триангуляции.

Предложены направления для разработки алгоритмов локального укрупнения триангуляции на поверхностях других родов, таких как, к примеру, поверхность рода g0 – сфера.

Список литературы

1. Герасимов, И. В. (2016). Моделирование адаптивных сплайн-всплесков для двумерных и трёхмерных цифровых сигналов. Санкт-Петербург.

2. Романовский, Л. М. (2014). Реализация алгоритма локального укрупнения триангуляции. Санкт-Петербург: Вестник СПбГУ.

3. Скворцов, А. В. (2002). Триангуляция Делоне и её применение. Томск: Издательство Томского университета.